STK1100 våren 2018

Normalfordelingen

Svarer til avsnitt 4.3 og deler av avsnitt 4.6 læreboka

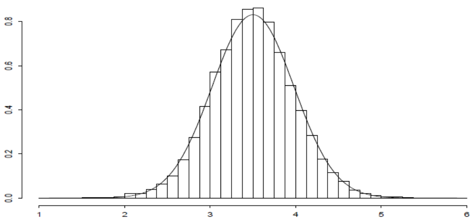
Ørnulf Borgan
Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

Normalfordelingen er den viktigste av alle sannsynlighetsfordelinger.

Normalfordelingen kan brukes til å beskrive variasjonen i numeriske observasjonen (f.eks. vektene til nyfødte jenter).

Normalfordelingen brukes også for ulike skalaer som menneskene selv har lagd (f.eks. IQ).

Normalfordelingen kan også brukes som en god tilnærmelse til andre fordelinger (jf. sentralgrensesetningen i avsnitt 6.2).



Vi har sett at histogrammet til vekten for 20000 nyfødte jenter kan tilnærmes med funksjonen

μ

$$f(x) = \frac{1}{0.48\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\cdot 0.48^2}(x-3.50)^2}$$

$f(x)$ kalles sannsynlighetstettheten til X og svarer til histogrammet for «uendelig mange» fødselsvekter

Vi har at $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$

Vi sier at en kontinuerlig stokastisk variabel X er normalfordelt med forventning μ og standardavvik σ (varians σ^2) hvis den har sannsynlighetstetthet

$-\infty < \mu < \infty$
$\sigma > 0$

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty$$

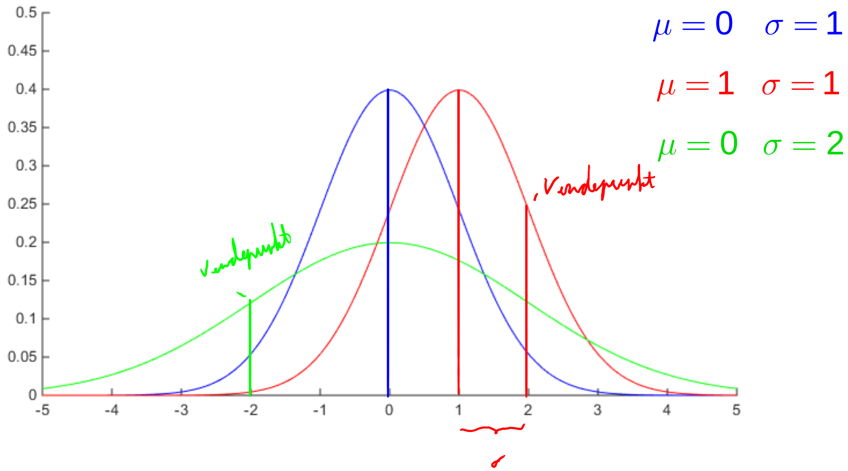
Kort skriver vi: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Vi kan vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = 1$$

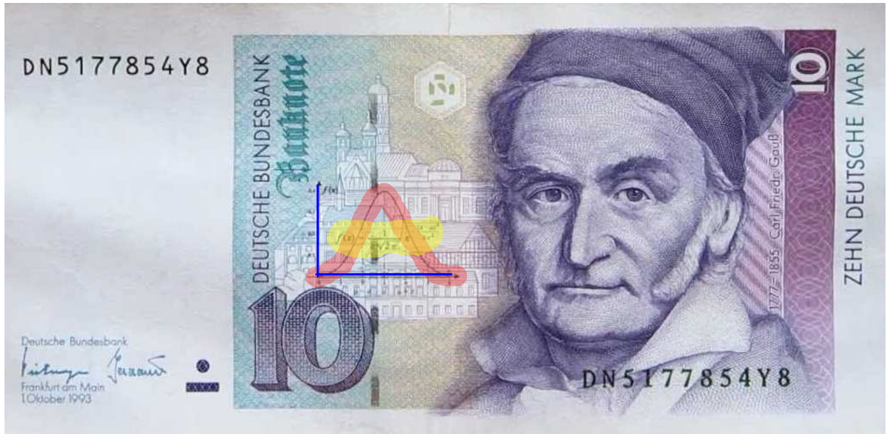
slik det skal være for en sannsynlighetstetthet (se side 180 i læreboka)

