4.4 Koordinatsystemer

Minner om at $\mathcal{B} = \left\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\right\} \subset V$ kalles en *basis* for et vektorrom V dersom $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig *og* $\mathcal{B}$ utspenner V.

- I samme vektorrom kan vi innføre ulike "koordinatsystemer"; dette svarer til at vi velger ulike basiser.
- Det å velge "riktig" basis vil vi ofte kunne forenkle et problem. Nyttig senere!

Fundamentet er følgende teorem, som ofte kalles teoremet om entydig representasjon.

Teorem 7: *Anta at* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *er en basis for vektorrommet* V*. For hver* $\mathbf{x} \in V$ *fins da entydig bestemte skalarer* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *slik at*

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\,\mathbf{b}_n\,.$$

- Vektene $c_1, c_2, \ldots, c_n$ kalles *koordinatene til* $\mathbf{x}$ med hensyn på $\mathcal{B}$. (Noen sier: relativt til $\mathcal{B}$).
- Vektoren $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ i $\mathbb{R}^n$ kalles *koordinatvektoren til* $\mathbf{x}$ m.h.p. $\mathcal{B}$.
- Avbildningen $\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ fra V til $\mathbb{R}^n$ kalles *koordinat-avbildningen* m.h.p. $\mathcal{B}$.

MERK: Vektorene i $\mathcal{B}$ betraktes som *ordnet* i den rekkefølgen oppgitt i teoremet og vi burde derfor si at $\mathcal{B}$ er en *ordnet* basis. Bytter vi rekkefølgen på disse vektorene vil vektene bytte plass og koordinatvektoren forandres.

Eksempler.

1) Anta $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ og $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Da er

$$\mathbf{x} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\,\mathbf{e}_n$$

så $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}\,.$

Dette betyr at vektorene i $\mathbb{R}^n$ er i utgangspunktet koordinatisert m.h.p. standardbasisen!

2) Betrakt $\mathbb{P}_2$ og $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2\}$, der

$$p_0(t) = 1,\ p_1(t) = t,\ p_2(t) = t^2 \quad \text{(for alle } t \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Hvis $p(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2$, så er

$$[p]_{\mathcal{B}} = (a_0,\ a_1,\ a_2)\,.$$

F.eks. er $[3 - t + 2\,t^2]_{\mathcal{B}} = (3, -1, 2)$.

Spesielt om koordinater i $\mathbb{R}^n$

La $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og la $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Anta at $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Da er

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{b}_1 + c_2\,\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\,\mathbf{b}_n = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Så $$\boxed{\mathbf{x} = P_{\mathcal{B}}\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{der } P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix}.}$$

- Matrisen $P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix}$ kalles *koordinatskiftematrisen* (eller *basisskiftematrisen*) *fra $\mathcal{B}$ til standardbasisen i $\mathbb{R}^n$*.

Spesielt om koordinater i $\mathbb{R}^n$ (forts.)

- Gitt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan vi bestemme koordinatvektoren $\mathbf{c} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ ved å løse likningen

$$P_{\mathcal{B}}\,\mathbf{c} = \mathbf{x}$$

med hensyn på $\mathbf{c}$.

- $P_{\mathcal{B}}$ er *invertibel* siden dens kolonner utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$ (nemlig $\mathcal{B}$).

Derfor er $\boxed{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}})^{-1}\,\mathbf{x}}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Dette viser at koordinatavbildningen (m.h.p. $\mathcal{B}$) er lineær, at dens standardmatrise er $(P_{\mathcal{B}})^{-1}$, og at den er $1-1$ og på $\mathbb{R}^n$.

Teorem 8: *Anta at* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *er en (ordnet) basis for et vektorrom* V.

Da er $\mathbf{x} \to [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ *en lineær avbildning fra* V *til* $\mathbb{R}^n$ *som er 1-1 og på.*

Merk: Dette har vi nettopp sett når $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$.

Definisjon: En *isomorfi* fra et vektorrom V til et vektorrom W er en *lineær* avbildning fra V til W som er 1-1 og *på* W.

