⋮

Vi skal være interesert i å betrakte reelle kvadratiske matriser som komplekse matriser:

De komplekse røttene til det kar.pol kalles de for <u>komplekse egenskaper</u>

Eks. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rotasjon på $90°$ mot klokken)

Har sett at A har ingen reelle egenverdier. Har at

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$, har ingen reelle

røtter.

Men vi har $\pm i$ som komplekse røtter

$$P_A(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i)$$

Så A har komplekse egenverdier $\pm i$

Merk at:

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Så $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ er en kompleks egenvektor for A svarer til $\lambda = i$

$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ —————— || —————— $\lambda = -i$

Ex) $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$

Da er $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - a)^2 + b^2$

Så har de komplekse røttene $\lambda = a \pm ib$

som er konjugerte av hverandre

Vi har f.eks

$E^A_{a-bi} = \text{Nul} \begin{bmatrix} bi & -b \\ b & bi \end{bmatrix} = \text{Null} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$

Tilsvarende er $E^A_{a+bi} = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}$

den konjugerte av $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

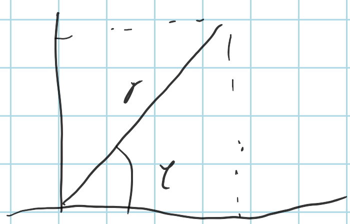
$x_1 = A x_0$, $x_2 = A x_1$

(m.a.o $\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$)

Velger $a = 0.8$ $b = 0.6$, MATLAB-demo

$a = r \cos \varphi$ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$b = r \sin \varphi$



Det gir $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi & -r\sin\varphi \\ r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$

Komplekse egenverdi for $b > 0$

$= \underset{\text{Skalering}}{r} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\text{Rotasjon}}$

Notasjon Når $\underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 + i y_1 \\ x_2 + i y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

Setter vi $\text{Re}\, \underline{z} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\text{Im}\, \underline{z} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Så $\underline{z} = \text{Re}\, \underline{z} + i\, \text{Im}\, \underline{z}$

Teorem: La A være en reell 2×2 matrise med en kompleks egenverdi $\lambda = a - bi$ der $b \neq 0$ og en tilhørende egenvektor $\underline{z} \in \mathbb{C}^2$

Sett $P [\text{Re}\, \underline{z} \quad \text{Im}\, \underline{z}]$ (som er en 2×2 reell mat)

Da er P invertibel, og vi har at

$$A = P \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} P^{-1}$$

M.a.o. A er similær med $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$