Normaltettheter for ulike verdier av μ og σ

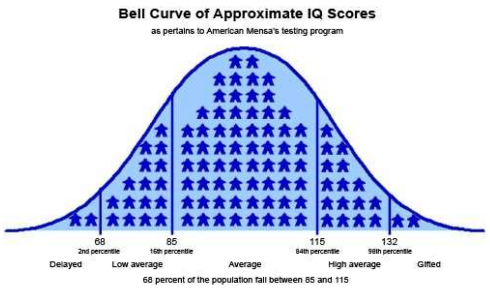


Normalfordelingen kalles også Gaussisk fordeling
etter Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Tysk 10 mark seddel (i bruk fram til 1999):



Eksempel: IQ-score



IQ-skalaen er lagd slik at hvis X er IQ-score til en tilfeldig valg person, så er $X \sim N(100, 15^2)$

$\mu \quad \sigma$

Forventning og varians

Momentgenererende funksjon (vises seinere):

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\mu t + \sigma^2 t^2 / 2}$$

Det gir

$$R_X(t) = \ln M_X(t) = \mu t + \sigma^2 t^2 / 2$$

Herav følger det at

$$E(X) = R_X'(0) = \mu$$

$$V(X) = R_X''(0) = \sigma^2$$

Standardnormalfordelingen

Hvis en kontinuerlig stokastisk variabel Z er normal-fordelt med forventning $\mu = 0$ og standardavvik $\sigma = 1$ sier vi at Z er standardnormalfordelt

Sannsynlighetstetthet:

$$f(z;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad \text{for} \quad -\infty < z < \infty$$

Kort skriver vi: $Z \sim N(0,1)$

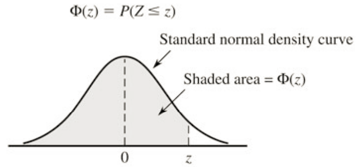
Kumulativ fordeling:

$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$$

Tabell A.3 bak i boka gir $\Phi(z)$ for verdier av z fra -3.49 til 3.49 (i trinn på 0.01)

$\phi[\gamma(n)] = p$

Table A.3 Standard Normal Curve Areas



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319

Eksempel:

$P(Z \le -3.02) \;= 0.0013$

$P(Z \geqslant 1.25) \;= 1 - P(Z \le 1.25) = 1 - 0.8944 \;= 0.1056$

Persentiler

Vi kan finne persentiler ved å bruke tabellen «baklengs»

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

Eksempel:

97.5-persentilen $\;= 1.96$

```
>> normcdf(1.25,0,1)

ans =

    0.8944

>> norminv(0.95,0,1)

ans =

    1.6449
```

Kritiske verdier z_α

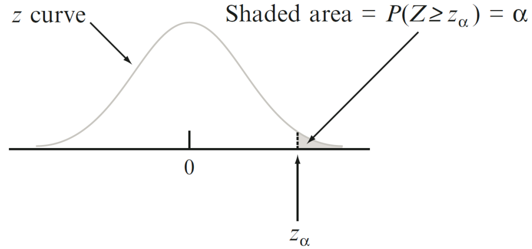


Table 4.1 Standard normal percentiles and critical values

Percentile	90	95	97.5	99	99.5	99.9	99.95
α (tail area)	.1	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
$z_\alpha = 100(1-\alpha)$th percentile	1.28	1.645	1.96	2.33	2.58	3.08	3.27

Hvis $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ så er $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Bevis:

Kumulativ fordeling til Z :

$$F_Z(z) = P(Z \le z) \;\; = P(X \le \sigma z + \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{\sigma z+\mu} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \qquad \text{(subst. } y = (x-\mu)/\sigma\text{)}$$

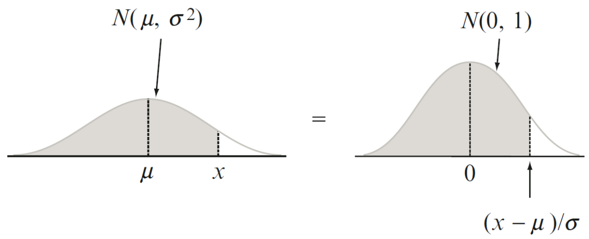
Tetthet til Z :

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$$

Vi kan bruke standardnormalfordelingen til å finne sannsynligheter for $X \sim N(\mu,\sigma^2)$:

$$P(X \le x) \;\; = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) \;\; = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$



Normalfordeling med MATLAB

Sannsynlighetstetthet:

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

MATLAB: normpdf(x,μ,σ)

Kumulativ fordeling:

$$F(x;\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} dy$$

MATLAB: normcdf(x,μ,σ)

Persentiler:

$\eta(p)$ er gitt ved at $F(\eta(p);\mu,\sigma) = p$

MATLAB: norminv(p,μ,σ)

Anta at $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Da er

$$P(\mu - k\sigma \le X \le \mu + k\sigma) \;\; = P\left(-k \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le k\right)$$

$$= P(-k \le Z \le k) \;\; = \Phi(k) - \Phi(-k)$$

Vi finner sannsynlighetene for k = 1, 2 og 3.

