5.7 Omvendte og implisitte funksjoner

- $V_{\bar F} : \{ \bar F(\bar x) : \bar x \in D_{\bar F} \}$ verdimengden til $\bar F$
- $\bar F : D_{\bar F} \to V_{\bar F}$ kalles injektiv hvis det til hver $\bar y \in V_{\bar F}$ bare fins en $\bar x \in D_{\bar F}$ den omvendte funksjonen $\bar F^{-1} : V_{\bar F} \to D_{\bar F}$ definert ved

$$\bar F^{-1}(\bar y) = \bar x \iff \bar F(\bar x) = \bar y$$

- Hvis $U_0 \subseteq D_{\bar F}$, så kalles funksjonen vi får fra $\bar F$ ved å innskrenke definisjonsområdet $D_{\bar F}$ til U_0, for restriksjonen av $\bar F$ til U_0

- En mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kalles en omegn om $\bar x$ dersom $\bar x$ er et indre punkt i A

Omvendt funksjonsteorem (5.7.2, litt annerledes formulert)

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ åpen

$\vec F : U \to \mathbb{R}^m$ kontinuerlige partiellderiverte

$\vec a \in U$, Jacobimatrisen $F'(\vec a)$ inverterbar

Da har vi:

Det fins en omegn U_0 om $\vec a$ og en omegn V_0 om $\vec F(\vec a)$ slik at restriksjonen $F : U_0 \to V_0$ har en omvendt funksjon $\vec G : V_0 \to U_0$ som er deriverbar på V_0. Jacobimatrisene oppfyller at $G'(F(\vec x)) = [F'(\vec x)]^{-1}$ for alle $\vec x \in U_0$

utledning av selve Formelen:

$\bar{G}(\bar{F}(\bar{x})) = \bar{x}$ gir (kjerneregelen)

$$G'(\bar{F}(\bar{x})) \cdot F'(x) = I_m$$

$$\bar{G}'(\bar{F}(\bar{x})) \cdot \underbrace{\bar{F}'(\bar{x}) \cdot [\bar{F}'(\bar{x})]^{-1}}_{I_m} = I_m \cdot [F'(x)]^{-1}$$

$$\bar{G}'\bar{F}(\bar{x}) = [\bar{F}'(\bar{x})]^{-1}$$

Eks. Vis at $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x + 5 \\ 2x + 5y \end{pmatrix}$

har en omvendt funksjon $\bar{G}$ definert i en omegn om $(5,0)$

slik at $\bar{G}(5,0) = (0,0)$

Finn den deriverte til $\bar{G}$ i punktet $(5,0)$

Løsn. Vi har $\underline{\bar{F}(0,0) = (5,0)}$

$$\vec{F}' = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dx} , \frac{dF_1}{dy} \\ \frac{dF_2}{dy} , \frac{dF_2}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ så}$$

$$F'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$ eksisterer siden $\det F \neq 0$

Fra omvendt funksjonsteoremet følger at F har en omvendt funksjon G definert i en omegn om $(5,0)$ slik at $G(5,0) = (0,0)$. Videre er $G'(5,0) = [F'(0,0)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

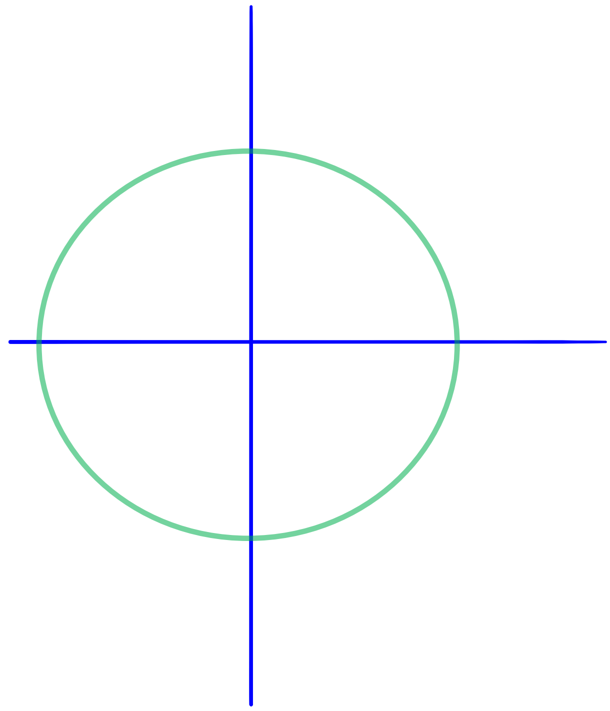
Radreduserer $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ #

Implisitt definerte funksjoner

eks $x^2 + y^2 = 1$

gir $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

kan velge $y(x) = \sqrt{1-x^2}$



Kan si at likningen $f(x,y) = 0$ definerer y implisitt som funksjon av x, hvis vi definerer $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

Implisitte funksjonsystem (5.7.4)

$U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ åpen

$f : U \to \mathbb{R}$ kontinuerlige partiell derivete, $f(\underbrace{x_1, x_2, \ldots,}_{\bar{x}} y)$

$(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_m, b) \in U$ slik at

$$f(\bar{a}, b) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{df}{dy}(\bar{a}, b) \neq 0$$

Da har vi

Det fins en omegn U_0 om $\bar{a}$ i $\mathbb{R}^m$ slik at for hver $\bar{x} \in U_0$ finn et entydig bestemt tall $g(\bar{x})$ som oppfyller

$$f(\bar{x}, \bar{g}(\bar{x})) = 0$$

Funksjonen $g : U_0 \to \mathbb{R}$ er deriverbar

Bevis La $\bar{F} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ ved $F(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, f(\bar{x}, y))$

Da har vi

$$\det(\bar{F}') = 1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{df}{dy} \neq 0 \text{ i punkt } (\bar{a}, b).$$

fordi

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{df}{dx_1} & \frac{df}{dx_2} & \cdots & \frac{df}{dy} \end{pmatrix}$$

Ved anvendt funksjonsinversteoremet kan vi restriktere $\bar{F}$ til en omegn av $(\bar{a}, b)$ der $\bar{F}$ har en invers funksjon $\bar{G}$ definert på en omegn V om punktet

$$\bar{F}(\bar{a}, b) = (\bar{a}, f(\bar{a}, b)) = (\bar{a}, 0)$$

$\bar{G}$ må være på formen

$$\vec{G}(\vec{x}, z) = (\bar{x}, h(\bar{x}, z))$$

der $h: V \to \mathbb{R}$ har kontinuerlig partielle derivete

La $u_0 = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : (\bar{x}, 0) \in V\}$, og la $g(\bar{x}) = h(\bar{x}, 0)$ for alle $\bar{x} \in u_0$

Hvis da $\bar{x} \in u_0$ og $y \in \mathbb{R}$, har vi

$$\begin{aligned} f(\bar{x}, y) = 0 &\iff \bar{F}(\bar{x}, y) = (\bar{x}, 0) \\ &\iff \bar{G}(\bar{x}, 0) = (\bar{x}, y) \\ &\iff h(\bar{x}, 0) = y \\ &\iff g(\bar{x}) = y \end{aligned}$$