Sentralgrenseteoremet: Anta at $X_i \sim f(x)$ uif med

$\mu = E(X_i)$ og $\sigma^2 = V(X_i)$

Da gjelder $Z_n = \sqrt{n}\, \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \to Z \sim (0,1)$

Vi har tilnærmet $\bar{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$

Kommentar: Disse egenskapene holder eksakt ekstakt hvis $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

Argumentet bruker momentgenererende funksjon (mgf)

$M_V(t) = E(e^{tV})$

Husk: For $Z \sim N(0,1)$ er $M_Z(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$

La $W_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$ vil at $E(W_i) = 0$ og $V(W_i) = 1$

Dessutten $Z_n = \sqrt{n}\, \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} W_i$

Dermed har Z_n mgf

$$M_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = E\left(e^{t/\sqrt{n} \sum_{i=1}^{n} W_i}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{t/\sqrt{n}\, W_i}\right)$$, siden W_i er uavhengig

$$= \prod_{i=1}^{n} M_{W_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = M_{W_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$ siden W_i-ene har samme mgf

Skal se på annenordens Taylor utvikling for $M_W(u)$

$$M_W(u) = M_W(0) + M_W'(0)\, u + \frac{1}{2} M_W''(0)\, u^2 + o(u^2)$$

der $\frac{o(u^2)}{u^2} \to 0$ når $u \to 0$

$$= 1 + E(W)\, u + \frac{1}{2} E(W^2)\, u^2 + o(u^2)$$

$$= 1 + 0\, u + \frac{1}{2} 1 \cdot u^2 + o(u^2)$$

siden

$$E(W^2) = V(W) + E(W)^2 = 1$$

$$M_W(u) = 1 + \frac{1}{2} u^2 + o(u^2)$$

Husk: $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$

Dette gjelder også for $\left(1 + \frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \to e^x$

når $o(x/n) / x/n) \to 0$, når $x/n \to 0$

Dermed vil $M_{Z_n}(t) = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)^n \to e^{t^2/2}$

$= \text{mgf for } Z \sim N(0, 1)$

$\Rightarrow \quad Z_n = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \to N(0, 1)$, Sentralgrenseteoremet

$\boxtimes$

Vi skal nå se på fordelingen for den empiriske variansen $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

når $X_i \sim IN(\mu, \sigma^2)$ med, $i = 1, \ldots, n$

I STK1100 lærte vi at $E(S^2) = \sigma^2$ generelt.

Men med X_i-ene normalfordelt er

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Kji-kvadrat fordelt med $n-1$ frihetsgrader

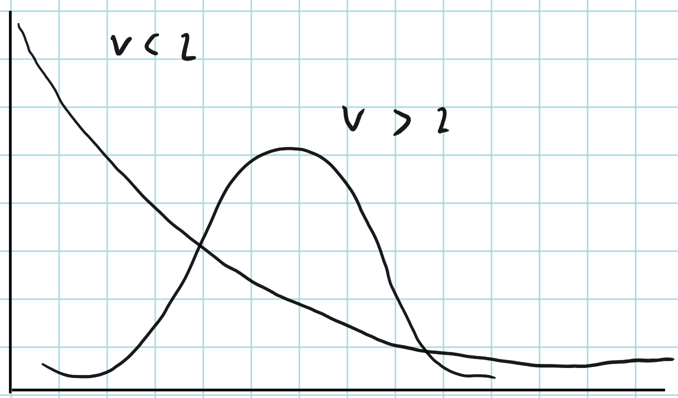
En χ^2_v har tettheten

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(\frac{v}{2})} x^{v/2-1} e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Merk trykkfeil på s. 115, kap 6.4

Riktig formel (4.10) s. 200

Dessuten χ^2_v er en gamma fordeling med $\alpha = v/2$, $\beta = 2$



Man ser at $E(\chi^2_v) = v$, $V(\chi^2_v) = 2v$

Dermed har vi $(n-1) = E(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{n-1}{\sigma^2}E(S^2)$

Deshalb $\quad 2(n-1) = V\left((n-1)\frac{s^2}{\sigma^2}\right) = \frac{(n-1)^2}{\sigma^2} V(s^2)$

$\Rightarrow V(s^2)$ . . . .

Banyod

$$\frac{\cancel{H_0}}{\cancel{H_{\mathring{a}}}} = \frac{\cancel{0}}{\mathring{a}} = n$$

S_{a_1} $\mathbin{/\!/}$