2017-Juni-9.

a)

Far

Mor	a	A
a	$(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$
A	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$

derved er det $\frac{1}{4}$ sannsynlighet at unger får genet (aa)

b) Mor aa: 8%, Aa: 92%

Far Aa

$$P(\text{barn aa}) = P(\text{Mor AA})\,P(\text{barn aa} \mid \text{mor AA})$$
$$+ P(\text{mor aA})\,P(\text{barn aa} \mid \text{mor aA})$$

$$\Rightarrow 0{,}92 \cdot 0 + 0{,}08 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{(\text{Fra a})}$$

$$= 0.02 = 2\%$$

c) Far Aa

Mor aA eller AA

8% 92%

Hva er sannsynligheten for at moren er bærer

Bayes setning

$P(\text{mor aA}) = 0{,}08 \quad P(\text{mor AA}) = 0{,}92$

Vidre

$P(\text{tre friske barn} \mid \text{mor AA}) = 1$

$P(\text{tre friske barn} \mid \text{mor aA}) = \left(1 - \tfrac{1}{4}\right)^3 = \left(\tfrac{3}{4}\right)^3$

a

Bayes setning

$P(\text{mor aA} \mid \text{tre friske barn})$

$$= \frac{P(\text{mor aA})\, P(\text{tre friske barn} \mid \text{mor aA})}{P(\text{mor aA}) + P(\text{tre friske} \mid \text{mor aA}) + P(\text{mor AA}) \cdot P(\text{tre friske} \mid \text{mor AA})}$$

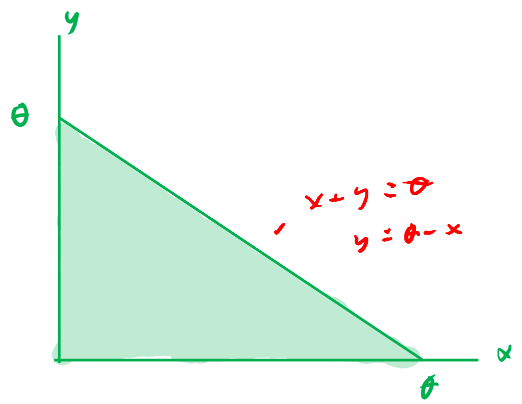
$$= \frac{0.08 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3}{0.08 \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 0{,}92 \cdot 1} = \underline{\underline{0{,}035 = 3{,}5\,\%}}$$

3 stokastisk variabel med simultan tetthet (uniform)

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} K & \text{hvis } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq \theta \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$\theta > 0$ er en parameter

Området hvor $f_{X,Y}(x,y) > 0$ er:



Har at

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \iint_A K\,dx\,dy = K \overbrace{\iint_A dx\,dy}^{\text{arealet av A}}$$

$$1 = K \cdot \frac{\theta^2}{2} \quad / \cdot \frac{2}{\theta^2}$$

Altså må

$$K = 2/\theta^2$$

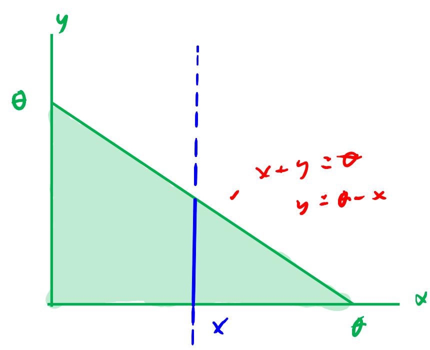
a) Marginaltetthet til X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

Finner for $(0 < x < \theta)$

$$f_X(x) = \int_0^{\theta - x} \underbrace{\frac{2}{\theta^2}}_{K}\,dy = \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta - x} dy = \frac{2}{\theta}\Big[y\Big]_0^{\theta - x}$$

$$= \frac{2}{\theta}(\theta - x)$$



Finn også marginaltettheten til Y

symmetrisk med x

$$f_Y(y) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - y)$$

Er $f_X(x)$ og $f_Y(y)$ uavhengige

Generelt er X og Y er uavhengig hvis

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

for alle x og y

Finner her at

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

Altså er X og Y ikke uavhengige

c) Vis at

$$E(X^r) = \frac{2\theta^r}{(r+1)(r+2)}$$

Har at

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x)\,dx = \int_0^\theta x^r \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta \theta x^r - x^{r+1}\,dx = \frac{2}{\theta^2}\left[\theta \frac{1}{r+1} x^{r+1} - \frac{1}{r+2} x^{r+2}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\left(\frac{\theta^{r+2}}{r+1} - \frac{\theta^{r+2}}{r+2}\right) = 2\theta^r\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right)$$

$$= \frac{2\theta^r}{(r+1)(r+2)}$$

Dermed er

$$E(X') = E(X) = \frac{2\theta}{2\cdot 3} = \theta^{?}$$

$$E(X^2) = \frac{3\theta^2}{3\cdot 4} = \frac{\theta^2}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\theta^2}{6} - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 = \frac{\theta^2}{18}$$

d) Finn den betingende tettheten

for Y gitt $X=x$ uttrykt ved $f_{Y|X=x}(y)$

Hvilken kjent tetthet er dette

(Betinget tetthet for Y, $X=x$)

