

ANÁLISIS DE LOS MECANISMOS DE PRODUCCIÓN DE MATERIA OSCURA WIMP, FIMP Y SIMP EN EL UNIVERSO TEMPRANO Ó PRIMORDIAL

Mateo Escorcía Sierra

Trabajo de Grado para optar al título de Físico

Director:

Nicolás Bernal, PhD

Codirector:

Mario Andrés Acero Ortega, PhD



Universidad del Atlántico
Facultad de Ciencias Básicas
Programa de Física, Grupo PEyCOS
Puerto Colombia, Colombia

2023

Contenido

1	Resumen	4
2	Introducción	5
3	Marco Teórico	12
3.1	WIMPs	12
3.2	FIMPs	15
3.3	SIMPs	16
3.4	Ecuaciones de Boltzmann	17
4	Metodología	22
4.1	Procedimiento analítico para modelo WIMP	22
4.2	Procedimiento numérico para modelo WIMP	28
4.3	Procedimiento numérico para el mecanismo FIMP	33
4.4	Procedimiento analítico para el mecanismo SIMP	36
4.5	Procedimiento numérico para el mecanismo SIMP	38
4.6	Análisis y discusión de resultados	42
5	Conclusiones	44
A	Ecuación de Boltzmann para el mecanismo WIMP	47

Capítulo 1

Resumen

En este estudio se examinan los mecanismos de producción de materia oscura en el universo primordial ó temprano, centrándose en los enfoques WIMP, FIMP y SIMP. Se encontraron diferencias fundamentales entre estos mecanismos, donde WIMP y SIMP siguieron el equilibrio térmico hasta su freeze-out, mientras que FIMP nunca se encuentra en este equilibrio y fue altamente sensible a las condiciones iniciales. Además se identificó que, para WIMP y SIMP, la masa de las reliquias y la sección eficaz utilizada eran inversamente proporcionales a la densidad numérica final, mientras que para FIMP eran directamente proporcionales. Por otro lado, se desarrollaron soluciones aproximadas para los mecanismo WIMP y SIMP que se acercaron significativamente a los resultados numéricos. Todos los casos se compararon con datos observacionales, obteniendo así resultados congruentes. Estos hallazgos, contribuyen a una comprensión más profunda de la producción de materia oscura y su relevancia en la física de partículas y altas energías.

Capítulo 2

Introducción

La naturaleza y el origen de la materia oscura es uno de los enigmas más grandes en la física actual. Lo que genera esta intriga, es precisamente, que es muy difícil de estudiar y observar, ya que lo que definimos como materia oscura es un cuerpo que no presenta ningún tipo de interacción electromagnética, solo manifestándose a través de interacciones gravitacionales con materia bariónica, o dependiendo del modelo que se esté trabajando, con otros cuerpos de materia oscura [1].

El primero en plantear el concepto de materia oscura fue Fritz Zwicky en el año 1933 [2], que al momento de estudiar la velocidad de rotación de distintos cúmulos de galaxias, logró distinguir que el cúmulo Coma rotaba a una velocidad más alta de lo que sus cálculos predecían. Zwicky propuso el concepto de materia oscura como respuesta. Planteó que su explicación para este comportamiento, era que el cúmulo poseía más masa de lo que se podía detectar usando el telescopio del observatorio Palomar en California. Esto provocaba que la masa total del cúmulo aumentara y solo de esta forma el sistema podría llegar a las velocidades que fueron medidas. Los demás científicos fueron escépticos al respecto de su teoría, pero a medida que pasaba el tiempo se fueron encontrando resultados similares en otros cúmulos [3].

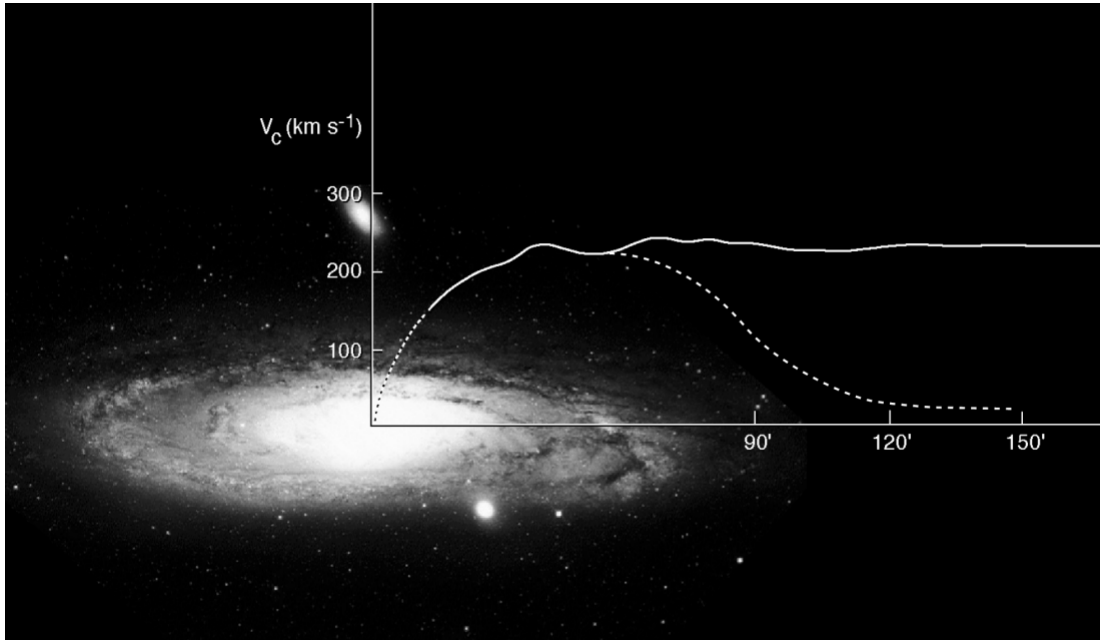


Figura 2.1: Imagen de la galaxia Andromeda y sus curvas de rotación. Velocidad circular de la nube de gas y las estrellas orbitando el centro de la galaxia (km/s) vs distancia al centro de la galaxia (arcmin). La línea continua representa los datos observados y la línea punteada muestra las curvas de rotación calculadas sin contar el efecto de la materia oscura. Imagen creada por M. Roberts [4]

La etapa moderna de la investigación de materia oscura comenzó en la década de los 1970s, causada por la necesidad de explicar la cinemática gaseosa en las galaxias masivas, donde se apreció que la velocidad del gas galáctico en estos sistemas, no disminuía una vez se pasaban los límites del disco estelar, esto volvió indudable la existencia de algún fenómeno que provocara estas altas velocidades en los sistemas celestes.

Es importante mencionar y discutir ahora del fondo cosmo de microondas o CMB, del inglés *Cosmic Microwave Background*, el cual desempeña un papel fundamental en la física de partículas al proporcionar una ventana crucial para comprender los eventos primordiales en el universo. Este remanente de radiación del Big Bang, que se encuentra en todo el universo observable, ha permitido estudiar las fluctuaciones primordiales que dieron origen a las estructuras cósmicas que observamos hoy en día. Al analizar el CMB, se ha podido obtener información valiosa sobre la composición y la evolución del universo temprano, así

como confirmar importantes predicciones de la teoría del Big Bang. En relación con la materia oscura, el CMB juega un papel crucial al proporcionar pistas sobre la distribución y la naturaleza de la materia oscura en el universo. Si bien la materia oscura en sí misma no interactúa directamente con la radiación del CMB, su presencia se hace evidente a través de sus efectos gravitacionales en la formación de las estructuras a gran escala en el universo. Las anisotropías observadas en el CMB reflejan las fluctuaciones de densidad primordiales, las cuales están compuestas tanto por materia bariónica como por materia oscura, proporcionando así información valiosa para la comprensión de la distribución de la materia en el universo temprano.

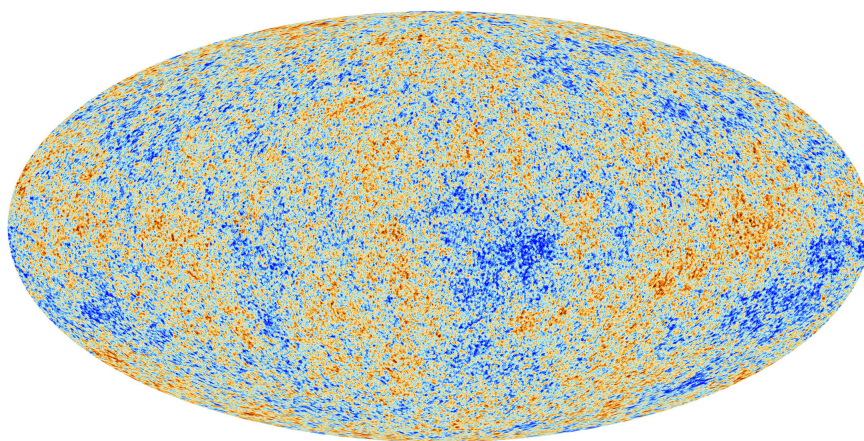


Figura 2.2: Imagen del fondo cósmico de microondas capturada por el telescopio Planck [5]

La figura (2.2) muestra la imagen típica del CMB, la cual revela una distribución uniforme de radiación de microondas a lo largo de la esfera celeste, con pequeñas variaciones que indican las anisotropías en la radiación. Estas variaciones son cruciales para la comprensión de la evolución y la composición del universo temprano. Al estudiar estas variaciones, los científicos pueden mapear las fluctuaciones de densidad primordiales y entender mejor la formación de las estructuras cósmicas a lo largo del tiempo cósmico, lo que proporciona información esencial sobre la naturaleza y el origen del universo tal como lo conocemos. Además, estos datos pueden ser usados para graficar el espectro de potencias angulares del CMB, y así hallar la composición de la densidad energética del universo mencionada anteriormente.

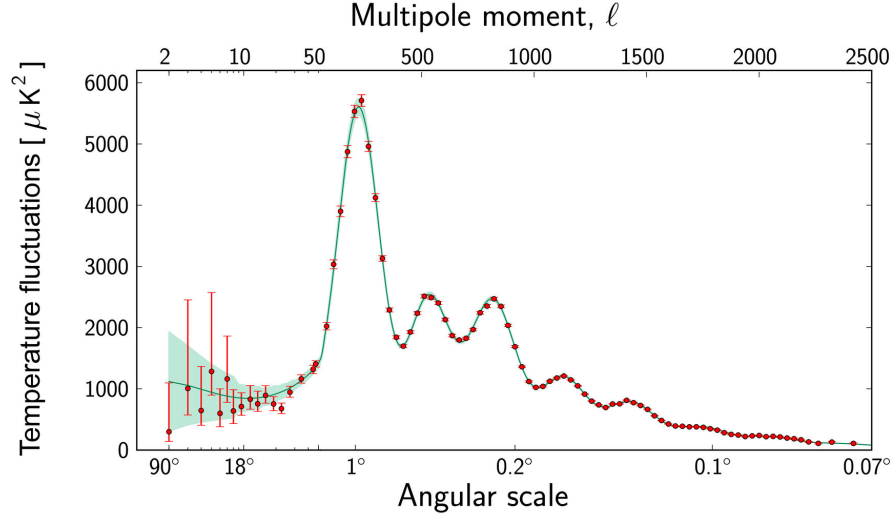


Figura 2.3: Gráfica de las fluctuaciones de temperatura en el CMB detectado por el telescopio Planck en diferentes escalas angulares en el cielo, empezando desde noventa grados en la parte izquierda de la gráfica hasta llegar a cero en la parte derecha. [6]

En la figura (2.3) se muestra la gráfica del espectro de potencia del CMB, obtenida a partir de observaciones precisas realizadas por el satélite Planck, es crucial para comprender las fluctuaciones en la radiación de microondas cósmica en función de su escala angular. Esta representación visualiza las anisotropías en el CMB y proporciona información detallada sobre las variaciones de densidad en el universo temprano. A partir de este espectro de potencia, se puede realizar un análisis estadístico para determinar la composición de la densidad del universo. Usando estas observaciones y cálculos se comprobó la densidad energética del universo, la cual está compuesta por aproximadamente, 70% de energía oscura, 26% de materia oscura y apenas 4% de materia ordinaria [5], que por estar compuesta por partículas llamadas bariones, se le denomina materia bariónica. Estos datos hallados sugieren que la densidad actual de energía toma valores aproximados de [5]

$$\rho_0 \approx \frac{3H_0^2}{8\pi G_N} \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \approx 10^{-26} \text{ kg/m}^3, \quad (2.1)$$

donde H_0 es el parámetro de Hubble actual y G_N es la constante de gravitación, esto corre-

spondería a una densidad media de 10 protones por metro cúbico [7].

Afortunadamente, también se puede estudiar la materia oscura desde el punto de vista de la física de partículas. Existen muchos posibles candidatos que podrían ser los que componen a la materia oscura, cada uno con sus distintas ventajas y desventajas, pero todos tienen que satisfacer unas condiciones y características que se han podido observar en la materia oscura. Para que una partícula pueda ser considerada una opción viable, se espera que ésta sea eléctricamente neutral, sin carga de color, que interactúe débilmente con la materia bariónica y que sea estable o con una vida media mayor a la edad del universo, la cual ha sido calculada en aproximadamente 13.700 millones de años [1]. Adicionalmente, es necesario que el modelo sea capaz de generar la cantidad de materia oscura que se ha medido hasta el momento, que se expresa como [8]

$$\Omega_{DM} \equiv \frac{\rho_{DM,0}}{\rho_0} \approx 0.26, \quad (2.2)$$

donde $\rho_{DM,0}$ es la densidad de materia oscura medida en la actualidad, y se puede expresar como

$$\rho_{DM,0} \approx 10^{10} \frac{M_\odot}{\text{Mpc}^3} \approx 10^{-6} \frac{\text{GeV}}{\text{cm}^3}, \quad (2.3)$$

donde M_\odot corresponde a la masa del Sol. Si todos estos criterios se cumplen, se tiene un potencial prospecto a ser la partícula que compone la materia oscura.

