**拉格朗日方程**

2015/4/19

(未完成)

预备知识: [牛顿第二定律](#_牛顿第二定律); 矢量的偏微分

**稳定约束**: 约束条件不随时间变化

**不稳定约束**: 约束条件随时间变化

**可解约束**: 不等式

**不可解约束**: 等式

**实位移**: 随时间变化真事发生的位移. 由于定义.

.

**虚位移**: 假想的约束下可能发生的位移. 由于定义和其实在数学上的区别就是后者与时间无关. 

**理想约束**: 约束反力在任何虚位移下做工之和为零 . 即, 理想约束是不会改变系统动能的(动能定理). 理想约束的例子: 刚性杆, 铰链等.

**约束反力**: 代表第个质点受到的约束反力. 除了外力都是约束反力. 例如支持力, 质点与质点间的力, 刚体与刚体之间的力.

**系统外力**:. 代表第个质点受到的系统外力.

**系统势能**: 如果所有外力都是保守力, 用表示整个系统的总势能.

**广义坐标**: 个质点的位矢自由度其实只有个(因为有约束条件), 用来表示. .(注意同时也是时间的函数, 好奇怪) 所以第个质点的虚位移.实位移为. 每个质点的速度为 所以

**系统动能**: 用表示整个系统的总动能. 由于速度可以看成的函数, 也可以.

**虚功**: . 在理想约束情况下, .

**广义(外)力**: , 注意是不包括. 在理想约束的情况下, 虚功为. 根据偏微分的定义, . (单个质点的牛顿定律是).

**广义力**: 

**虚功原理**:

条件A: 任何无穷小虚位移下, 系统的总能量不改变.

在理想约束的下, 变为

条件B: 系统达到平衡, 即任何质点都保持静止或匀速运动.

A和B互为充要条件.

**拉格朗日方程**:



**说明**

是的函数. 但归根结底还是时间的单一变量函数.

如果等式右边是, 必须要求约束是理想约束. 如果某个约束不是理想约束(例如弹簧两端的约束, 或者系统内的任何势能), 就应该把它踢出系统, 看成系统外力, 包含在里面.

这时, 注意所谓的“系统内”是没有势能只有动能的! 因为系统内力不做功(理想约束), 系统外力做的所有功都直接变成系统的动能了. 所以“系统能量”就是系统动能, 势能的概念只可能在系统外存在.

**推导**

由, .



由全微分和偏导的关系 .

, 所以

注意到其实并不是的函数, 或也不是. 所以

.

所以



上面的第一项显然是. 至于第二项, 若能证明, 则第二项为.



最后结论为



把不是理想约束的力都踢出系统, 只剩下理想约束, 则.

证毕.

**保守力的拉格朗日方程**

这里的所谓保守力并不一定是指对单个质点的保守力, 而是对整个系统的保守力. 也就是说, 如果出状态跟末状态的或者一样, 那么外力对系统做的总功为零.

如果是理想约束且存在函数, 使得(系统能量增加等于势能减少). 令拉格朗日量, 则



证明:

. 由于不是的函数, 所以.

另外, .

所以只需证明. 这只需证明即可.

理想约束的情况下, 

根据微分关系, . 证毕.

保守力的情况下, 令系统的总势能为. 则



所以

而

所以. 所以.

虽然推导的时候(未完成)

**拉格朗日方程**

2015/4/8

(未完成)

预备知识: [牛顿第二定律](#_牛顿第二定律); 矢量的偏微分

**稳定约束**: 约束条件不随时间变化

**不稳定约束**: 约束条件随时间变化

**可解约束**: 不等式

**不可解约束**: 等式

**实位移**: 随时间变化真事发生的位移. 由于定义.

.

**虚位移**: 假想的约束下可能发生的位移. 由于定义和其实在数学上的区别就是后者与时间无关. 

**理想约束**: 约束反力在任何虚位移下做工之和为零 . 即, 理想约束是不会改变系统动能的(动能定理). 理想约束的例子: 刚性杆, 铰链等.

**约束反力**: 代表第个质点受到的约束反力. 除了外力都是约束反力. 例如支持力, 质点与质点间的力, 刚体与刚体之间的力.

**系统外力**:. 代表第个质点受到的系统外力.

**系统势能**: 如果所有外力都是保守力, 用表示整个系统的总势能.

**广义坐标**: 个质点的位矢自由度其实只有个(因为有约束条件), 用来表示. .(注意同时也是时间的函数, 好奇怪) 所以第个质点的虚位移.实位移为. 每个质点的速度为 所以

**系统动能**: 用表示整个系统的总动能. 由于速度可以看成的函数, 也可以.

**虚功**: . 在理想约束情况下, .

**广义(外)力**: , 注意是不包括. 在理想约束的情况下, 虚功为. 根据偏微分的定义, . (单个质点的牛顿定律是).

**广义力**: 

**虚功原理**:

条件A: 任何无穷小虚位移下, 系统的总能量不改变.

在理想约束的下, 变为

条件B: 系统达到平衡, 即任何质点都保持静止或匀速运动.

A和B互为充要条件.

**拉格朗日方程**:



**说明**

是的函数. 但归根结底还是时间的单一变量函数.

如果等式右边是, 必须要求约束是理想约束. 如果某个约束不是理想约束(例如弹簧两端的约束, 或者系统内的任何势能), 就应该把它踢出系统, 看成系统外力, 包含在里面.

这时, 注意所谓的“系统内”是没有势能只有动能的! 因为系统内力不做功(理想约束), 系统外力做的所有功都直接变成系统的动能了. 所以“系统能量”就是系统动能, 势能的概念只可能在系统外存在.

**推导**

由, .



由全微分和偏导的关系 .

, 所以

注意到其实并不是的函数, 或也不是. 所以

.

所以



上面的第一项显然是. 至于第二项, 若能证明, 则第二项为.



最后结论为



把不是理想约束的力都踢出系统, 只剩下理想约束, 则.

证毕.

**保守力的拉格朗日方程**

这里的所谓保守力并不一定是指对单个质点的保守力, 而是对整个系统的保守力. 也就是说, 如果出状态跟末状态的或者一样, 那么外力对系统做的总功为零.

如果是理想约束且存在函数, 使得(系统能量增加等于势能减少). 令拉格朗日量, 则



证明:

. 由于不是的函数, 所以.

另外, .

所以只需证明. 这只需证明即可.

理想约束的情况下, 

根据微分关系, . 证毕.

保守力的情况下, 令系统的总势能为. 则



所以

而

所以. 所以.

虽然推导的时候(未完成)

### 拉格朗日方程

2014/11/17

(未完成)

预备知识： [牛顿第二定律](#_牛顿第二定律)；矢量的偏微分

稳定约束： 约束条件不随时间变化

不稳定约束： 约束条件随时间变化

可解约束： 不等式

不可解约束： 等式

实位移： 随时间变化真事发生的位移

虚位移： 约束下可能发生的位移．和其实在数学上没有区别，只有物理意义上的区别．

理想约束： 任何虚位移下理想约束的虚功之和为零

广义坐标： 个质点的位矢自由度其实只有个，用来表示．

．所以第个质点的虚位移．

广义力： ，其实就是．根据偏微分的定义，．(注意每个质点受到的力是)．

是整个体系的动能．