Teorem: anta at f er deriverbar i punktet a
da har vi en grei måte å regne
ut den $f'(\bar a; \bar r) = \nabla f(\bar a) \cdot \vec r$

Eks: $f(x, y) = x^3 y^2$, $\vec a = (1, -1)$, $\bar r = (2, 1)$

Regn ut $f'(\vec a, \vec r)$

Skal bruke formula $f'(\bar a, \bar r) = \nabla f(\bar a) \cdot \vec r$

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = 3x^2y^2, & \frac{df}{dx} = 3 \cdot 1^2(-1)^2 = 3 \\ \frac{df}{dy} = 2x^3 y, & \frac{df}{dx} = 2 \cdot 1^3(-1) = -2 \end{cases}$$

$$\nabla f(\bar a) = \left(\frac{df}{da}(\bar a), \frac{df}{da}(\bar a) \right) = (3, -2)$$

f er deriverbar

$$f'(\bar a, \bar r) = \nabla f(\bar a) \cdot \bar r = (3, 2) \cdot (2, 1)$$

$$= 3 \cdot 2 + -2 \cdot 1$$

$$= 4$$

Hvilken retning vokser funksjonen raskest

Vi må finne den enhetsvektoren $\bar{u}$ slik at $f'(\bar{a},\bar{u})$ er størst mulig

$$f'(\bar{a},\bar{u}) = \nabla f(\vec{a})\,\bar{u} = |\nabla f\,\vec{a}|\cdot\overset{1}{|\bar{u}|}\,\underbrace{\cos\alpha}_{\text{størst}}$$

er $x = 0$

dvs når $\nabla f(\bar{a})$ og $\bar{u}$ er parallelle

Setning: Funksjonen vokser raskest i den vinkelen som gradienten peker, og hvis $\bar{u}$ er en enhetsvektor i retningen, så er $f'(\bar{a},\bar{u}) = |\nabla f(\bar{a})|$

Eksempel: Anta at $f(x,y) = x e^{x+y}$

Vokser raskest i punktet $(1,-2)$

Hvis u er enhetsvektoren i denne retningen, hva er da $f'(\bar{a},\bar{u})$

Vi må finne gradienten:

$$\frac{df}{dx} = 1\,e^{x+y} + xe^{x+y}\cdot 1 = (1+x)\,e^{x+y}$$

$$\frac{df}{dx}(\vec{a}) = (1+1)e^{1+-2} = \underline{2e^{-1}}$$

$$\frac{df}{dy} = x\,e^{x+y}\cdot 1 = xe^{x+y}$$

$$\frac{df}{dy}(\vec{a}) = 1\,e^{1-2} = \underline{e^{-1}}$$

$$\nabla f(1,2) = (2e^{-1}, e^{-1}) = e^{-1}(2,1)$$

Funksjonen vokser raskest i retningen $r = 2, 1$ eller i retningen $= (2e^{-1}, e^{-1})$

Hvor fort vokser funksjonen:

$$f(\vec{a}, \vec{u}) = |\nabla f\,\vec{a}| = |e^{-1}(2,1)|$$
$$= e^{-1}\sqrt{2^2+1^2}$$
$$= \underline{\underline{\sqrt{5}\,e^{-1}}}$$

Høyere ordens deriverte

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Blandede partiell deriverte er like

2.6) Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - hvordan deriverer vi dem?

$$\bar{F}(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_m(x) \end{pmatrix}$$

idé: Deriverer f ved å derivere komponentvis