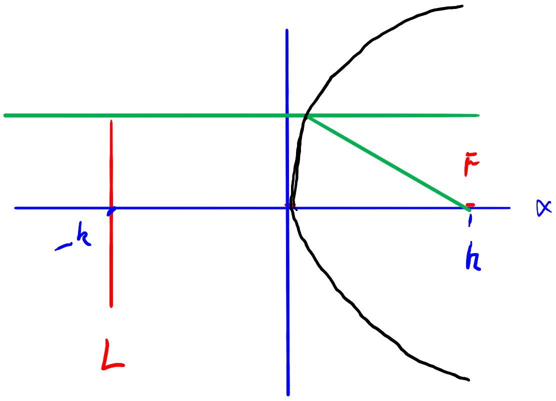
Sammenligning mellom geometriske beskrivelser av kjeglesnitt og ligningen deres

Eksempel: Parabel gitt ved en styrelinje L og brennpunkt F



Legger kor. systemet slik at L er linjen $x = -k$ og brennpunktet F er $(k, 0)$ der $k > 0$

$$d_1 = d_2 \text{ gir } k + x = \sqrt{y^2 + (k-x)^2}$$

$$(k+x)^2 = y^2 + (k-x)^2$$

$$\cancel{k^2} + 2kx + \cancel{x^2} = y^2 + \cancel{k^2} - 2kx + \cancel{x^2}$$

$$4kx = y^2$$

$$x = \frac{1}{4k} y^2$$

Så i standard ligningen

$$x = a y^2$$

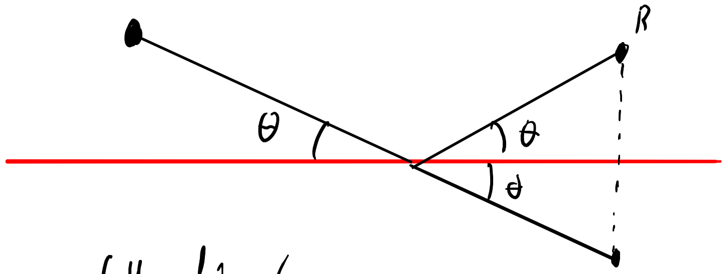
er $a = \frac{1}{4k}$, dvs. $k = \frac{1}{4a}$

Ellipser og hyperbler: (tilsvarende se bok)