En este trabajo de grado se realizó un análisis de algunos de los mecanismos de producción de materia oscura en el universo temprano, donde las partículas generadas cumplen los criterios enunciados anteriormente. Siendo este tema todavía muy investigado, existen muchos mecanismos diferentes que tratan de explicar dicha producción. Este estudio se concentra en tres de estos mecanismos. El primero, y el más reconocido viene siendo el mecanismo *Weakly Interacting Massive Particles* o WIMP que se trabaja aplicando las ecuaciones de Boltzmann para estudiar el comportamiento de las reliquias de WIMP en el baño térmico durante los primeros momentos del universo. Este análisis, se realiza encontrando una solución

aproximada de forma analítica y una numérica usando programación en Python. Una vez obtenidos los resultados, se adaptaron los cálculos para caracterizar los mecanismos *Feebly Interacting Massive Particles* o FIMP y *Strongly Interacting Massive Particles* o SIMP. Las partículas que generan estos tres mecanismos de producción se destacan por ser partículas mas allá del modelo estándar. Es importante mencionar que no existe una partícula que tenga las características necesarias mencionadas anteriormente dentro del modelo estándar, esto provoca que en la búsqueda de candidatos para partículas de materia oscura se deba buscar mas allá de lo que se ha definido en el modelo estándar, creando así una inmensa cantidad de posibles explicaciones para la naturaleza real de la materia oscura.

En este trabajo de grado se estudió los mecanismos de producción de materia oscura en el universo primordial. Como objetivos específicos, está inicialmente comprender las motivaciones astrofísicas y cosmológicas detrás de la investigación de la materia oscura, luego, se estudió la termodinámica del universo primordial, también es necesario analizar y comparar los tres métodos de producción mencionados (WIMPs, FIMPs y SIMPs) y finalmente se halló la aproximación analítica y numérica de las ecuaciones de Boltzmann de los mecanismos para poder comparar sus evoluciones termodinámicas con la densidad numérica de materia oscura observada.

Este trabajo de grado está dividido en cuatro secciones. Se inicia con un planteamiento de las bases teóricas necesarias para comprender la premisa de este trabajo. Estas bases se aprecian en la sección del Marco Teórico, donde se explican con detalle los tres métodos de producción de materia oscura que se trabajarán, para luego introducir las ecuaciones de Boltzmann. Se describen sus utilidades y sus funcionamientos para posteriormente aplicarlas a cada uno de los mecanismos a estudiar. La siguiente sección es llamada Metodología, la cual expone la forma y los métodos empleados para alcanzar los resultados de este trabajo. Se realizaron los cálculos y se muestran los procedimientos para hallar una solución analítica aproximada a las ecuaciones de Boltzmann para el mecanismo de producción WIMP, se sigue por hallar la solución a estas mismas ecuaciones, pero esta vez de forma numérica

usando métodos computacionales y su programación en Python. Una vez con los resultados para el modelo WIMP, se modifica el planteamiento del problema para que se adapten a las características de los métodos de producción SIMP y FIMP. En la sección de análisis y discusión de resultados, se explican los resultados analíticos adquiridos en cada modelo y se resaltan las diferencias que existen entre ellos, luego se realiza una comparación gráfica de los resultados numéricos adquiridos para cada método de producción. Se termina con la sección final denominada Conclusiones, donde se expresan las diferencias claves que se hallaron entre los tres mecanismos de producción junto con características importantes de cada uno, principalmente la relación hallada entre la densidad numérica, la sección eficaz y la masa de la partícula de materia oscura.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1 WIMPs

El paradigma *Weakly Interacting Massive Particles* o WIMP, es uno de los mecanismos de producción que más predomina en la búsqueda de materia oscura. Su gran popularidad es debida a que ya existían varias teorías donde estas partículas aparecían y tomarían un rol importante [9]. Tendrían una descripción que encajaría perfectamente con los requisitos de la partícula de materia oscura que son, ser no relativista al momento de su producción, neutra y que interactué débilmente con la materia bariónica. Igual que los otros mecanismos de producción que se trabajan en este documento, el mecanismo WIMP opera con partículas fuera del modelo estándar. El mayor problema con los WIMPs, es que a pesar de que se han realizado experimentos en el gran colisionador de hadrones o del inglés LHC *Large Hadron Collider* que tuvieron que producir partículas de este tipo [10], ninguna partícula de esta naturaleza ha sido observada en los rangos de energías esperados.

Además de estos experimentos, también se están llevando a cabo numerosos proyectos tratando de hallar evidencias de partículas WIMPs, tanto usando detección directa, como detección indirecta. Una detección directa implica la detección de partículas mediante la observación de su interacción con el detector, en este caso las partículas WIMPs atraviesan el detector,

y en ocasiones, ocurre una interacción con el material dentro del sistema, la cual genera una señal medible para el detector [11]. Un ejemplo de experimentos de detección directa de partículas WIMP son los experimentos realizados por el detector LUX-ZEPOLIN, este es uno de los experimentos de detección directa de materia oscura más grandes del mundo. Está diseñado para detectar WIMPs a través de su interacción con núcleos de xenón ultrapuro en un detector subterráneo en el Laboratorio *Sanford Underground Research Facility* en los Estados Unidos [12].

Por otro lado, también existe un gran cantidad de experimentos tratando de percibir rastros de WIMPs usando detección indirecta. Este tipo de detección se caracteriza por observar los efectos o las consecuencias de la presencia de ciertas partículas o fenómenos, en lugar de detectar directamente las partículas mismas. Para el caso de los WIMPs, usualmente se buscan los productos de aniquilación o desintegración de estas partículas, esto implica buscar señales de radiación, como rayos gamma, rayos cósmicos, neutrinos u otras partículas secundarias que podrían surgir de la interacción de la materia oscura. Un ejemplo de este tipo de experimentos son los realizados por el Fermi-LAT o *Fermi Large Area Telescope* [13], este es un observatorio espacial que detecta rayos gamma de alta energía. Aunque su principal objetivo es estudiar fuentes astrofísicas de rayos gamma, también puede proporcionar evidencia indirecta de la presencia de WIMPs a través de la observación de posibles señales de aniquilación de materia oscura en regiones del espacio donde se espera una alta concentración de materia oscura.

Una característica importante del mecanismo de producción WIMP es su comportamiento durante el desacoplamiento químico, este es el instante en los primeros momentos del universo donde las partículas de diferentes tipos salen del equilibrio químico. En este estado las reacciones de producción y aniquilación de las distintas partículas ocurrían con la misma tasa de interacción [8]. Durante este periodo, compiten la tasa de aniquilación de materia oscura Γ con la expansión del universo descrita por el parámetro de Hubble H . El proceso inicia con $\Gamma \gg H$, donde la aniquilación es muy eficiente debido a las altas temperaturas

y proximidad de las partículas, pero a medida que el universo se va expandiendo Γ empieza a hacerse más pequeña hasta que $\Gamma \approx H$, en este punto la aniquilación deja de ser eficiente y se dice que la materia oscura hace "Freeze-out" [7]. A las partículas que quedan luego de un freeze-out, se les denomina reliquias calientes si son relativistas, o reliquias frías si son no relativistas. Su abundancia queda constante desde este punto. Se puede describir la tasa de interacción Γ de forma general para procesos en el desacoplamiento térmico teniendo en cuenta una sección eficaz σ , la densidad numérica n y la velocidad relativa v :

$$\Gamma = n\sigma v, \quad (3.1)$$

donde podemos expresar la densidad numérica como

$$n_{EQ}(T) = \frac{gm^2T}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m}{T}\right), \quad (3.2)$$

esta es su forma general, donde $K_2(x)$, es la función de Bessel de segunda especie, y g el número de grados de libertad internos del sistema. También es usual ver esta ecuación siendo aproximada para los límites relativistas y no relativistas [14]

$$n_{rel} \propto T^3 \quad \text{para } m \ll T, \quad (3.3)$$

$$n_{no-rel} \propto (mT)^{3/2} e^{-m/T} \quad \text{para } m \gg T, \quad (3.4)$$

y podemos observar cómo los subíndices indican que, dependiendo de la relación entre la masa de las partículas y la temperatura del baño térmico, éstas tienden en su mayoría a ser relativistas o no relativistas [8]. También se ha predicho que la masa de las reliquias frías en cuestión sería de

$$m_{DM} \approx \alpha_{ann}(T_{eq}m_{pl})^{1/2} \approx 1 \text{ TeV}, \quad (3.5)$$

donde α_{ann} es la constante de acoplamiento de la sección eficaz de la aniquilación de materia

oscura $2 \rightarrow 2$, $T_{eq} \approx 0.8$ eV es la temperatura de igualamiento de radiación-materia, y $m_{pl} = 1.22 \times 10^{19}$ GeV es la masa de Planck.

3.2 FIMPs

Se enunció que para el mecanismo anterior las reliquias empezaban con alta abundancia, la cual va reduciéndose a través de un proceso de aniquilación que se lleva a cabo hasta que $\Gamma \approx H$, donde ocurre el freeze-out, y en esto es que se diferencian los WIMP de los *Feebly Interacting Massive Particles* o también llamados *Freeze-In Massive Particles* (FIMP) [15]. En vez de llegar al punto freeze-out donde se vuelve constante luego de una gran cantidad de aniquilaciones, el mecanismo FIMP inicia con baja abundancia de reliquias, y estas se van produciendo durante el desacoplamiento térmico hasta llegar a la abundancia constante que tenemos hoy en día.

Podemos denominar la reliquia FIMP como X, y asumimos que a temperaturas mucho mayores que la escala electrodébil esta partícula está muy débilmente acoplada con el baño térmico a través de una interacción renormalizable, lo cual implica que las ecuaciones que describen cómo las partículas interactúan se pueden ajustar y corregir matemáticamente, de modo que los cálculos no conduzcan a resultados infinitos o sin sentido físico. El vértice de interacción puede involucrar más de una partícula del baño térmico, donde denominamos la masa de la partícula más pesada como m , la cual se considera que tiene valores cercanos a la escala electrodébil. Para una interacción de Yukawa o una interacción de cuarto orden, en donde las masas relativas de las partículas afectan la fuerza y la tasa de interacción, tenemos un acople adimensional que llamamos λ , y para una interacción escalar de tres vértices, este acople sería de λm , donde $\lambda \ll 1$ [15]. Debido a la débil interacción entre materia oscura y materia estándar en el modelo freeze-in, la búsqueda de partículas FIMP a través de detección directa o de experimentos en el LHC, se vuelve muy difícil de realizar. A pesar de esto, el mecanismo FIMP ha empezado a tomar fuerza debido a los resultados poco satisfactorios de los experimentos y proyectos tratando de detectar partículas WIMPs. Existen

varios candidatos que podrían satisfacer un mecanismo freeze-in, pero uno de los mas estudiados son los neutrinos estériles. Son considerados una extensión del modelo estándar, que podría resolver el misterio de la abundancia actual de materia oscura además de contribuir a la investigación de neutrinos, dando lugar a un mecanismo que generaría masa de Majorana para los neutrinos de modelo estándar.

Como vimos anteriormente, el mecanismo WIMP y el FIMP se diferencian de varias formas, pero también tienen sus semejanzas, como lo es la abundancia actual de materia oscura. Este fenómeno puede ser explicado con ambos mecanismos, a pesar de que dicha abundancia inicia con valores muy diferentes en los mecanismos WIMP y FIMP [16].

3.3 SIMPs

Como se mencionó al introducir el método de producción WIMP, este modelo se basa en que la materia oscura es una reliquia fría con una aniquilación estándar $2 \rightarrow 2$, pero el sistema también podría funcionar con otros mecanismos, como lo plantea el método de producción SIMP, donde se considera que la materia oscura llega al Freeze-out usando un proceso de aniquilación $3 \rightarrow 2$, donde tres partículas de materia oscura colisionan y dos son producidas [17]. Para este caso la escala de masa cambiaría y resultaría como

$$m_{DM} \sim \alpha_{ann}(T_{eq}^2 m_{pl})^{1/3} \sim 100 \text{ MeV}, \quad (3.6)$$

lo cual apunta a un método donde la materia oscura interactúa fuertemente consigo misma y poseería una escala de masa ligeramente debajo de los GeV, de ahí el nombre del modelo *Strongly Interacting Massive Particles* o SIMP. El método SIMP, también aplica para mecanismos de aniquilación $4 \rightarrow 2$, cuando la reacción $3 \rightarrow 2$ está prohibida. La masa estimada anteriormente para los SIMP puede ser demostrada resolviendo las ecuaciones de Boltzmann de forma explícita, pero para eso es necesario expresar algunas variables en cantidades med-

ibles, como lo es la densidad numérica

$$n_{DM} = \frac{\xi m_P \eta s}{m_{DM}} = \frac{c T_{eq} s}{m_{DM}}, \quad (3.7)$$

donde $\xi = \rho_{DM}/\rho_b \approx 5.4$, [5], $m_p = 0.938$ GeV es la masa de un protón, s es la densidad de entropía del universo, η es la rata de densidad bariónica entre densidad de entropía, y $T_{eq} \approx 0.8$ eV es la temperatura de igualamiento de radiación-materia.

