Oppg 1. $p(t) = a_0 + a_1 t + t^2$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Sjekk at det karakteristiske polynomet til C er lik p

$$(C - It) = \begin{bmatrix} -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 - t \end{bmatrix}$$

$$\det(C - It) = (-t)(-a_1 - t) - 1(-a_0)$$
$$= a_1 t + t^2 - a_0$$

Da ser vi at $\det(C - tI) = p(t)$

Deretter har vi matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

Og det karakteristiske polynomet

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + t^3$$

Vis at det karakteristiske polynomet til C er lik $-p$

$$(C - tI) = \begin{bmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 - t \end{bmatrix}$$

$$\det(C - tI) = 0 - t \begin{vmatrix} -t & 0 \\ -a_0 & -a_2 - t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{vmatrix}$$

$$= -t((-t)(-a_2 - t) - 0) - (ta_1 + a_0)$$

$$= -t(a_2 t + t^2) - ta_1 - a_0$$

$$= -a_2 t^2 - t^3 - ta_1 - a_0 = -P(t)$$

Oppg 2. $(*)\ f'''(t) - 2f''(t) - f'(t) + 2f(t) = 0$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = 2 - t - 2t^2 + t^3$$

i) $\bar{x}(t) = (f(t), f'(t), f''(t))$

Sjekk at $\bar{x}(t)$ er en løsning av 1. ordenssystemet

$$(**)\ \bar{x}'(t) = C\bar{x}(t)$$

Finner $C\bar{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ -2f(t) + f'(t) + 2f''(t) \end{bmatrix}$$

Vet at $\bar{x}'(t) = (f'(t), f''(t), f'''(t))$

Da får vi ligningssettet

$$f'(t) = f'(t)$$
$$f''(t) = f''(t)$$
$$f'''(t) = -2f(t) + f'(t) + 2f''(t)$$

Dette viser vi kan sette inn $-2f(t) + f'(t) + 2f''(t)$ slik at vi finner $f'''(t)$ som er neste ledd. Dermed er $f(t)$ en løsning av (*) $\boxed{}$

ii) $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t))$, $f(t) = \bar{x}_1(t)$

Sjekk at $f(t)$ er en løsning av (*)

Finner $C\bar{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{matrix} \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ -2\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) + 2\bar{x}_3(t) \end{matrix}$$

Da får vi ligningssettet

$$\bar{x}_1(t) = f(t)$$
$$\bar{x}_1'(t) = \bar{x}_2(t)$$
$$\bar{x}_2'(t) = \bar{x}_3(t)$$
$$x_3'(t) = -2\bar{x}_1(t) + \bar{x}_2(t) + 2\bar{x}_3(t)$$

Viser da at at $\bar{x}(x)$ er en løsning av (*)

$\boxed{}$

2 iii) Bestem alle reelle løsninger til systemet

$$x'(t) = C\,x(t)$$

Finner først egenverdiene til C

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(C-\lambda I) = 0 + (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\big(-\lambda(2-\lambda)\big) + \lambda - 2$$

$$= -\lambda(-2\lambda + \lambda^2) + \lambda - 2$$

$$= 2\lambda^2 - \lambda^3 + \lambda - 2$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Egenverdier $-1, 2, 1$

Finner så egenvektorene

$$(C - 1I)x = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C - 2I)x = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,25 & 0 \\ 0 & 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(C + 1)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da har vi egenvektorene

For $\lambda = 1$, x_3: fri

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_1 &= x_3 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\text{Setter} \\ &x_3 = 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

dermed har vi

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda = 2$, x_3: fri

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 0,25\ x_3 &= 0 \\ x_2 - 0,5\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= 0,25\, x_3 \\ x_2 &= 0,5\ x_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{Velger} \\ &x_1 = 4 \end{aligned}$$

$x_1 = 0,25 \cdot 4 = 1$

$x_2 = 0,5 \cdot 4 = 2$

dermed har vi

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

For $\lambda = -1$, x_3: fri

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Velger} \\ x_3 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{array}$$

dermed har vi

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi egenvektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Da kan vi finne egenfunksjonene

$$x_1(t) = c_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{1t}, \quad x_2(t) = c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t}, \quad x_3(t) = c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-1)t}$$

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

Vi har fra oppgaven at $x(0) = (-1, 2, 2)$

Dermed kan vi sette opp løsningen

$$x(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 1 + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

For å løse denne ligningen kan vi sette opp en matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$c_1 = -1, \ c_2 = 1, \ c_3 - 1$

$$x(t) = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

$x(t)$ beskriver alle reelle løsninger for

$\bar{x}'(t) = C\,\bar{x}(t)$

iv) $(*)$ $f'''(t) - 2f''(t) - f'(t) - 2f(t) = 0$

Vi har fra i) at C er en companion-matrise til $(*)$. I iii fant vi en generell egenfunksjon utifra C. er har vi

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

som vi vet fra ii) at er lik $x(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \end{bmatrix}$

Den generelle eigenfunksjonen sir da

$$x(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ f''(t) \\ f'''(t) \end{bmatrix} \text{ og for } t=0, \ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Derved er eigenfunksjonen en løsning som tilfredstiller eigenverdiene #

3. $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-1} \end{bmatrix}$

Sjekk at $v_\lambda := \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$

$C\bar{v} = \bar{v}\lambda$, Velger å bruke en 3×3 matrise

linær $C\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 \end{bmatrix}$$

Vet fra oppgave hvis λ skal være et polynom

så må $\lambda^3 = -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2$

Som vi vet fra oppgave 1 at stemmer

Derved får $v = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{bmatrix}$

som da oppfyller

$$C\bar{v} = \lambda \bar{v} \quad \blacksquare$$

(ii) Hver matrise har egenvektor(er) som utspenner hvert sitt egenrom av $\mathbb{R}^n$. Disse underrommene har dimensjon 1 fordi, egenvektorene hvert sitt distinkte egenrom. Egenrommene kan ha flere vektorer som skaleres av matrisen C, men disse vil være lineært avhengig til den dominerende egenvektoren i rommet. Derfor er $\dim(E_\lambda) = 1$.

iii) I følge diagonaliseringsteoremet vil en $n \times n$-matrise være diagonaliserbar kun hvis matrisen har n lineært uavhengige egenvektorer. Dersom en matrise, slik som beskrevet i oppgaven, har n distinkte reelle røtter så har den også n distinkte egenvektorer og vil derfor være mulig å diagonaliseres.