**柱坐标系中的拉普拉斯方程**

2015/10/25

预备知识: [分离变量法简介](#_勒让德多项式); [柱坐标的拉普拉斯算符](#_柱坐标系中的梯度散度旋度及拉普拉斯算符)

**结论**

**通解**

**柱坐标中的径向方程为贝赛尔方程**



其中

柱坐标系中的拉普拉斯方程为

 (1)

令, 代入方程得

 (2)

前两项只是*r*和的函数, 第三项只是*z*的函数, 所以他们分别为常数. 令

 (3)

则前两项为  (4). 为了继续分离*r*和, 两边乘以, 则左边第二项只是关于的函数, 剩下的部分只是关于*r*的函数. 令

 (5)

则剩下的部分为, 即

 (6)

令,  则

 (7)

到此为止, 三个变量已经完全分离, 各自的微分方程为(3),(5),(6)/(7).

的通解为, 的通解为. 方程(6)/(7)的解不能用有限的初等函数表示, 方程(7)为**贝赛尔方程**的标准形式(见[贝赛尔方程](#_贝赛尔方程)).

需要注意的是, 贝赛尔函数的阶数*m*是角向方程的参数, 而不是径向方程的参数*l*. 参数*l*被包含在自变量*x*中.

柱坐标系中的拉普拉斯方程



令

 (1)  (2)  (3)

令,  则

 或 

令



令 (1)

则



令 (2)

则

 (3)

令,  可隐去

 或 

这就是贝塞尔方程