Multiplikasjon av matriser

$n \times n$ - matrise $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \vdots & \end{pmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} + x_1 + a_{12} + x_2 + \cdots + a_{1m} x_n \\ a_{21} x_1 \ldots \qquad + \ldots a_{2n} x_n \\ \cdot \end{pmatrix}$$

Hvordan multipliserer vi matriser:

1. forsøk $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

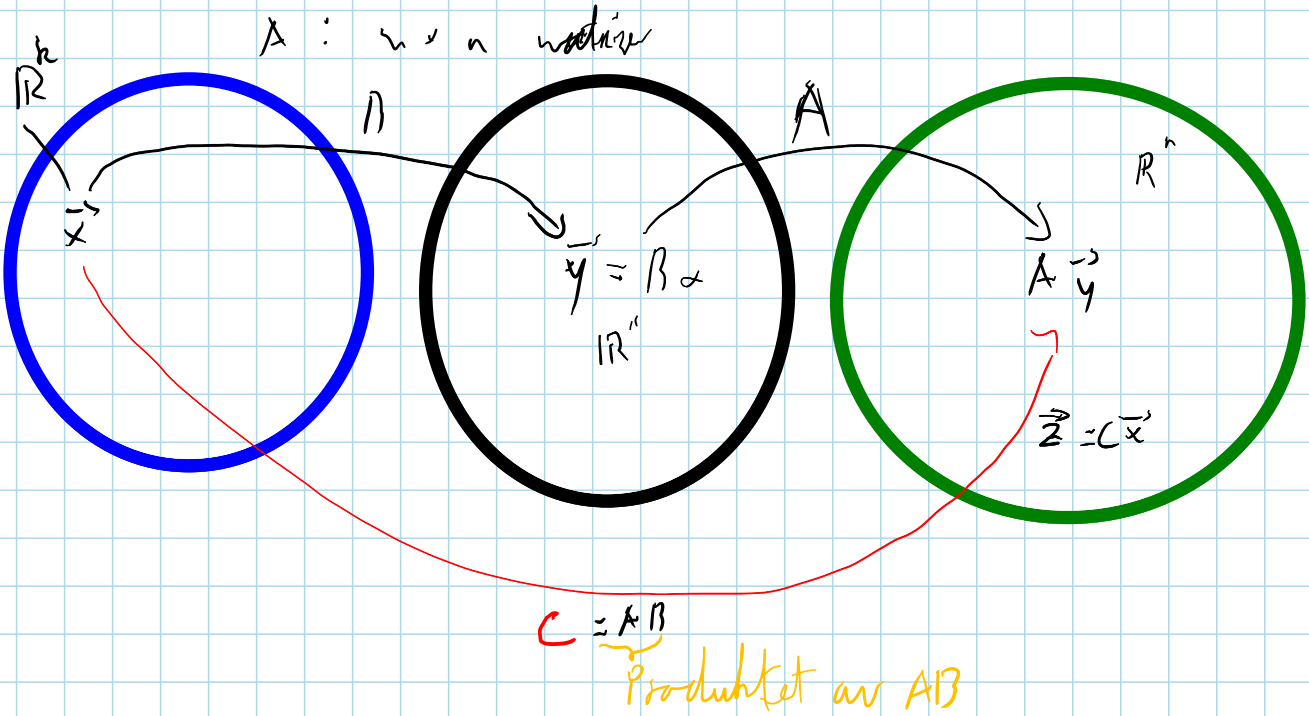
$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1n} \\ \vdots & \\ b_{n1} & b_{mn} \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} \;, & a_{12} b_{12} & \cdots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

2 forsøk: Ser på hva vi skal med matrise

B : n × k matrise

A : m × n matrise



Produktet $C = AB$ av en $m \times n$ matrise A, og en $n \times k$ matrise B, er en $m \times k$ matrise gitt ved:

$$\begin{array}{cc} & j \text{ kolonne} \\ i \text{ rad} & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ i \end{array} \begin{pmatrix} \\ a_{i1} \; a_{i2} \ldots a_{in} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & a_{1j} & \\ & a_{2j} & \\ & \vdots & \\ & a_{nj} & \end{pmatrix} \end{array}$$

komponent c_{ij} er skalarproduktet av i-te rad i A med j-te ...

