1. Skalering

$$x(t) = V_0 t \cos(\theta)$$
$$y(t) = V_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2$$

a) Finn t_m, $y=0$, $x(t_m) = x_m$

$$y(t_m) = 0 = V_0 t_m \sin\theta - \frac{1}{2} g t_m^2$$

bruker a, b, c - formelen

$$a = -\frac{1}{2} g, \; b = V_0 \sin\theta, \; c = 0$$

$$\frac{-V_0 \sin\theta \pm \sqrt{(-V_0 \sin\theta)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} g \cdot 0}}{2(\frac{1}{2} g)}$$

$$\frac{-V_0 \sin\theta \pm V_0 \sin\theta}{-g}$$

$$t_{m_1} = 0 \quad \vee \quad t_{m_2} = \frac{-2 V_0 \sin\theta}{-g}$$

Velger t_{m_2} som t_m siden $t_{m_1} = 0$ er starten

$$\underline{\underline{t_m = \frac{-2 V_0 \sin\theta}{-g}}}$$

$$x(t_m) = x_m = V_0 \left(\frac{-2 \sin\theta}{-g} \right) \cos\theta$$

$$= \frac{2 V_0 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

b) innføre dimensjonsløse variable (x^*, y^*, t^*) for x, y, t

Skalerer t

$$t^* = \frac{t}{t_m} \iff t = t^* t_m \implies t = \frac{-2t^* v_0 \sin(\theta)}{g}$$

Skalerer y

$$y^* = \frac{y}{x_m}$$

$$\frac{v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2}{\frac{2 v_0 \sin\theta \cos\theta}{g}}$$

$$\frac{\cancel{v_0} t \cancel{\sin\theta}\, g}{2 \cancel{v_0} \cancel{\sin\theta} \cos\theta} - \frac{g^2 t^2}{4 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}$$

$$\frac{tg}{2 \cos\theta\, v_0} - \frac{g^2 t^2}{4 v_0^2 \sin\theta \cos\theta}$$

Setter inn for t

$$\frac{\left(\frac{\cancel{2} t^* \cancel{v_0} \sin(\theta)}{\cancel{g}}\right) \cancel{g}}{\cancel{2} \cancel{v_0} \cos\theta} - \frac{\cancel{g^2} \left(\frac{\cancel{2} t^* \cancel{v_0} \sin(\theta)}{\cancel{g}}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{4}\, \cancel{v_0^2} \cancel{\sin\theta} \cos\theta}$$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ på begge leddene

$$\underline{y^* = \tan\theta\, t^* - \tan(\theta)\, t^{*2}}$$

Skalerer X

$$X^* = \frac{X}{X_m} = \frac{\cancel{V_0} t \cancel{\cos\theta}}{2 V_0^{\cancel{2}} \cancel{\cos\theta} \sin\theta / g}$$

$$= \frac{t g}{2 V_0 \sin\theta}$$

Setter inn for t

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\cancel{2} \cancel{V_0} t^* \cancel{\sin\theta}}{\cancel{g}}\right) \cancel{g}}{\cancel{2} \cancel{V_0} \cancel{\sin\theta}}$$

$$= t^*$$

dermed er $x^*, y^*, z^* = t^*, \tan(\theta) t^* - \tan(\theta) t^{*2}, \frac{2 V_0 \sin\theta}{g}$

Vi trenger ikke skalere θ siden den ikke har en enhet

2 $V = V_x \underline{i} + V_y \underline{j} = xy\,\underline{i} + y\,\underline{j}$

