**球坐标系中的拉普拉斯方程**

2015/10/14

(未完成)

预备知识: [球坐标的拉普拉斯算子](#_球坐标系中的梯度散度旋度及拉普拉斯算符); 拉普拉斯方程(链接未完成)

球坐标的拉普拉斯方程为

 (1)

使用分离变量法解方程, 令, 代入原方程并除以得

 (2)

要注意这三项并不分别只是的函数, 第三项中包含了, 所以不能一次性分离变量. 但可以先假设第一项为, 后两项之和为 (这样假设常数是为了后面解方程方便, 不影响一般性). 现在我们有两个方程, 第一个只是关于*r*的常微分方程(4), 称为径向方程, 稍后讲解. 第二个是关于和的方程

 (3)

两边同时乘以, 可以看出前两项只是的函数, 第三项只是的函数. 习惯上令第三项等于常数, 则前两项为. 到现在为止我们成功分离了三个变量, 现在来讨论对应的三个常微分方程.

1．

 (4)

欧拉型方程，利用变量代换可解得(链接未完成)

 (5)

2．

 (6)

利用变量代换 

得到

 (7)

叫做阶[连带勒让德方程](#_连带勒让德多多项式). 一般先讨论的特殊情况, 此时方程变为[勒让德方程](#_勒让德多项式_1). 由的定义可以看出时方程的解与方向角无关.

 (8)

3．

 (9)

该方程的通解为(*m*取正数和相反数分别对应两个线性无关解).

由于在球坐标中, 与表示的是同一个位置, 这要求, 解得*m*必须为整数.

….

所以球坐标中, 拉普拉斯方程的通解为



通常把在单位球面上归一化的定义为球谐函数, 则通解也可写为(注意待定常数与上面的不同).



**球坐标系中的拉普拉斯方程**

2014/11/25

(未完成)

球坐标的拉普拉斯方程



1．



欧拉型方程，利用变量代换可解得



2．



利用变量代换 

得到



叫做阶连带勒让德方程

若h与无关，那么由方程3得

于是阶连带勒让德方程变为勒让德方程



3．



### 球坐标系中的拉普拉斯方程

(未完成)

球坐标的拉普拉斯方程



1．



欧拉型方程，利用变量代换可解得



2．



利用变量代换 

得到



叫做阶连带勒让德方程

若h与无关，那么由方程3得

于是阶连带勒让德方程变为勒让德方程



3．