- Teorem 8 sier altså at koordinatavbildningen m.h.p. en (ordnet) basis for V er en isomorfi fra V til $\mathbb{R}^n$.
- En slik isomorfi kan vi bruke til å "identifisere" V med $\mathbb{R}^n$.
- Et nyttig resultat som illustrerer dette finnes i Notat 1:

Korollar til Teorem 8 [fra Notat 1]:

Anta at $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *er en (ordnet) basis for* V.

Betrakt en delmengde $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *av* V.

Definer

$$S_{\mathcal{B}} = \left\{ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}\,, [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}}\,, \ldots, [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}} \right\}$$

(som er en delmengde av $\mathbb{R}^n$*) og* $[S_{\mathcal{B}}] \in M_{n\times p}$ *ved*

$$[S_{\mathcal{B}}] = \left[\ [\mathbf{u}_1]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{u}_2]_{\mathcal{B}}\ \cdots\ [\mathbf{u}_p]_{\mathcal{B}}\ \right].$$

Da har vi at:

- S *utspenner* V $\Leftrightarrow$ $S_{\mathcal{B}}$ *utspenner* $\mathbb{R}^n$.
- S *er lineært uavhengig i* V $\Leftrightarrow$ $S_{\mathcal{B}}$ *er lineært uavhengig i* $\mathbb{R}^n$.
- S *er en basis for* V $\Leftrightarrow$ $S_{\mathcal{B}}$ *er en basis for* $\mathbb{R}^n$
  $\Leftrightarrow$ $p = n$ *og matrisen* $[S_{\mathcal{B}}]$ *er invertibel.*

Noen kommentarer

- En viktig konsekvens av siste del av korollaret er følgende resultat:

  Dersom et vektorrom V har en basis med n elementer, så er antall vektorer i enhver basis for V også lik n.

  Tallet n kalles dimensjonen til V (jf. avsn. 4.5).

- Når S er en basis for V, kalles den invertible matrisen $[S_{\mathcal{B}}]$ for *koordinatskiftematrisen fra S til $\mathcal{B}$*.

  Slike matriser skal vi studere nærmere i avsnitt 4.7.

- La $R = \texttt{rref}([S_{\mathcal{B}}])$. I praksis er det verdt å huske at:

  !
  - $S_{\mathcal{B}}$ utspenner $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow R$ har pivoter i alle sine rader.
  - $S_{\mathcal{B}}$ er lineært uavhengig $\Leftrightarrow R$ har pivoter i alle sine kolonner.
  - $S_{\mathcal{B}}$ er en basis for $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow p = n$ og $R = I_n$.

4.4.6 Finn $[x]_B$ når $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$

Basis vektorer

$$x = P_B [x]_B \iff \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koordinatvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -2 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Løsning

$y_2 = 2$, $y_1 = -6$ så $[x]_B = 6, -2$

4.4.18 $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ vis fra V.

Fortell hvorfor B-kolonne vektorene til $b_1, \dots b_n$

er kolonne $e_1, \dots, e_n$ i I

b_1 som en lineærkombinasjon av b_j-er

$$b_1 = 1\, b_1, \; 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$$

$$[b_1]_B = (1, 0, 0, \dots)$$

$$[b_i]_B = (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, 0) = e_i$$

$$[b_1 + 2b_2 - b_5]_B = [b_1]_B + 2[b_2]_B - [b_5]_B$$

$$= (e_1 + 2e_2 - e_5)$$

$$= (1, 2, 0, 0, -1, 0, 0, \dots)$$

4.4.28

Anta $\{v_1, \ldots, v_4\}$ er en avhengig spenmengde for V

Vis at hver w i V kan uttrykkes på mer enn en måte,

Som linier-kombinasjon av $v_1, \ldots, v_4$

Så finnes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ikke alle 0 slik at

$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_4 v_4 = 0$

La $w \in V$ siden $v_1, \ldots, v_4$ er en spenmengde

finnes $x_1, \ldots, x_4$ slik at

$$w = \sum_{i=1}^{4} x_i v_i$$

Men da er $\therefore$

$$w = \sum_{i=1}^{4} x_i v_i = \sum_{i=1}^{4} x_i + v_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i x_i}_{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} (x_i + \lambda_i) v_i$$

og siden $x_i + \lambda_i \neq x_i$ for minst en i, har vi skrevet w

på en ny måte (som lin. komb.)

