Rekursion II

Aufgabe 1

Schreiben Sie ein Programm, das die Fibonacci-Funktion nach der Rekursionsformel $fib(1)=fib(2)=1 \; fib(n)=fib(n-1)+fib(n-2)$ berechnet und eine Liste der ersten 43 Fibonacci-Zahlen ausgibt. Warum dauert die Berechnung bei großen n so lange? Wie kann man die Berechnung beschleunigen?

Aufgabe 2

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist rekursiv definiert als

$$\binom{n}{k}=0 \quad \text{für k>n oder k<0}$$

$$\binom{0}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

Der Binomialkoeffizient taucht u.a. beim Ausmultiplizieren von Binomen auf:

$$(a+b)^4=\binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}a\,b^3+\binom{4}{4}b^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

In geeigneter Form aufgeschrieben entsteht das Pascal'sche Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Man sieht, dass jeder Eintrag die Summe der beiden Elemente rechts und links darüber ist.

Schreiben Sie eine <u>rekursive</u> Funktion

```
int binom(int n, int k) { ... }
```

die den Binomialkoeffizienten für gegebene n und k berechnet.

Berechnen Sie die Binomialkoeffizienten der 33. Zeile des Pascal'schen Dreiecks, also alle $\binom{32}{k}$

Warum dauert die Berechnung so lange, wie kann man die Laufzeit verbessern?