# **拉格朗日乘数法**

2015/6/9

**预备知识**: 导数与极值; 梯度定理(说明与方向导数的关系); 梯度与曲线和曲面的法向量(未完成);

若要求函数在*n*个约束条件 ()下的极值, 可用拉格朗日乘数法, 令拉格朗日函数为



同时满足约束条件和

 ()

的点, 就是函数的极值点或稳定点(类比导数与极值).

**几何理解**

下面举一个二元函数的例子以说明拉格朗日乘数法的几何意义.

求函数在轨迹的约束下的最值(a,c均为常数).

从几何上来理解, 函数画成平面图就是一个倒置的抛物面, 其等高线的俯视图如图1. 蓝色的箭头代表函数值增加最大的方向, 即梯度的方向. 考察点沿着同一条等高线的位置变化时, 函数值不变. 任意一点的梯度为



其中为位矢. 这说明, 梯度的方向总是延径向向内, 与距离成正比.

约束条件如图1中红线所示, 我们要求的就是红线上面函数的极值. 在该题的情况下, 所求的极值显然在红线离原点最近的地方出现.

**拉格朗日乘数法**

2015/6/9

**预备知识**: [导数与极值](#_导数与函数的极值); [梯度定理](#_梯度_梯度定理); 梯度与曲线和曲面的法向量(未完成);

若要求函数在*n*个约束条件 ()下的极值, 可用拉格朗日乘数法. 令拉格朗日函数为



同时满足约束条件和

 ()

的点, 就是函数的极值点或稳定点(类比导数与极值).

**几何理解**

下面举一个二元函数的例子以说明拉格朗日乘数法的几何意义.

求函数在轨迹的约束下的最值(a,c均为常数).

从几何上来理解, 函数画成的三维函数图就是一个倒置的抛物面, 其等高线的俯视图如图1. 蓝色的箭头代表函数值增加最大的方向, 即梯度的方向. 考察点沿着同一条等高线的位置变化时, 函数值不变. 任意一点的梯度为



其中为位矢. 这说明, 梯度的方向总是延径向向内, 与距离成正比. 约束条件如图1中红线所示, 我们要求的就是红线上面的函数极值. 在该题的情况下, 所求的极值显然在红线离原点最近的那点出现.

C:\Users\Addis\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\拉格朗日数乘法.eps

但是如何总结出约束条件下多元函数极值点的一般的判断条件并用梯度表示呢? 根据梯度定理, 如果考察点沿红线的切向移动, 函数值的变化量为



类比用[导数求极值的条件](#_导数与函数的极值), 我们所要找的条件就是: 函数在红线上的极值点满足: 函数在处延红线切向的方向导数为零. 即



这说明只可能具有处红线的法向量分量而切向分量为0, 即与法向量共线. 令约束条件即红线的方程为



的梯度就是其法向量(链接未完成). 由矢量共线条件, 存在常数, 使

 即 

这就是拉格朗日乘数法. 其中叫拉格朗日函数. 下面根据该条件, 对该题进行求解. 本题中拉格朗日函数梯度的两个分量分别为





两式消去, 得. 再结合约束条件, 得极值点

. 由此可见拉格朗日乘数法求出的偏导条件并没有包含约束条件, 而是需要再次联立约束条件才可以得出最后答案.

以上的推导可以很容易地拓展到多元函数和多个限制条件中去. 例如在三元函数中(可看作空间的标量场), 在两个约束条件,

下求函数的极值. 注意和分别代表一个曲面, 同时成立就是两个曲面相交的空间曲线. 我们要在该曲线上求函数的极值.

同样, 若曲线上的某点是极值, 那必须满足曲线在该点的切线方向的方向导数为零, 即垂直于该点的切线, 即与该点法向量共线. 然而这是个三维问题, 空间曲线的任意一点可以有两条不共线的法向量(不一定垂直), 该点的任何其它法向量可以由这两个法线的线性组合来表示. 即存在常数和, 使得



即



其中就是拉格朗日函数.

当然, 限制条件的数目不一定是自变量数目减一, 在上题中, 也可以只有一个限制条件. 这样, 就是求曲面上函数取得极值的点.

**例题2**

椭圆方程为, 求其内切长方型的最大面积(长方型的边平行于轴和轴).

**解** 令长方型的右上角与椭圆的切点为, 则长方型的面积为

. 约束函数为 . 拉格朗日函数为



令偏导都为0, 得



两式消去, 得. 再联立椭圆方程, 解得, 面积最大值为.

C:\Users\Addis\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\拉格朗日数乘法.eps

但是如何总结出极值点的一般的判断条件并用梯度表示呢? 根据梯度定理, 如果考察点沿红线的切向移动, 函数值的变化量为



类比用导数求极值的条件, 我们所要找的条件就是: 函数在红线上的极值点满足, 函数在处延红线切向的方向导数为零. 即



这说明只可能具有处红线的法向量分量而切向分量为0, 即与法向量共线. 令约束条件即红线的方程为



的梯度就是其法向量(链接未完成). 由矢量共线条件, 存在常数, 使

 即 

这就是拉格朗日乘数法. 其中叫拉格朗日函数. 下面根据该条件, 对该例题进行求解.

所求梯度的两个分量分别为





两式消去, 得. 再结合约束条件, 得到极值点. 由此可见拉格朗日乘数法求出的偏导条件并没有包含约束条件, 而是需要再次联立约束条件才可以得出最后答案.

以上的推导可以很容易地拓展到多元函数和多个限制条件中去. 例如在三元函数中(可看作空间的标量场), 在两个约束条件, 下求函数的极值. 注意和分别代表一个曲面, 联立方程就是两个面相交的空间曲线. 我们要在该曲线上求函数的极值.

同样, 若曲线上的某点是极值, 那必须满足曲线在该点的切线方向的方向导数为零, 即垂直于该点的切线, 即与该点法向量共线. 然而这是个三维问题, 空间曲线的某点可以有两条不共线的法向量(不一定垂直), 该点的任何其它法向量可以由这两个法线的线性组合来表示. 即存在常数和, 使得



或记为



其中叫拉格朗日函数.

当然, 限制条件的数目不一定是自变量数目减一, 在上题中, 也可以只有一个限制条件. 这样, 就是求曲面上函数取得极值的点.

**例题**

椭圆方程为, 求其内切长方型的最大面积(长方型的边平行于轴和轴).

**解** 令长方型的右上角与椭圆的切点为, 则长方型的面积为. 约束函数为

. 拉格朗日函数为



令偏导都为0, 得



两式消去, 得. 再联立椭圆方程, 解得, 面积最大值为.