**分离变量法简介**

2016/1/3

(未完成)

预备知识: 傅里叶级数

不夸张地说, 分离变量法在解各种物理学的偏微分方程是最重要最常用的方法.

**例1**: 弦上驻波

一维的波动方程为

 (1)

假设弦长为*a*, 两端固定, 则边界条件为

 (2).

显然, 是方程的一个解, 代表一根静止的弦, 但这对我们并没有什么用. 那么有那些非零的解呢? 我们现在只会解一些常微分方程, 而是一个二元函数, 让人有点无从下手, 所以我们可以先猜测某个解具有

 (3)

的形式, 即分别含有两个变量的两个一元函数相乘. 把(3)代入原方程(1), 得

 (4)

但考虑到偏微分的计算法则, 有

 (5)

 (6)

所以方程变为

 (7)

现在把方程两边同时除以, 即同时除以, 使等式左边只是*x*的函数, 右边只是*t*的函数

 (8)

但为什么要这么做呢? 因为真的存在一个这样的解, 在某个时刻*t*, 必定会随变化(因为我们要找的是非零解, 弦不可能是一条直线). 反之, 如果保持*x*不变(观察弦上某个点的运动情况), 也必须随*t*改变(因为弦上的任意一点一般会做某种运动, 例如振动, 不可能都静止). 把这样的推理用到上式(8), 就会得出, 唯一可能让等式成立的方法是方程两边分别等于一个常数, 因为*x*不变时方程左边是常数, *t*不变时方程右边是常数. 若设这个常数为(一个任意实数, 这么表示是为了下文书写方便), 得

 (9)  (10)

或

 (11)  (12)

这两条都是[一维齐次亥姆霍兹方程](#_一维齐次亥姆霍兹方程), 常数为时, 方程的解为指数函数

 (13)  (14)

不可能满足边界条件(2) (但有可能满足其他边界条件). 当常数为时, 方程的解为

 (13)  (14)

要使*t*取任何值时都满足边界条件 (2), 只能令满足且. 前者代入(13), 得, 所以. 再代入后者, 得. 为了获得非零解, 我们不可能让, 都为零, 所以只能让, 解出常数*k*只能取离散的值, *n*为任意正整数.

现在, 我们可以令整数*n*取任意值, 得到无穷多个方程的解

 (15)

式(14)也可以记为, 所以上式也可记为



以二元偏微分方程为例，要解该方程，先假设…乘积，

由于等号左边只含有，右边只含有*y*，所以两边只能等于一个常数．原因如下：

若是方程的一个解，则在定义域中任意改变*x*, *y*上式都成立．现在令不变(等号左边为常数)，当*y*在定义域内任意变化时，由于等式必须成立，等式右边必须是同一常数．现在，当*x*变化是，等号左边也是同一常数．

这样，一个偏微分方程就变成了两个常微分方程．解这两个方程，得到偏微分方程的一个特解．

在大部分情况下，所有特解的线性组合就是通解…．

**分离变量法简介**

2014/11/21

(未完成)

以二元偏微分方程为例，要解该方程，先假设…乘积，

由于等号左边只含有，右边只含有，所以两边只能等于一个常数．原因如下：

若是方程的一个解，则在定义域中任意改变*x, y*上式都成立．现在令不变(等号左边为常数)，当*y*在定义域内任意变化时，由于等式必须成立，等式右边必须是同一常数．现在，当*x*变化是，等号左边也是同一常数．

这样，一个偏微分方程就变成了两个常微分方程．解这两个方程，得到偏微分方程的一个特解．

在大部分情况下，所有特解的线性组合就是通解…．