3.4 Ecuaciones de Boltzmann

En el universo temprano, se tiene que muchas partículas, reliquias o especies pueden colisionar y crear otras especies. Para poder analizar estos procesos, podemos emplear las técnicas de la mecánica estadística y describir estas reliquias usando una densidad de espacio de fase $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$, la cual está relacionada con la densidad numérica de la forma

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(\vec{p}, t), \quad (3.8)$$

donde g , es el número de grados de libertad interno de la partícula [18]. Se puede notar cómo la densidad numérica es dependiente de t pero no de \vec{x} , esto se debe a que en el universo temprano, durante el baño térmico, el universo era altamente homogéneo por lo que la posición no afecta la densidad de reliquias. Podemos entonces analizar la evolución de la densidad numérica usando la ecuación de Boltzmann, la cual, usando operadores se representa de la forma

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f], \quad (3.9)$$

donde \hat{L} es el operador de Liouville y \hat{C} el operador de colisión, la generalización covariante del operador de Liouville en relatividad general se expresa como

$$\hat{L} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}, \quad (3.10)$$

donde $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ es el simbolo de Christoffel. Si luego de esto usamos la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (3.11)$$

donde R es el factor de escala, el cual es explícitamente dependiente del tiempo y (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas. Si además asumimos que la dependencia de la función de partición f , con el momento, es isotrópica, esto implica que $f = f[E, t]$ y el operador de Livouille resulta

$$\hat{L}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - H|p|^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (3.12)$$

Usando la definición de densidad numérica y considerando la en función de la densidad de espacio de fase, esta se expresa como

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(E, t) d^3 p, \quad (3.13)$$

Con esto, la ecuación de Boltzmann puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{C[f]}{E} d^3 p, \quad (3.14)$$

donde g , es el número de grados de libertad internos del sistema y H es el parámetro de Hubble. Se puede hallar información mas detallada sobre el procedimiento para pasar de la ecuación (3.12) a la ecuación (3.14) en el apéndice A. Cuando se consideran interacciones de partículas de la forma $X + a + b \dots \longleftrightarrow i + j + \dots$, el operador de colisión es dado por [14]

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{C[f]}{E} d^3 p = & - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_a + p_b \dots - p_i + p_j \dots) \\ & \times [(|M|_{\psi+a+b \dots \rightarrow i+j \dots}^2 f_a f_b \dots f_\psi (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \dots) \\ & - (|M|_{i+j \dots \rightarrow \psi+a+b \dots}^2 f_i f_j \dots (1 \pm f_a)(1 \pm f_b) \dots (1 \pm f_\psi))], \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde inicialmente se usan los factores de integración de fase espacial, que se describen como

$$d\Pi = g \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E}, \quad (3.16)$$

luego se considera la función delta $\delta^4(p_\psi + p_a + p_b \dots - p_i + p_j \dots)$ la cual define los requerimientos del operador de colisión sobre todo indicando la conservación del momento y de la energía. Se sigue por agregar la matriz de interacción $|M|^2$ la cual asumimos como reversible, significando que tiene la capacidad de determinar el estado inicial de un sistema en función de su estado final. Los factores f_i son los de densidad del espacio de fase de las partículas de tipo i respectivamente. Cuando se expresan los factores $(1 \pm f_i)$ para considerar la exclusión de Pauli en el caso del signo más y el aumento de Bose en el caso del signo menos. Ahora, es más conveniente considerar los problemas que se van a analizar a gran escala, por lo que se realiza un cambio de variable para trabajar en un marco de referencia comóvil, de la forma que resulte $Y = n/s$, donde s es la densidad de entropía del universo y tiene la forma

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3, \quad (3.17)$$

donde g_{*s} representa el numero efectivo de grados de libertad relativistas que contribuye a la entropía del universo. Lo que resulta en que para este sistema se puede expresar la derivada de s en función del tiempo como

$$\dot{s} = -3sH, \quad (3.18)$$

donde tenemos que H puede ser expresado como

$$H = 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{pl}}, \quad (3.19)$$

donde g_* representa el numero efectivo de grados de libertad relativistas que contribuye a la densidad de energía del universo. A altas energías se puede tomar $g_* = g_{*s} \approx 100$ debido a que se esta trabajando con temperaturas muy altas, esto se puede ver claramente en la figura (3.1).

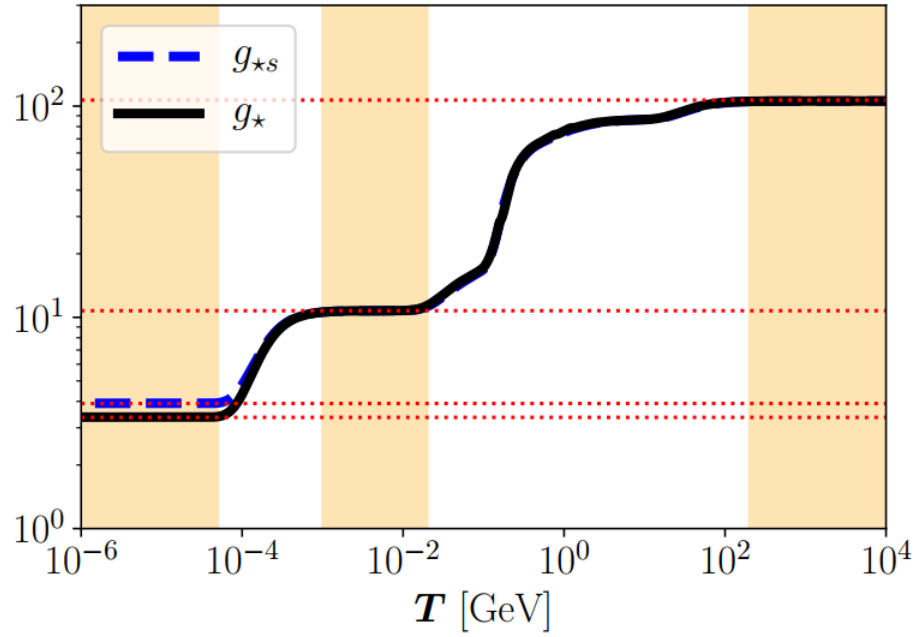


Figura 3.1: Evolución de g_* y g_{*s} en función de la temperatura. Imagen proporcionada por [16]

Teniendo estas consideraciones, se llega a

$$\dot{Y} = \frac{\dot{n} + 3Hn}{s}, \quad (3.20)$$

Es importante tener en cuenta que el término de colisión será expresado en función de la temperatura y no del tiempo, por lo que se introduce otro cambio de variable de la forma $x = m/T$ donde m representa la masa de la partícula, y T la temperatura. Esta nueva variable también representa el tiempo debido a como la temperatura del universo va gradualmente decreciendo debido a su expansión. Finalmente, combinando la ecuación (3.18), (3.19) y (3.20) podemos reescribir la ecuación de Boltzmann con variables mas útiles:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} = & -\frac{x}{H(m)s} - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \\ & \times |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_a + p_b \dots - p_i + p_j \dots) \\ & \times [f_a f_b \dots f_\psi - f_i f_j \dots]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para el caso del análisis del mecanismo *Freeze-out* del modelo WIMP donde se considera una interacción de aniquilación $2 \rightarrow 2$ [14], se usan las ecuaciones (3.14) y (3.15), donde se realiza el análisis para la aniquilación y creación de dos partículas para resolver el operador colisión, resultando así

$$\frac{dn_\psi}{dt} + 3Hn_\psi = -\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v| \rangle [n_\psi^2 - (n_\psi^{EQ})^2], \quad (3.22)$$

donde ψ representa las reliquias WIMP y X las partículas que pueden generar esta aniquilación, debido a esto n_ψ sería la densidad numérica de las reliquias, n_ψ^{EQ} es la densidad numérica en equilibrio y $\langle \sigma |v| \rangle$ es la sección eficaz. Cuando se considera el mecanismo de *Freeze-out* pero con una interacción de aniquilación $3 \rightarrow 2$, como lo describe el modelo SIMP, se llega a la ecuación de Boltzmann

$$\frac{dn_\psi}{dt} + 3Hn_\psi = -[n_\psi^3 - n_\psi^2 n_\psi^{EQ}] \langle \sigma v^2 \rangle_{3 \rightarrow 2}. \quad (3.23)$$

Finalmente, cuando se trabaja con el método *Freeze-in* como lo hace el modelo FIMP, se sigue la misma ecuación que el mecanismo WIMP, pero debido a sus valores de sección eficaz muy bajos se aproxima la ecuación a la forma

$$\frac{dn_\psi}{dt} + 3Hn_\psi = \langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}} |v| \rangle (n_\psi^{EQ})^2. \quad (3.24)$$

Estas tres ecuaciones (3.22), (3.23) y (3.24) serán las que se resolverán durante el trabajo de grado, tanto de forma analítica como numérica.

Capítulo 4

Metodología

4.1 Procedimiento analítico para modelo WIMP

Lo primero que se tiene que recordar sobre el modelo WIMP, es que llega a tener su densidad numérica actual a través del método *Freeze-out* y que sigue un proceso de interacción $2 \rightarrow 2$ lo que significa que en esta interacción dos partículas de materia oscura se aniquilan para producir dos partículas del modelo estándar, las cuales podrían ser de cualquier naturaleza pero no se consideran ningunas específicas para simplificar el problema. Para poder realizar este análisis suponemos que las partículas de materia oscura son estables, por lo que se puede apreciar la densidad numérica actual. Se asume que las reliquias WIMP, interactúan de la forma explicada anteriormente que se puede expresar como

$$\psi\bar{\psi} \rightarrow X\bar{X}, \quad (4.1)$$

donde ψ representa la partícula de materia oscura y $\bar{\psi}$ su correspondiente antipartícula, y las partículas X y \bar{X} representan las partículas en las cuales se pueden aniquilar las reliquias [14]. Para que esta interacción pueda suceder es necesario que se conserve la energía de la forma

$$E_{\psi} + E_{\bar{\psi}} = E_X + E_{\bar{X}}. \quad (4.2)$$

Una vez establecidas estas características del mecanismo, se puede empezar el cálculo de la densidad de reliquias de materia oscura usando la ecuación (3.21). Pero antes de aplicarla al sistema, se consideran y asumen ciertas propiedades para simplificar la ecuación. Inicialmente, se asume que las partículas X y \bar{X} están en equilibrio térmico para que sigan la distribución de Maxwell-Boltzmann, esto es posible ya que se están trabajando partículas relativistas. Luego se considera que el potencial químico para estas partículas es cero debido a que las interacciones externas que realizan serán mucho mayores que las que se analizarán con las partículas de materia oscura, por lo que consideramos que las partículas están en equilibrio químico. Con estas consideraciones, se pueden definir las funciones de distribución de estas partículas de la forma

$$f_X = e^{-E_X/T}, \quad (4.3)$$

$$f_{\bar{X}} = e^{-E_{\bar{X}}/T}. \quad (4.4)$$

Ahora, recordando la conservación de la energía que se describe en la ecuación (4.2), se puede llegar a que

$$f_X f_{\bar{X}} = f_{\psi}^{EQ} f_{\bar{\psi}}^{EQ}, \quad (4.5)$$

donde los superíndices EQ representan las partículas en equilibrio térmico. Individualmente podemos expresar estas ecuaciones de la forma

$$f_X f_{\bar{X}} = e^{-(E_X + E_{\bar{X}})/T}, \quad (4.6)$$

$$f_{\psi} f_{\bar{\psi}} = e^{-(E_{\psi} + E_{\bar{\psi}})/T}. \quad (4.7)$$

Si volvemos a la ecuación (3.21), se observa que para este caso quedaría $[f_{\psi} f_{\bar{\psi}} - f_X f_{\bar{X}}]$ pero a través de la ecuación (4.5) se puede reescribir solo en función de las partículas de materia oscura

$$[f_{\psi} f_{\bar{\psi}} - f_{\psi}^{EQ} f_{\bar{\psi}}^{EQ}]. \quad (4.8)$$

Con estas consideraciones se rempazan los otros términos en (3.21) y se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} = & -\frac{x}{H(m)s} - \int d\Pi_\psi d\Pi_{\bar{\psi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} \\ & \times |M|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \\ & \times [f_\psi f_{\bar{\psi}} - f_\psi^{EQ} f_{\bar{\psi}}^{EQ}], \end{aligned} \quad (4.9)$$

la cual también puede ser escrita de la forma

$$\frac{dY}{dx} = \frac{-x \langle \sigma | v | \rangle s}{H(m)} (Y^2 - Y_{EQ}^2), \quad (4.10)$$

donde $H(m) = 1.66 g_*^{1/2} \frac{m^2}{x^2 m_{pl}}$ y $Y = n_\psi/s$ como se había planteado anteriormente, y representa el número de reliquias ψ por unidad de volumen comóvil, por consecuencia $Y_{EQ} = n_\psi^{EQ}/s$ equivale al número de reliquias ψ en equilibrio por unidad de volumen comóvil, la cual para reliquias frías tiene una forma general dada por [14]

$$Y_{EQ}(x) = \frac{45x^2}{4\pi^4} \frac{g}{g_{*s}} K_2(x), \quad (4.11)$$

donde $K_2(x)$, es la función de Bessel de segunda especie. En la literatura es común ver esta ecuación aproximada para limites no relativistas quedando

$$\begin{aligned} Y_{EQ} &= \frac{45}{2\pi^4} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2} \frac{g}{g_{*s}} x^{3/2} e^{-x} \\ &= 0.145 \frac{g}{g_{*s}} x^{3/2} e^{-x}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Es importante recalcar, que la ecuación (4.12) solo es válida para valores no relativistas por lo que se puede usar para analizar la evolución termodinámica en los rangos de $x > 3$, debido a que por debajo de este rango se empieza a trabajar con física relativista. Para el caso del mecanismo WIMP y SIMP puede servir perfectamente, pero cuando se trabaja con el mecanismo FIMP sí es necesario usar la forma general (4.11). En la figura (4.1), se puede observar claramente cómo en el rango de $x < 3$ la ecuación de Y_{EQ} no relativista se desvía de la general.

