Egenskaper MLE, 7.4

$X_i \sim f(x;\theta)$ uif

$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ = Likelyhood

$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i;\theta)$

La $u_i = \frac{d}{d\theta} \ln f(x_i;\theta)$

1) Definerte $I(\theta) = V(u_i)$ = Fissher forenjon (forventning)

Vi . . . . .

① $E[u_i] = 0$

og ② $I(\theta) = V(u_i) = E \frac{d^2 \ln f(x_i;\theta)}{d\theta^2}$

Skal nå argumentere for at

. . . . . .

utresultat : $\hat{\theta} \overset{\text{tiln}}{\sim} N\left(\theta, \frac{1}{n I(\theta)}\right)$, $I_n(\theta) = n I(\theta)$

Minner om poengfunksjonen

$$S(\theta) = \frac{d\ell_\theta}{d\theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d\theta} \ln f(x_i;\theta)$$

og vi antar at MLE $\hat\theta$ er en løsning av $S(\hat\theta) = 0$

Men $S(\theta) = \sum_{i=1}^{n} u_i$ der $u_i = \frac{d \ln f(x_i;\theta)}{d\theta}$ uif

med $E u_i = 0$ og $V(u_i) = I(\theta)$

Fra sentralgrenseteoremet

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S(\theta) = \sqrt{n}\,(\bar U - \underbrace{E\,u_i}_{=0}) \to N(0, I(\theta))$$ ($I\theta$ variansen til alle u_i)

Mulig ved neg

$$\bar U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$$

På det ene $\hat\theta$ har vi at

$$0 = S(\hat\theta) = S(\theta) + (\hat\theta - \theta)\, S'(\theta) + \underset{\substack{\Downarrow\\0}}{\text{restledd}}$$

Dessuten vil $-\frac{1}{n} S'(\theta) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta^2 \ln f x_i;\theta}{d\theta} \to -E \frac{d^2 \ln f(x_i;\theta)}{d\theta^2} = I(\theta)$

Ved STL

Her er $W_i = -\frac{d^2 \ln f(x_i;\theta)}{d\theta^2}$, uif med $E\,W_i = I\theta$

Hvis vi ignorerer restleddet i (*) får vi

$$\sqrt{n}\,(\hat\theta - \theta) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} S(\theta)}{-\frac{1}{n} S'(\theta)}$$ der teller $\to N(0, I(\theta))$

og Nevner $\to I(\theta)$

Derved vil $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ ha samme grensefordeling

som $\frac{1}{\sqrt{n}} S(\theta) / I(\theta)$, dvs. $N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S(\theta) / I(\theta)\right) = \frac{1}{I(\theta)^2} \, Var\left(\frac{1}{\sqrt{n}} S(\theta)\right) = \frac{\cancel{I(\theta)}}{I(\theta)^{\cancel{2}}}$$

Så $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \to N\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right)$ q.e.d.