4.1.

Aksiomer : (addisjon)

1. addisjon av $\bar{u}$ og $\bar{v}$ betegnes med $\bar{u} + \bar{v}$ og ligger i V
(dvs. V er lukket under addisjon)

2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

3. $(u + v) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

4. Det finnes en nullvektor 0 i $\bar{V}$ som er slik at
$u + 0 = u$

5 For hver $u \in V$ fins en vektor $-\bar{u} \in V$
slik at $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$

(Multiplikasjon)

⋮

4.1 Vektorrom og underrom

Et (reelt) vektorrom er en mengde V utstyrt med en addisjon : gitt $\bar{u}, \bar{v}, \in V$ kan vi danne $\bar{u} + \bar{v}$

og en multiplikasjon
med skalar : gitt $c \in \mathbb{R}$ og $\underline{u} \in V$ kan vi danne $c\bar{v}$

slik at alle de vanlige regnereglene for vektorer i $\mathbb{R}^n$ holder (det er 10 slike aksiomer, jf. Boka) $\bar{v}$

17 undeddiller av aksiom $\mathbb{R}^n$ med sine vanlige operasjoner.

Noen viktige eksempler på vektorer

• "Signalrommet" $S = \left\{ \bar{x} = \{x_k\}_{k=-\infty}^{k=\infty} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{R} \text{ for alle } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Skriver ofte $x = \{ \dots x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 \dots \}$ alle hele tall

"en vektor med uendelig mange komponenter"

Vi definerer da

$$\bar{x} + \bar{y} = (\dots, x_{-1} + y_{-1}, x_0 + y_0, x_1 + y_1, \dots)$$

$$c\bar{x} = (\dots, cx_{-1}, cx_0, cx_1, \dots)$$

m.a.o. $\underbrace{\{x_k\}}_{\bar{x}} + \underbrace{\{y_k\}}_{\bar{y}} = \underbrace{\{x_k + y_k\}}_{\bar{x}+\bar{y}} \in S$

$c\underbrace{\{x_k\}}_{\bar{x}} := \{c x_k\} \in S$

Lukket under addisjon og multiplikasjon med skalar p. def!

→ Blir et vektor rom. Vi sjekker f.eks. at

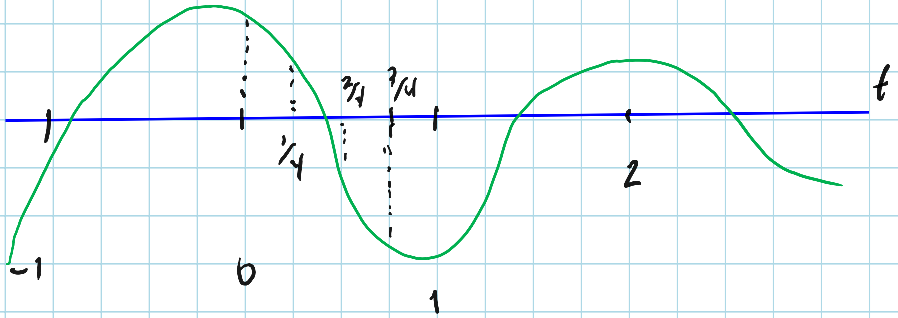
$$\bar{x} + \bar{y} = \{x_k + y_k\} = \{y_k + x_k\} = \bar{y} + \bar{x} \quad (\text{aks. } 2)$$

$$c\,d\,\bar{x} = c(\{d x_k\}) = \{c(d x_k)\} = \{cd(x_k)\} = (cd)\bar{x}$$
(aksiom 9)

$$\bar{0} = (\dots, 0, 0, 0, \dots)$$

$$-\bar{x} = (\dots, -x_{-2}, -x_{-1}, -x_0, -x_1, -x_2, \dots)$$

Tilsvarende blir $\mathbb{F} = \{ \vec{x} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_k \in \mathbb{R}$ for alle $k \in \mathbb{N} \}$ et vektorrom (med ....)



Gitt $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kan vi "sample" t for hvert 4ede dels sekund

Får da en følge $x_k = f\left(\frac{k}{4}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

$\vec{x} = \{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ ved å sette

$\underline{\underline{\in S}}$

- La D være en ikke-tom mengde, vi kan da betrakte "funksjonsrommet" $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ = alle reelle funksjoner definert på D

Gitt $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ og $c \in \mathbb{R}$ kan vi definere $f+g$ og cf ved $(f+g)(t) := f(t) + g(t)$ for alle $t \in D$

$(cf)(t) := c f(t)$ — " —

Det er nå rett frem å sjekke at dette blir et vektor

• Matriserom $M_{n \times n} := \{ A = [a_{ij}] : A$ er en reell $m \times n$ matrise $\}$

(eller $M_{m \times n}(\mathbb{R})$)