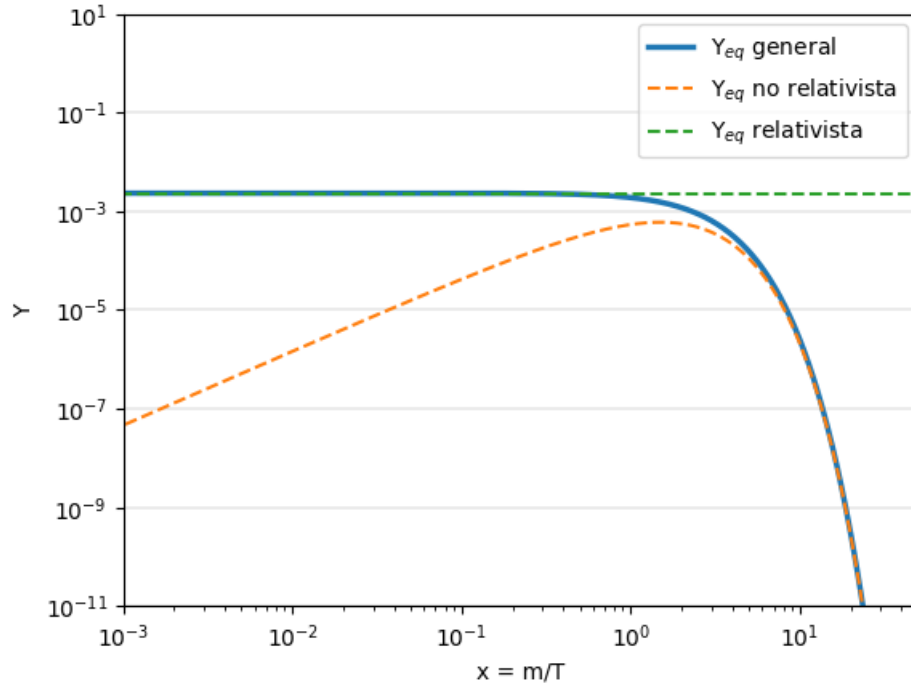


Figura 4.1: Comparación de Y_{EQ} en su forma general (línea azul), su forma no relativista (línea naranja) y la su forma relativista (línea verde). El eje vertical representa la densidad numérica Y , y en el eje horizontal la masa de la partícula m dividido por la temperatura del universo T . Tanto Y como $x = m/T$ son adimensionales.

Solo faltaría definir la sección eficaz de aniquilación de la ecuación (4.10), esta se toma como

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma v \rangle = & (n^{EQ})^{-2} \int d\Pi_\psi d\Pi_{\bar{\psi}} d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} |M|^2 (2\pi)^4 \\
 & \times \delta^4(p_\psi + p_{\bar{\psi}} - p_X - p_{\bar{X}}) \\
 & \times e^{-E_\psi/T} e^{-E_{\bar{\psi}}/T},
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

la cual tiene gran importancia en el análisis que se está realizando, ya que se trata de uno de los parámetros que se estarán variando para poder comparar los resultados obtenidos con la densidad de reliquias observadas en la actualidad. También se puede apreciar que es simplemente otra manera de formular la ecuación (3.22), donde consideramos el marco de referencia comóvil y la dependencia del sistema a la temperatura del universo. Desafortunadamente, no existe solución exacta a esta ecuación de Boltzmann, pero si se consideran algunos casos específicos se puede llegar a una aproximación con un buen nivel de precisión. Para iniciar

se debe recordar que estamos analizando el universo temprano donde la diferencia entre Y y Y_{EQ} debe haber sido muy baja. Debido a esto, es posible concentrar el estudio a esta diferencia que se expresa como

$$\Delta = Y - Y_{EQ}, \quad (4.14)$$

y su derivada en función de x sería

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dY_{EQ}}{dx}. \quad (4.15)$$

Ahora se quiere llegar a una forma de la ecuación (4.10) en función de Δ y Y_{EQ} , para esto, multiplicamos el factor cuadrático que esta en paréntesis

$$\frac{dY}{dx} = -\lambda x^{-2}(Y^2 - Y_{EQ}^2) = -\lambda x^{-2}(Y - Y_{EQ})(Y + Y_{EQ}), \quad (4.16)$$

donde para simplificar los cálculos llamamos

$$\lambda = \frac{x \langle \sigma v \rangle s}{H(m)}. \quad (4.17)$$

Seguimos por reemplazar y considerar (4.14) en (4.16) recordando que despejando también podemos llegar a $(Y + Y_{EQ}) = \Delta + 2Y_{EQ}$

$$\frac{dY}{dx} = -\lambda x^{-2}\Delta(\Delta + 2Y_{EQ}), \quad (4.18)$$

Sustituyendo la ecuación (4.18) en (4.15) se obtiene

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{dY_{EQ}}{dx} - \lambda x^{-2}\Delta(\Delta + 2Y_{EQ}). \quad (4.19)$$

Es importante aclarar que empezamos por analizar el sistema para $x > 1$ y $x \ll x_f$ donde x_f representa el punto de *Freeze-out*. Adicionalmente como se había mencionado anteriormente, Δ toma valores muy pequeños y $\frac{d\Delta}{dx}$ también toma valores muy pequeños, debido a esto realizamos la aproximación $\frac{d\Delta}{dx} \approx 0$, y tomando esto en cuenta, se llega a una solución

aproximada de

$$\Delta \approx -\frac{x^2 Y'_{EQ}}{\lambda(\Delta + 2Y_{EQ})}, \quad (4.20)$$

nuevamente debido a que Δ tiene valores muy pequeños comparado con Y_{EQ} , es posible no considerarlo en el denominador, por otra parte, se está trabajando para $1 < x \ll x_f$, se puede hacer la siguiente consideración usando la ecuación (4.12):

$$\frac{Y'_{EQ}}{Y_{EQ}} = \frac{3}{2x} - 1 \approx -1. \quad (4.21)$$

Usando estas dos aproximaciones en la ecuación (4.20) llegamos a

$$\Delta \approx \frac{x^2}{2\lambda}. \quad (4.22)$$

Ahora se tiene que estudiar el caso luego del *Freeze-out*, para ver de forma mas completa cómo evolucionan las partículas de materia oscura durante esta transición. Se toma por consecuencia $x \gg x_f$. En este sistema ya no se puede tomar Δ como una cantidad pequeña, la aproximación apropiada sería mas bien $\Delta \approx Y$, donde $Y \gg Y_{EQ}$ debido a que Y_{EQ} tiende a cero para valores de x muy altos. Si se vuelve a la ecuación (4.20) teniendo esto en cuenta, considerando que $Y_{EQ} \rightarrow 0$, llegamos a

$$\Delta' \approx -\frac{\lambda}{x^2} \Delta^2. \quad (4.23)$$

Esto resulta siendo una ecuación diferencial que puede ser resuelta por separación de variables si se expresa como

$$\frac{d\Delta}{\Delta^2} = -\frac{\lambda}{x^2} dx. \quad (4.24)$$

Se sigue por integrar de ambos lados por su respectiva variable para solucionar la ecuación

$$\int_{\Delta_f}^{\Delta_\infty} \Delta^{-2} d\Delta = -\lambda \int_{x_f}^{\infty} x^{-2} dx, \quad (4.25)$$

donde el índice ∞ representa el valor de Y en la actualidad, y el índice f su valor en el momento del *Freeze-out*. Considerando a $Y_\infty \gg Y_f$ y adicionalmente $Y_f = \Delta_f$ podemos

hacer tender el valor de Y_f y Δ_f a cero, dando como resultado

$$Y_\infty = \Delta_\infty = \frac{x_f}{\lambda}. \quad (4.26)$$

Se puede apreciar que la solución hallada es la representación del número de reliquias de materia oscura actual en el universo por volumen comóvil, es una de las ecuaciones que serán puestas a comparación en las secciones posteriores.

4.2 Procedimiento numérico para modelo WIMP

Es importante recalcar que no existen soluciones analíticas exactas para la ecuación (4.10); sin embargo, se puede llegar a una solución aproximada usando métodos numéricos. En esta sección se usa integración numérica para lograr un resultado que concuerde con lo que se halló anteriormente a través de métodos y aproximaciones analíticas. Lo primero que hay que tener en cuenta es que a diferencia del análisis analítico, para el caso numérico es necesario conocer los valores de todas las constantes que se van a usar y aparecen en nuestra ecuación (4.10). Para lograr esto, se trabaja con la forma (4.16) y se descompone λ , donde $H(m)$ lo podemos expresar en función de $x = m/T$ como

$$H(m) = 1.66g_*^{1/2} \frac{m^2}{x^2 m_{pl}}, \quad (4.27)$$

donde m nos indica la masa de la reliquia WIMP que estamos trabajando, para este proyecto se usa $m = 100$ GeV. También hay que resaltar que el valor de la entropía s también cambia en función de x , siguiendo la expresión

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} \frac{m^3}{x^3}. \quad (4.28)$$

Con estos datos y la ecuación (4.12), se puede plasmar la forma completa de la ecuación de Boltzmann para ser resuelta de forma numérica. Para hallar esta solución se usó el lenguaje de programación Python y los paquetes de numpy y scipy. El integrador usado es un método

de scipy llamado SolvIvp, el cual sirve para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias. Es importante tener en cuenta que este método, igual que muchos integradores que se encuentran, usan por defecto el mecanismo Runge-Kutta de cuarto orden para hallar sus soluciones, lo cual es un problema para este caso ya que se trata con una ecuación diferencial que cambia de forma brusca de ordenes de magnitud, a causa de esto fue necesario probar diferentes métodos.

Se llegó a la conclusión que el método LSODA es el que mejor trabaja estos problemas debido que, a diferencia de los métodos explícitos como el Runge-Kutta de cuarto orden, que calculan las soluciones de manera explícita en cada paso, los métodos implícitos como el LSODA consideran relaciones de recurrencia entre pasos consecutivos y pueden ser más robustos en situaciones donde las tasas de cambio varían abruptamente. Esto se debe a que los métodos implícitos permiten utilizar pasos de tiempo más grandes sin que la estabilidad y precisión se vean comprometidas. Lo que queremos hallar ahora, es una curva para la evolución termodinámica de las reliquias que concuerde con los valores observados de densidad numérica de materia oscura en la actualidad $\Omega_c h^2 = 0.12 \pm 0.0012$ [5]. Recordando que la ecuación está en función de Y , hacemos el siguiente análisis para llegar a Y_0 que sería el valor de Y observado en la actualidad [19], el cual se ha mantenido constante luego del freeze out

$$mY_0 = \Omega_{MO} h^2 \frac{1}{s_0} \frac{\rho_c}{h^2} = 4.3 \times 10^{-10} \pm 4.3 \times 10^{-12} \text{ GeV}, \quad (4.29)$$

con $\rho_c = 1.05 \times 10^{-5} h^2 \text{ GeV/cm}^3$ siendo la densidad crítica de energía y $s_0 = 2.69 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$ la densidad de entropía actual. Por ahora, se considera la masa de las reliquias como $m = 100 \text{ GeV}$, mas adelante se observará el comportamiento de la solución al variar m , pero por ahora, para este caso $Y_0 = 4.3 \times 10^{-12} \text{ GeV}$. Teniendo en cuenta todos los factores anteriores se llegó a la solución en la figura (4.2).

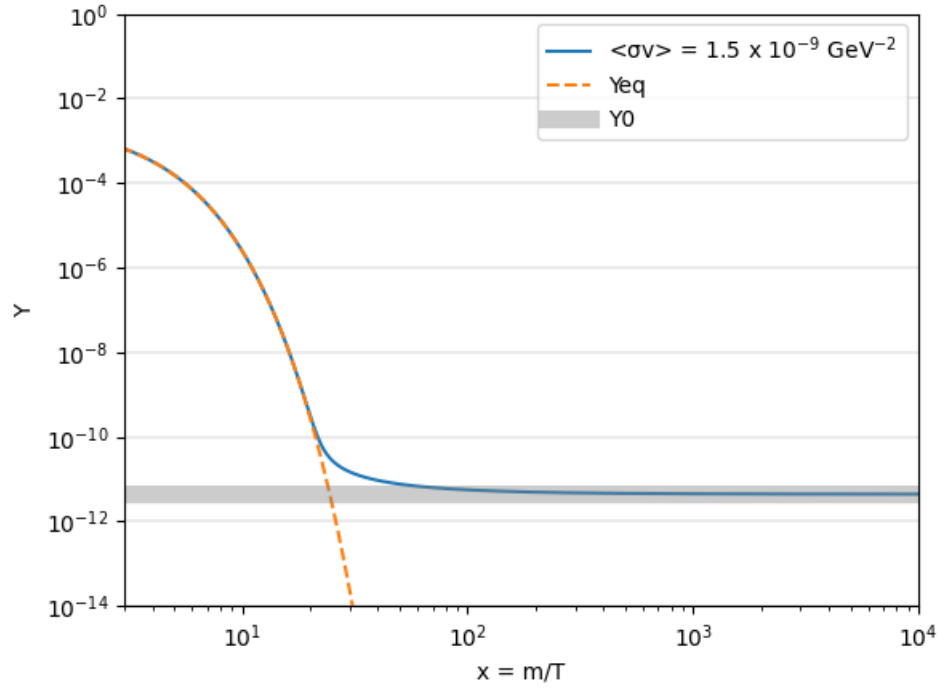


Figura 4.2: Solución numérica de la ecuación (4.10) que concuerda al Y_0 estimado para $m = 100$. Donde la línea azul representa la solución hallada con $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$, la línea naranja punteada, muestra la evolución de la densidad numérica en equilibrio, y el área en gris, los rangos de valores aproximados de la densidad numérica de reliquias actual.

La figura (4.2), ofrece mucha información relevante. Se puede observar, inicialmente, que la solución sigue el estado de equilibrio, y cuando se pasa de $x \approx 20$ empieza el freeze-out debido a que la tasa de interacciones comienza a disminuir como se había discutido anteriormente, y la curva se desvía del estado de equilibrio hasta llegar al valor constante observado. Adicionalmente, se halló que el valor de la sección eficaz que mejor se acomoda a los datos observados es $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$, y se puede apreciar en la figura (4.3) cómo $\langle\sigma v\rangle$ es inversamente proporcional al Y final luego del freeze-out, lo cual concuerda con la teoría, ya que a mayor $\langle\sigma v\rangle$, mayor será la tasa de interacciones lo que provocará que menos reliquias sobrevivan antes del freeze-out, y se llegue a una densidad numérica inferior.

