Eks. 2.7.1

Vi ser på tilfellet

$$f(u_1, u_2) = 2u_1 u_2^2$$

og

$$g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin x_3$$
$$g_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3$$

Vi finner den sammensatte funksjonen $h(x) = f(g(x))$ ved å substituere $u_1 = g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 \sin x_3$ og $u_2 = g_2(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 x_2 x_3$ inn i uttrykket for f:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= f(u_1, u_2) \\ &= 2u_1 u_2^2 \\ &= 2(x_1 x_2 \sin x_3)(3x_1^2 x_2 x_3)^2 \\ &= 18 x_1^5 x_2^3 x_3^2 \sin x_3 \end{aligned}$$

Derivere med kjerneregelen. I følge 1.7.2 er

$$\frac{dh}{dx_1}(x) = \frac{df}{du_1}(u)\frac{dg_1}{dx_1}(x) + \frac{df}{du_2}(u)\frac{dg_2}{dx_1}(x)$$

Regner vi ut de partiellderiverte til f, g_1 og g_2 og setter inn i dette uttrykket, får vi

$$\frac{dh}{dx_1}(x) = (2u_2^2)(x_2 \sin x_3) + (4u_1 u_2)(6x_1 x_2 x_3)$$

Eget forsøk

$$\frac{dh}{dx_1}(x) = \frac{df}{du_1}(u)\frac{dg_1}{dx_1}(x) + \frac{df}{du_2}(u)\frac{dg_2}{dx_1}(x)$$

$$\frac{df}{du_1} = (2u_1 u_2^2)' = 2u_2^2 \qquad \frac{df}{du_2} = (2u_1 u_2^2)' = 4u_1 u_2$$

$$\frac{dg_1}{dx_1} = (x_1 x_2 \sin x_3)' = x_2 \sin x_3 \qquad \frac{dg_2}{dx_1} = (3x_1^2 x_2 x_3)' = 6x_1 x_2 x_3$$

$$\frac{dh}{dx_1} = (2u_2^2)(x_2 \sin x_3) + (4u_1 u_2)(6x_1 x_2 x_3)$$

Tilslutt setter vi inn verdier for u_1 og u_2

$$\frac{dh}{dx_1}(x) = \left(2\left(3x_1^2x_2x_3\right)^2\right)\left(x_2 \sin x_3\right) + \left(4\left(x_1 x_2 \sin x_3\right)\left(3x_1^2x_2x_3\right)\right)\left(6x_1x_2x_3\right)$$

$$= 90\, x_1^4 x_2^3 x_3^2 \sin x_3$$

det er god trening å finne $\frac{dh}{dx_2}(x)$ og $\frac{dh}{dx_3}(x)$ på tilsvarende måte

1. $f(u,v) = u^2 + v$, $g(x,y) = 2xy$, $h(x,y) = x + y^2$

Partiell derivete til $k(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$

$$\frac{df}{du} = 2u \;,\; \frac{df}{du} = 1 \;,\; \frac{dg}{dx} = 2y \;,\; \frac{dg}{dy} = 2x$$

$$\frac{dh}{dx} = 1 \;,\; \frac{dh}{dy} = 2y$$

setter opp matrisen

$$\begin{pmatrix} 2u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Setter inn for u og v

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot (2xy) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4xy & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$

Multipliser

$$\left(4xy \cdot 2y + 1 \cdot 1 \quad 4xy \cdot 2x + 1 \cdot 2y\right)$$

$$\left(8xy^2 + 1 \quad 8x^2y + 2y\right)$$

$$\frac{dk}{dx} = \underline{\underline{8xy^2+1}} \qquad \frac{dk}{dy} = \underline{\underline{8x^2y+2y}}$$

5 $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

Anta at $G(1,-2) = (1,2,3)$ og at

$$G'(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad F'(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot G' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 1\cdot 3 + 4\cdot 2 & 2\cdot -2 + 1\cdot 1 + 4\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 3 + 2\cdot 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}}}$$

6 $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Anta at $G'(-1,-2,1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{\to (2,4)}$, $F(2,4) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$H(x) = F(G(x))$ i punkt $(-1,2,1)$

$H'(-1,2,1) = F'(G'(-1,-2,1))\, G'(-1,-2,1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} =$$