Det gir følgende:

If the population distribution of a variable is (approximately) normal, then
1. Roughly 68% of the values are within 1 SD of the mean.
2. Roughly 95% of the values are within 2 SDs of the mean.
3. Roughly 99.7% of the values are within 3 SDs of the mean.

Momentgenererende funksjon

Vil bestemme den momentgenererende funksjonen til *X*.

Bruker at hvis $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ så er $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Vi viser først at (jf. forelesningen):

$$M_Z(t) = e^{t^2/2}$$

Av dette finner vi at:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(\sigma Z+\mu)}) = E(e^{t\mu}e^{(t\sigma)Z})$$

$$= e^{\mu t}E(e^{(t\sigma)Z}) = e^{\mu t}M_Z(t\sigma) = e^{\mu t+\sigma^2 t^2/2}$$

Persentiler

La $\eta_X(p)$ og $\eta_Z(p)$ være 100*p*-persentilene til *X* og *Z*.

Vi vil finne sammenhengen mellom dem.

Vi har at $P(Z \le \eta_Z(p)) = p = P(X \le \eta_X(p))$

Nå er $P(X \le \eta_X(p)) = P\left(Z \le \dfrac{\eta_X(p)-\mu}{\sigma}\right)$

Det gir $\dfrac{\eta_X(p)-\mu}{\sigma} = \eta_Z(p)$

Derfor er $\eta_X(p) = \mu + \eta_Z(p)\cdot\sigma$

Normalfordelingsplott

Sammenhengen

$$\eta_X(p) = \mu + \eta_Z(p)\cdot\sigma$$

kan brukes til å motivere en metode for å sjekke om observasjoner er (omtrent) normalfordelte.

Eksempel:

Hvilepuls til 10 kvinnelige studenter:

67 58 105 97 81 62 73 75 87 68

Er det rimelig å anta at dataene er normalfordelte?

Idé: Plott empiriske persentiler mot persentilene i standardnormalfordelingen.

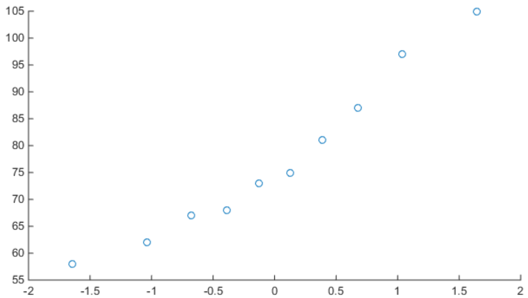
Empiriske persentiler med *n* observasjoner:

Skriv observasjoenen i stigende rekkefølge fra den minste til den største.

Da svarer den *i*-te minste observasjonen til den empiriske $100\left(\dfrac{i-1/2}{n}\right)$-persentilen.

Når $n = 10$ svarer observasjonene til følgende empiriske persentiler:

5, 15 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95

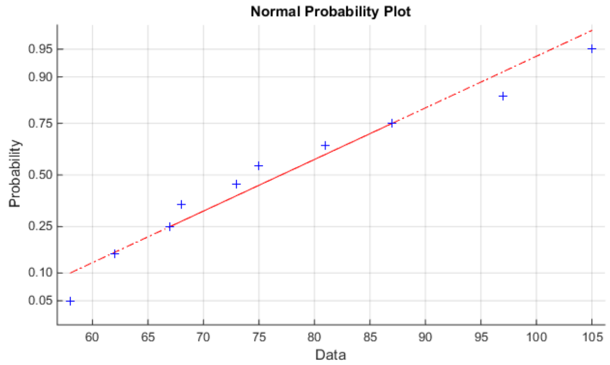


Punktene ligger omtrent på en rett linje, så normal-fordeling er rimelig.