4.5 Dimensjon

$\mathbb{R}^3 \to$ 3 dimensjonalt

Definisjon: Et vektorrom V kalles endeligdimensjonalt dersom det er utspent av en *endelig* mengde.

- Anta $V \neq \{\mathbf{0}\}$ er endeligdimensjonalt. Da har V alltid en basis (ved Teorem 5).
  Antall elementer i en basis for V er alltid det samme og kalles *dimensjonen til* V. Det betegnes med $\dim V$.
- Vi setter $\dim V := 0$ når $V = \{\mathbf{0}\}$.
- V kalles uendeligdimensjonalt når den <u>ikke</u> er utspent av en endelig mengde.

Teorem (9 og 10 i boka). *Anta at V er endeligdimensjonalt og $\boxed{n := \dim V}$. La S være en endelig delmengde av V.*

1. *Anta S har flere enn n vektorer. Da er S lineært avhengig.*
2. *Anta S har færre enn n vektorer. Da er V <u>ikke</u> utspent av S.*

V, $\dim V = n$, $S \subseteq V$, $|S| = p$, B basis $B = \{B_1, \ldots, B_n\}$

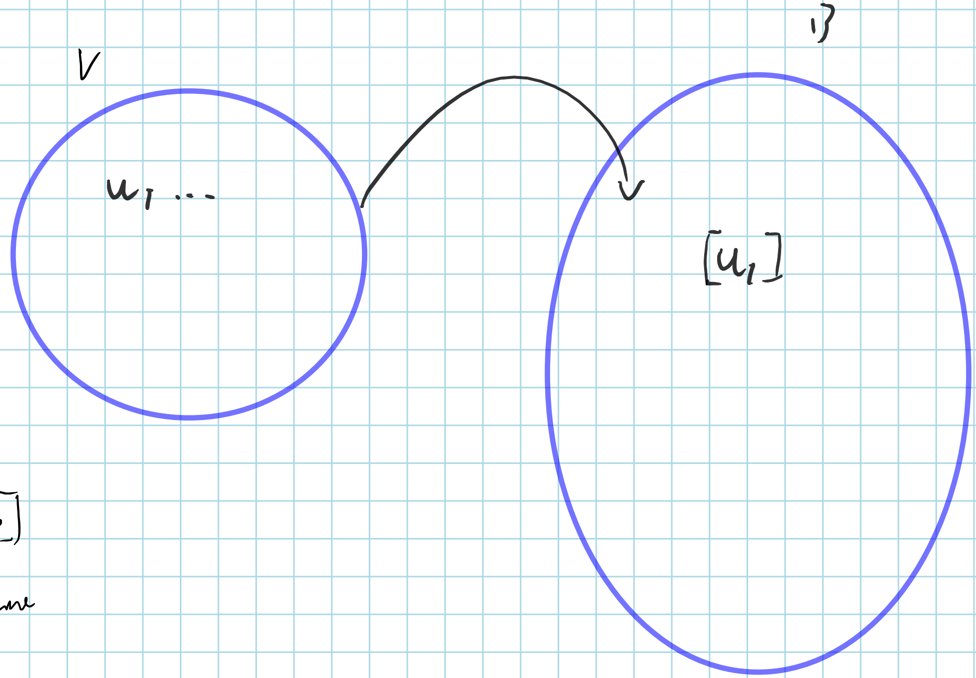
S har p elementer

$S = \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p\}$

$S_B = \{[\bar{u}_1]_B, \ldots, [\bar{u}_p]_B\}$

$[S_B] = \begin{bmatrix} [\bar{u}_1]_B & \cdots & [\bar{u}_p]_B \end{bmatrix}$

$n \times p$ matrise



S er lineært uavhengig $\Leftrightarrow$ S_B lin. uav.

$\Leftrightarrow$ red. trappeform til $[S_B]$ har pivot i hver kolonne

$$\begin{array}{cc} & p \\ n & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \\ & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{array}$$

$p > n \Rightarrow$ Kan vi ikke ha n pivoter

Noen eksempler.

- $\dim \mathbb{R}^n = n\,.$
- $\dim \mathbb{P}_n = n + 1\,.$
- $\dim M_{m\times n} = m\,n\,.$
- $\mathbb{P}$ er uendeligdimensjonalt.

