STK1100 våren 2018

Momentgenererende funksjoner

Svarer til avsnitt 3.4 i læreboka

Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Momenter

La X være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $p(x) = P(X = x)$ for $x \in D$ og forventingsverdi μ

r-te moment for X er gitt ved

$$E(X^r) = \sum_{x \in D} x^r \cdot p(x)$$

Første moment er forventningen μ

r-te sentralmoment for X er gitt ved

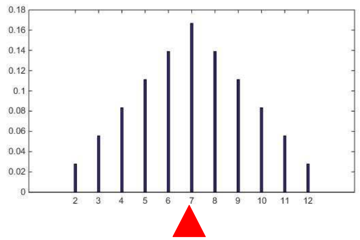
$$E\left\{(X-\mu)^r\right\} = \sum_{x \in D} (x-\mu)^r \cdot p(x)$$

Andre sentralmoment er variansen σ^2

Skjevhet

Tredje sentralmoment er $E\left\{(X-\mu)^3\right\}$

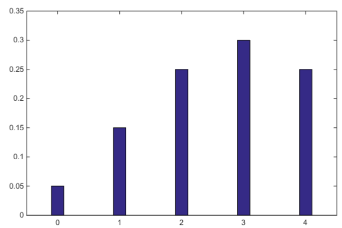
Hvis en fordeling er symmetrisk om μ er tredje sentralmoment lik null



$\mu = 7$

Skjevheten til en fordeling er gitt ved:

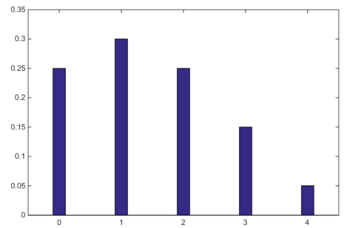
$$\frac{E\left\{(X-\mu)^3\right\}}{\sigma^3} = E\left\{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right\}$$



MATLAB kommandoer:

```
x=0:4
px = [0.05 0.15 0.25 0.30 0.25]
my = sum(x.*px)
s2 = sum((x-my).^2.*px)
s=sqrt(s2)
m3=sum((x-my).^3.*px)
skjev=m3/s^3
```

Skjevhet -0.41
«skjev mot venstre»



MATLAB kommandoer:

```
x=0:4
px = [0.25 0.30 0.25 0.15 0.05]
my = sum(x.*px)
s2 = sum((x-my).^2.*px)
s=sqrt(s2)
m3=sum((x-my).^3.*px)
skjev=m3/s^3
```

Skjevhet 0.41
«skjev mot høyre»

Momentgenererende funksjon (mgf)

La X være en diskret stokastisk variabel med punktsannsynlighet $p(x) = P(X = x)$ for $x \in D$

Momentgenererende funksjon for X er gitt ved

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x \in D} e^{tx} \cdot p(x)$$

Den momentgenererende funksjonen eksisterer hvis det fins et tall $t_0 > 0$ slik at

$$\sum_{x \in D} e^{tx} \cdot p(x) < \infty$$

for alle $t \in (-t_0, t_0)$

mgf for geometrisk fordeling

Anta at X har punktsannsynlighet

$$p(x) = (1-p)^{x-1} p \quad \text{for} \quad x = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

Momentgenererende funksjon:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot p(x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot (1-p)^{x-1} \cdot p$$

$$= pe^t \sum_{x=1}^{\infty} \left(e^t(1-p)\right)^{x-1}$$

$$= \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \qquad \text{så sant } \left|e^t(1-p)\right| < 1$$

Egenskaper til mgf

1) Hvis mgf eksisterer for de stokastiske variablene X og Y og $M_X(t) = M_Y(t)$, så har X og Y samme fordeling

2) $M_X(0) = 1$

3) $M_X'(0) = E(X)$

4) $M_X''(0) = E(X^2)$

5) $M_X^{(r)}(0) = E(X^r)$

6) Hvis a og b er konstanter og $Y = aX + b$ så er $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$

Geometrisk fordeling

Momentgenererende funksjon $M_X(t) = \dfrac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$

Vi finner:

$$M_X'(t) = \frac{pe^t}{\left\{1-(1-p)e^t\right\}^2} \qquad M_X''(t) = \frac{pe^t + p(1-p)e^{2t}}{\left\{1-(1-p)e^t\right\}^3}$$

Dermed:

$$E(X) = M_X'(0) = \frac{p}{\{1-(1-p)\}^2} = \frac{1}{p}$$

$$E(X^2) = M_X''(0) = \frac{p + p(1-p)}{\{1-(1-p)\}^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Kumulantgenererende funksjon

For å finne forventing og varians kan det være lettere å se på den kumulantgenererende funksjonen

$$R_X(t) = \ln\{M_X(t)\}$$

Vi har da

$$R'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \quad \text{og} \quad R''_X(t) = \frac{M''_X(t)\cdot M_X(t) - M'_X(t)^2}{M_X(t)^2}$$

Derfor er

$$R'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = E(X)$$

$$R''_X(0) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = V(X)$$

Geometrisk fordeling (forts)

Kumulantgenererende funksjon

$$R_X(t) = \ln\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right) = \ln p + t - \ln\left(1-(1-p)e^t\right)$$

Vi finner:

$$R'_X(t) = 1 + \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t} \qquad R''_X(t) = \frac{(1-p)e^t}{\{1-(1-p)e^t\}^2}$$

Dermed:

$$E(X) = R'_X(0) = 1 + \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = R''_X(0) = \frac{1-p}{\{1-(1-p)\}^2} = \frac{1-p}{p^2}$$