### 弹簧振子

预备知识: [微分方程简介](#_微分方程简介)

质量为的质点固定在弹性系数为的弹簧的一端, 弹簧另一端固定. 在时,若质点不在平衡位置, 或者有一个初速度, 则接下来会发生振动(简单起见, 忽略所有阻力, 不考虑引力). 以质点拉伸弹簧的方向为轴正方向, 质点的平衡位置为. 则当质点在位置时, 根据胡克定律, 受力为. 根据牛顿第二定律, . 两式消去, 得



这是一个[微分方程](#_微分方程简介), 自变量为(因为是时间的二阶导数). 由于最高阶导数是二阶, 所以是二阶微分方程. 解该方程, 就是要寻找一个函数, 使它的二阶导数与成正比, 比例系数为. 注意到, 具有类似的性质, 不妨继续猜测, 则. 所以只要令即可满足方程. 这说明, 弹簧的震动可以用余弦函数来描述. 但是这只方程的一个解, 即一种震动情况. 任意情况的振动可以表示为以下函数

, 

这叫做方程的**通解**(系统的方法参考[二阶常系数齐次微分方程的通解](#_二阶常系数齐次微分方程的通解)). 把该函数代入方程, 同样满足. 满足这种形式的运动定义为**简谐运动(或简谐震动)**. 其中为**振幅**, 为**相位**, 为**初相位**(即时刻的相位). 即但是如何决定和呢? 根据题目给出的条件, 是不能判断的. 若要求振幅和初相位, 题目一般会给出时刻质点的位置和速度, 这就叫做**初值条件**.

例如给出, , 把方程的通解代入, 得, . 解得, . 所以

, 