La A være en $m \times n$ matrise. Sett $R = \texttt{rref}(A)$. Da gjelder:

- Kolonnevektorene i A som svarer til pivotene i R danner en basis for $\mathrm{Col}\ A$.

  Så $\boxed{\dim \mathrm{Col}\ A = \text{antall pivoter i } R}$

- Vektorene vi får ved å "separere" de frie variablene når vi skal angi $\mathrm{Nul}\ A$ på parameterform danner en basis for $\mathrm{Nul}\ A$.

  Så $\dim \mathrm{Nul}\ A =$ antall frie variable i systemet $A\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$, m.a.o.

  $\boxed{\dim \mathrm{Nul}\ A = \text{antall kolonner i } R \text{ som } \underline{\text{ikke}} \text{ er pivotkolonner}}$

Merk: $\dim \mathrm{Col}\ A$ kalles *rangen til A* og er tema for avsn. 4.6.

Teorem 11: *La H være et underrom av et endeligdimensjonalt vektorrom V, og la S være et lineært uavhengig delmengde av H.*

- *Hvis S utspenner H, så er S en basis for H.*
- *Hvis ikke, kan S alltid utvides til en basis for H.*

Videre er H endeligdimensjonalt og $\boxed{\dim H \le \dim V}$.

Det er ofte nyttig å kjenne dimensjonen til et vektorrom:

Teorem 12 (*Basis teoremet*):

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom, $V \neq \{\mathbf{0}\}$.
Anta at $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset V$ består av n distinkte vektorer, der $\boxed{n = \dim V}$. *Da gjelder følgende:*

- *Hvis S er lineært uavhengig, så er S en basis for V.*
- *Hvis S utspenner V, så er S en basis for V.*

4.9 Anvendelser: Markovkjeder

- Markov kjeder er en spesiell type diskret dynamisk system.
- Stokastisk modell: grunnleggende i sannsynlighetsregning.
- Brukes bl.a. i finans, fysikk, biologi, økonomi, demografiske modeller (populasjonsmodeller)
- Brukes i rangeringsmetoder, f.eks Google
- Les om Andrey Markov (1856-1922) (og Markov chains) på f.eks. Wikipedia, eller MacTutor Hist. of Mathematics http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/
- Lære mer om Markovkjeder: STK2130 - Modellering av stokastiske prosesser

En vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ som er slik at

$$x_j \geq 0 \quad \text{for alle } j = 1, \ldots, n,$$

og som også tilfredsstiller at

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

kalles en stokastisk vektor (i $\mathbb{R}^n$).

En kvadratisk matrise P kalles stokastisk dersom den er komponentvis ikkenegativ og hver kolonnesum er lik 1, dvs. hver kolonne i P er en stokastisk vektor. Slike matriser kalles også Markovmatriser.

En liten Markovmatrise: $P_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.7 & 0.2 \end{bmatrix}$

Og en litt større Markovmatrise:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

Eksempel: En populasjonsmodell.

- Et land er inndelt i n områder.
- En tilstandsvektor er en stokastisk vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ der komponenten x_j angir andelen av populasjonen som bor i område j for hver $j = 1, 2, \ldots, n$.
- Vi antar at hvert år vil en viss andel av populasjonen i et område flytte til andre områder. Vi lar derfor p_{ij} angi andelen i område j som flytter til område i i løpet av ett år.
- Matrisen $P := [p_{ij}]$ er da en stokastisk matrise, som ofte kalles overgangsmatrisen til modellen.
- *For enkelhets skyld antar vi at andelene p_{ij} er de samme for hvert år og at den totale populasjonen er konstant.*

Hvis $\mathbf{x}_k$ er tilstandsvektoren ved starten av tidsperiode k, så blir tilstandsvektoren ved neste periode $k+1$ gitt ved

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\,\mathbf{x}_k\,, \quad \text{der } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Kjenner vi initialtilstanden $\mathbf{x}_0$ kan vi beregne hver tilstandsvektor $\mathbf{x}_k$ iterativt ved å bruke likningen ovenfor.

