Eksamen 2018

1 $R > 0$, reelt tall

a)

$$\iint_D x^2 e^{-x^3} \sin y \, dx\,dy$$

D er området $\mathbb{R}^2$ bestående av alle punkter (x, y) slik at

$0 \leq x \leq R$ og $0 \leq y \leq \pi$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{R} x^2 e^{-x^3} \sin y \, dx\,dy = \int_0^{R} x^2 e^{-x^2} \int_0^{\pi} \sin y \, dy\,dx$$

$$= \int_0^{R} x^2 e^{-x^3} \underline{(-\cos\pi - (-\cos 0))} \Rightarrow -(-1) - (-1) = 2$$

$2\int_0^{R}$ Substitusjon

9.2

9.2.1, dersom g er deriverbar, f er kontinuerlig og

F er en antiderivert til f, så er

$$\int f[g(x)]\, g'(x) = F(g(x)) + C$$

Huskeregel

$$u = g(x) \qquad du = g'(x)$$

Det er naturlig siden $du/dx = g'(x)$

9.2.2. Eks

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx$$, vi vill sette $u = g(x) = \sqrt{x}+1$

men vi mangler $g'(x)$. Regner videre

I $u = \sqrt{x}+1$, løser for x

II $x = (u-1)^2$, deriverer

III $\frac{dx}{du} = 2(u-1)\cancel{(u')}$, skriver om

IV $dx = 2(u-1)\,du$, så setter inn i integralet

$$I = \int \frac{1}{u}\,2(u-1) = \int 2 - \frac{2}{u}\,du = 2u - 2\ln|u| + C$$

V Setter inn for u

$$2(\sqrt{x}-1) - 2\ln|\sqrt{x}-1| + C$$

9.2.4

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx \,, \quad u = \sqrt[3]{x}\text{, løser for } x$$

$$x = u^3$$

$$dx = 3u^2\,du$$

Det gir

$$\int \frac{u}{u+1}\,3u^2\,du = 3\int \frac{u^3}{u+1}$$

$$u^3 : (u+1) = u^2 - u + 1$$
$$-(u^3+u^2)$$
$$-u^2$$
$$-(-u^2-u)$$
$$u$$
$$-(u+1)$$
$$-1$$

Det gir

$$u^2 - u + 1 \left(-\frac{1}{u+1}\right.$$

9.2.5 $I = \int \sin\sqrt{x}\,dx$, Setter $z = \sqrt{x}$. Kvitter oss med kvadratroten (grunnen til at kaller z for z og ikke u)

$$z^2 = x$$
$$2z = dx$$

$$I = \int \sin(z)\,2z\,dz$$

$$= 2\int \sin(z)\,z\,dz$$

Her kan vi bruke delvis integrasjon

$u = z$, $v' = \sin(z)$

$u' = 1$, $v = -\cos(z)$

$$-z\cos z + \int 1\cos z\,dz$$

$$\int \sin(z)\, z \, dz =$$

$u = z$, $v' = \sin(z)$

$u' = 1$, $v = -\cos(z)$

$uv - \int v u'$

$$= -z\cos(z) + \int 1 \cdot \cos(z)$$

$$= -z\cos z + \sin z + c$$

Lezser vi'im 2a izgenn

$$2(-z\cos(z) + \sin z + c)$$

$$= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin\sqrt{x} + 2c \quad , 2c = D$$

$$\underline{\underline{= -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + D}}$$

Nytt forsøk

1) Beregn dobbeltintegralet

$$\iint_D x^2 e^{-x^3} \sin y \, dx\, dy \, , \quad 0 \leq x \leq R \, , \, 0 \leq y \leq \pi$$

$$\int_0^R x^2 e^{-x^3} \int_0^\pi \sin y \, dy\, dx \, ,$$ regner ut "dy" først

$$\int_0^\pi \sin y \, dy = [\cos y]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0)$$
$$= 1 + 1$$

$$= \underline{2}$$

Så regner ut "dx"

$$\int_0^R x^2 e^{-x^3} dx$$ substitusjon $u = -x^3$

$$\frac{du}{dx} = -3x^2$$

$$dx = \frac{1}{-3x^2} du$$

$u = -x^3$

Hvis $x = 0$ blir $u = 0$

-"- $x = R$ blir $u = -R^3$

$$\int_0^{-R^3} x^2 e^u \left(\frac{-1}{3x^2}\right) du = -\frac{1}{3} \int_0^{-R^3} e^u = -\frac{1}{3} [e^u]_0^{-R^3}$$

$$= \frac{1}{3}[e^{-R^3} - e^0] = \underline{\underline{-\frac{1}{3}(e^{-R^3} - 1)}}$$

