Mat 1120

Invertibel matrise teorem (IMT)

Ekvivalente:

A er invertibel

A er radekvivalent med I

⋮

A^T er invertibel

IMT

Teoremet følger ved å sette sammen alle tidligere resultater og noen enklere observasjoner, f. eks.

$$A\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n$$

$A = [\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n]$ $n \times n$-mat.

$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$

A har n pivot kolonner

$\Leftrightarrow R$ — " —

$\Leftrightarrow R = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$

$\Leftrightarrow R$ har en pivot i hver rad

($\Leftrightarrow$ Kol.vek. til A utspenner $\mathbb{R}^n$)

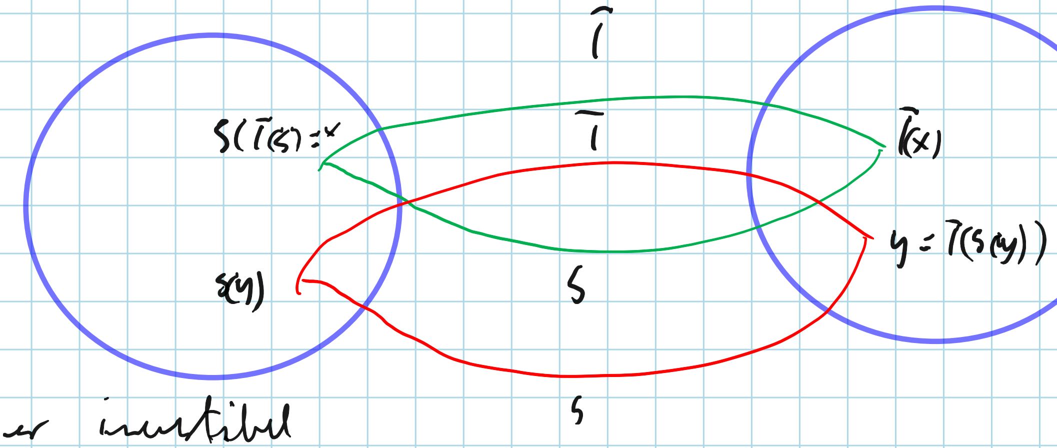
Pingo: Hvis A er en $n \times n$ matrise og systemet $A\bar{x} = \bar{b}$ har en løsning for enhver $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$, så har systemet en entydig løsning for hver $\bar{b}$.

Sant eller galt?

b) Fordi A er invertibel, ved IMT, så

$A\bar{x} = \bar{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I_n} x = A^{-1}b$, dvs entydig løsning

$x =$



T er invertibel

S er den inverse

Partisjonerte matriser

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 8 \\ \hline 1 & 0 & 7 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right]$$

Er mest interessert i Kolonne - rad formelen for matrise produktet:

A sta $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ matrise, $B = [b_{ij}]$ $n \times p$ mat.

Da er $AB = (\mathrm{Col}_1 A)(\mathrm{Row}_1 B) + \dots + (\mathrm{Col}_n A)(\mathrm{Row}_n B)$

Men først $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ $\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_p \end{bmatrix}}_{1 \times p}$ gir en $m \times p$ matrise

$\underbrace{}_{m \times 1}$

$$= \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_p \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_p \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_m y_1 & \cdots & \cdots & x_n y_p \end{bmatrix}$$

Så $(\mathrm{col}_k A)(\mathrm{Row}_k B) = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{k1}, & \cdots & b_{kp} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{ik} b_{kj} \end{bmatrix}_{i,j}$$

Dermed blir "høyre siden av formelen" lik

$[a_{i1} b_{1j}]_{i,j} + \ldots [a_{in} b_{nj}]_{ij}$

$$= \Big[\underbrace{a_{i1} b_{1j} + \ldots + a_{in} b_{nj}}_{\text{Rad } i \text{ " } i \text{ " } A \text{ prikket med Kol nr } j \text{ i } B} \Big]$$

EKS:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 5\\-3 & 15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 12\\0 & 24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 17\\-3 & 39\end{bmatrix}$$

Determinanten:

Berechne

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\4 & 0 & 7 & 6\\5 & 2 & -1 & 3\\3 & 0 & -3 & 0\end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\4 & 7 & 6\\3 & -3 & 0\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\4 & 11 & 6\\3 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

entwickeln und col 2

$$= -2\cdot 3\begin{vmatrix}2 & 2\\11 & 6\end{vmatrix} = 160$$

Oppg anta A, B, C er 3×3 mat

$\det A = 3$ $\det B = 5$, $\det C = 12$

Da er $\det(2A^2 B^T C^{-1}) = 2^3 \det(A^2 B^T C^{-1})$

siden 3×3 matrise

$= 2^3 (\det A)^2 \det B \dfrac{1}{\det C}$

$= \dfrac{8 \cdot 3^2 \cdot 5}{12} = 30$