Ligninger

$f(x) = 0$

Det vi er ute etter er å finne $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$

Hvordan :

1 : Finne en formel eller en oppskrift
- Fungerer sjeldent for ikke trivielle tilfeller

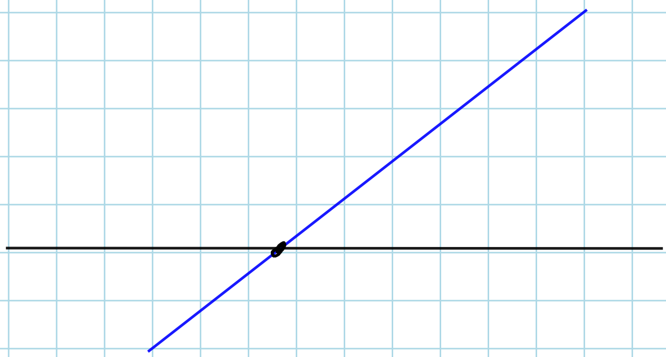
2 : Finne numeriske tilnærminger til løsninger med en ønsket nøyaktighet

Fungerer "alltid"

Lineære ligninger

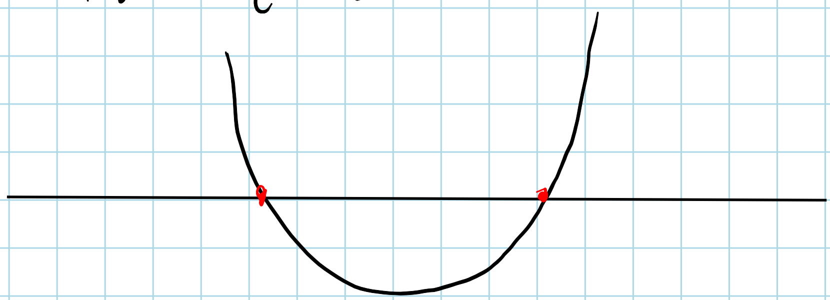
$f(x) = ax + b$

Løsning $\Rightarrow x = \frac{-b}{a}$



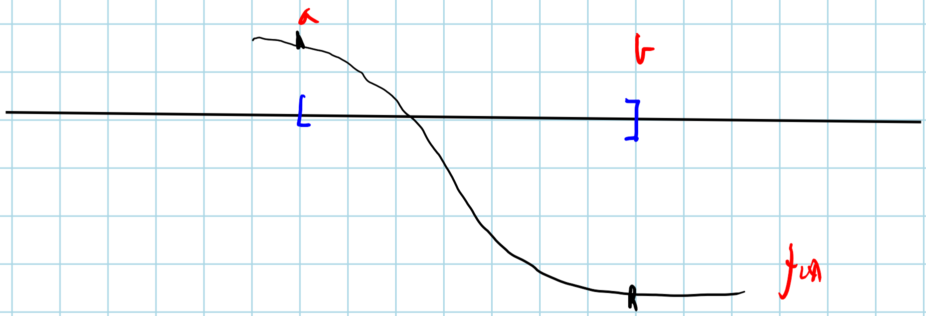
Kvadratisk:

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$



Løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Halveringsmetoden: 10,2



Gitt en kontinuerlig funksjon som har ulikt fortegn for a og b

Theorem 10,1

Hvis $f(a) \cdot f(b) < 0$ og f er kontinuerlig så finnes det en $c \in \mathbb{R}$ i det åpne intervallet $[a, b]$ slik at $f(c) = 0$

Løsning av $f(x) = 0$

Halvert:

Dele intervallet på midten

$\frac{A+B}{2} = m$ da får vi to intervaller $[a, m]$ & $[m, b]$

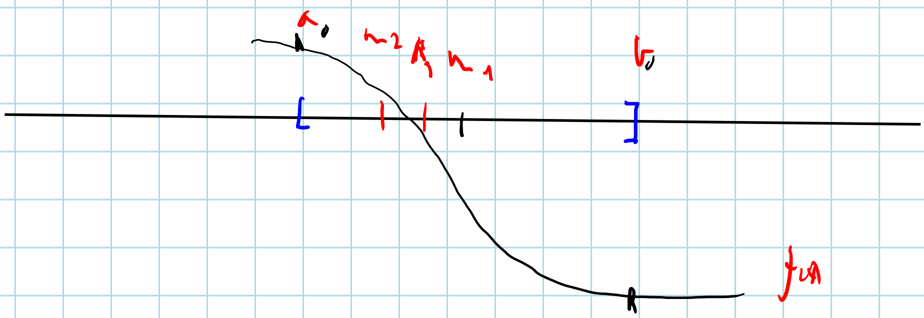
Då må det være et fortegnsskift i en av intervallene

Én av intervallene må inneholde en løsning

Vi har et fortegnsskift i $[a, m]$

Vi gjentar dette til intervallet er lite nok

Algoritme:



$a_0 = a$

$b_0 = b$

for $i = 1, \dots, N$:

$m_{i-1} = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$

if $f(m_{i-1}) == 0$:

ferdig

if $f(a_{i-1}) \cdot f(m_{i-1}) < 0$:

$a_i = a_{i-1}$

$b_i = m_{i-1}$

else:

$a_i = m$

$b_i = b_{i-1}$

end for

$m_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ er en tilnærming til løsningen

Feilanalyse:

Absolutt feilen er

$$|c - m| < \frac{b-a}{2}$$

Etter n steg

$$|c - m_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

Hvis vi ønsker feil mindre enn ε, f.eks 10^{-10}

Løse en liten ulikhet

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$$

for n, Løsningen av ulikheten er $N > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln(2)} - 1$

Relativ feil

$$\left|\frac{c - m_n}{c}\right| < \frac{b-a}{2^{n+1}} \approx \frac{b-a}{2^{n+1}|m_n|}$$

Kan bjøre halveringsmetoden til

$$\frac{b-a}{2^{n+1}(n+1)} < \varepsilon$$

Kan vise at antall korrekte bits i estimatet vårt øker med n pr. iterasjon

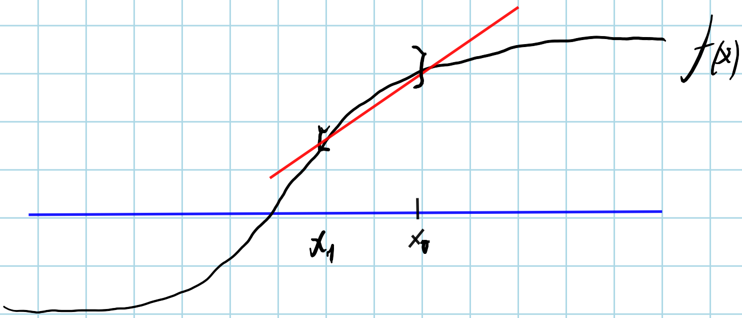
$\Rightarrow$ Full nøyaktighet $N = 24$ med 32-bits flyttall og
$N = 57$ med 64 bits

Sekant metoden 10,3

Gitt en f og 2 startverdier / tilnærminger

x_0 og x_1

Linjær approks:



① Finne en linjær tilnærming som interpolerer f i x_1 og x_0

② Finn x slik at $s(x) = 0$
Bruker dette som tilnærming til
$f(x) = 0$
inteduser x_0

v: kan skrive s(x) som

$$s(x) = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x)$$

ser at $s(x) = 0$ for

$$x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x) - f(x_0)} f(x_1)$$