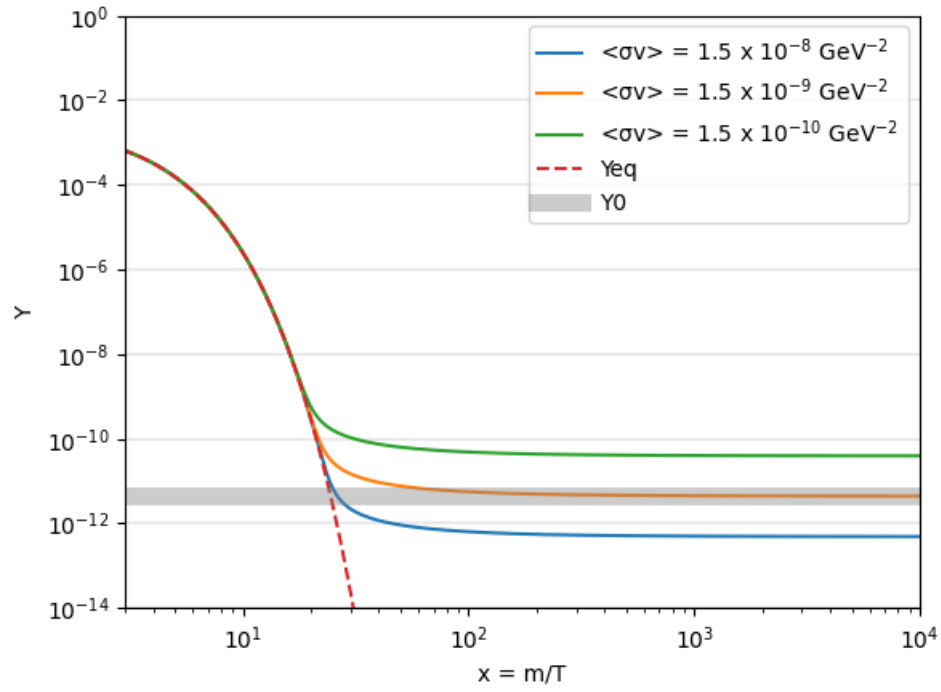


Figura 4.3: Solución numérica de la ecuación (4.10) con $m = 100 \text{ GeV}$ para tres secciones eficaces posibles, $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-10} \text{ GeV}^{-2}$ para la línea azul, $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$ para la línea naranja y $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-8} \text{ GeV}^{-2}$ para la línea verde.

Hasta ahora se han visto soluciones donde se ha usado la misma masa de $m = 100 \text{ GeV}$ para las reliquias, a continuación se hace el análisis cambiando la magnitud de m .

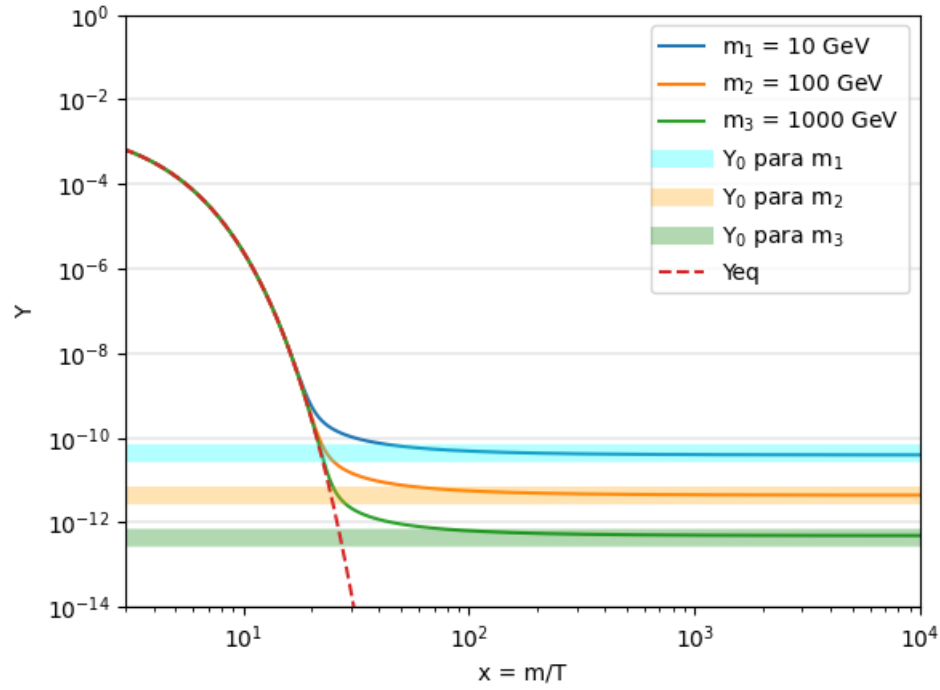


Figura 4.4: Efecto de la masa de las partículas WIMP en la solución de la ecuación (4.10) y en el Y_0 observado. Donde, para cada valor de m se tiene su solución en línea continua y su Y_0 estimado, los colores azules para $m = 10 \text{ GeV}$, naranjas para $m = 100 \text{ GeV}$ y verdes para $m = 1000 \text{ GeV}$

En la figura (4.4) se puede apreciar claramente como, al igual que $\langle\sigma v\rangle$, la masa también es inversamente proporcional a Y y que acorde con la ecuación (4.29), la densidad observada en la actualidad posee esta misma relación con m .

Finalmente, para ver la comparación clara de la solución hallada de forma analítica y numérica, se graficaron juntas para un valor de $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-9} \text{ GeV}^{-2}$ y $m = 100 \text{ GeV}$ en la figura (4.5).

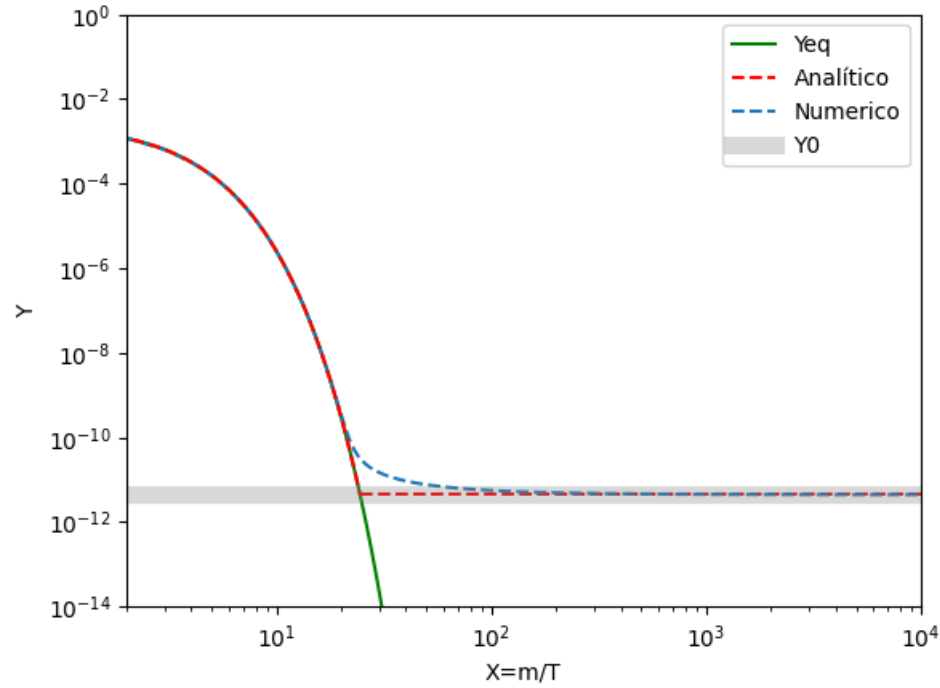


Figura 4.5: Solución analítica (línea azul) y numérica (línea roja), de la ecuación (4.10) para $m = 100$ GeV.

Se puede observar que el único momento donde no concuerdan las soluciones es durante el freeze-out, esto es debido a que el resultado analítico es una función compuesta donde para $x < x_f$ sigue la ecuación de equilibrio (4.12), y para $x > x_f$ se vuelve la ecuación (4.26), la cual es una constante que está en función del punto de freeze-out x_f . A pesar de esto, las soluciones se comportan de forma equivalente para los rangos altos de x , por lo que ambas concuerdan con los valores observados [5].

4.3 Procedimiento numérico para el mecanismo FIMP

El proceso numérico usado para los mecanismos WIMP y FIMP son muy similares, la diferencia radica en la sección eficaz y los valores iniciales escogidos. La ecuación de Boltzmann para WIMP, puede usarse para hallar la solución del mecanismo FIMP, pero el término de Y^2 se volverá despreciable, por lo que podemos simplificar la ecuación para que quede de la forma

$$\frac{dY}{dx} = \lambda x^{-2} Y_{EQ}^2. \quad (4.30)$$

Algo importante que mencionar, es que la ecuación (4.30) ya no es una ecuación diferencial estable como la de WIMP, por lo que provoca que los valores iniciales elegidos sí afecten la solución hallada. Para este documento, se usan valores iniciales de $x_0 = 10^{-1}$ y $y_0 = 0$ debido a que el método FIMP consiste en un mecanismo donde se inicia con una densidad de reliquia muy baja para ir produciendo rápidamente hasta llegar al punto del freeze-in. En la figura (4.6), se puede ver este comportamiento claramente. A diferencia del mecanismo WIMP, con este método las reliquias no siguen la curva de equilibrio, por lo que no están en equilibrio térmico, y de igual forma la sección eficaz, es directamente proporcional con la densidad final de reliquias. Esto es un resultado esperado, ya que a mayor $\langle\sigma v\rangle$, mayor será la tasa de interacción, por lo que se producirán mas reliquias antes de llegar al freeze-in resultando en una densidad mas alta.

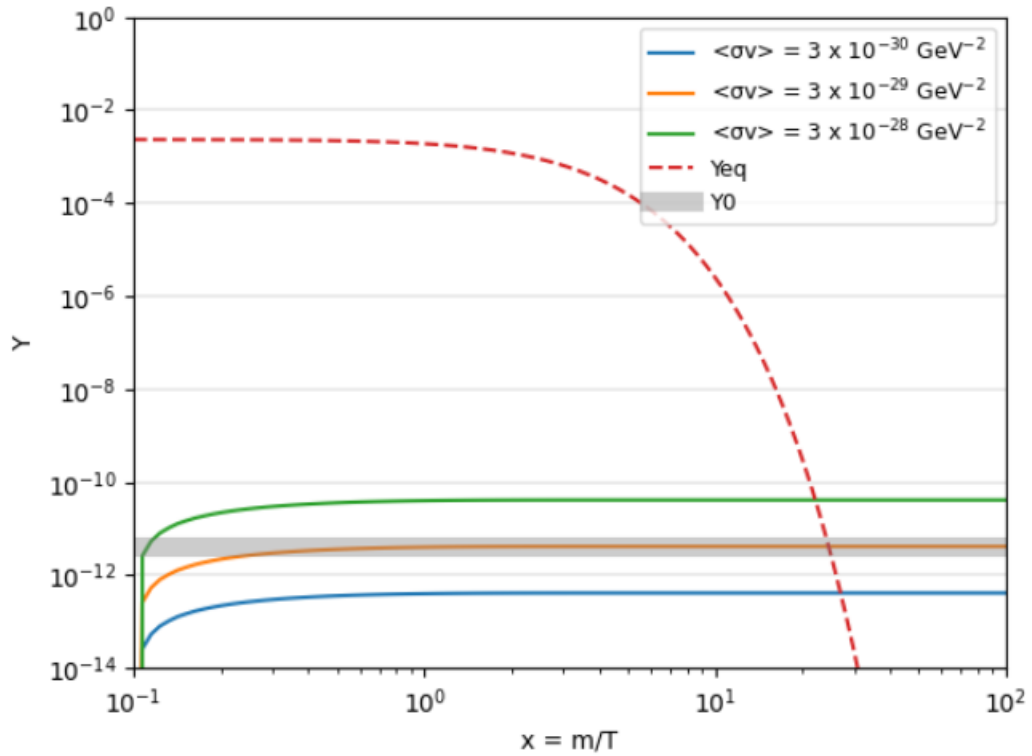


Figura 4.6: Solución numérica de la ecuación (4.30), que describe el mecanismo FIMP con $m = 100 \text{ GeV}$ para tres secciones eficaces posibles, $\langle\sigma v\rangle = 3 \times 10^{-30} \text{ GeV}^{-2}$ para la línea azul, $\langle\sigma v\rangle = 3 \times 10^{-29} \text{ GeV}^{-2}$ para la línea naranja, y $\langle\sigma v\rangle = 3 \times 10^{-28} \text{ GeV}^{-2}$ para la línea verde.

Adicionalmente, se puede observar en la figura (4.6) cómo para $m = 100 \text{ GeV}$ y los valores iniciales de $x_0 = 10^{-1}$ y $y_0 = 10^{-75}$ se necesita $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-29} \text{ GeV}^{-2}$ para llegar a la densidad de reliquias observadas en la actualidad. Este valor de $\langle\sigma v\rangle$ para llegar a la densidad que se busca, puede variar drásticamente al cambiar los otros parámetros del sistema.