$V_x = xy \,,\; V_y = y$

a) finn strømlinjene

Løser kryssproduktet

$$\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ xy & y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{pmatrix} = (xy\,dy - y\,dx)\,\underline{k} = 0$$

av dette ser vi at langs en strømlinje må

$$xy\,dy = y\,dx$$

ser at det er en separabel differensialligning. separerer

$$\frac{xy\,dy}{xy} = \frac{y\,dx}{xy}$$

$$dy = \frac{1}{x}\,dx$$

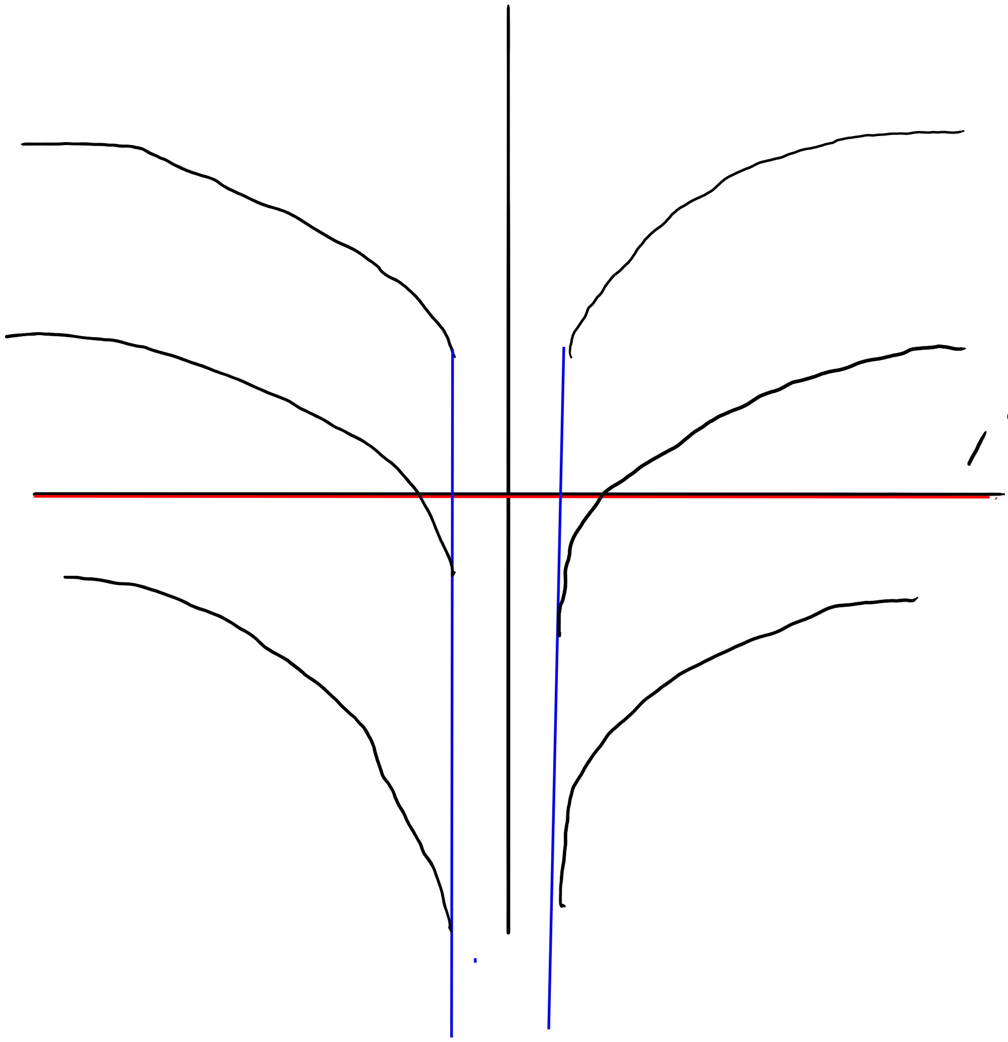
integrerer

$$\int dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$y = \ln|x| + C$$

Løser for c

$c = \ln|x| - y$, Velger en konstant "c" så får du en strømlinje b)



