Wzór Taylora - przybliżanie funkcji różniczkowalnej w otoczeniu pewnego punktu x_0

Maciej S.

13 lutego 2024

Streszczenie

Przybliżenie zadanej funkcji (różniczkowalnej) f w otoczeniu pewnego punktu x_0 za pomocą wzoru Taylora.

1 Wzór Taylora

Wzór Taylora – przedstawienie funkcji $n+1$-razy różniczkowalnej za pomocą sumy wielomianu n-tego stopnia, zależnego od kolejnych jej pochodnych oraz dostatecznie małej reszty. Twierdzenia mówiące o możliwości takiego przedstawiania pewnych funkcji (nawet dość abstrakcyjnych przestrzeni) noszą zbiorczą nazwę twierdzeń Taylora od nazwiska angielskiego matematyka Brooka Taylora, który opublikował pracę na temat lokalnego przybliżania funkcji rzeczywistych w podany niżej sposób. Ta własność funkcji różniczkowalnych znana była już przed Taylorem – w 1671 odkrył ją James Gregory.

W przypadku funkcji nieskończenie wiele razy różniczkowalnych, przedstawienie oparte na tej własności może przyjąć postać szeregu zwanego szeregiem Taylora. Poniżej podane jest uogólnione twierdzenie Taylora dla funkcji o wartościach w dowolnych przestrzeniach unormowanych – w szczególności jest więc ono prawdziwe dla funkcji o wartościach rzeczywistych czy wektorowych.

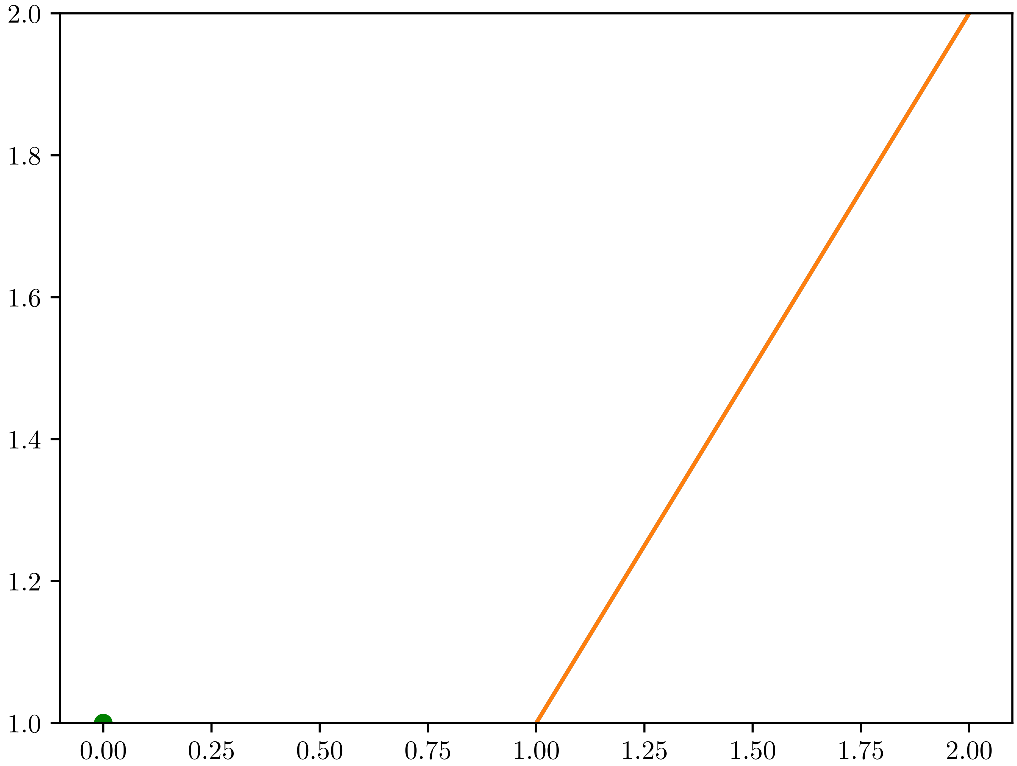
Twierdzenie 1 (Twierdzenie Taylora) *Niech f będzie funkcją na przedziale $[a, b]$ o wartościach rzeczywistych (bądź ogólniej, o wartościach w przestrzeni unormowanej Y) różniczkowalną $n+1$-razy w sposób ciągły (na końcach przedziału zakłada się różniczkowalność z lewej, bądź odpowiednio, z prawej strony). Wówczas dla każdego punktu x z przedziału (a, b) spełniony jest wzór zwany wzorem Taylora:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x, x_0)$$

n-tą resztą (resztą Peano wzoru Taylora) nazywamy wyraz:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Wzorem Maclaurina nazywamy szereg Taylora, gdzie $x_0 = 0$.


2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00