**矢量的混合积**

2014/11/24

预备知识： [矢量的叉乘](#_矢量的叉乘)

**定义**

任意的三个矢量，如果其中两个叉乘再与第三个矢量点乘，那么这种运算叫做这三个矢量的混合积

是矢量，，的混合积，且满足



这个公式可由右图记忆．混合积的方向由叉乘的方向决定，与点乘无关．如果混合积的顺序取与右图相反的方向, 根据叉乘的定义, 需要在前面加上负号(叉乘不满足乘法交换律!). 下面三式与上面三式互为相反数.



另外要注意混合积的方向是由叉乘的次序所决定的, 与点乘的次序无关. 所以上式也可记为



注意括号是必须的, 是错误的式子, 因为是常数, 不能与叉乘.

**推导**

**1.几何法**

设三个矢量都以原点作为起点，以三个矢量为棱作平行六面体(如图，未完成)．从[矢量的叉乘](#_矢量的叉乘)可知就是，所在平行四边形的面积．令，则为平面的法向量．平行六面体的高为，所以平行六面体的体积为底面积乘以高



同理可得对于同一平行六面体



这里只证明了绝对值, 证明正负关系并不难, 但表述起来比较繁琐, 留给读者思考.

**2.代数法**

把三种混合积都展开成分量的形式，进行对比即可．但这里介绍如何用求和符号证明．

叉乘可以用[行列式表示](#_矢量的叉乘)



进而用求和符号和epsilon符号表示(见[三阶行列式](#_三阶行列式))



的第个分量为



所以



把右边的分别换成，得



由epsilon函数的性质，，所以



这种求和符号的方式一眼看去比展开式还要复杂抽象，但却在矢量分析的一些复杂证明中很有用，在张量分析中更是扮演主要角色．

类似证明： [连续叉乘的化简](#_连续叉乘的化简)

### 矢量的混合积

预备知识： [矢量的叉乘](#_矢量的叉乘)

**定义**

任意的三个矢量，如果其中两个叉乘再与第三个矢量点乘，那么这种运算叫做这三个矢量的混合积

是矢量，，的混合积，且满足



这个公式可由右图记忆．混合积的方向由叉乘的方向决定，与点乘无关．

**推导**

(1) 几何法

设三个矢量都以原点作为起点，以三个矢量为棱作平行六面体(如图，未完成)．从[矢量的叉乘](#_矢量的叉乘)可知就是，所在平行四边形的面积．令，则为平面的法向量．平行六面体的高为，所以平行六面体的体积为底面积乘以高



同理可得对于同一平行六面体



(2) 代数法

把三种混合积都展开成分量的形式，进行对比即可．但这里介绍如何用求和符号证明．

叉乘可以用[行列式表示](#_矢量的叉乘)



进而用求和符号和epsilon符号表示(见[三阶行列式](#_三阶行列式))



的第个分量为



所以



把右边的分别换成，得



由epsilon函数的性质，，所以



这种求和符号的方式一眼看去比展开式还要复杂抽象，但却在矢量分析的一些复杂证明中很有用，在张量分析中更是扮演主要角色．

类似证明： [连续叉乘的化简](#_连续叉乘的化简)