Linjeintegraler

Def 3.4.1

Eks. Finne arbeidet utført av vektorfeltet

$$\vec{F}(x,y,z) = (0,0,-gm) = -gm\,\underline{k}$$

langs kurven $\underline{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ for $t \in [0, 2\pi]$,

der $g > 0$ og $m > 0$ er reelle tall

Løsning se figur eks 5/n

$$\int_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \frac{d\underline{r}}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (0,0,-gm) \cdot (-\sin t, \cos t, 1)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -gm\, dt$$

$$= \big[-gm\,t\big]_0^{2\pi}$$

$$= -mg \cdot 2\pi$$

$$= -mg \cdot \text{høydediff}$$

Eks 2

$$\bar{F}(x,y,z) = (zx, yx, x) = zx\,\bar{i} + yx\,\bar{j} + x\,\bar{k}$$

$$C:\ \bar{r}(t) = (\overset{x}{t^2}, \overset{y}{2t}, \overset{z}{t^3}) \qquad t \in [0,1]$$

Dette gir

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^1 \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot \bar{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (t^3\cdot t^2, 2t\cdot t^2, t^2)\cdot(2t, 2, 3t^2)$$

$$= \int_0^1 (2t^6 + 4t^3 + 3t^4)\,dt$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{4}{4} + \frac{3}{5}$$

$= \underline{\underline{\text{etc.}}}$

3.5 Gradienter og konservative vektorfelt

$\phi(x_1, \dots, x_n)$ skalar felt

$\nabla \phi = \left(\frac{d\phi}{x_1}, \dots, \frac{d\phi}{dx_n} \right)$ blir da et vektorfelt

gradienten til ϕ

Definisjon 3.5.3

Hvis $\bar{F} = \nabla \phi$ for alle $x \in A$, sier vi at ϕ er en potensialfunksjon for $\bar{F}$ i A.

$\bar{F}$ kalles et vektorfelt i området A.

Theorem 3.5.7

Man kan vise at hvis $\bar{F}$ har kontinuerlige partiellderiverte og A er et åpent og enkeltsammenhengende område (dvs. alle lukkede, kontinuerlige kurver kan snurpes til et punkt i A uten å forlate A), så gjelder

$$\bar{F} \text{ konservativt i } A \iff \frac{dF_i}{dx_j} = \frac{dF_j}{dx_i} \quad \text{for alle } i \text{ og } j$$

og alle $x \in A$

Setning 3.5.1

Anta at $\phi : A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av n variable med kontinuerlig gradient. Hvis $\vec{r} : [a, b] \to A$ parametriserer en stykkevis glatt kurve C i A, så er

$$\int_C \nabla \phi \cdot d\bar{r} = \phi(\bar{r}(b)) - \phi(\bar{r}(a))$$

Bevis Vi kan anta at C er en glatt (sett sammen biter)

$$[\phi(\underbrace{\bar{r}(t)}))]' = \frac{d\phi}{dx_1} \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{d\phi}{dx_n} \cdot x_n'(t)$$

Måleinstrument som beveger seg rundt: rakett

$$= \nabla \phi \cdot \bar{r}'(t) \quad *$$

Får derfor dette:

$$\int_C \nabla \phi \, d\bar{r} = \nabla \phi(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t) \, dt$$

$$\overset{*}{=} \int_a^b [\phi(\bar{r}(t))]' \, dt$$

$$= \Big[\phi(\bar{r}(t))\Big]_a^b = \phi(\bar{r}(b)) - \phi(\bar{r}(a)) \quad \blacksquare$$

Eksempler:

(1) $\phi(x,y,z) = xyz$ gir $\nabla\phi = (yz, xz, xy) = \bar{F}$
dvs

Kurven C er parametrisert ved
$\bar{r}(t) = (t^2, \sin t, \cos t)$ for $t \in (0,\pi)$

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_C \nabla\phi \cdot d\bar{r}$$

$$= \phi(\bar{r}(\pi)) - \phi(r(0))$$

$$= \phi(\pi^2, \sin 0, \cos 0) - \phi(0,0,1)$$

$$= \pi^2 \cdot 0 \cdot -1 - 0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$$