若一个函数在某个区间内可以求任意阶的导数（例如幂函数，三角函数，指数函数，对数函数等），那么这个函数可以用一个多项式近似，且总项数N越多，近似得越精确。令多项式为

 （1）

其中是该区间内的任意一点，多项式每一项的系数由函数在处的n阶导数求得



注意由式（1）得，当时，函数值等于多项式值。当项数N有限时，通常越小多项式就越接近函数。这种把函数展开成多项式的方法就叫泰勒展开。我们先来看一个例子

例1 正弦函数

事实上，泰勒展开可以看成是微分近似的一种拓展，微分近似中，在某点附近有



而这恰好是泰勒展开的前两项。然而，这只是用一条直线近似附近的函数曲线，显然没有高阶的泰勒展开那么精确。

**系数公式的推导**

我们假设当项数时，总存在一个多项式趋于函数（脚注：这叫做多项式的完备性，这里不予证明），即



首先代入，可得第一个系数。现在我们对上式两边在处求导，得



如果对式\*两边在处求二阶导数，得



即。以此类推，如果对式\*两边在处求m阶导数得



所以系数公式为



泰勒展开的存在说明了无穷可导函数的一个重要性质：任何一点的性质都能决定完整的函数曲线，这可以类比生物中用一个细胞克隆出一个完整生物体．

例2 求下列函数的泰勒展开

,,,,,

泰勒展开常常被用来做近似.