⋮

Det är konstant med $P\underline{q} = \underline{q}$

och $\underline{q}$ är stok. vektor

dvs. $\begin{cases} (P - I)\,q = 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{cases}$ Man har $\mathrm{rref}(P - I) = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

Så (*) $\Rightarrow \begin{cases} q_1 - q_3 = 0 \\ q_2 - \frac{3}{2} q_3 = 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{cases}$

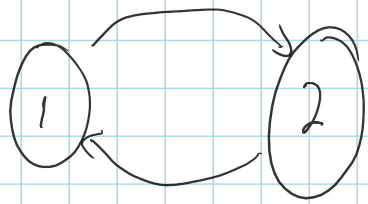
$q_1 = \frac{2}{7}, \quad q_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

M.a.o. $q = \begin{bmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{bmatrix}$

Eks $P = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$, er ikke regulær siden $P^n = I_2$ for alle n

Alle stok. vektorer er likevektsvekt. for $P = I_2$

Eks $P = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$



P, $P^2 = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $P^3 = P$, $P^4 = I$, ...

$$P^n = \begin{cases} P & n \text{ er odd} \\ I_2 & n \text{ er partall} \end{cases}$$

har alltid koeff. som er 0, så P er ikke regulær

Mer at P har en entydig likevektsvekt. $q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} P\underline{q} = \underline{q} \\ \underline{q}_1 + \underline{q}_2 = 1 \\ q_1, q_2 \geq 0 \end{cases} \iff (P - I)\,q = 0 \iff \dots \iff \begin{cases} q_1 = q_2 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ q_1, q_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff q_1 = q_2 = \tfrac{1}{2} \iff q = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Hvis $x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, der $a \neq b$, vil $P\underline{x_0} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$,

$$x_2 = Px_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \text{ osv} \ldots$$

Så x_k vil veksle mellom $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix}$, konvergerer aldri

Eks $P = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$ er regulær (har bare pos. koeff.)

(dobbelt.eks.)

$$P\underline{q} = \underline{q} \iff \ldots \iff q_1 - 2q_2 = 0$$

q likevektsvekt. Får da $\underbrace{2q_2}_{q_1} + q_2 = 1 \Rightarrow q_2 = \frac{1}{3}$

$$q_1 = \frac{2}{3}$$

<u>Eks</u>: $P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{bmatrix}$, <u>regulær</u>

$$\text{rref}(P - I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -17/12 \\ 0 & 1 & -7/12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{q}$ er likevektsvektor $\iff$

$$q_1 = \frac{17}{12} q_3$$

$$q_2 = \frac{7}{12} q_3$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

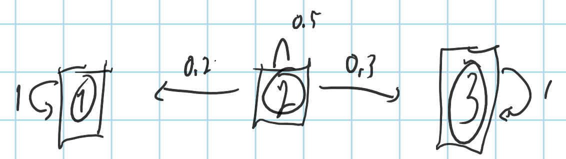
$$\iff q_1 = 17/36$$

$$q_2 = 7/36$$

$$q_3 = 1/3$$

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} 17/36 \\ 7/36 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Eks.



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rref}(P - I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ likevektsvektor. $\iff$

$$q_2 = 0$$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

$$q = \begin{bmatrix} 1-t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} \quad 0 \leq t \leq 1, \text{ er likevektsvektor}$$

$$t = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow P$ har ikke en entydig likevekts vektor

$\Rightarrow P$ er ikke regulær

4.6 Rang til matriser

La A være en $m \times n$ matrise

Da er rangen til A definert ved

$\text{rang } A = \dim(\text{col } A)$

Eks $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Hva er rangen til a

Den er 2 siden Col A har dimensjon 2

(f. eks vil $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ gi en basis siden de er opplagt lin. uavh.

Eks $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$ rang A ?

matlab

$\mathrm{rref}(A) = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2{,}5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$

Så vi vet at Col A har dim. lik 2

Så rang $A = 2$

La oss også se på Nul A. siden R har to kolonner som ikke er pivot-kol, så vil Nul A ha en basis med to elementer: Sjekker dette

$A\underline{x} = 0 \iff R\underline{x} = 0$, $\iff \begin{cases} x_1 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ x_2 - 2.5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, "$x_3$ og x_4 er frie"

$x_3 = s$
$x_4 = t$

$x_1 = s - 5t$
$x_2 = 2.5s - 3t$
$x_3 = s$
$x_4 = t$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} s - 5t \\ 2.5s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$

lin. uavh. - Dermed vil de danne en basis for Nul A

$\underline{x} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$

Vi finner altså dim (Null A) = 2

Legg merke til at rang A + dim (Null A) = 2 + 2 = 4

= ant. col A

Dette gjelder generelt

Hvis A er en $m \times n$ matrise, og $R = \text{rref}(A)$, så er

- rang A = ant. pivot kol. i R
- dim(Null(A)) = antall kol. i R som ikke er piv. kol. i R

= n − rang A

$\boxed{\text{dvs. rang } A + \dim(\text{Null } A) = n = \text{ant. kol. i } A}$

La A være en $m \times n$ - mat

Row A = underrommet utspent av radvektorene fra A

$= \text{Col } A^T$

Eks La igjen $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$

Da er Row $A = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$

Hva er da dim(Row A) ?

Da er dim(Row A) = dim(col A^T) = rang(A^T) siden

$$\text{rref}(A^T) = \ldots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

to piv. kol

(Vi vet da også at 1. og 2. kol i A^T vil danne en basis for col A^T, m.a.o. for Row A)

Merk at $\underbrace{\text{dim}(\text{Row } A)}_{\text{Rang } A^T} = 2 = \underbrace{\text{dim}(\text{Col } A)}_{\text{rang}(A)}$

Rang A^T = rang(A)

De to viktige ingrediensene i beviset er

- Hvis B fremkommer fra A ved en radoperasjon så er <u>Row A = Row B</u>. Dermed vil Row A = Row R der R = rref A
- Radvektorene i R = rref(A) som ikke er null danner en basis for Row R, og dermed for Row A. Dermed blir $\underbrace{\text{dim Row}(R)}_{\text{dim Row } A}$ = ant piv i R = rang A

$$\text{dim Row } A \;\; \shortparallel \;\; \text{rang}(A^T)$$

Merk at dette gir f.eks. at når A er en $m \times n$ matrise går

$$\dim(\text{Null } A^T) = n - \text{Rang}(A^T) \quad \text{, ved rangteoremet for } A^T$$
$$= n - \text{Rang}(A)$$

har m kolonner