STK1100 våren 2018

Lineærkombinasjoner av stokastiske variabler

Avsnitt 6.3 i læreboka

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Forventning og varians til lineær-kombinasjoner av stokasiske variabler

La $X_1, X_2, ..., X_n$ være stokastiske variabler

Vi ser på lineærkombinasjonen $a_1 X_1 + ... + a_n X_n$

Vi har generelt at (detaljer på forelesningen)

- $E(a_1 X_1 + ... + a_n X_n) = a_1 E(X_1) + ... + a_n E(X_n)$
- $V(a_1 X_1 + ... + a_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$
  $= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + 2 \sum \sum_{i<j} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$

Hvis $X_1, X_2, ..., X_n$ er uavhengige har vi at

- $V(a_1 X_1 + ... + a_n X_n) = a_1^2 V(X_1) + ... + a_n^2 V(X_n)$

Fordeling til lineærkombinasjoner og summer av stokastiske variabler

I noen viktige situasjoner kan vi bruke momentgenererende funksjoner til å finne fordelingen til lineærkombinasjoner og summer av stokastiske variabler (detaljer på forelesningen)

Normalfordelte variabler

Anta at $X_1, X_2, ..., X_n$ er uavhengige og $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$

Ved å bruke at $M_{X_i}(t) = \exp\left\{\mu_i t + \sigma_i^2 t^2 / 2\right\}$ får vi at

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \right)$$

Poisson fordelte variabler

Anta at $X_1, ..., X_n$ er uavhengige og $X_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$

Ved å bruke at $M_{X_i}(t) = \exp\left\{\lambda_i (e^t - 1)\right\}$ får vi at

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)$$

Gamma fordelte variabler med samme skala parameter

Anta at $X_1, ..., X_n$ er uavhengige og $X_i \sim \text{gamma}(\alpha_i, \beta)$

Ved å bruke at $M_{X_i}(t) = 1/(1-\beta t)^{\alpha_i}$ får vi at

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \text{gamma}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ , \ \beta \right)$$

Forventning og varians til en lineærkombinasjon

Har generelt

$$E(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$$

Ser på variansen

$$V(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i) + \sum_{i \neq j}\sum a_i a_j \, Cov(X_i X_j)$$

$$= \sum a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i<j}\sum a_i a_j Cov(X_i X_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j Cov(X_i X_j)$$

Bevis for $n = 2$

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 \qquad \mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2$$

$$V(a_1 X_1 + a_2 X_2) = E\{(Y - \mu_Y)^2\}$$

$$= E\{(a_1 X_1 + a_2 X_2 - a_1\mu_1 - a_2\mu_2)^2\}$$

$$= E\{[a_1(X_1 - \mu) + a_2(X_2 - \mu_2)]^2\}$$

$$= E\{a_1^2 (X_1 - \mu)^2 + a_2^2 (X_2 - \mu)^2 - 2 a_1 a_2 (X_1 \mu_1)(X_2 - \mu_2)\}$$

$$= a_1^2 E\{X_1 - \mu_1)^2\} + a_2^2 E\{(X_2 - \mu)^2\}$$

$$+ 2 a_1 a_2 E\{X_1 - \mu_1\} \dots$$

Eks X_1 og X_2

$$V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$$

$$V(X_1 - X_2) = V(1 \cdot X_1 + (-1)X_2) = \underline{V(X_1) + V(X_2)}$$

Fordeling til lineærkombinasjoner

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ uavhengige

$M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i})$ mgf til X_i

Ser på $Y = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$

Mgf til Y

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n)})$$

$$= E(e^{a_1tX_1} \cdots e^{a_ntX_n})$$

uavh. $= M_{X_1}(a_1t) \cdots M_{X_n}(a_nt) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(a_it)$

Normalfordeling

$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ $\quad M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \sigma_i^2 t^2/2}$

Dermed for $Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp\{\mu_i a_i t + \sigma_i^2 a_i^2 t^2/2\}$$

korreksjoner i toppen ↑

$$= \exp\{((\sum a_i \mu_i) t + (\sum \sigma_i^2) t^2/2$$

Poissonfordeling

$X_1, \dots, X_i$ uavh. $X_i \sim Poisson(\lambda_i)$

$$M_{X_i}(t) = \exp(\lambda_i(e^t - 1))$$

Ser på $Y = X_1 + \dots + X_n$

MGF

$$M_Y(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i(e^t - 1)) = \exp((\sum \lambda_i)(e^t - 1))$$

Så

$$Y = \sum X_i \sim Poisson(\sum \lambda_i)$$

Gammafordeling med same skalar

$X_1, \dots, X_n$ uavh $X_i \sim \text{gamma}(\alpha_i, \beta)$ (felles β)

$$M_{X_i}(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_i}} \quad |\beta| < 1$$

Dermed for $Y = X_1$

$$\vdots$$