Fortsettelse

eks. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$ Konvergerer?

Dominerer

Grensesammenligningstesten (GS-testen

Sammenligner med $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2-n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2-n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1$$

0

$p = 2$

Altså konvergens ved GS-testen

Forholdstesten

Gitt rekke $\sum a_n$. La $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

Da har vi at: $\begin{cases} L < 1 \Rightarrow \text{Rekken konvergerer} \\ L > 1 \Rightarrow \text{— " — Divergerer} \end{cases}$

Bevis Anta $L < 1$

Velg $r$ slik at $L < r < 1$.

Da fins $N$ slik at for $n \geq N$ er

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r, \text{ dvs. } |a_{n+1}| < |a_n| \cdot r$$

Altså

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots$$

$$< |a_N| + |a_N| \cdot r + |a_N| r^2 + \dots$$

geometrisk rekke med $r < 1$

$$= \frac{a_1}{1-r}$$ Altså konvergerer ved sammenligningstesten.

Anta $L > 1$

For store nok $n$ har vi nå $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, dvs. $|a_{n+1}| > |a_n|$

Altså $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ umulig. Altså divergerer ved div-testen $\blacksquare$

eks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ Konv? Forholdstesten

lim $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left(\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{100^n}{n!}\right)} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n}$

$= 100 \cdot \frac{1}{n+1} \to 0$ når $n \to \infty$

dvs. $L = 0$ i forholdstesten Altså konvergens

$\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

Mer generelt for alle faste tall har vi at

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergerer!

Altså har vi også at

$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ for alle faste $x$

(fakultet dominerer potens)

## Rot-testen

Gitt en rekke $\sum a_n$. La $L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

Da har vi: $\begin{cases} L < 1: \text{Rekken konvergerer} \\ L > 1: \text{Rekken Divergerer} \end{cases}$

### Bevis anta $L < 1$

Velg $r$ slik at $L < r < 1$.

Da finnes $N$ slik at for $n \geq N$ er

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < r, \text{ dvs. } |a_n| < r^n$$

Rekken $\sum r^n$ er geometrisk $r < 1$, så den konvergerer

Dermed konvergerer vår rekke ved sml-testen

### Anta $L > 1$

For store nok $n$ har vi nå $|a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, dvs. $|a_n| > 1$.

Dvs. divergerer $\blacksquare$

eks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^n}$ Konv?

Hvis det er enkelt å ta n-te roten Rottesten

$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4n+1} \to 0$ når $n \to \infty$

dvs. $L = 0$ i rot-testen. Konvergens $\blacksquare$

# Alternerende rekke

Annenhvert ledd er positivt/negativt.

eks $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \dots$$

## Alternerende rekke-testen

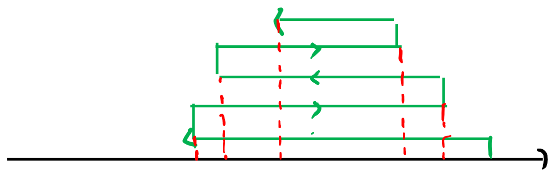
Gitt en alternerende rekke $\sum a_n$:

Hvis $|a_n| > |a_{n+1}| > 0$ for alle $n$, og

$\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$ så konvergerer rekken.

Videre: Hvis vi tilnærmer summen av hele rekken med delsummen $S_N$ opp til $a_N$, er feilen vi gjør mindre enn $|a_{N+1}|$

## Bevis



$S_n$: Sum av de $N$ første leddene i rekken

Fordi leddene avtar i absoluttverdi, og absoluttverdien av leddene går mot 0, vil delsumma stabilisere seg på noe "midt i" når $N \to \infty$ (Bruker Kompletthet)

Feilestimatet: Feien blir mindre enn lengden av neste pil

$|a_{N+1}|$

eks.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

a) Vis at rekken konvergerer

b) Finn N slik at delsummen opp til ledd N tilnærmer summen av rekken med feil 0,01.

Løsning

a) Alternerende rekke testen: Rekken er alternerende, og

$$\lim_{n \to \infty} |a_n| = \lim \frac{1}{n+1} = 0 \quad (\text{ok})$$

Videre: Med $f(x) = \frac{1}{x+1}$, så har vi at $f(n) = |a_n|$

Vi har $f'(x) = \frac{d}{dx}\left[(x+1)^{-1}\right] = -(x+1)^{-2} = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ for $x > 0$

Dermed er $f$ avtakende på intervallet $(0, \infty)$. Altså

$$|a_n| > |a_{n+1}| \text{ for alle } n$$

Altså konvergerer rekken ved alternerende rekke-testen

b) $|a_{N+1}| = 0{,}01$ gir

$$\frac{1}{(N+1)+1} = \frac{1}{N+2} = 0{,}01 \quad \text{dvs. } N = 98 \text{ holder}$$

$$\frac{1}{98+2} = \frac{1}{100}$$

12.4 absolutt og betinget konvergens

$\sum a_n$ kalles absolutt konvergent hvis rekken

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots \text{ konvergerer}$$

Hvis $\sum a_n$ konvergerer, men ikke er absolutt konvergent, kalles den betinget konvergent

Absolutt konvergent-testen

$$\sum |a_n| \text{ konv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ konv}$$

Bevis se vol

eks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin^3(n)}{n^2}$ Konv?

Vi har: $\left| \frac{(-1)^{n+1} \sin^3(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$

Rekken $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerer ($p$-rekke med $p=2$)

Ergo er rekken vår absolutt konvergent, så den konvergerer ved abs. konv-testen $\square$