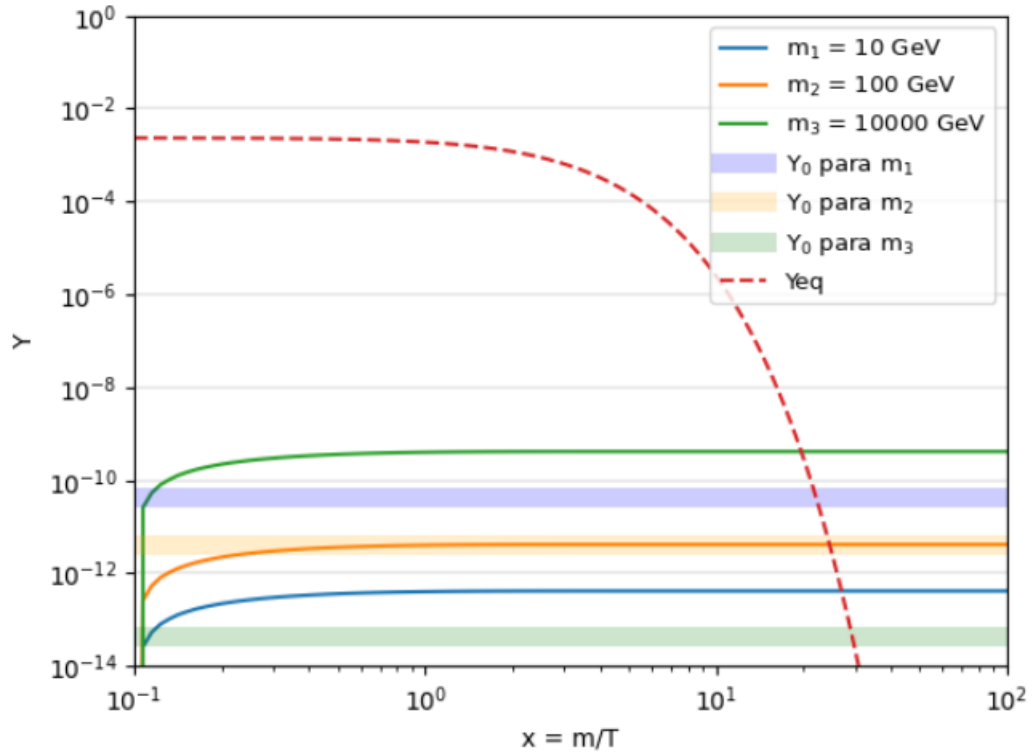


Figura 4.7: Efecto de la masa de las partículas FIMP en la solución de la ecuación (4.30) y en el Y_0 observado usando $\langle\sigma v\rangle = 1.5 \times 10^{-29} \text{GeV}^{-2}$ y valores iniciales de $x_0 = 10^{-1}$ y $y_0 = 10^{-75}$. Para cada valor de m , se tiene su solución en línea continua y su Y_0 estimado en franjas horizontales, los colores azules para $m = 10 \text{ GeV}$, naranjas para $m = 100 \text{ GeV}$, y verdes para $m = 10.000 \text{ GeV}$.

Lo primero que se puede notar en la figura (4.7), es cómo para las masas $m = 10 \text{ GeV}$ y $m = 10.000 \text{ GeV}$ sus Y_0 correspondiente no se alinean con las soluciones halladas, esto se debe a que a m es directamente proporcional a la solución final, pero Y_0 es inversamente proporcional como se observa en la ecuación (4.29). También se trató de encontrar una solución aproximada para el mecanismo FIMP, pero resultó ser una tarea mucho mas compleja de lo esperado, por lo que no logro realizar en este estudio.

4.4 Procedimiento analítico para el mecanismo SIMP

En esta sección se halla una aproximación analítica del mecanismo SIMP, para llegar a esta aproximación se usan métodos similares a los usados para el mecanismo WIMP, pero

esta vez, usaremos la ecuación diferencial de Boltzmann de las reliquias SIMP, ecuación (4.37). Recordando que se está hallando una aproximación para $x \rightarrow \infty$ por lo que podemos considerar $Y_{EQ} = 0$, dejando la ecuación (4.37) como

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\langle \sigma v^2 \rangle s^2}{H(m)x} Y^3. \quad (4.31)$$

Con esta forma simplificada se puede ahora realizar separación de variable

$$\int_{x_f}^{\infty} Y^{-3} dY = - \int_{x_f}^{\infty} \frac{\langle \sigma |v|^2 \rangle s^2}{H(m)x} dx \quad (4.32)$$

$$-\frac{1}{2}(Y_{\infty}^{-2} - Y_{x_f}^{-2}) = - \int_{x_f}^{\infty} \frac{\langle \sigma |v|^2 \rangle s^2}{H(m)x} dx, \quad (4.33)$$

donde hacemos la aproximación $Y_{\infty} \ll Y_{x_f}$, resultando

$$Y_{\infty}^{-2} = 2 \int_{x_f}^{\infty} \frac{\langle \sigma |v|^2 \rangle s^2}{H(m)x} dx. \quad (4.34)$$

Para estos estudios se ha considerado el término $\langle \sigma |v|^2 \rangle$ como constante por lo que lo podemos sacar de la integral, adicionalmente reemplazamos s y $H(m)$ por las ecuaciones (4.28) y (4.27) respectivamente:

$$\begin{aligned} Y_{\infty}^{-2} &= \frac{2 \langle \sigma |v|^2 \rangle (2\pi^2)^2 g_{*s}^2 m^6 m_{pl}}{(45)^2 (1, 66) g_*^{1/2} m^2} \int_{x_f}^{\infty} \frac{x^2}{x^6 x} dx \\ &= \frac{(2)(2\pi^2)^2}{(45)^2 (1, 66)} \langle \sigma |v|^2 \rangle g_{*s}^2 m^4 m_{pl} g_*^{-1/2} \left(-\frac{1}{4}\right) (x_{\infty}^{-4} - x_f^{-4}), \end{aligned} \quad (4.35)$$

como se tiene que $x_{\infty} \rightarrow \infty$ entonces $x_{\infty}^{-4} \approx 0$, dando la respuesta final de

$$Y_{\infty} = \left(\frac{2\pi^4}{(45)^2 (1, 66)} \langle \sigma |v|^2 \rangle g_{*s}^2 m^4 m_{pl} g_*^{-1/2} x_f^{-4} \right)^{-1/2}, \quad (4.36)$$

la cual puede ser graficada, comparándola al resultado que se hallará en la siguiente sección, la cual cubre la solución numérica de la ecuación del mecanismo SIMP.

4.5 Procedimiento numérico para el mecanismo SIMP

Igual que para el caso de WIMP y FIMP, lo primero que tenemos que hacer para hallar la solución será poner nuestra ecuación (3.23) en función de $Y = n/s$ y $x = m/T$, realizando estos cambios de variable la ecuación diferencial para el mecanismo SIMP quedaría como

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\langle\sigma v^2\rangle s^2}{H(m)x}(Y^3 - Y^2 Y_{EQ}), \quad (4.37)$$

la cual describe la evolución de las reliquias SIMP. Igual que las ecuaciones estudiadas anteriormente, no existe una solución analítica exacta de la ecuación diferencial del mecanismo SIMP, por lo que se iniciará el estudio hallando la solución numérica usando métodos muy similares a los usados para los dos otros mecanismos. Se había mencionado para el caso de WIMP y FIMP, que a estas ecuaciones se les conoce como ecuaciones diferenciales rígidas o *stiff differential equations*, las cuales cambian de orden de magnitud de forma brusca en cada paso realizado en la solución numérica. Para el caso del mecanismo SIMP, este fenómeno es aún mas fuerte, por lo que la solución hallada empieza mas cerca del punto de freeze-out para poder procesar el punto de transición de forma mas fluida.

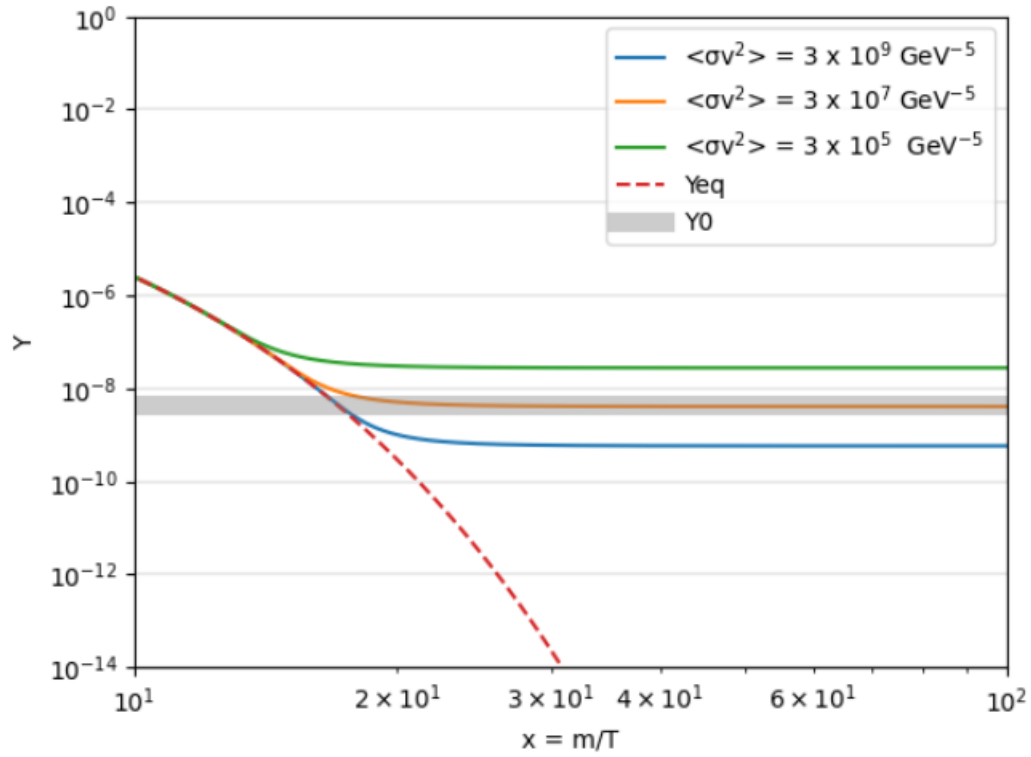


Figura 4.8: Efecto de variar el parámetro $\langle\sigma v^2\rangle$ en la solución de la ecuación diferencial del mecanismo SIMP (4.37) para una masa de 100 MeV. Donde la línea azul corresponde a $\langle\sigma v^2\rangle = 3 \times 10^9 \text{ GeV}^{-5}$, la línea naranja a $\langle\sigma v^2\rangle = 3 \times 10^7 \text{ GeV}^{-5}$ y la línea verde $\langle\sigma v^2\rangle = 3 \times 10^5 \text{ GeV}^{-5}$. El Y_0 estimado para $m = 100 \text{ GeV}$ se muestra en la franja gris horizontal.

A primera vista, se puede apreciar que el comportamiento de Y en la figura (4.8), es muy similar a la que se halló para el mecanismo WIMP. Donde el termino $\langle\sigma v^2\rangle$, es nuevamente inversamente proporcional a la densidad numérica final luego del freeze-out, en los sistemas pasados a ese término se le llamaba sección eficaz, pero ahora debido a que la velocidad esté elevada al cuadrado, ya no se le puede denominar de esta forma, además de que ya no se está considerando una colisión entre dos partículas, sino entre tres de forma simultanea, lo que vuelve el concepto de sección eficaz para este mecanismo algo mas simbólico, por lo que el termino $\langle\sigma v^2\rangle$ toma valores mas grandes de lo que se esperaría como se puede observar en la figura (4.8), donde para una masa de 100 GeV es necesario usar $\langle\sigma v^2\rangle = 3 \times 10^2 \text{ GeV}^{-5}$ para llegar a los valores observados de densidad numérica actual. Un detalle importante es que para el mecanismo SIMP, ya no se está trabajando con masas en los rangos de GeV sino

de MeV, esto se debe a que al exigir acoples perturbativos para la interacción, la masa de SIMP tiende típicamente a valores por debajo de un GeV [20]. Otra gran diferencia que se puede apreciar entre el mecanismo WIMP y SIMP, es cómo, luego del freeze-out el sistema SIMP llega a su valor de Y_0 mas rápido que para el caso de las reliquias WIMP.

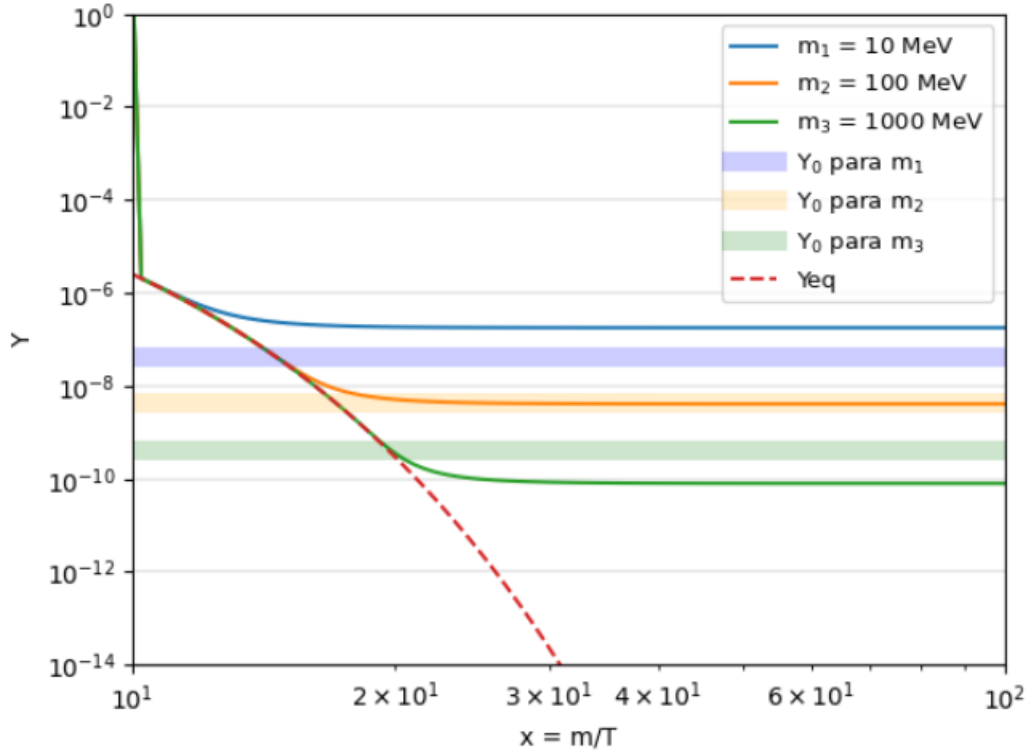


Figura 4.9: Efecto de variar la masa de las reliquias SIMP en la solución de la ecuación diferencial del mecanismo SIMP (4.37) para $\langle\sigma v^2\rangle = 3 \times 10^2 \text{ GeV}^{-5}$. Donde la línea azul corresponde a $m = 10$ MeV, la línea naranja a $m = 100$ MeV y la línea verde $m = 1000$ MeV. El Y_0 estimado para cada masa se muestra en la franjas horizontales del color correspondiente a las líneas continuas.