, stagnasjonspunkter er langs x aksen

c) Viser at det ikke finnes en strømfunksjon ved å sjekke $\nabla \cdot v \Leftrightarrow 0$

$$\frac{d v_x}{d x} = y \, , \; \frac{d v_y}{d y} = 0$$

$$y + 1 \not\Leftrightarrow$$

så dermed er det ingen strømfunksjon

3. Et hastighetsfelt i XY-planet er gitt ved $v = V_x \underline{i} + V_y \underline{j}$

$$V_x = \cos(x)\sin(y) \,, \quad V_y = -\sin(x)\cos(y)$$

a) divergensen er gitt ved

$$\nabla \cdot v = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{}$$

Virvlingen er gitt ved

$$\nabla \times v = (dv_y/dx - dv_x/dv)\underline{k}$$

Finner divergensen

$$\frac{dv_x}{dx} = -\sin(x)\cos(y), \qquad \frac{dv_y}{dy} = \sin(x)\sin(y)$$

$$\nabla \cdot v = \underline{\underline{-\sin(x)\cos(y)\, i + \sin(x)\cos(y)}}$$

Finner virvlingen

$$\frac{dv_y}{dx} = -\cos(x)\cos(y) \,, \quad \frac{dv_x}{dy} = -\sin(x)\sin(y)$$

$$\nabla \times v = \underline{\underline{(-\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y))\,\underline{k}}}$$

b) Tegn strømvektorer

$$V = \cos(x)\sin(y)\,\underline{i} + (-\sin(x)\cos(y))\,\underline{j}$$

når $y=0$ $\Rightarrow \cos(x)\sin(0)\,\underline{i} + (-\sin(x)\cos(0))\,\underline{j}$