Refleksjonsegenskaper generelt

Korteste vei fra A til B via speilet er hvor

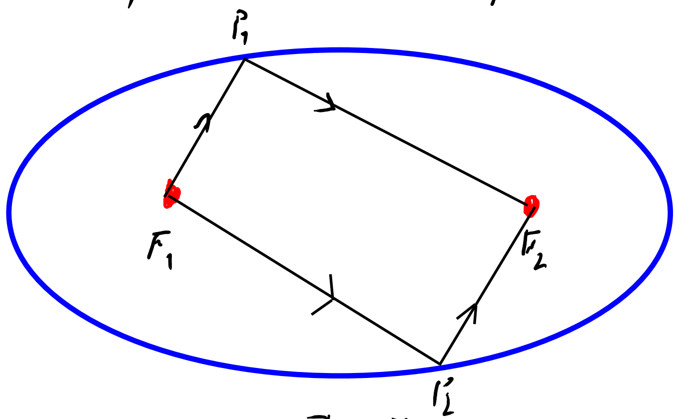
innfallsvinkel = utfallsvinkel



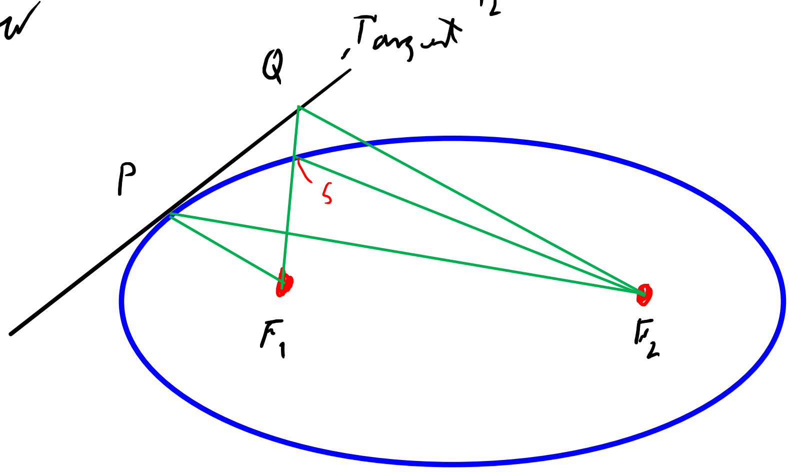
Refleksjonsegenskaper til ellipser

- En stråle fra det ene brennpunktet vil reflekteres til det andre

(innfallsvinkel = utfallsvinkel i P_i)



Hvorfor



$$F_1P + PF_2 = F_1S + SF_2$$

$$< F_1Q + QF_2$$

Så å gå via P er korteste vei fra F_1 til F_2 via tangeringspunkt

like utfallsvinkel i P

Refleksjonsegenskaper for parabler : seksjon 3.6.3

Nivåkurver for funksjoner $f(x,y)$

→ Metode: Tegn kurven $f(x,y) = C$ i xy-planet for passende verdier av C

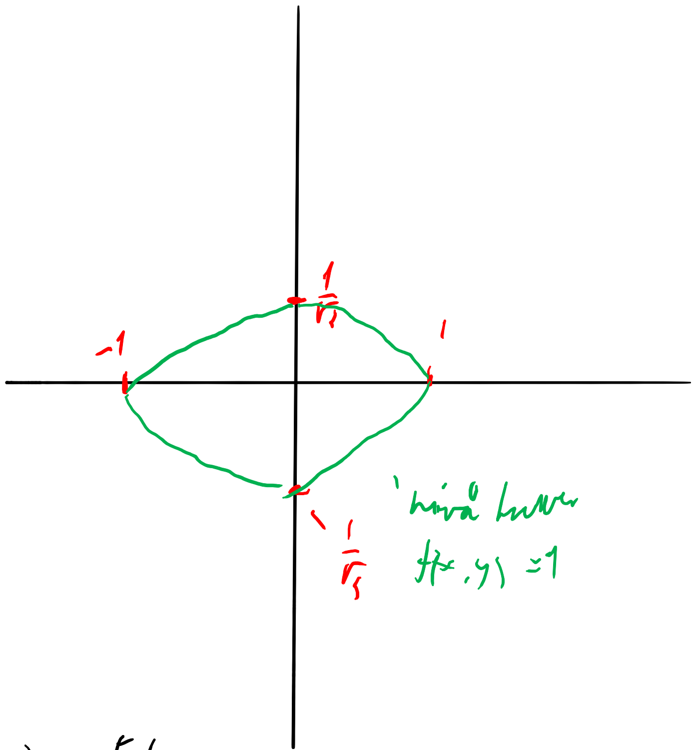
Eks. $f(x,y) = x^2 + 3y^2$

$f(x,y) = 0$ gir $x = y = 0$

$f(x,y) = 1$ gir $x^2 + 3y^2 = 1$

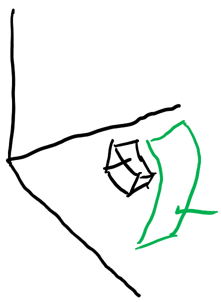
$x = 0$ gir $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$y = 0$ gir $x = \pm 1$



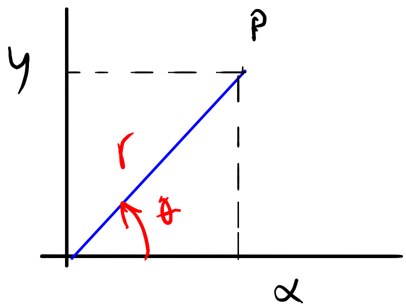
Nivåflater for funksjoner $f(x,y,z)$: Flater $f(x,y,z) = C$

$f(x,y,z)$ er tempen i punktet (x,y,z)