En la figura (4.9) se pueden ver comportamientos distintos a los casos estudiados anteriormente, donde la masa es inversamente proporcional con la densidad final, pero no la varía de la misma forma que el término $\langle\sigma v^2\rangle$, ya que como se puede observar al subir o bajar el valor de la masa de las reliquias se nota que Y final es distinto al Y_0 predicho por las observaciones. Para que estos dos resultados concuerden, se necesita variar el término $\langle\sigma v^2\rangle$ de forma que para $m = 10$ MeV se usa $\langle\sigma v^2\rangle = 10^9 \text{ GeV}^{-5}$ y para $m = 1000$ MeV sería $\langle\sigma v^2\rangle = 10^6 \text{ GeV}^{-5}$. Otro fenómeno muy interesante que puede ser observado en la figura

(4.9), es que para valores de $x = 10$ se ve una caída significativa en la línea verde, la cual está superpuesta con la azul y naranja, esto muestra cómo la ecuación diferencial SIMP (4.37), al igual que la del WIMP (4.9), son ecuaciones diferenciales estables, las cuales no son afectadas por el valor inicial que se use, ya que siempre llegarán al mismo punto apenas se empiece a solucionar. Este comportamiento podría ser observado en las otras gráficas de WIMP y SIMP si se usaran parámetros de valores iniciales alejados del punto de inicio de Y_{EQ} .

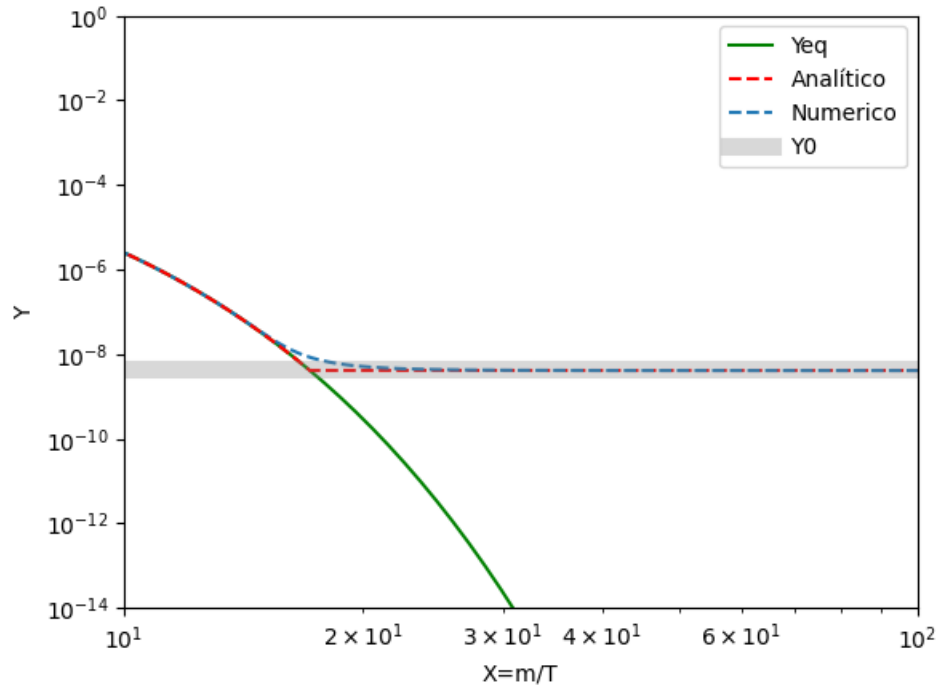


Figura 4.10: Comparación de la solución analítica y numérica del mecanismo SIMP para $m = 100$ MeV y $\langle \sigma v^2 \rangle = 3 \times 10^2 \text{ GeV}^{-2}$.

Se pudieron apreciar en la figura (4.10) la comparación entre la solución analítica y la solución numérica hallada para la ecuación (4.37), como el caso del mecanismo WIMP la solución analítica aproximada es una función compuesta, donde para $x < x_f$ se sigue la ecuación (4.11), para luego al pasar x_f , usar la solución hallada anteriormente en la ecuación (4.36). Esta aproximación es aún mas exacta que para el método WIMP, debido a que la transición de seguir el equilibrio, a quedar en freeze-out, se realiza en un tiempo muy corto para el mecanismo SIMP.

4.6 Análisis y discusión de resultados

Se pudo observar diferencias claras en la evolución termodinámica de cada mecanismo estudiado a pesar de muchas similitudes conceptuales. Para poder apreciar mejor el comportamiento de las reliquias WIMP, FIMP y SIMP, se grafican sus soluciones en un mismo diagrama.

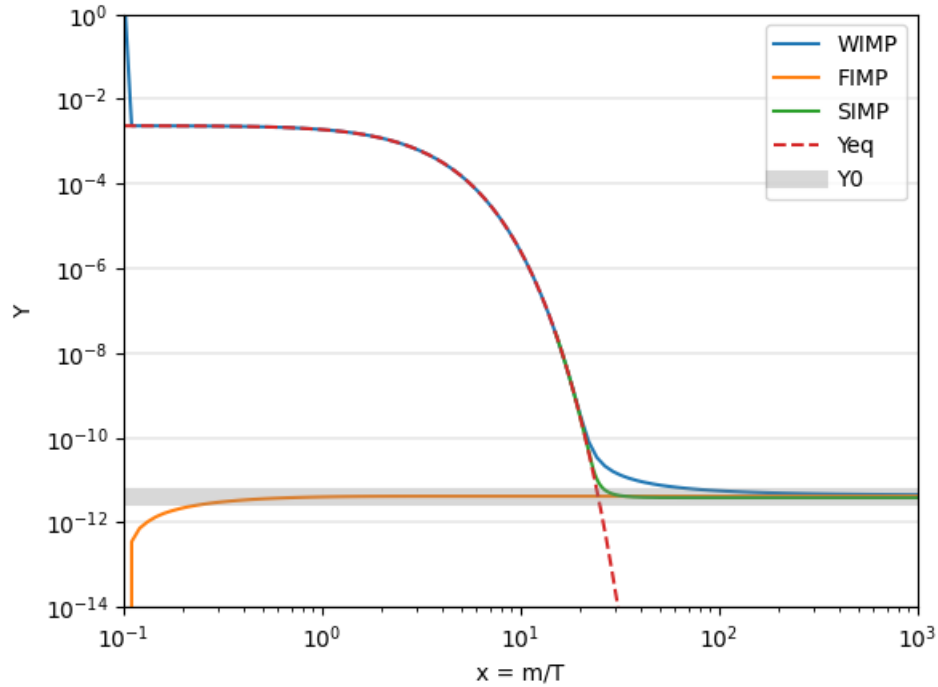


Figura 4.11: Evolución de la densidad de reliquias WIMP, FIMP y SIMP considerando una masa de 100 GeV.

En la figura (4.11) se puede apreciar una comparación final de los tres análisis que se realizaron. Se puede inicialmente percibir una caída brusca para el mecanismo WIMP en momentos muy tempranos, este es el mismo fenómeno que se había mencionado para las reliquias de SIMP, las cuales no están mostrando este comportamiento debido a que sus valores iniciales fueron colocados en su punto de partida en $x = 15$. También es mas evidente la diferencia en el tiempo que se demora el mecanismo WIMP, comparado al SIMP para llegar a su valor final. Esto se debe a que es mas difícil que ocurra la interacción SIMP una vez sale del equilibrio térmico a causa de la naturaleza $3 \rightarrow 2$ de la aniquilación. Por otro lado,

el mecanismo FIMP no sigue en ningún momento Y_{EQ} y es altamente dependiente de sus valores iniciales $y_0 = 10^{-75}$ y $x_0 = 10^{-1}$, evidenciado por su punto de freeze-in el cual se encuentra prácticamente en x_0 .

Capítulo 5

Conclusiones

En este estudio, se observaron diferencias significativas entre los mecanismos de producción de materia oscura WIMP, FIMP y SIMP. Para llevar a cabo los cálculos necesarios, se emplearon métodos analíticos y numéricos específicos. Se utilizó el método LSODA y la función `solve_ivp` del paquete Scipy en Python. Fue esencial calibrar cuidadosamente los parámetros de tolerancia de la solución y el tamaño del paso de resolución numérica para obtener resultados precisos y observar adecuadamente las gráficas generadas en el estudio.

En el caso del mecanismo WIMP y SIMP, además de los cálculos numéricos, se encontró una solución aproximada que se acercó notablemente a los resultados obtenidos mediante métodos numéricos, lo que indica la existencia de un enfoque analítico eficaz para este mecanismo. Tanto en el mecanismo WIMP como en el SIMP, se constató que las partículas seguían el equilibrio térmico durante la mayor parte del proceso de producción de materia oscura, lo que significa que la densidad de partículas de materia oscura se mantenía en equilibrio con las partículas del modelo estándar hasta que ocurría el freeze-out.

Uno de los hallazgos interesantes fue que el mecanismo SIMP transitaba más rápidamente de su punto de freeze-out a su valor final constante en comparación con el mecanismo WIMP, sugiriendo una interacción más eficiente en la transición hacia su estado no relativista. Por otro

lado, el mecanismo FIMP se destacó por no seguir el equilibrio térmico en ningún momento, y se notó que era altamente sensible a las condiciones iniciales utilizadas en los cálculos. Esto subraya la importancia crítica de las condiciones iniciales en la producción de materia oscura mediante el mecanismo FIMP, y la necesidad de una consideración cuidadosa en los análisis.

También se halló que en los mecanismos WIMP y SIMP, se identificó una relación inversamente proporcional entre la masa de las reliquias y la sección eficaz utilizada con la densidad numérica final de las partículas de materia oscura donde, donde se halló $Y \propto \frac{1}{m\langle\sigma v\rangle}$ para el caso de WIMP y $Y \propto \frac{1}{m^2\sqrt{\langle\sigma v^2\rangle}}$ para el caso de SIMP. Por otro lado, en el caso del mecanismo FIMP, se encontró una relación directamente proporcional entre la masa de las reliquias y la sección eficaz utilizada con la densidad numérica final de las partículas de materia oscura de la forma $Y \propto m\langle\sigma v\rangle$.

Además, cada uno de los casos estudiados fue comparado con datos observacionales relevantes, y se encontró que los resultados obtenidos eran congruentes con los datos observados al usar valores adecuados de sección eficaz y masa de las reliquias. Esto respalda la validez de los modelos y enfoques utilizados en esta investigación. Con este documento se proporcionó una revisión más profunda de la producción de materia oscura en el universo primordial a través de distintos mecanismos. Se destacaron las diferencias clave entre los mecanismos WIMP, FIMP y SIMP, así como la importancia de los métodos numéricos y las condiciones iniciales en los resultados obtenidos. Estos hallazgos también contribuyen al avance del conocimiento en el campo de la física de partículas y altas energías, y tienen implicaciones importantes para la comprensión de la materia oscura en el universo temprano, respaldada por la congruencia de los resultados con datos observacionales.

El futuro de la investigación sobre estos mecanismos de producción tiene un gran potencial a pesar de que a causa de la naturaleza elusiva de estas partículas su detección resulta ser un gran desafío. Para el caso del mecanismo WIMP, se han intentado poner a prueba usando una variedad de experimentos, tanto de detección directa, como de detección indirecta. Como

son los experimentos realizados por el detector LUX-ZEPOLIN o XENON10 para el caso de detección directa, y los análisis de las observaciones encontradas con el Fermi-LAT, sobre señales de rayos gamma que puedan llegar a ser provocadas por la aniquilación de WIMPs en regiones de alta concentración de materia oscura.

Para el caso de las partículas FIMP, estas se caracterizan por su interacción muy leve con la materia estándar, por lo que se vuelve muy difícil detectarlas a través experimentos de colisiones, como lo son los realizados en el gran colisionador de hadrones o en hasta en los experimentos con blanco fijo. Afortunadamente, se han empezado a desarrollar nuevas técnicas de detección directa para partículas con rangos de energías mas bajas como lo podrían ser algunos candidatos FIMPs, especialmente los neutrinos estériles. Una ventaja que podrían tener estos candidatos livianos, seria que para llegar a la abundancia actual de materia oscura se necesitaría que estas tuvieran una densidad numérica mayor a los otros candidatos, así aumentando la tasa de detección. Estas nuevas técnicas experimentales se enfocan en materia oscura en los rangos de keV a MeV [21] [22]. Por otro lado, para las partículas SIMPs, los experimentos de detección indirecta son de grande utilidad. Esto se debe a que los SIMP interactúan altamente consigo mismos, y estas interacciones podrían soltar señales de rayos gammas muy energéticas, las cuales son posibles detectar y estudiar. La detección y observación de estas señales de rayos gamma es uno de los enfoques principales del telescopio Fermi-LAT. Esto deja claro que muchos, aunque no todos, los experimentos realizados para poner a prueba las partículas WIMPs pueden ser usados para estudiar la posible existencia de las FIMPs y SIMPs.

