1,3 Komplekse vektorer

Regler for komplekse n-tupler

a, b og c er n-tupler og s, t er komplekse tall

a) $a + b = b + a$

b) $a \cdot b = \overline{b \cdot a}$

c) $s(a+b) = sa + sb$

d) $(s+t)a = sa + ta$

e) $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ og $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

f) $(sa) \cdot b = s(a \cdot b)$ og $a \cdot (sb) = \bar{s}(a \cdot b)$

g) $a \cdot a \geq 0$ med likhet bare hvis $a = 0$

1 Pytagoras setning

Dersom $a, b \in \mathbb{C}^n$ er ortogonale, så er $|a|^2 + |b|^2 = |a+b|^2$

2 Schwarz' ulikhet

For alle $a, b \in \mathbb{C}^n$ er $|a \cdot b| \leq |a||b|$

3 Trekantulikheten

For alle $a, b \in \mathbb{C}^n$ er $|a + b| = |a| + |b|$

1 $\quad s x + t y \quad , s = i , t = 1 + 2i , x = \begin{pmatrix} -4i \\ 2-i \end{pmatrix}$

$, y = \begin{pmatrix} 2+i \\ 2i \end{pmatrix}$

$i(-4i, 2-i) + (1+2i)(2+i, 2i)$

$= (4, 2i+1) + (2+5i-2)$

$(1+2i)(2+i)$

$2+i+4i+2i^2$

$= (4+2, (2i+1)+(5i-2))$

$= (6, 7i-1)$

2 $\quad$ Fin lengden til $a = (3+2i, -1+i)$

$, v = (i, 2+3i, -2-i)$

$|a| = \sqrt{|3+2i|^2 + |-1+i|^2}$

$= \sqrt{|3^2 + 2(6i) + (2i)^2| + |(-1)^2 + 2(-1i) - 1|}$

$= \sqrt{|9+12i-4| + |1-2i-1|}$

$= \sqrt{\sqrt{5^2 + (12i)^2} + \sqrt{2^2 + (-2i)^2}}$

$= 25+$

$|z|^2 = a^2 + b^2$

$= \sqrt{|3+2i|^2 + |-1+i|^2}$

$= \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{15}$

3 regn ut skalarproduktet av $x \cdot y$

$x = (1 + 4i, -1 + i)$

$y = (2, 4 + 2i, -1 + i)$

$x \cdot y = \left(1 \cdot 2 + (-1 + i)(1 + 2i) + (-1 + i) \cdot 0\right)$

$= 2 + (-1 + -2i + i - 2 + 0$

$= \cancel{2} - 1 - \cancel{2}i + \cancel{i} - \cancel{2}$

$= -1 - i$

4 $x, y \in \mathbb{C}^n$

I $|x - y|^2 = |x|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x \cdot y) + |y|^2$

og

II $(x + y) \cdot (x - y) = |x|^2 - 2i\,\mathrm{Im}(x \cdot y) - |y|^2$

Setter $x = a + bi$ og $y = c + di$

I $|\overset{x}{(a + bi)} - \overset{y}{(c + di)}|^2$

$|\overset{x}{(a + bi)}^2 - \overset{2}{2}\overset{x \cdot y}{(a + bi)(c + di)} + (c + di)^2|$

$|a + bi|^2 + | - 2(a + bi)(c + di)| + |c + di|^2$

$\sqrt{\left(-2(a + bi)(c + di)\right)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 (a + bi)^2 (c + di)^2}$