$= -\sin(x)\,\underline{j}$

$\Rightarrow \cos(0)\sin(y)\,\underline{i} + (-\sin(0)\cos(y))\,\underline{j}$

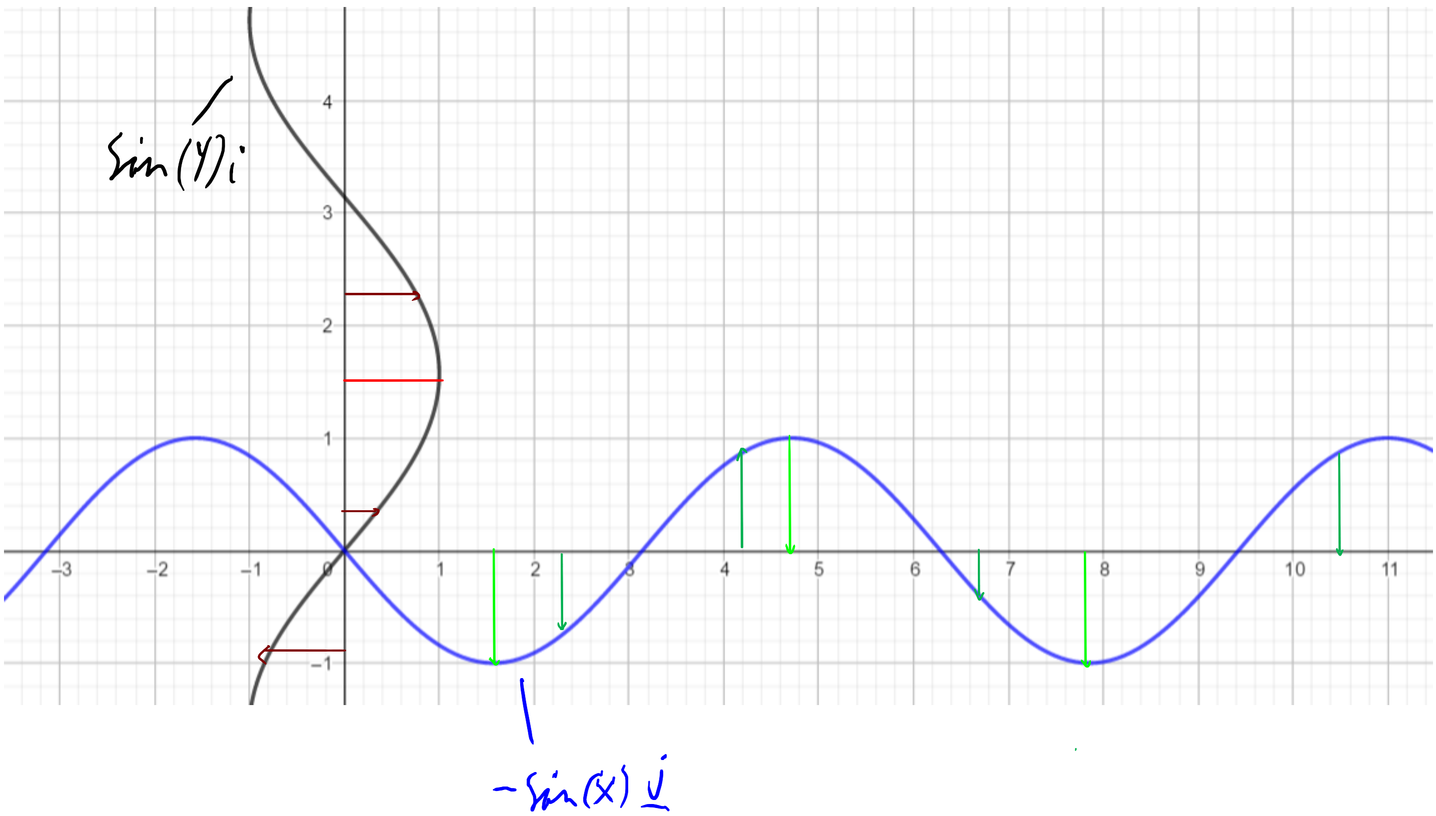
$= \sin(y)\,i$

$= \cos(x)\cos(y)$, $= -\cos(x)\cos(y)$

$\cos(x)\cos(y) - \cos(x)\cos(y) = 0$

$\cos(x)\sin(y)\,dy - \sin(x)\cos(y)\,dx = 0$

$\dfrac{\cos(x)\sin(y)\,dy}{\cos(y)} = \dfrac{\sin(x)\cos(y)\,dx}{\cos}$



d) Vise at et finnes en strømvekter og finn den

$$\frac{d v_x}{d x} + \frac{d v_y}{d y}$$

$$\frac{d v_x}{d x} = -\sin(x)\sin(y) \, , \quad \frac{d v_y}{d y} = \sin(x)\sin(y)$$

$$-\cancel{\sin}(x)\,\cancel{\sin}(y) + \cancel{\sin}(x)\,\cancel{\sin}(y) \Leftrightarrow 0$$

siden divergensen er 0 så finns det en strømfunksjon

Finner funksjoner

$$\frac{d\Psi}{d y} = -\cos(x)\sin(y) \, , \quad \frac{d\Psi}{d x} = -\sin(x)\cos(y)$$

$$\int -\cos(x)\sin(y)\,dy = \cos(x)\cos(y) + f_1(x)$$

$$\int -\sin(x)\cos(y)\,dx = \cos(x)\cos(y) + f_2(x)$$

ser at de er like dersom er $f_1(x) = f_2(x) = 0$

dermed er strømfunksjonen: $\boxed{\Psi = \cos(x)\cos(y)}$

e) taylorutvikling av andre orden, nær origo

$$\Psi = \cos(x)\cos(y)$$

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\sin(x)\cos(y), \quad \frac{d\Psi}{dy} = -\cos(x)\sin(y)$$

$$\frac{d\Psi}{dx^2} = -\cos(x)\cos(y), \quad \frac{d\Psi}{dy} = -\cos(x)\cos(y)$$

$$\frac{d\Psi}{dxdy} = -\sin(x)\cos(y)$$

$$T_2(\Psi(x_0, y_0)) = \cos(x_0)\cos(y_0)$$
$$\cancel{+(-\sin(x_0)\cos(y_0))(x-x_0)} + (-\cos(x_0)\cos(y_0))(y-y_0)$$
$$\cancel{+(-\sin(x_0)\cos(y_0))(x-x_0)(y-y_0)}$$

$$\lim_{x\to 0,\, y\to 0} T_2(\Psi x_0, y_0) = 1 - y$$

, ser at hvis y går mot 1 så går T_2 opp mot 1