Oppg 1. $p(t) = a_0 + a_1 t + t^2$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

S'ekk at det karakteristiske polynomet til C er lik p

$$(C - I t) = \begin{bmatrix} -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 - t \end{bmatrix}$$

$$\det (C - I t) = (-t)(-a_1 - t) - 1(-a_0)$$
$$= a_1 t + t^2 - a_0$$

Da ser vi at $\det(C - tI) = p(t)$

Deretter har vi matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

Og det karakteristiske polynomet

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + t^3$$

Vis at det karakteristiske polynomet til C er lik p

$$(C - tI) = \begin{bmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 - t \end{bmatrix}$$

$$\det(C - tI) = 0 - t \begin{vmatrix} -t & 0 \\ -a_0 & -a_2 - t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{vmatrix}$$

$$= -t((-t)(-a_2 - t) - 0) - (ta_1 + a_0)$$

$$= -t(a_2 t + t^2) - ta_1 - a_0$$

$$= -a_2 t^2 - t^3 - ta_1 - a_0 - a_0 = -P(t)$$

Oppg 2. $(*)\ f'''(t) - 2f''(t) - f'(t) + 2f(t) = 0$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = 2 - t - 2t^2 + t^3$$

i) $\bar{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$

Sjekk at $\bar{x}(t)$ er en løsning av 1. ordenssystemet

$$(**)\ \bar{x}'(t) = C\bar{x}(t)$$

Finner $C\bar{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ -2f(t) + f'(t) + 2f''(t) \end{bmatrix}$$

Vet at $x'(t) = (f'(t), f''(t), f'''(t))$

Da får vi ligningssettet

$$f'(t) = f'(t)$$
$$f''(t) = f''(t)$$
$$f'''(t) = -2f(t) + f'(t) + 2f''(t)$$

Dette viser vi kan sette inn $-2f(t) + f'(t) + 2f''(t)$ slik at vi finner $f'''(t)$ som er neste ledd. Dermed er $f(t)$ en løsning av $(*)$ $\blacksquare$

ii) $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t))$, $f(t) = \bar{x}_1(t)$

Sjekk at $f(t)$ er en løsning av $(*)$

Finner $C\bar{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{matrix} \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ -2\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) + 2\bar{x}_3(t) \end{matrix}$$

Da får vi ligningssettet

$$\bar{x}_1(t) = f(t)$$
$$\bar{x}_1'(t) = \bar{x}_2(t)$$
$$\bar{x}_2'(t) = \bar{x}_3(t)$$
$$x_3'(t) = -2\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) + 2\bar{x}_3(t)$$

Viser da at at $\bar{x}(x)$ er en løsning av $(*)$

$\blacksquare$

1 iii) Bestem alle reelle løsninger til systemet

$$x'(t) = C\,x(t)$$

Finner først egenverdiene til C

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(C-\lambda I) = 0 + (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\left(-\lambda(2-\lambda)\right) + \lambda - 2$$

$$= -\lambda(-2\lambda + \lambda^2) + \lambda - 2$$

$$= 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda - 2$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Egenverdier $-1, 2, 1$

Finner så egenvektorene

$$(C - 1I)x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C - 2I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C + 1)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da har vi egenvektorene

For $\lambda = 1$, x_3: fri

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_1 &= x_3 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} &\text{Setter} \\ &x_3 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

dermed har vi

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda = 2$, x_3: fri

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 0{,}25\ x_3 &= 0 \\ x_2 - 0{,}5\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= 0{,}25\, x_3 \\ x_2 &= 0{,}5\ x_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Velger} \\ &x_3 = 4 \end{aligned}$$

$x_1 = 0{,}25 \cdot 4 = 1$

$x_2 = 0{,}5 \cdot 4 = 2$

dermed har vi

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

For $\lambda = -1$, x_3: fri

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Velger} \\ x_3 = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

dermed har vi

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi egenvektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da kan vi finne egenfunksjonene

$$x_1(t) = C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1t}, \quad x_2(t) = C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad x_3(t) = C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1)t}$$

$$x(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Vi har fra oppgaven at $x(0) = (-1, 2, 2)$

Dermed kan vi sette opp løsningen

$$x(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 1 + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

For å løse denne ligningen kan vi sette opp en matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 - 1$

$$x(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$x(t)$ beskriver alle reelle løsninger for

$\bar{x}'(t) = C\,\bar{x}(t)$

iv) (*) $f'''(t) - 2f''(t) - f'(t) - 2f(t) = 0$

Vi har fra i) at C er en companion-matrise til (*). I iii fant vi en generell egenfunksjon ut i fra C. er har vi

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

som vi vet fra ii) at er lik $x(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \end{bmatrix}$

Den generelle eigenfunksjonen sier da

$$x(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \end{bmatrix} \text{ og for } t = 0, \; x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Derved er eigenfunksjonen en løsning som tilfredstiller eigenverdiene #

3. $$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sjekk at $v_\lambda := \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$

$C\bar{v} = \bar{v}\lambda$, Velger å bruke en 3×3 matrise

linær $C\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Vet fra oppgave hvis λ skal være et polynom

så må $\lambda^3 = -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2$

Som vi vet fra oppgave 1 at stemer

Derved får $v = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{bmatrix}$

som da oppfyller

$$C\bar{v} = \lambda\bar{v} \quad \square$$

(ii) Hver matrise har egenvektor(er) som utspenner hvert sitt egenrom av $\mathbb{R}^n$. Disse underrommene har dimensjon 1 fordi, egenvektorene hvert sitt distinkte egenrom. Egenrommene kan ha flere vektorer som skaleres av matrisen C, men disse vil være lineært avhengig til den dominerende egenvektoren i rommet. Derfor er $\dim(E_\lambda) = 1$.

