Theorem Cauchy

Bevis $\Leftarrow$ Anta at $\{\bar{x}_n\}$ konvergerer mot $\bar{x}$.

Gitt $\varepsilon > 0$. Velg $N \in \mathbb{N}$ slik at $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n \geq N$.

Hvis da $n, k \geq N$, har vi

$$|x_n - x_k| = |(\bar{x}_n - \bar{x}) + (\bar{x} - \bar{x}_k)|$$

Trekant ulikheten $\leq |\bar{x}_n - \bar{x}| + |x_k - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Altså er $\{\bar{x}_n\}$ Cauchy

$\Rightarrow$ Anta at $\{\bar{x}_n\}$ er Cauchy

Da er $\{\bar{x}_n\}$ begrenset, fordi det finnes N slik at

$|\bar{x}_n - \bar{x}_N| < 1$ for alle $n \geq N$

Gitt $\varepsilon > 0$. Velg N slik at

$$|x_n - x_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{når } n, k \geq N$$

Ved Bolzano - Weierstrass, velg delfølgen $\{\bar{x}_{n_k}\}$ som konvergerer mot $\bar{x}$.

Velg så $n_k \geq N$ slik at $|\bar{x}_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Hvis $n \geq N$, er da

$$|x_n - x| = |(\bar{x}_n - \bar{x}_{n_k}) + (\bar{x}_{n_k} - \bar{x})|$$

Trekant ulikheten $\leq |\bar{x}_n - x_{n_k}| + |\bar{x}_{n_k} - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Altså konvergerer $\{\bar{x}_n\}$ mot $\bar{x}$. #

Nytt tema

Iterasjon av funksjoner 5.4

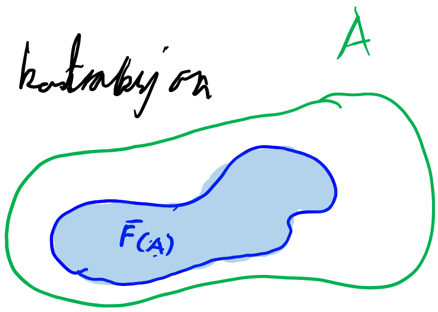
Krever ikke lenger at $\bar{F}$ er lineær

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{F}(\bar{x}_n) \qquad \bar{x}_n \in \mathbb{R}^n, \quad \overbrace{\bar{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}$$

eks.

$$\begin{cases} x_{n+1} = a x_n - b x_n y_n & x_n \text{ byttedyr} \\ y_{n+1} = c y_n + d x_n y_n & y_n \text{ rovdyr} \end{cases}$$

$$\bar{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Def La $A \subseteq \mathbb{R}^m$. $\bar{F}: A \to A$ kalles en kontraksjon hvis det fins $0 < C < 1$ slik at

$$|F(\bar{x}) - F(\bar{y})| \leq C \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$$

for alle $\bar{x}, \bar{y} \in A$. Et punkt $\bar{x} \in A$ kalles et fikspunkt for $\bar{F}$ hvis $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{x}$. Tallet C kalles en kontraksjonsfaktor for F

Banachs fikspunktteorem (5.4.4)

$A \subseteq \mathbb{R}^m$ ikke-tom og lukket

$\vec{F}: A \to A$ kontraksjon med en kontraksjonsfaktor C.

Da har vi:

- $\vec{F}$ har nøyaktig ett fikspunkt $\bar{x} \in A$
- Uansett hvilket punkt $\bar{x}_0 \in A$ vi starter iterasjonen i, vil følgen $\bar{x}_{n+1} = \bar{F}(x_n)$ konvergere mot $\bar{x} = (0,1,2,3,4,\dots)$
- Feilestimat: For alle $n \geq 1$ gjelder

$$|\bar{x}_n - \bar{x}| \leq \frac{C^n}{1-C} \cdot |\bar{x}_0 - \bar{x}_1|$$

Bevis

Hvis $\bar{F}(\bar{x}) = \bar{x}$ og $\bar{F}(\bar{y}) = \bar{y}$, har vi

$$|\bar{x} - \bar{y}| = |\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{y})| \leq C \cdot |\bar{x} - \bar{y}|$$

siden $0 < C < 1$, gir dette $|\bar{x} - \bar{y}| = 0$, så $x = \bar{y}$

Altså har F nøyaktig ett fikset punkt

Vis $n, j > 0$ har vi

$$|\bar{x}_n - \vec{x}_{n+j}| = |(x_n - x_{n+1}) + (\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_{n+2}| + \dots + |(\bar{x}_{n+j-1} - \bar{x}_{n+j})|$$

