



**POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA**  
**WYDZIAŁ INFORMATYKI**  
**Techniki zapewniania poufności w internecie**

**PRACOWNIA SPECJALISTYCZNA 10-11**  
**MGR INŻ. MACIEJ BRZOSOWSKI**

**TEMAT: KRYPTOGRAFIA KRZYWYCH ELIPTYCZNYCH.**

$$y^2 = x^3 - px - q \mod M$$
$$\Delta_E = 4p^3 + 27q^2 \mod M \neq 0$$
$$P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q)$$
$$P + \theta = P$$

**Dodawanie punktów**  $R = P + Q = (x_R, y_R)$ :

1. jeżeli  $x_P \neq x_Q$

$$s = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \mod M$$

$$x_R = s^2 - x_P - x_Q \mod M, y_R = y_P + s(x_R - x_P) \mod M$$

2. jeżeli  $x_P = x_Q$

(a) jeżeli  $y_P = -y_Q$  lub  $y_P = y_Q = 0$  wynik równy  $\theta$  (punkt neutralny bądź w nieskończoności w zależności od tłumaczenia)

(b) jeżeli  $y_P = y_Q \neq 0$   $R = P + P = 2P = (x_R, -y_R)$  (podwajanie punktu)

$$s = \frac{3x_P^2 - p}{2y_P} \mod M$$

$$x_R = s^2 - 2x_P, y_R = y_P + s(x_R - x_P) \mod M$$

**Wymiana kluczy:**

1. Użytkownik  $A$  generuje klucz prywatny  $n_A < M$  oraz na jego podstawie klucz publiczny  $P_A = n_A G$  gdzie  $G$  jest ustalonym punktem transmisji. Podobnie postępuje użytkownik  $B$ .
2. Użytkownik  $A$  na podstawie klucza publicznego użytkownika  $B$  wylicza  $K = n_A P_B$  oraz użytkownik  $B$  wylicza  $K = n_B P_A$ .

**Szyfrowanie** wiadomości  $P_m = (x, y)$

1. Użytkownik  $A$  generuje liczbę  $k$
2. Użytkownik  $A$  wysyła dwa punkty  $C_m = (kG, P_m + kP_B)$

**Deszyfrowanie** wiadomości:

1. Użytkownik  $B$  oblicza  $P_k = n_B kG$
2. Użytkownik  $B$  wykonuje  $P_m = (P_m + kP_B - P_k)$

**Zadanie:** Zaimplementuj system kryptograficzny bazujący na krzywych eliptycznych:

1. Generowanie wszystkich punktów krzywej eliptycznej (dla dużych parametrów) dla podanych parametrów,
2. Dokonaj wymiany klucza,
3. Szyfrowanie oraz deszyfrowanie punktów przy pomocy kluczy z poprzedniego zadania.