(iii) I følge diagonaliseringsteoremet vil en $n \times n$-matrise være diagonaliserbar kun hvis matrisen har n lineært uavhengige egenvektorer. Dersom en matrise, slik som beskrevet i oppgaven, har n distinkte reelle røtter så har den også n distinkte egenvektorer og vil derfor være mulig å diagonaliseres.

Oppg 4

Ser at estimatet for p1 får ut en verdi med relativ error relerrp1 = 1.9182e-07 som er under toleransen.

På p2 så er den relative erroren på relerrp2 = 1.1180, dette er pga. at companion matrisen ikke har en dominant egenverdi. Vi ser med funksjonen roots(p2) at de største i absolutt verdi egenverdiene er +-2*i. Dermed fungerer ikke Power Method for å finne egenverdien.

Kode:

```
%a = [2 3 4; 0 3 2;0 0 5];
p1 = [1 3 -1 -3 -1 1];%car pol1
p2 = [1 -1 4 -4]; %car pol2
rootp1Est = sdrot(p1)%estimated root1
rootp2Est = sdrot(p2)%estiamted root2
rootp1 = max(roots(p1));%assume that max(roots(p)) is exact
value
rootp2 =  max(roots(p2));
relerrp1 = abs(rootp1-rootp1Est)/abs(rootp1)
relerrp2 = abs(rootp2-rootp2Est)/abs(rootp2)

function rot = sdrot(p)
    %making the companion-matrix
    numtimes = 100;
    tol = 1e-6;
    n = length(p)-1;
    x = rand(n,1);     %random start vector, x =
zeros(n,1); x(end) = 1;
    A = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        A(end,i) = -p(n+2-i);
        if i > 1
          A(i-1,i)= 1;%inserting ones on the shifted
diagonal
        end
    end
    %powermethood
    xvals = [];
    muvals = [];
```

```
    for r=1:numtimes
        x = A*x;
        [maxval,maxnr]=max(abs(x));
        mu = x(maxnr);
        x = (1/mu)*x;
        % Kunne her brukt R = x'*A*x/(x'*x) i stedet for mu
        muvals = [muvals mu];
        xvals = [xvals x];
        error = max(abs(A*x-mu*x));
        if error<tol
            rot = muvals(end);%adding the last estimate to
root
            break;
        end

    end
    if  error>tol
        sprintf('error = %f > %f = tol, mu = %f ', [error,
tol, muvals(end)])%error message
        rot = muvals(end);%%adding the last estimate to
root
    end

    %sprintf('loop ended without giving value with error
less than %f, lambda = %f', [tol, muvals(end)])
End
```

Kjøreeksempel:

```
>> oppg4

rootp1Est =

  -3.0523

ans =

    'error = 3.672121 > 0.000001 = tol, mu = 1.000000 '
```

rootp2Est =

1

relerrp1 =

1.9182e-07

relerrp2 =

1.1180

Oppg5

I matrisen a har vi en stor dominans på den dominante egenverdien. Dermed får vi kjapt et godt estimat. Estimatet har en relative error på relerror =5.3235e-10, Sammenlignet med eig(A)

Kode:

```
A = [1 1 1 1 1 1
     1 2 3 4 5 6
     1 3 6 10 15 21
     1 4 10 20 35 56
     1 5 15 35 70 126
     1 6 21 56 126 252];
 polyA = poly(A);%finner det karakteristiske polynomet til
A

rotEst = sdrot(polyA)
rot = max(eig(A))
```

```
relerror = (abs(rot-rotEst))/abs(rot)


 function rot = sdrot(p)
    numtimes = 100;
    tol = 1e-6;
    n = length(p)-1;

    x = rand(n,1);

    A = zeros(n,n);
    for i = 1:n
        A(end,i) = -p(n+2-i);
        if i > 1
          A(i-1,i)= 1;
        end
    end

    xvals = [];
    muvals = [];
    for r=1:numtimes
        x = A*x;
        [maxval,maxnr]=max(abs(x));
        mu = x(maxnr);
        x = (1/mu)*x;
        % Kunne her brukt R = x'*A*x/(x'*x) i stedet for mu
        muvals = [muvals mu];
        xvals = [xvals x];
        error = max(abs(A*x-mu*x));
        if error<tol
            rot = muvals(end);
            break;
        end

    end
    if  error>tol
        sprintf('error = %f > %f = tol, mu = %f ', [error,
tol, muvals(end)])
        rot = muvals(end);
    end

    %sprintf('loop ended without giving value with error
less than %f, lambda = %f', [tol, muvals(end)])
```

```
end
```

Kjøreeksempel:

```
>> oppg5

rotEst =

  332.8463



rot =

  332.8463



relerror =

   5.3235e-10
```