Δ ulikheten

$$\leq |\bar{x}_n - x_{n+1}| + |\bar{x}_{n+1} - x_{n+2}| + \dots + |x_{n+j-1} - x_{n+j}|$$

$$\leq |\bar{x}_n - \bar{x}_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + |\bar{x}_{n+2} - \bar{x}_{n+3}| + \dots$$

$$\leq C^n \cdot |\bar{x}_0 - x_1| + C^{n+1} \cdot |\bar{x}_0 - x_1| + C^{n+2} |\bar{x}_0 - \bar{x}_1| + \dots$$

$\downarrow$

Sum av geometrisk rekke

$a + ar + ar^2 + \dots$

$\frac{a}{1-r}$

hvis $|r| < 1$

Her er $a = c$, $r = c$

$= (c^n + c^{n+1} + c^{n+2} + \dots) \cdot |\bar{x}_0 - \bar{x}_1|$

$\leadsto = \frac{c^n}{1-c} \cdot |\bar{x}_0 - \bar{x}_1|$

Siden $0 < c < 1$, kan vi få dette mindre enn en gitt $\varepsilon > 0$ ved å velge en n stor nok.

Altså er følgen $\{x_n\}$ Cauchy, så den konvergerer mot et punkt $\bar{x}$.

Siden enhver kontraksjon er kontinuerlig (velg $\delta = \varepsilon$), har vi

$$\bar{x} = \lim_{n\to\infty} \bar{x}_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \bar{F}(\bar{x}_n) \underset{\uparrow}{=} \vec{F}\left(\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n\right) = \bar{F}(\bar{x})$$

$\boxed{5.1.9}$

Så $\bar{x}$ er et fikspunkt. Lar vi $j \to \infty$ i regningen ovenfor, får vi

$$|\bar{x}_n - \bar{x}| \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot |\bar{x}_0 - \bar{x}_1|. \quad \#$$

Middelverdisetningen i flere variable 5.5.6

$A \subseteq \mathbb{R}^m$

$f : A \to \mathbb{R}$ deriverbar som inneholder linjestykket mellom $\bar{a}$ og $\bar{b}$ i $\mathbb{R}^m$.

Da fins et punkt $\bar{c}$ på linjestykket fra $\bar{a}$ til $\bar{b}$ slik at

$$f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$$

Bevis Parametriser linjestykket fra $\bar{a}$ til $\bar{b}$ ved

$$\bar{r}(t) = \bar{a} + t \cdot (\bar{b} - \bar{a}) \quad \text{for } t \in [0,1]$$

Les på parametrisering

$$r(0) = \bar{a}, \quad r(1) = \bar{b}$$

La $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ være definert ved at

$$g(t) = f(r(t)).$$

Kjerneregelen i flere variable

$$g'(t) = \left(\frac{df}{dx_1}, \dots, \frac{df}{dx_n} \right) \begin{pmatrix} r_1'(t) \\ \vdots \\ r_n'(t) \end{pmatrix}$$

$f(r(t))$

$$= \nabla f(r(t)) \cdot \bar{r}'(t)$$

$$= \nabla f(r(t)) \cdot (\bar{b} - \bar{a}) \quad (*)$$

Ved middelverdisetningen i en variabel fins $c \in [0,1]$ slik at

$$\frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g'(c) \overset{(*)}{=} \nabla f(\bar{r}(c)) \cdot (\bar{b} - \bar{a})$$

Her er $g(1) = f(r(1)) = f(\bar{b})$ og $g(0) = f(r(0)) = f(\bar{a})$

Setter vi da $\bar{c} = \bar{r}(c)$, fås dermed

$$f(\bar{b}) - f(\bar{a}) = \nabla f(\bar{c}) \cdot (\bar{b} - \bar{a}).$$

#