Setter det hele tilsammen

$$\frac{2}{3} \cdot (1 - e^{-R^3})$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} e^{-R^3}$$

c) La K_R være området i R^3 bestående av alle punkter (x, y, z) slik at

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R$$

Beregn trippel integralet

$$I_{K_R} = \iiint_{K_R} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dx \, dy \, dz$$

og finn $\lim_{R \to \infty} I_{K_R}$

Skriver om til kulekoordinater

$x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$, $z = \rho \cos \phi$

$J = \rho^2 \sin \phi$

Regner ut potensen

$$= \left((\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 + (\rho \cos\theta)^2\right)^{3/2}$$

$$\left(\rho^2\left(\sin^2\phi \cos\theta^2 + \sin\phi^2 \sin\theta^2 + \cos\theta^2\right)\right)^{3/2}$$

$$= \rho^3$$

Slår det sammen

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\rho^3} \cdot \overbrace{\rho^2 \sin\phi}^{J} \, d\theta \, d\phi \, d\rho$$

$$= \int_0^R e^{-\rho^3} \cdot \rho^2 \int_0^\pi \sin\phi \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \, d\phi \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^R e^{-\rho^3} \cdot \rho^2 \int_0^\pi \sin\phi \, d\phi \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^R e^{-\rho^3} \cdot \rho^2 \underbrace{\left[-\cos\phi\right]_0^\pi}_{\substack{-\cos(\pi) + \cos(0) \\ 1 + 1}}$$

2) La $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en skalarfunksjon definert ved

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 24x - 10y + 61$$

a) Finn eventuelle stasjonære punkter til f, og avgjør om de er lokale minimumspunkter

$$\frac{df}{dx} = 8x + 24 \quad , \quad \frac{df}{dy} = 2y - 10$$

så $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0$ gir $\begin{cases} 8x - 24 = 0 & \mathrm{I} \\ 2y - 10 = 0 & \mathrm{II} \end{cases}$

$8(x-3) = 0$, gir $x = 3$

$2(y-5) = 0$, gir $y = 5$

stasjonært punkt $(3,5)$

Bruker Hesse-matrisen til f

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \text{ gir } \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

siden $(8,2)$ er strengt positiv er $3,5$ et lokalt minimumspunkt for f

c) skisser kurven $4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0$

$$4 \cdot (x^2 - 6x) + 9(y^2 - 10y) + 225 = 0$$

$$4(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 10y) = -225$$

bruker abc-formelen for å finne hva som må endres i polynomet

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot x}}{2 \cdot 1}$$

$$36 - 4 \cdot x = 0$$

$$\frac{36}{4} = \frac{4x}{4}$$

$$9 = x_x$$

$$\frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot x}}{2}$$

$$100 - 4 \cdot x = 0$$

$$\frac{100}{4} = \frac{4x}{4}$$

$$25 = x_y$$

derved har vi

$$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 10y + 25) = -225 + 4 \cdot 9 + 9 \cdot 25$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 3}$$

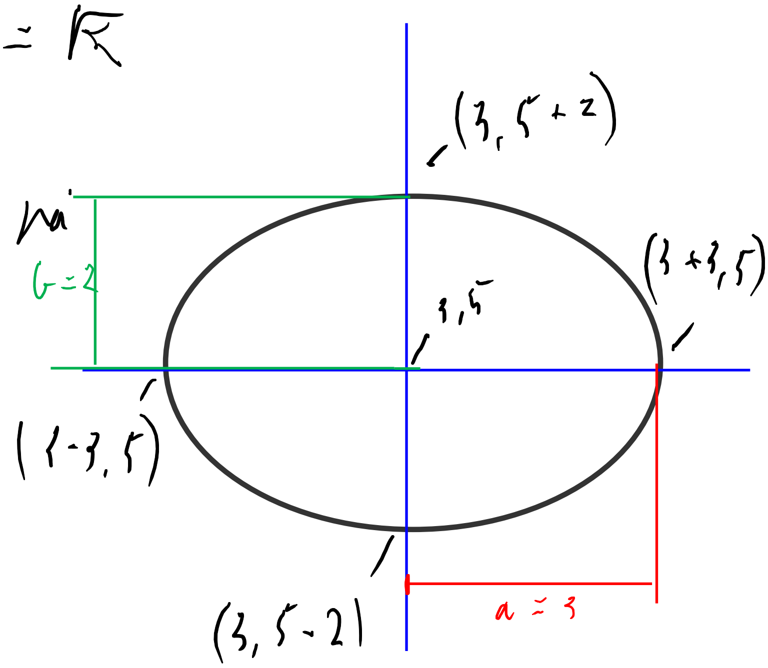
$$4(x-3)^2 + 9(x-5)^2 = 36 \quad | : 36$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(x-5)^2}{2^2} = 1$$