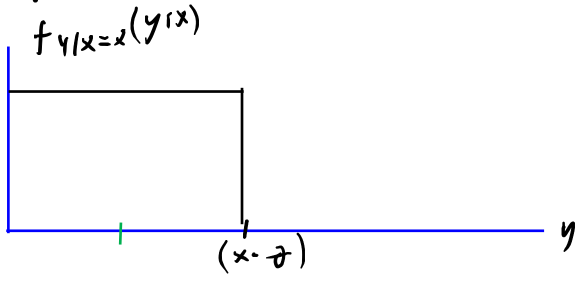
Finner at

$$f_{Y|X=x}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } y<0 \text{ og } y>(\theta-x) \\ \dfrac{2/\theta^2}{(2/\theta^2)(\theta-x)} & \text{for } 0\le y<(\theta-x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{for } y<0 \text{ og } y>(\theta-x) \\ \dfrac{1}{\theta-x} & \text{for } 0\le y\le(\theta-x) \end{cases}$$

Skisse



$Y|X=x \sim$ uniform$(\theta-x)$

Betinget forventning

$$E(Y|X=x) = \int_0^{\theta-x} y \frac{1}{\theta-x}\, dy = \frac{1}{\theta-x}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{(\theta-x)} = \frac{\theta-x}{2}$$

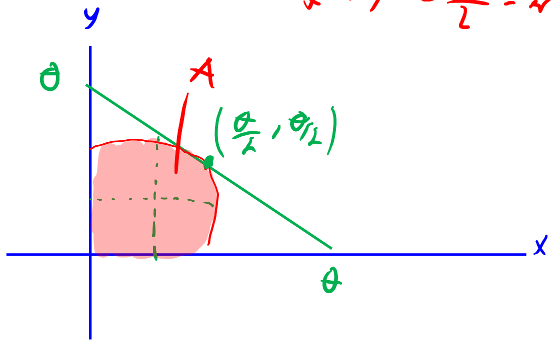
e) Finn sannsynligheten $P\left(x^2+y^2 \le \frac{\theta^2}{2}\right)$

Generelt

$$P((X,Y)\in A) = \iint_A f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

$x^2+y^2 = \frac{\theta^2}{2}$ - er en sirkel

Finner her følgande område.



Arealet av kvartsirkelen er (radius $\frac{\theta}{\sqrt{2}}$)

$$\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{\pi\theta^2}{8}$$

Dermed

$$P\left(x^2+y^2 \le \theta^2/2\right) = \iint_A \frac{2}{\theta^2}\, dx\, dy$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \overbrace{\iint_A dx\, dy}^{\text{Arealet av } A}$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \cdot \frac{\pi\theta^2}{8} = \pi/4$$

$\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{2}$ (ligger på sirkelen

$\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta$ (ligger på linjen)

2016

2) Flervalg : 5 muligheter

Sannsynligheten for å vite svaret er r

——— " ——— gjette svaret er $1-r$

Total sannsynlighet og bayes setning

Vis sannsynligheten for å få riktig på oppgaven

P(riktig) = P(vet svar) P(riktig | vet svar)

+ P(vet ikke svar) P(riktig | vet ikke svar)

$= \underline{\underline{r \cdot 1 + (1-r) \cdot 0.2}}$

P(vet svaret | svarer riktig)

$$= \frac{P(\text{svarer riktig} \mid \text{vet svaret})\, P(\text{vet svar})}{P(\text{vet svar})\, P(\text{riktig} \mid \text{vet svar}) + P(\text{vet ikke} \mid \text{riktig svar})}$$

– situasjon

– Total sannsynlighet

$$\frac{1 \cdot r}{r \cdot 1 + 1 - r \cdot 0.2} = \frac{r}{r + (1-r) \cdot 0.2} = \frac{r}{0,8r + 0,2}$$

b) 238 studenter

15 spørsmål

5 alternativer

$238 \cdot 15 = 3570$ svar

2433 riktige

X = antall riktige svar $\sim$ Binomial$(3570, P)$

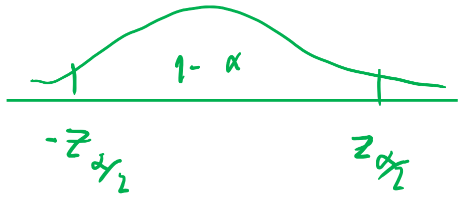
der P er sannsynlighet for riktig svar

Generellt binomisk

Estimator $\hat{p} = x/n$

$(1-\alpha)\,100\%$ konfidensintervall

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$



Skal ha 99% konfidensintervall

Estimat $\hat{p} = \frac{2433}{3570} = 0{,}682$

99% konf int. $z_{0{,}005}$ $\alpha = 0.01$ $\alpha/2 = 0.005$

$$\hat{p} \pm 2{,}576\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{3570}}$$

Som gir

$$0{,}682 \pm 0{,}020$$

dvs $[0{,}662\,,\,0{,}702]$

c) Krav til binomisk

- Gjentar "forsøk" n ganger (OK)
- To muligheter for hvert forsøk (OK)
  S = riktige, F = gale svar
- Samme sannsynlighet for hvert "forsøk" (Nei!)
  Forskjell på elevene, og oppgavene
- Uavhengige "forsøk" (Nei!)

d) Konsentrerer oss om den siste deloppgaven

Y : antall riktige $\sim \text{Binom}(238, q)$

57 : svarte rett

Konf.int. 95% for q gir $[0.185, 0.294]$

$$q = r + 0.2(1-r)$$

Konfidensintervall for q

$$[0.185, 0.294]$$

Har at

$$0.185 < q < 0.294$$

$$\iff$$

$$0.185 < r + 0.2(1-r) < 0.294$$, Løser for r

$$\iff \frac{0.185 - 0.2}{0.8} < r < \frac{0.294 - 0.2}{0.8}$$

Dette blir

$$-0.019 < r < 0.117$$

Så 95% Konf.int. for r blir (siden $r \geq 0$)

$$[0, 0.117]$$

dvs $r = 0$ er en "mulig verdi" av r