**算符对易与共同本征函数**

2014/12/15

预备知识: [厄米矩阵](#_厄米矩阵); 本征函数的简并(未完成, 要引入希尔伯特子空间的概念, 说明子空间中的任意一个函数都是本征函数, n重简并的子空间是n维的, 即可以有n个线性无关的本征函数张成. 一般选取两两正交的波函数作为基底, 基底有无穷多种选法, 任何基底经过任意幺正变换以后仍然是子空间的基底. 类比一下).

**命题**

以下两个条件互为充分必要条件

1. 两个厄米算符和互相对易.

2. 算符和的本征方程存在一整套共同的本征函数.

**证明条件**

设算符和有一组共同的本征函数, 则它们同时满足和的本征方程



对任何, 都有





所以即

.

即两算符对易.

证毕.

**证明条件**

要证明****, 只需证明的一套本征函数都满足的本征方程即可.

(1) 算符非简并情况(是否简并没关系)

先解出算符的本征方程, 如果算符不发生简并(见[本征函数的简并](#_本征函数的简并))那么本征值各不相同, 且给定一个本征值其解只可能是或者乘以一个任意复常数(注释: 其实也可以再相乘一个算符不涉及的物理量的函数, 例如总能量算符的本征函数还可以再成一个时间因子).

因为算符对易, 有



把式中的看成一个新的波函数, 上式说明是算符和本征值的另一个本征函数. 根据以上分析, 必定是乘以某个复常数(命名为), 即



而这正是的本征方程(而也是厄米矩阵, 所以作为本征值的数域从复数缩小到实数).

证毕.

(2) 算符简并情况

假设算符的所有本征值为(各不相同), 任意一个有重简并.

若, 对应唯一一个, 那么根据上文对非简并情况的推理, 就已经是的本征函数了.

若, 存在一个维希尔伯特子空间, 里面任何一个函数都是对应的本征函数, 所以要在子空间中寻找共同本征函数, 只需在子空间中寻找的本征函数即可. 令为本征值为的子空间中的任意函数, 利用对易关系



这条式子说明是和的一个本征函数, 即仍然在的简并子空间中. 所以对子空间来说是一个闭合的厄米算符, 所以必有*N*个线性无关的本征函数(厄米算符性质x, 未完成).

证毕.

以下的内容应该归到厄米算符里面讲(厄米算符在希尔伯特空间中是无穷维的矩阵, 但是如果一个厄米算符在一个子空间中闭合, 那么就可以通过以下方法找到*N*个线性无关的本征函数.

厄米算符在

先在空间中任意选取个线性无关的正交本征函数作为子空间的基底([本征函数的简并](#_本征函数的简并)).

), 并可以用基底展开.

令(,可以是复数), 则在该子空间可以表示成一个维的方形矩阵(记为*W*).

以为子空间的基底, 子空间内任意函数可以记为 . 根据算符的矩阵表示(链接未完成), 在子空间的矩阵元就是系数,



所以在子空间范围内的本征方程的矩阵形式就是



所以在子空间的本征值就是*W*的本征值, 本征函数就是*W*的本征矢对应的波函数.

最后要证明的就是*W*矩阵必然存在个本征矢. 由于是厄米算符, 必然是厄米矩阵, 而维的厄米矩阵必然存在个两两正交的复数本征矢和实数本征值(厄米接矩阵(链接未完成)).

综上所述, 对每一个重简并的, 都存在个两两正交的本征函数作为,算符的共同本征函数.

证毕.

**算符对易与共同本征函数**

2014/12/15

预备知识: 厄米矩阵(链接未完成, 要求说明n维厄米矩阵一定从存在n个两两正交的本征矢(证明必须略), 本征值都是实数, 不同本征值对应的本征矢天然正交, 相同本征值对应一整个空间的本征矢. 一个本征值是几重跟, 那么对应的本征空间就是几维); 本征函数的简并(未完成, 要引入希尔伯特子空间的概念, 说明子空间中的任意一个函数都是本征函数, n重简并的子空间是n维的, 即可以有n个线性无关的本征函数张成. 一般选取两两正交的波函数作为基底, 基底有无穷多种选法, 任何基底经过任意幺正变换以后仍然是子空间的基底. 类比一下).

**命题**

以下两个条件互为充分必要条件

1. 两个厄米算符和互相对易.

2. 算符和的本征方程存在一整套共同的本征函数.

**证明条件**

设算符和有一组共同的本征函数, 则它们同时满足和的本征方程



对任何, 都有





所以即

.

即两算符对易.

证毕.

**证明条件**

要证明****, 只需证明的一组本征函数都满足的本征方程即可.

(1) 算符非简并情况(是否简并没关系)

先解出算符的本征方程, 如果算符不发生简并(见本征函数的简并(链接未完成)), 那么本征值各不相同, 且给定一个本征值其解只可能是或者乘以一个任意复常数(注释: 其实也可以再相乘一个算符不涉及的物理量的函数, 例如总能量算符的本征函数还可以再成一个时间因子).

因为算符对易, 有



把式中的看成一个新的波函数, 上式说明是算符和本征值的另一个本征函数. 根据以上分析, 必定是乘以某个复常数(命名为), 即



而这正是的本征方程(而也是厄米矩阵, 所以作为本征值的数域从复数缩小到实数).

证毕.

(2) 算符简并情况

假设算符的所有本征值为(各不相同), 任意一个有重简并.

若, 对应唯一一个, 那么根据上文对非简并情况的推理, 就已经是的本征函数了.

若, 存在一个维希尔伯特子空间, 里面任何一个函数都是对应的本征函数. 可以在空间中任意选取个线性无关的正交本征函数作为子空间的基底(本征函数的简并(链接未完成)).

下面考虑如何在该简并子空间中找到的本征函数. 利用对易关系



这条式子说明是和的一个本征函数, 即仍然在的简并子空间中(所以对子空间来说是一个闭合的线性算符), 并可以用基底展开.

令(,可以是复数), 则在该子空间可以表示成一个维的方形矩阵(记为*W*).

以为子空间的基底, 子空间内任意函数可以记为 . 根据算符的矩阵表示(链接未完成), 在子空间的矩阵元就是系数,



所以在子空间范围内的本征方程的矩阵形式就是



所以在子空间的本征值就是*W*的本征值, 本征函数就是*W*的本征矢对应的波函数.

最后要证明的就是*W*矩阵必然存在个本征矢. 由于是厄米算符, 必然是厄米矩阵, 而维的厄米矩阵必然存在个两两正交的复数本征矢和实数本征值(厄米接矩阵(链接未完成)).

综上所述, 对每一个重简并的, 都存在个两两正交的本征函数作为,算符的共同本征函数.

证毕.