5.1

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{Finn } A^{17}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A^{17} =$$

En klare måte:

Anta vi vet at $A = PDP^{-1}$ der

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Da kan vi sjekke at $A = PDP^{-1}$

$$A^{17} = ?$$

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}$$

$$= PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$A = A^2A = PD^2\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1}$$

$$= PD^3P^{-1}$$

$$A^{17} = P D^{17} P^{-1}$$

$$A^{k} = P D^{k} P^{-1} \quad , \quad D^{17} \text{ lett}$$

Diagonalmatrise

$$D^{17} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{17} = \begin{bmatrix} 4^{17} & 0 \\ 0 & 2^{17} \end{bmatrix}$$

$$A^{17} = P \begin{bmatrix} 4^{17} & 0 \\ 0 & 2^{17} \end{bmatrix} P^{-1} = \dots$$

→ diagonalisering av A

$$A = P D P^{-1}$$

Diagonalmatrise

Teorem 5

En $n \times n$ reel matrise A er diagonaliserbar hvis og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer.

Bevis:

$$A = P D P^{-1} \quad ,$$

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$

Siden P er invertibel er $v_1, v_2, \dots, v_n$ lin. uav.

de er en basis for $\mathbb{R}^n$

$$A = P D P^{-1} \Rightarrow A P = P D P^{-1} P = P D$$

Altså: $AP = PD$

$$A P = A[v_1, \dots, v_n] = [Av_1, \dots, Av_n]$$

def. matriseprod.

$$PD = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \left[P\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots \right]$$

dermed $P\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n$

$= \lambda_1 v_1$

Så $Av_1 = \lambda_1 v_1$, v_1 egenvektor m. t. ev. λ_1

Tilsvarende: j'te kolonne

$$Av_j = \lambda_j v_j$$

$A = PDP^{-1}$

<u>Mer:</u> lettere

$$AP = PD$$

$$Av_j = \lambda v_j \quad (j \leq n)$$

$\Leftarrow$ Antar $v_1, \dots, v_n$ er en egenvektor basis for A

$$P = [v_1, \dots, v_n]$$

Da er $D = P^{-1}AP$

$$D = P^{-1}A = P^{-1}A[v_1, \dots, v_n]$$
$$= P^{-1}[Av_1 \dots, Av_n$$
$$= P^{-1}[\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n]$$
$$= \lambda_1 P^{-1} v_1, \dots, \lambda_n P^{-1} v_n$$

$= \lambda_1 e_1 \quad \cdots \quad \lambda_n e_n$

$= \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

Forklaring

$P^{-1} P = I$

$P^{-1} [v_1 \ldots v_n] = I$

$[P^{-1} v_1 \ \ldots \ P^{-1} v_n] = [e_1 \ \ldots \ e_n]$

$P^{-1} v_i = e_i$

Metode

① Finn egenverdiene til A. Hvis n er liten. Prøv å bestemme røttene til det karakteristiske polynomet P_A

② For hver egenverdi λ_i, bestem en basis for $E_\lambda^A = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$

③ Dersom disse basisene tilsammen består av n egenvektorer, er A diagonaliserbar

La da P være matrisen med disse ...

5.3.14 Diagonaliser om mulig matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$p_A(\lambda)$ $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & 4 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = 5-\lambda \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) = (4-\lambda)(5-\lambda)^2$$

Dermed har vi egenverdiene $\lambda = 4$ og $\lambda = 5$

Egenvektorer

a $\lambda = 4$ $\quad (A - 4I) = 0 \quad Ax = 4x$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x = 0 \xrightarrow{ref} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

Så $x_3 = 0$, x_2 fri, $x_1 = \frac{1}{2} x_2$

$x = (x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}x_2, x_2, 0 = x_2 \cdot (\frac{1}{2}, 1, 0)$

$\Rightarrow E_4^A = \text{Span}\{(-\frac{1}{2}, 1, 0)\} = \text{Span}\{(-1, 2, 0)\}$

b) $\lambda = 5$ $\quad (A - 5\lambda)x = 0 \quad$ a: $Ax = 5x$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

$\Leftrightarrow x = (-2x_3, x_2, x_3) = x_2(0, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1)$

Så $E_5^A = \text{Span}\{(0,1,0), (-2,0,1)\}$ ← Dim = 2

Siden dimensjonen til E_λ^A er lik multiplisiteten til λ, ...

Så er A diagonaliserbar.

Og $P^{-1}AP = D$ (eller $A = PDP^{-1}$)

der $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

regne P^{-1}

da har vi

$$A = PD^{-1}$$

5.3.8 Diagonalisere en matrise $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

① Egenverdiene

Når matrisen er øvre triangulær er egenverdiene

$$\begin{matrix} a & b \\ 0 & c \end{matrix}$$

Dermed er $\lambda = 5$

② Finner egenvektorene:

$$Ax = 5x \quad , (A - 5I)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5-5 & 1 \\ 0 & 5-5 \end{bmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$$

$$E_5^A = \text{Span}\,\{(1,0)\}$$

$$\dim E_5^A = 1 < 2 = \text{multiplisiteten}$$

$\Rightarrow A$ er ikke diagonaliserbar