Eks. Hvis $\mathbf{x}_0 = (0.5, 0.5)$ og $P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$, så blir

$$\mathbf{x}_1 = P\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

som gir fordelingen etter 1 år. Videre er

$$\mathbf{x}_2 = P\mathbf{x}_1 = \cdots = (0.56,\ 0.44), \quad \text{osv.}$$

Hva skjer langt fram i tid?!

Merk at

$$\mathbf{x}_k = P\mathbf{x}_{k-1} = P(P\mathbf{x}_{k-2}) = P^2\mathbf{x}_{k-2} = \cdots = P^k\mathbf{x}_0$$

Så den asymptotiske fordelingen blir bestemt av matrisen P^k.

Koeffisienten i posisjon (i,j) i matrisen P^k kan tolkes som

sannsynligheten for at en person flytter fra område j til område i i løpet av k tidsperioder.

Merk at P^k er også en stokastisk matrise (fordi produktet av to stokastiske matriser er igjen en stokastisk matrise – sjekk dette som en oppgave!).

- Matlab demo!
- I mange tilfeller vil fordelingen stabilisere seg i det lange løp.

Definisjon. Hvis P er en stokastisk matrise og $\mathbf{q}$ er en stokastisk vektor slik at

$$\mathbf{q} = P\mathbf{q}$$

så kalles q en likevektsvektor (equilibrium, steady-state, stasjonær fordeling).

- Perron-Frobenius teori for ikkenegative matriser gir at

  Enhver stokastisk matrise har minst en likevektsvektor.
- Skal senere knytte dette til egenvektorer (som behandles i neste kapittel).

Vi kan finne likevektsvektorene ved å løse det lineære likningssystemet.

$$(P - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

og bruke at $\mathbf{x}$ skal være stokastisk.

Markov kjeder

La P være en $n \times n$ stokastisk matrise, m.a.o. en Markovmatrise. Til enhver stokastisk vektor $\mathbf{x}_0$ i $\mathbb{R}^n$ kan vi tilordne en følge $\{ x_k\}$ av stokastiske vektorer i $\mathbb{R}^n$ ved å sette

$$\mathbf{x}_{k+1} = P\,\mathbf{x}_k \quad \text{for alle } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

noe som er ekvivalent med $\mathbf{x}_k = P^k \mathbf{x}_0$ for alle $k = 0, 1, 2, \ldots$
Vi sier da at $\{ \mathbf{x}_k\}$ er en Markov kjede assosiert med P (og $\mathbf{x}_0$).

I mange situasjoner er vi interessert i å finne ut hva som skjer når $k \to \infty$. Det vil ofte være slik at $\mathbf{x}_k$ konvergerer mot en likevektsvektor, men ikke alltid: prøv f.eks. med $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, så vil du lett se at følgen $\{ \mathbf{x}_k\}$ ikke konvergerer hvis $\mathbf{x}_0 \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Regulære stokastiske matriser

Definisjon. *En stokastisk matrise P kalles regulær dersom, for en viss k, er alle elementene i P^k positive.*

I så fall vil alle elementene være positive også i $P^{k+1}, P^{k+2}, \ldots$.

Dette svarer til at man kan komme seg fra enhver tilstand til enhver annen tilstand ved passende mange tilstandsoverganger. F.eks. hvis $p_{ij} > 0$ for alle i, j, så er P regulær.

Hovedresultatet i avsnitt 4.9 er følgende:

Teorem 18. *Hvis P er en regulær stokastisk matrise, så har P en entydig likevektsvektor q.*
Videre, hvis $\mathbf{x}_0$ er en vilkårlig stokastisk vektor, og $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$ for $k = 0, 1, \ldots$, så vil Markovkjeden $\{\mathbf{x}_k\}$ konvergere mot q når $k \to \infty$.

- Numerisk (for store regulære matriser) bestemme man gjerne likevektsvektoren ved iterasjonen x=P*x. Men det er da viktig å utnytte at matrisen vil ha ofte ha mange nullere.
- Den type beregninger ligger bak Google og PageRank algoritmen!

  Faktisk, hele forretningsidéen var her å tenke på weben som et stort nett (= en rettet graf) med overgangssannsynligheter fra en nettside til en annen, og basere rangering på beregning av en likevektsvektor.