MATLAB:

```
x=[67  58  105  97  81  62  73  75  87  68]
n=10
ii=1:n
pers=(ii-0.50)/n
scatter(norminv(pers,0,1),sort(x))
```


Kommandoen normplot i MATLAB lage et tilsvarende plott, men x- og y-aksen er byttet om (så plottet blir tilsvarende som figur 4.34 i læreboka):



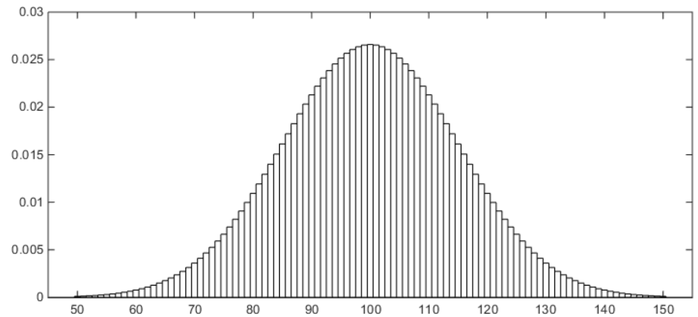
Normalfordeling som tilnærming til diskrete fordelinger

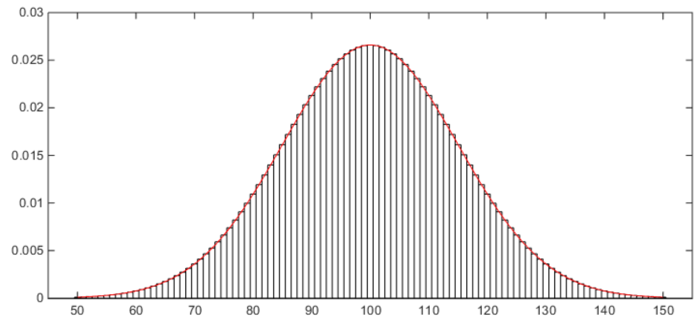
Normalfordelingen brukes flere ganger som en tilnærming for diskrete fordelinger.

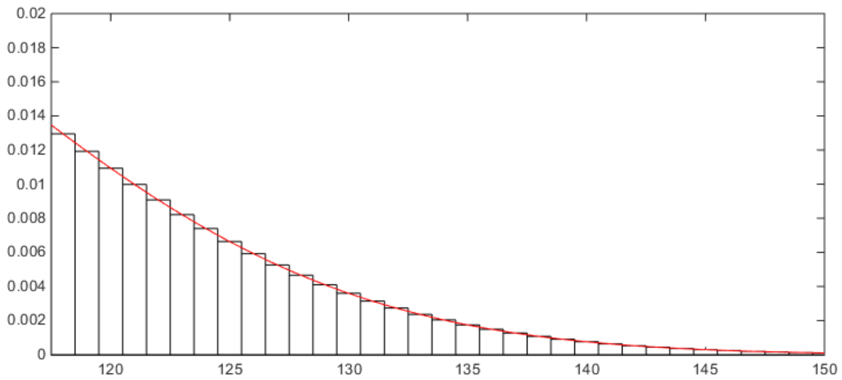
Eksempel: IQ:

IQ-skalen er lagd slik at IQ i en befolking er normalfordelt med $\mu = 100$ og $\sigma = 15$ (selv om en ikke regner IQ som desimaltall).

Hvor stor del av befolkningen har IQ minst 120?





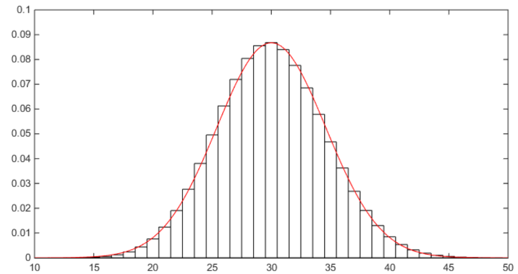


For å få med hele stolpen som svarer til 120 må vi bestemme arelet under normalfordelingskurven til høyre for 119.5.

Det svarer til sannsynlighet 9.7%

Normalfordeling som tilnærming til binomisk fordeling (mere i avsnitt 6.2)

La X være binomisk fordelt med n=100 forsøk og sannsynlighet p=0.30. Da er $E(X) = np = 30$ og $SD(X) = \sqrt{np(1-p)} = 4.58$



Figuren viser den binomiske punktsannsynligheten og normalfordeligstettheten med $\mu = 30$ og $\sigma = 4.58$

Generelt har vi følgende resultat:

Anta at X er binomisk fordelt med n forsøk og sannsynlighet p.

Den kumulative fordelingen er

$$B(x;n,p) = P(X \leq x) = \sum_{y=0}^{x} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$$

Hvis $np \geq 10$ og $n(1-p) \geq 10$, så er

$$B(x;n,p) \approx \Phi\left(\frac{x + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$