En potensrekke er en rekke på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Avgjør for hvilke x rekken konvergerer:

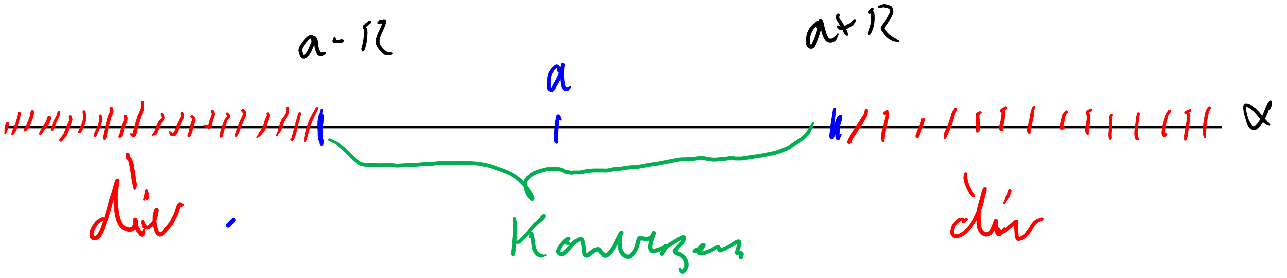
Prøv forholdstesten

Vi behandler da x som en konstant

Vi finner alltid at det fins $R \geq 0$ slik at

- rekken konvergerer absolutt for $|x-a| < R$
- rekken divergerer for $|x-a| > R$

R kalles for konvergensradien til potensrekken, og a kalles potensrekkens sentrum



Tilfelle $R = \infty$ (konvergens for alle x) og tilfellet $R = 0$ (konvergens for kun $R = a$)

Endepunkter $x = a \pm R$ må sjekkes "manuelt" ved innsetting.

eks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n \cdot n}$ Finn konvergensområdet (evnt. konvergens intervallet) til denne.

(avgjør for hvilke x den konvergerer)

Løsning:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(x-3)^{\cancel{n}+1}}{4^{\cancel{n}+1}(n+1)} \cdot \frac{\cancel{4^n} \cdot n}{\cancel{(x-3)^n}} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot |x-3| \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \to 1$$

$$= \frac{1}{4} \cdot |x-3|$$

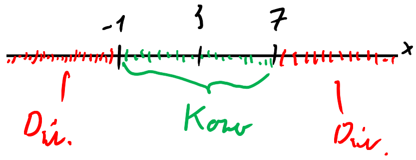
Altså konvergens hvis

$\frac{1}{4}|x-3| < 1$, dvs $|x-3| < 4$

Divergens hvis $|x-3| > 4$ altså $R = 4$

Endepunkt: $x = 3+4 = 7$

$x = 3-4 = -1$



Manuell innsetning

$x = 7$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cancel{7-3})^n}{\cancel{4^n} \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{(divergent p-rekke}$$

$x = -1$ innsatt gir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1-3)^n}{4^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Konvergent ved alt. rekke-testen

Så rekken konvergerer for $x \in [-1, 7)$

Fire triks for regning med potensrekker

Kjenner du summen av noen potensrekker, Kan du bruke dette til å finne summen av flere

1) gange rekken x, x^2, x^3 etc.

eks. Det vises segat

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \text{ for alle } x$$

Så

$$x^3 e^x = x^3 + x^4 + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^7}{4!} \cdots \text{ for alle } x$$

Regning på summetegnnivå

$$x^3 \cdot e^x = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n!}$$

(2) sette inn $x^2, 2x^3, x^6$ etc for x i en rekke

eks. Vi har (geometrisk rekke med $r = x$)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

for $-1 < x < 1$. Innsetting av $2x^3$ for x gir

$$\frac{1}{1-(2x^3)} = 1 + (2x^3) + (2x^3)^2 + (2x^3)^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (2x^3)^n$$

for $-1 < (2x^3) < 1$, dvs. $-\frac{1}{2} < x^3 < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} < x < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Konklusjon: $\frac{1}{1-2x^3} = 1 + 2x^3 + 4x^6 + 8x^9 + 16x^{12}$

for $-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

③ Leddvis derivasjon og integrasjon

Hvis du har en rekke for $f(x)$ gyldig på $u=(a-R, a+R)$, så får du en rekke for $f'(x)$ på u ved å derivere leddvis.

Du kan også integrere leddvis innenfor u, både bestemt og ubestemt

eks. Vet at $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots \quad x\in(-1,1)$

Deriverer:

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = (1+x+x^2+\dots)'$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots$$

for $x\in(-1,1)$

På summetegn

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0+1}^{\infty} n x^{n-1}$$

($n=0$ er borte siden $\frac{d}{dx}(1)=0$)

Vis $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$ for $x \in (-1,1)$

antar vi vet dette: Geometrisk rekke med $r = -x$

Integrerer uboestemt

$$\int \frac{1}{1+x}\,dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots)\,dx$$

$$\ln(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

Innsetting av $x=0$ gir $\ln 1 = C + 0$ dvs $C = \ln(1)$

$C = 0$

Konklusjon $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$ for $x \in (-1,1)$

(4) addere og subtrahere rekker

Gitt rekker for $f(x)$ og $g(x)$, kan vi finne rekker for $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$ ved å addere / subtrahere leddvis

Rekkene for $f(x)+g(x)$ og $f(x)-g(x)$ blir gyldige for alle x der rekkene for $f(x)$ og $g(x)$ begge er gyldige

eks. $\frac{1}{7}$