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{ij} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

Eks

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{3 \times \cancel{3} \quad \text{stryker disse som er like} \quad \cancel{3} \times 2}_{c \,=\, 3 \times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + (-1)(-1) + 0 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 4(-1) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Setning: anta at A er en $m \times n$ matrise og B er en $n \times k$-matrise. Da er $C = AB$ $m \times B$-matrisen slik at for alle $\vec{x} \in \mathbb{R}$, så er $C\vec{x} = A(B\vec{x})$

$$(AB)\vec{x} = C\vec{x} = A(B\vec{x})$$

Regne regler for matriseprodukt: anta at A, B og C har posisjoner

i) assosiativ lov: $(AB)C = A(BC)$

ii) De distributive lov: $A \cdot (B + C) = AB + AC$

$$(A+B)C = AC + BC$$

iii) $A(sB) = s(AB)$, $(sA)B = s(AB)$

Obs: Selv om AB er definert så behøver ikke BA å være det. Selv i tilfeller i AB og BA vil være forskjellige

Observasjon: $\underset{m \times n}{A}$ $\underset{n \times k}{B} = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_k]$

søyler

$$AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, A\vec{b}_k]$$

Eks: Eksamen i 2011

Kartong fabrikker: I, II, III

Returstasjoner: A, B

Fabrikk I (x_1): 40% A, 30% B, resten tapt

Fabrikk II (x_2): 30% A, 50% B, resten tapt

Fabrikk III (x_3): 60% A, 30% B, Resten tapt

x ton kartonger

Produksjon: I, II, III — x_1, x_2, x_3

A, B — y_1, y_2

$$y_1 = 0,4\,x_1 + 0,3\,x_2 + 0,6\,x_3$$

$$y_2 = 0,3\,x_1 + 0,5\,x_2 + 0,3\,x_3$$

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,6 \\ 0,3 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Y} = C\vec{X}$$

Retur:

A: 40% I, 20% II, 40% III

B: 20% I, 50% II, 30% III

anta at Y_1 og Y_2 er hvor mye kartong mottas av A og B og Hvor mye som returneres til hver I II III.

$$\vec{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad \underline{D} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$z_1 = 0,4\,y_1 + 0,2\,y_2$$

$$z_2 = 0,2\,y_1 + 0,5\,y_2$$

$$z_3 = 0,4\,y_1 + 0,3\,y_2$$

$$\rightsquigarrow \underline{\vec{Y} = C\vec{X}}$$

Hvis disse fabrikkene produserer x_1 x_2 x_3 fra hver i retur.

startvekt   retur vektor   vektor i retur

$$\underbrace{\vec{x}}_{\text{startvekt}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}$$

$$\underline{\vec{y} = C\vec{x}} \rightarrow \vec{z} = D\vec{y}$$

$$\vec{z} = D\vec{y} = D(C\vec{x}) = (DC)\vec{x}$$

produkt

Trenger DC:

$$DC = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

skal være like

$$\underbrace{3 \times \cancel{2} \quad \cancel{2} \times 3}_{3 \times 3}$$

$$= \begin{matrix} 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 & 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 & 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 & 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 & 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 \\ 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 & 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 & 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 + 0{,}3 \end{matrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}22 & 0{,}3 \\ 0{,}23 & 0{,}31 & 0{,}27 \\ 0{,}25 & 0{,}27 & 0{,}33 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = (1)\ c)\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,22 & 0,3 \\ 0,23 & 0,31 & 0,27 \\ 0,25 & 0,27 & 0,33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,22x_1 + 0,22x_1 + 0,3x_1 \\ 0,23x_2 + 0,31x_2 + 0,27x_2 \\ 0,25x_3 + 0,27x_3 + 0,33x_3 \end{pmatrix}$$