Her er $f(x,y,z) = 20°$ nivåflate for f

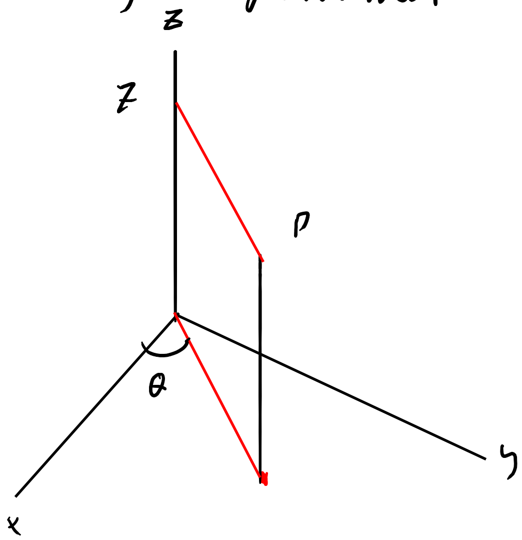
Polarkoordinater r, θ



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = y\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Sylinderkoordinater



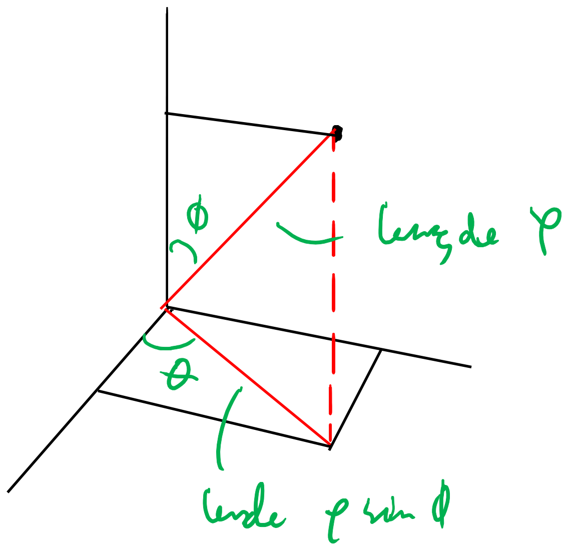
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

eks $\quad w = \dfrac{z}{1 + x^2 + y^2}$ kan skrives

$$w = \frac{z}{1 + r^2}$$

$\blacksquare$

Kulekoordinater

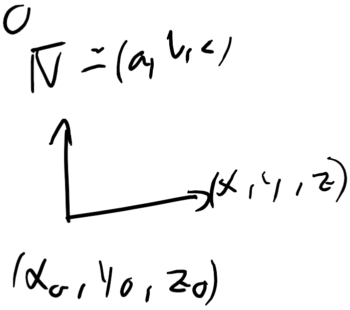


$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

eks. $w = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ kan skrives $\dfrac{\rho \cos\phi}{\rho} = \cos\phi$

Linearisering, tangentplan gjennom (x_0, y_0, z_0) med normalvektor $\vec{N} = (a, b, c)$: $(a, b, c)\cdot(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$



$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = \text{konstant} \quad (*)$$

Lineariseringen til $f(x,y)$ i punkt (x_0,y_0):

$$T_{(x_0,y_0)}f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{df}{dx}(x_0,y_0), \frac{df}{dy}(x_0,y_0)\right) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \cdot x-x_0 + \frac{df}{dy}(x_0,y_0)$$

Ligningen til tangentplant til $f(x,y)$ i punkt (x_0,y_0) er ligningen for grafen til lineariseringen:

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + \frac{df}{dy}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Dette kan skrives

$$-\frac{df}{dx}(x_0,y_0) \cdot x - \frac{df}{dx}(x_0,y_0) \cdot y + z = \text{konstant}$$

Sammenligning med stjerne gir at

$$\overline{N} = \left(-\frac{df}{dx}(x_0,y_0), -\frac{df}{dy}(x_0,y_0), 1\right)$$

er en normalvektor for tangentplant (x_0,y_0)