Setning 5.5.7

$A \subseteq \mathbb{R}^m$

$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^n$ deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom $\bar a$ og $\bar b$ i $\mathbb{R}^m$

Da fins det punkter $\bar c_1, \dots, \bar c_n$ på linjestykket fra $\bar a$ til $\bar b$ slik at:

$$|\bar F(\bar b) - \bar F(\bar a)| \le \sqrt{|\nabla F_1(\bar c_1)|^2 + \dots + |\nabla \bar F_n(\bar c_n)|^2} \cdot |b - a|$$

Bevis: Ved middelverdisetningen i flere variable fins for hver i et punkt $\bar c_i$ på linjestykket slik at

$$|F_i(\bar b) - F_i(\bar a)| = |\nabla F_i(\bar c_i) \cdot (\bar b - \bar a)|$$

Schwartz' ulikhet (1.2.3) brukt på høyre side gir $|F_i(\bar b) - F_i(\bar a)| \le |F_i(\bar c_i)| \cdot |\bar b - \bar a|$

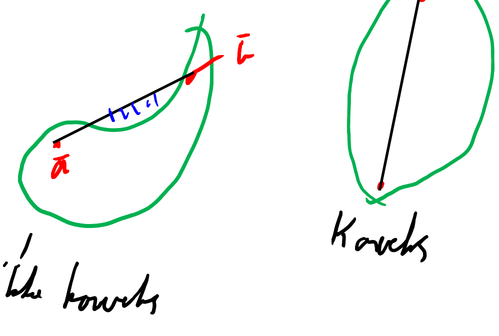
Dermed

$$|F(\bar b) - \bar F(\bar a)| = \sqrt{|F_1(\bar b) - F_1(\bar a)|^2 + \dots + |F_n(\bar b) - F_n(a)|^2}$$

$$\le \sqrt{|\nabla F_1(c_1)|^2 \cdot |\bar b - \bar a|^2 + \dots + |\nabla F_m(\bar c_n)|^2 \cdot |b - a|^2}$$

sett $|b - a|$ utenfor $\square$

Def $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er konveks hvis hver gang $\bar a, \bar b$ er element i A, er og så linjestykket fra $\bar a$ til $\bar b$ med i A



Setning (5.5.8)

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, ikke-tom, lukket, konveks

$\bar{F} : A \to A$ er deriverbar

Anta at det fins $C < 1$ slik at

$$\sqrt{|\nabla F_1(\bar{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\bar{c}_m)|^2} \leq C$$

For alle $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_m \in A$. Da er $\bar{F}$ en kontraksjon, og

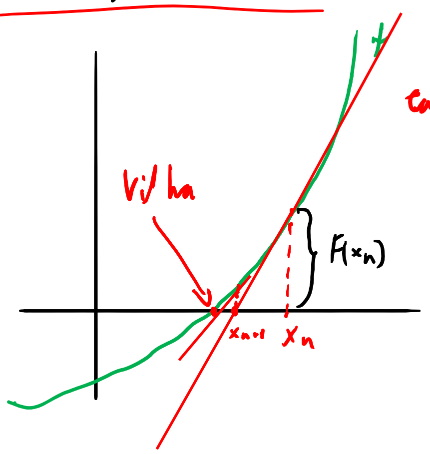
$|\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})| \leq C \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$ for alle $\bar{x}, \bar{y} \in A$

Bevis

Følger fra setning 5.5.7 $\square$

5.6 Newtons metode

En variabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vil finne et nullpunkt for f.



tangent stigningstall: $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$

Så:

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

F lere variable

$\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$, der $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Finne $\bar{x}$ slik at $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{0}$. Newtons metode:

$$\bar{x}_{n+1} = \vec{x}_n - [\bar{F}'(\bar{x}_n)]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x}_n)$$

- Newtons metode kan oppfattes som en iterasjon av

$$\bar{G}(x) = \bar{x} - [\bar{F}'(\bar{x})]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x})$$

for vi har

$$x_{n+1} = G(\bar{x}_n)$$

- Hvis A er en $(n \times n)$-matrise, så er operatornormen $|A|$ til A gitt ved

$$|A| = \sup \left\{ \frac{|A\bar{x}|}{|\bar{x}|} : x \in \mathbb{R}^n \ldots \right.$$

Kantorovitz' teorem (5.6.4–5.6.6)

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen og konveks

$\bar{F}: U \to \mathbb{R}^m$ deriverer

Vi itererer $\vec{x}_{n+1} = \bar{x}_n - [F'(x_n)]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x}_n)$

med startpunkt $\bar{x}_0 \in U$ (Newtons metode)

Anta at

- Det fins M slik at $|F'(x) - \bar{F}'(y)| \leq M \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$ for alle $\bar{x}, \bar{y} \in$
- Jakobimatrisen $\bar{F}'(\bar{x}_0)$ er inverterbar med en invers som har operatornorm $\leq K$.

- Vi har at $\bar{B}(x_0, \frac{1}{KM}) \subseteq U$ samt
$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| = |[F'(x_0)]^{-1} \cdot \bar{F}(\bar{x}_0)| \leq \frac{1}{2KM}$$

Da har vi

- $\bar{F}(\bar{x})$ er inverterbar for alle $\bar{x} \in B(\bar{x}, \frac{1}{KM})$
- $\bar{x}_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{KM})$ for alle $n \geq 0$, og det finnes $\bar{x} \in \bar{B}(\bar{x}_0, \frac{1}{KM})$ slik at
$$\lim_{n \to \infty} \bar{x}_n = \bar{x} \text{ og } \bar{F}(\bar{x}) = \bar{0}$$

Punktet $\bar{x}$ er det <u>eneste</u> nullpunktet for $\bar{F}$ i kulen $\bar{B}(x_0, \frac{1}{KM})$

Hvis $|\bar{x}_1 - \bar{x}_0| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2KM}$, er
$$|\bar{x} - \bar{x}_n| \leq \frac{1}{KM} \cdot \left[\frac{(1 - \sqrt{1 - 2h})^{2^n}}{2^n}\right]$$