Appendix A

Ecuación de Boltzmann para el mecanismo WIMP

En esta sección se analizará a detalle como se llegó a la ecuación (3.22). Se empieza planteando la evolución de la función de distribución de especies χ entrando o saliendo del equilibrio usando la ecuación de Boltzmann

$$\hat{L}[f_\chi] = \hat{C}[f_\chi], \quad (\text{A.1})$$

donde \hat{L} es el operador de Liouville y parametriza los cambios en el tiempo de la densidad de espacio de fase, \hat{C} es el operador de colisión y parametriza el número de partículas por volumen del espacio de fase, y f_χ es la densidad de espacio de fase de especies χ .

Con esto establecido se inicia el desarrollo para el operador de Liouville, el cual en cosmología de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker donde se considera $f = (E, t)$ queda

$$\hat{L}[f_\chi] = \frac{df_\chi}{dt} = \frac{\partial f_\chi}{\partial t} + \frac{\partial f_\chi}{\partial E} \frac{dE}{dt}, \quad (\text{A.2})$$

Donde $E = \sqrt{\vec{p}^2 + \vec{m}^2}$, por lo que desarrollando su derivada se llega a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}} 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}}{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{p}}{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{da} \frac{da}{dt} = -\frac{p^2}{E} H, \quad (\text{A.3})$$

Ahora, considerando que \vec{p} esta en función del factor de escala a , y que el momento no relativista es $p \propto a^{-1}$, esto implica que $\frac{d\vec{p}}{da} = -\frac{\vec{p}}{a}$, lo cual conlleva a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\vec{p}}{E} \cdot \frac{d\vec{p}}{da} \frac{da}{dt} = -\frac{\vec{p}}{E} \cdot \frac{\dot{a}\vec{p}}{a}, \quad (\text{A.4})$$

recordando que $H = \frac{\dot{a}}{a}$ queda

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p^2}{E}H, \quad (\text{A.5})$$

Reemplazando esto en el operador de Liouville

$$\hat{L}[f_\chi] = \frac{df_\chi}{dt} = \frac{\partial f_\chi}{\partial t} - \frac{\partial f_\chi}{\partial E} \frac{p^2}{E} H. \quad (\text{A.6})$$

Se quiere reescribir este operador en función de la densidad numérica de partículas χ la cual se define como

$$n_\chi(T) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f_\chi(E, T) d^3\vec{p}, \quad (\text{A.7})$$

y realizando la sustitución $d^3\vec{p} = 4\pi|\vec{p}|^2 d|\vec{p}| = 4\pi|\vec{p}| E dE$ se llega a

$$n_\chi(T) = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty f_\chi(E, T) \sqrt{E^2 - m^2} E dE, \quad (\text{A.8})$$

para que el operador de Liouville quede con una forma similar a la ecuación (A.8), se multiplica por $\frac{g}{(2\pi)^3}$ y se integra en función de $d^3\vec{p}$,

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \hat{L}[f_\chi] d^3\vec{p} &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \left[\frac{\partial f_\chi}{\partial t} - \frac{\partial f_\chi}{\partial E} \frac{p^2}{E} H \right] \sqrt{E^2 - m^2} E dE \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\partial f_\chi}{\partial t} \sqrt{E^2 - m^2} E dE - \frac{gH}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{\partial f_\chi}{\partial E} (E^2 - m^2)^{3/2} dE, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

se puede notar como la primera integral es $\frac{n_\chi}{dt}$ y la segunda se puede resolver con integración por partes tomando $u = (E^2 - m^2)^{3/2}$ y $dv = \frac{\partial f_\chi}{\partial E} E$, llegando así a

$$\begin{aligned} \frac{g}{(2\pi)^3} \int \hat{L}[f_\chi] d^3\vec{p} &= \frac{dn_\chi}{dt} - \frac{gH}{2\pi^2} \left[(E^2 - m^2)^{3/2} f_\chi \Big|_m^\infty - 3 \int_m^\infty E \sqrt{E^2 - m^2} f_\chi dE \right] \\ &= \frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Teniendo el operador de Liouville escrito de esta forma se vuelve a expresar la ecuación de Boltzmann

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{C[f]}{E} d^3p. \quad (\text{A.11})$$

Esta ecuación es valida para diferentes tipos de interacciones dependiendo del operador de colisión usado. Para este caso se considera inicialmente un proceso $X \rightarrow Y$, el operador de colisión para una partícula k se define como [16]

$$\begin{aligned} &\frac{g}{(2\pi)^3} \int \hat{C}[f_\chi] d^3\vec{p} \\ &= \sum_{X,Y} r_k \int \frac{d\Pi_X}{S_X} \frac{d\Pi_Y}{S_Y} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_X - p_Y) \left(\prod_{i \in X} f_i \right) \left(\prod_{j \in Y} (1 \pm f_j) \right) |\mathcal{M}(X \rightarrow Y)|^2, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

la cual es una forma comprimida de la ecuación (3.15), donde la sumatoria abarca todos los procesos que involucren la partícula k , la cual puede ser parte de estados de múltiples partículas X y Y . Donde $r_k = \bar{n}_k(-\bar{n}_k)$, donde k en $Y(X)$ cuenta las $\bar{n}_k > 0$ de las partículas k en $Y(X)$. Π_X y Π_Y son los factores de integración de fase espacial invariantes de Lorentz

$$d\Pi_X = \prod_{i \in X} \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(p_i^2 - m_i^2) \theta(p_i^0) = \prod_{i \in X} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (\text{A.13})$$

$$d\Pi_Y = \prod_{i \in Y} \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (\text{A.14})$$

$S_X(S_Y)$ es el factor de simetría que cuenta las partículas idénticas de $X(Y)$, $p_X = \sum_{i \in X} P_i$ y $p_Y = \sum_{i \in Y} P_i$ son la suma de los cuatro momentos en $X(Y)$, f_i son las funciones de distribuciones. Finalmente, $|\mathcal{M}(X \rightarrow Y)|^2$ es la matriz de elementos para la interacción

$X \rightarrow Y$. Para simplificar el operador de colisión tomamos tres aproximaciones. La primera es que no consideramos el principio de exclusión de Pauli o el aumento de Bose, volviendo

$$(1 \pm f_j) \rightarrow 1. \quad (\text{A.15})$$

Para la segunda aproximación consideramos que las partículas que interactúan están en equilibrio cinético a una temperatura T , para que su función de distribución fuera del equilibrio sea así proporcional a su función de distribución cuando están en equilibrio

$$f_i = f_i^{eq}(T) \frac{n_i}{n_i^{eq}(T)}. \quad (\text{A.16})$$

En la tercera aproximación se asume que se sigue la estadística de Maxwell-Boltzmann para las distribuciones de equilibrio

$$\prod_{i \in X} f_i^{eq} = e^{-\frac{E_X}{T}}, \quad (\text{A.17})$$

donde $E_X = \sum_{i \in X} E_i$. Con estas aproximaciones se puede simplificar el operador de colisión a

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \hat{C}[f_X] d^3\vec{p} = \sum_{x \rightarrow Y} \mathcal{N}(k, X \rightarrow Y) \times \gamma(X \rightarrow Y), \quad (\text{A.18})$$

donde el factor de corrimiento que cuantifica la salida del equilibrio químico se define como

$$\mathcal{N}(k, X \rightarrow Y) = r_k \prod_{i \in X} \frac{n_i}{n_i^2}, \quad (\text{A.19})$$

y la densidad de tasa de colisión que cuantifica el numero de interacciones por unidad de tiempo y volumen se define como

$$\gamma(X \rightarrow Y) \equiv \int \frac{d\Pi_X}{S_X} \int \frac{d\Pi_Y}{S_Y} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_X - p_Y) e^{-\frac{E_X}{T}} |\mathcal{M}(X \rightarrow Y)|^2. \quad (\text{A.20})$$

Con esto se llega a una forma simplificada del operador de colisión que puede ser usada para una variedad de interacciones de partículas, para que esta sea específica para el caso del

mecanismo WIMP, el cual es una interacción $2 \rightarrow 2$ donde se experimenta un punto de *freeze-out*, tenemos que tomar ciertas consideraciones para poder resolver el operador de colisiones. Lo primero es recordar que se esta trabajando con partículas de materia oscura, las cuales se consideran estables o con vida media mayor a la edad del universo. Las reacciones mas relevantes son entonces

$$\begin{aligned} X + X &\longleftrightarrow i + j, \\ X + \bar{X} &\longleftrightarrow i + j, \end{aligned} \tag{A.21}$$

Donde i y j son partículas del modelo estándar y $2m_X > m_i + m_j$. Las interacciones de ordenes superiores ($2 \leftrightarrow 3, 3 \leftrightarrow 3, \dots$) no se consideran y son típicamente muy poco dominantes. Otra consideración es que si la partícula de materia oscura es su propia antipartícula entonces $X + X \leftrightarrow e^+ e^-$ lo que implica $2\mu_X = \mu_{e^+} + \mu_{e^-} = 0$, y si no es su propia antipartícula pero no existe asimetría entre la materia oscura y la anti-materia oscura se llega a $\mu_X = \mu_{\bar{X}} = 0$. También es importante recordar que i y j están en equilibrio por lo que $f_i = f_i^{eq}$. Finalmente se considera la conservación de la energía $E_X + E_{\bar{X}} = E_i + E_j$ lo cual lleva a $f_i f_i^{eq} = f_X f_{\bar{X}}$.

Con todas estas consideraciones se puede escribir el operador de colisión como

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int \hat{C}[f_X] d^3\vec{p} = -\langle \sigma v \rangle [n_X^2 - (n_X^{eq})^2], \tag{A.22}$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ es la sección eficaz multiplicada por la velocidad relativa que contiene

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{1}{(n_X^{eq})^2} \int d\Pi_X d\Pi_{\bar{X}} d\Pi_i d\Pi_j (2\pi)^4 \delta^4(p_X + p_{\bar{X}} - p_i - p_j) |\mathcal{M}|^2 e^{-\frac{E_X + E_{\bar{X}}}{T}}. \tag{A.23}$$

Reemplazando el operador de Liouville y el operador de colisión hallados en la ecuación de Boltzmann inicial se concluye

$$\dot{n}_X + 3Hn_X = -\langle \sigma v \rangle [n_X^2 - (n_X^{eq})^2]. \tag{A.24}$$

Esta es la ecuación de Boltzmann que se trabajó para el mecanismo de producción WIMP.

Bibliografía

- [1] A. Arbey and F. Mahmoudi. Dark matter and the early universe: A review. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Abril 2021.
- [2] Fritz Zwicky. Luminous and dark formations of intergalactic matter. *Physics Today*, 1953.
- [3] Anatolii Vladimirovich Zasov, Ann S Saburova, Alexander Valentinovich Khoperskov, and Sergey A Khoperskov. Dark matter in galaxies. *Physics-Uspekhi*, page 3, 2017.
- [4] Albert Bosma. Rotation curves and the dark matter problem. *arXiv preprint arXiv:2309.06390*, 2023.
- [5] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 2020.
- [6] N Mandolesi and Fabrizio Villa. First/planck mission. In *IMTC/99. Proceedings of the 16th IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (Cat. No. 99CH36309)*, volume 2, pages 975–980. IEEE, 1999.
- [7] Stefano Profumo. *An introduction to particle dark matter*. World Scientific Publishing Company, 2017.
- [8] Stefano Profumo, Leonardo Giani, and Oliver F Piattella. An introduction to particle dark matter. *Universe*, 2019.

- [9] Nathaniel Craig and Andrey Katz. The fraternal wimp miracle. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(10):054, 2015.
- [10] Stefano Giagu. Wimp dark matter searches with the atlas detector at the lhc. *Frontiers in Physics*, 2019.
- [11] Jodi Cooley. Dark matter direct detection of classical wimps. *arXiv preprint*, 2021.
- [12] Jelle Aalbers, DS Akerib, CW Akerlof, AK Al Musalhi, F Alder, A Alqahtani, SK Alsum, CS Amarasinghe, A Ames, TJ Anderson, et al. First dark matter search results from the lux-seplin (lz) experiment. *arXiv preprint arXiv:2207.03764*, 2022.
- [13] J Ballet, P Bruel, TH Burnett, B Lott, et al. Fermi large area telescope fourth source catalog data release 4 (4fgl-dr4). *arXiv preprint arXiv:2307.12546*, 2023.
- [14] Edward W Kolb and Michael S Turner. *The early universe*. CRC press, 2018.
- [15] Lawrence J Hall, Karsten Jedamzik, John March-Russell, and Stephen M West. Freeze-in production of fimp dark matter. *Journal of High Energy Physics*, 2010.
- [16] Nicolás Bernal, Matti Heikinheimo, Tommi Tenkanen, Kimmo Tuominen, and Ville Vaskonen. The dawn of fimp dark matter: a review of models and constraints. *International Journal of Modern Physics A*, 2017.
- [17] Yonit Hochberg, Eric Kuflik, Tomer Volansky, and Jay G. Wacker. Mechanism for thermal relic dark matter of strongly interacting massive particles. *Physical Review Letters*, oct 2014.
- [18] Lin Fei. *Dark matter dynamics in the early universe*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2012.
- [19] Nicolás Bernal and Yong Xu. Wimps during reheating. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2022(12):017, 2022.

- [20] Nicolas Bernal, Xiaoyong Chu, Camilo Garcia-Cely, Thomas Hambye, and Bryan Zaldivar. Production regimes for self-interacting dark matter. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(03):018, 2016.
- [21] Rouven Essig, Jeremy Mardon, and Tomer Volansky. Direct detection of sub-gev dark matter. *Physical Review D*, 85(7):076007, 2012.
- [22] Rouven Essig, Aaron Manalaysay, Jeremy Mardon, Peter Sorensen, and Tomer Volansky. First direct detection limits on sub-gev dark matter from xenon10. *Physical review letters*, 109(2):021301, 2012.