, ellipse

$c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{5}$

Brennpunktene er derved på



c) Bruker lagrange

$f(x,y) = 4x^2 - 24x + y^2 - 10y + 61$

$g(x,y) = 4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$8x - 24 = \lambda(8x - 24)$ I

$2y - 10 = \lambda(18y - 90)$ II

I gir $\lambda = 1$, $x = 3$ $(8 \cdot 3 - 24 = 0)$

II gir $\frac{2y-10}{18y-90} = \lambda = \frac{2\cancel{(y-5)}}{18\cancel{(y-5)}}$

$= \frac{1}{9} = \lambda$, $\lambda = 5$ $((8 \cdot 5 - 24) \cdot \lambda = 0,\ 2 \cdot 5 - 10 = 0)$

1) Det gir 3 mulige ledd

I $\lambda = 1$, $y = 5$

II $x = 3$, $\lambda = 1/a$

III $x = 3$, $y = 5$ (sentrum)

setter in i kurven

I

Oppgave 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^n (n+5)!}{n!} (x-2)^n$$

Forholdstesten

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e^{n+1}(n+6)!(x-2)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n (n+5)!(x-2)^n} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{e(n+6)(x-2)}{(n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e(\cancel{n+6})}{\cancel{n+1}} |x-2| = e|x-2|$$

altså konvergens hvis

$e \cdot |x-2| < 1$ dvs. $|x-2| < \frac{1}{e}$

og divergerer hvis

$$|x-2| > \frac{1}{e}$$

Løser for x

$$|x| = \frac{1}{e} + 2$$

det gir endepunkter $\overset{\mathrm{I}}{2 + \frac{1}{e}}$ og $\overset{\mathrm{II}}{2 - \frac{1}{e}}$

$$\mathrm{I} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n (n+5)!}{n!} \left(2 + \frac{1}{e} - 2\right)^n \text{ divergerer}$$

$$\mathrm{II} \quad \frac{e^n (n+5)!}{n!} \left(2 - \frac{1}{e} - 2\right)^n \text{ divergerer}$$

så rekken konvergerer for $x \in \left(2 - \frac{1}{e}, 2 + \frac{1}{e}\right)$

4a)

$$A = \begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 6/10 & 2/10 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

finner egenverdiene

$$\frac{1}{10} \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 6 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{10} \cdot ((\lambda - 3)(\lambda - 2) - 1 \cdot 6$$

$$= (\lambda^2 - \tfrac{2}{10}\lambda - \tfrac{3}{10}\lambda \cancel{+ \tfrac{6}{10} - \tfrac{6}{10}})$$

$$= \lambda(\lambda - \tfrac{1}{2})$$

egenverdiene er når ans er lik 0

dermed er egenverdiene $(0, \frac{1}{2})$

For å finne egenvektoren til bruker vi $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$

For $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 6/10 & 2/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y = 0 \\ \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -y \\ 3x = -y \end{cases} \Rightarrow \text{Løsning} \quad \underline{\underline{\begin{pmatrix} A_1 \\ -3A_2 \end{pmatrix}}}$$

För $\lambda = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 6/10 & 2/10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y = \frac{x}{2} \\ \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 5x \\ 6x + 2y = 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2x \end{cases}$$

Lösning $\begin{pmatrix} A_1 \\ 2A_1 \end{pmatrix}$

G) Skriver $\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en linjärkombination av egenvektorer för A

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ -3A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ 2A_2 \end{pmatrix} \text{ ger}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & 13 = A_1 + A_2 \\ \text{II} & 1 = -3A_1 + 2A_2 \end{array}\right\} \text{ I ger } A_1 = 13 - A_2 \text{ II ger då}$$

$$1 = -3(13 - A_2) + 2A_2$$

$$1 = -39 + 3A_2 + 2A_2$$

$$\frac{40}{5} = \frac{5A_2}{5}$$

$$8 = A_2$$

$A_1 = 13 - 8 = 5$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Dermed kan vi skrive

$$\bar{x}_n = A^n \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = A^n \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \right] = A^n \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \lambda^n \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$0^n \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 16 \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}}} \quad \text{for } n > 0$$

Det gir $\lim_{n \to \infty} \bar{x}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ fordi $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$. Vi har $\underline{\underline{\vec{x}_0 = \begin{matrix} 13 \\ 1 \end{matrix}}}$