**轨道角动量**

2014/12/15

(未完成)

预备知识: 角动量(链接未完成);

思路: 根据力学量(测量量)的经典表达式, 可以写出对应的算符(这其实是量子力学的一个重要假设, 课本往往将其忽略, 而直接告诉你可以这样做)

**从经典公式到算符**

经典力学中一个粒子的角动量公式是



其中是参考点到物体的位矢, 是粒子的动量. 或者写成直角坐标系中的分量形式(令原点为参考点)

  

如果用表示空间位置算符(这里出现了一点符号上的尴尬, 因为,,既可以算符又可以表示单位矢量, 不过幸好*x*算符就是变量*x*, 所以我在该词条中用,,表示单位矢量, *x*, *y*, *z*表示变量和算符), 用表示空间动量算符, 那空间角动量算符可以表示为.



三个分量的算符为

  

还可以定义角动量模长平方算符(注意算符是一个整体, 不是两个算符相乘)

****

**能同时测量什么**

对于角动量分量, 理想的状况是, 如果能解出本征方程



我们就能得到矢量的本征值, 然后测量本征态的结果就一定是. 但事实上, 几乎从来不单独使用, 因为上式无解. 为什么? 要解上式, 充分必要条件就是要存在, 使三个分量同时有解

  

不幸的是, ,,中任意两个都不对易(常见对易关系表, 链接未完成), 所以没有共同的本征函数([算符对易和共同本征矢函数](#_算符对易与共同本征函数)). 事实上, 三个分量中我们只能同时知道一个(不确定原理, 链接未完成, 一定要解释一下有些量为什么不能同时得到), 通常情况下, 我们选择解的本征方程.

比较幸运的是, 如果定义**角动量模长平方算符**(又一次根据经典力学的定义得到), 可以发现和,,都对易, 所以必然存在一套本征函数, 同时是,,其中一个和的本征函数(习惯上约定计算和的共同本征矢).

**升降算符和本征值**

如果要解和的共同本征函数, 通常的方法是先把算符的表达式转换到球坐标中再解方程. 但是我们现在先用一种更简单的(但非常重要的)方法, 升降算符(在简谐振子问题中已经见过), 来绕过本征函数直接求出共同波函数的简并情况以及对两个算符的本征值.

由于升降算符没有什么方法可以求出来, 这里直接给出并证明的升降算符分别为



根据升降算符(链接未完成)中的一种定义, 要证明它们是升降算符, 只要证明即可. 结论是(证明见常见算符对易表(链接未完成))



类似简谐振子的升降算符, 我们还需要一个归一化系数使成立(见轨道角动量升降算符归一化). 结论是



由于也是

**轨道角动量**

2014/11/21

预备知识： [测量理论](#_测量理论)

**结论**

半整数为角量子数，整数*m*为磁量子数．对于一个*l*，*m*可以取 这个值．一个粒子轨道角动量的一个分量只能取为本征值，角动量模长的平方只能取为本征值．

**推导**

完全撇开波函数不提，光利用升降算符，就能知道本征值和本征值的关系．

所以，升降算符是非常强大的．

按照惯例，对一个复杂的推导过程，这里先把主要思路列出，然后再逐一说明．

1．由经典的角动量关系，用位置算符和动量算符得出角动量各个分量的算符，， ，证明他们之间不对易，所以没有共同的本征函数．也就是说我们最多只能知道其中的一个分量，其实求哪个分量都没关系，所以不妨求分量．另外得出角动量平方的算符，证明它与各个分量的算符都对易，所以有可能有共同的本征函数．

2．假设存在一个波函数是与的共同本征函数，本征值分别为和，即

，．给出的升降算符，并且证明升降算符一次可以把的本征值升降．但是对的本征值不产生影响．即，．这样，理论上就存在一系列本征波函数，他们的角动量平方都是，但是分量相差整数个．(注意的量纲是，就是角动量的量纲)．

3．但是升降算符肯定不能使用无限多次．对于最大的本征函数会有．最低的会有 (代表top，代表bottom)．设最高的本征值为，最低的本征值为．注意为整数．

4．把用和表示出来．计算出 且

．而升降算符不会改变角动量的平方()．所以．解得或者．由于对称性，后者是不可能的，所以只能是前者．

5．这样，当角动量的平方为时，角动量的分量可以取

．注意到必须为整数，所以必须取整数或者半整数．

(未完成)．

详细过程如下

1．

2．下面只讨论升算符，降算符同理可得．

令．证明是的升算符．



证毕．

所以根据[升降算符](#_升降算符)中的结论，．这说明，相邻的角动量分量本征值相差．