Blir et vektorrom med hensyn på sine vanlige matriseoperasjoner

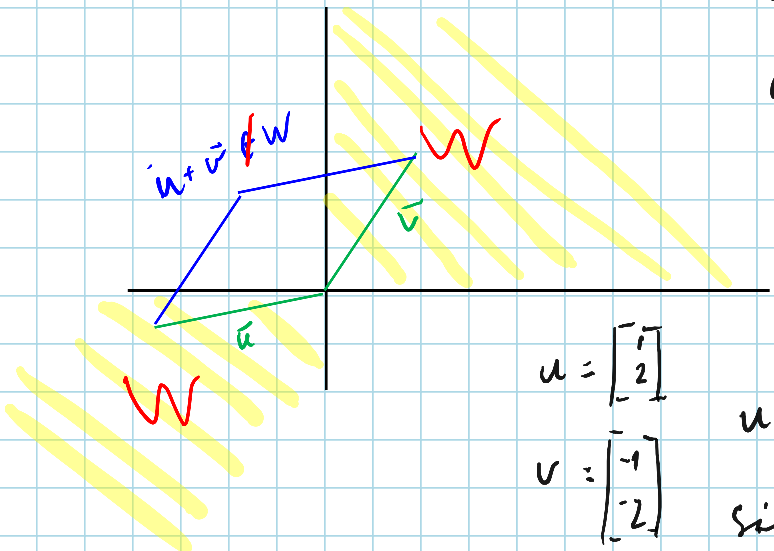
$$[a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$c[a_{ij}] := c[a_{ij}]$$

Skriver ofte M_n istedenfor $M_{n \times n}$

Betrakt $W := \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$

med de operasjonene den arver fra $\mathbb{R}^2$



W er ikke et vektorrom fordi den er ikke lukket under addisjon

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$v = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$u + v = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W$

siden $(-1) \cdot 1 = -1 < 0$

Underrom

Def. La V være et vektorrom, og la $H \subseteq V$

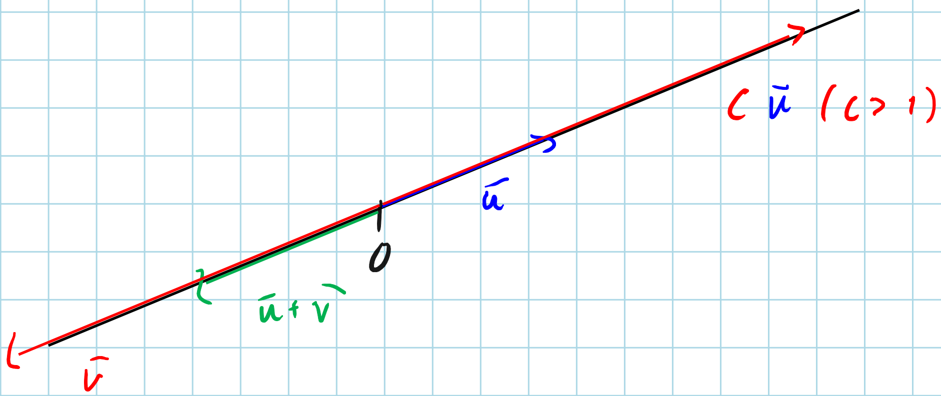
Vi sier at H er et underrom av V dersom

- $\bar{0} \in H$
  nullvektor i V
- H er lukket under addisjon (d.v.s. $\bar{u}, v \in H \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in H$)
- H er lukket under multi. med skalar (d.v.s. $c \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in H \Rightarrow c \cdot \bar{u} \in H$)

H blir automatisk et vektorrom m.h.p. de operasjonene den arver fra V.

Eksempel

En linje gjennom origo i $\mathbb{R}^2$ (eller $\mathbb{R}^3$) er et underrom av $\mathbb{R}^2$ (eller $\mathbb{R}^3$)



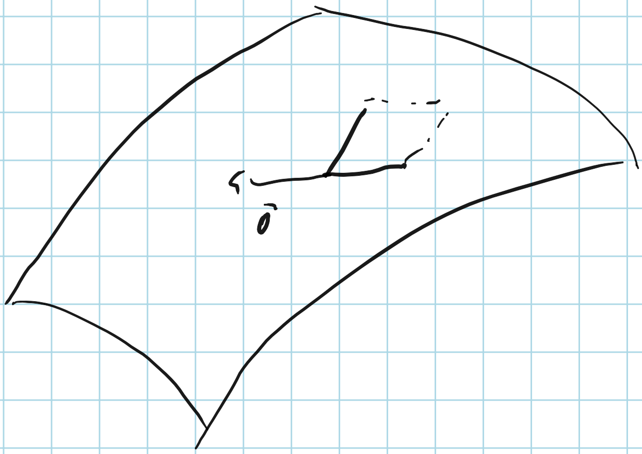
$L = \{ c\,\bar{u}_0 \mid c \in \mathbb{R} \}$ $\quad (c\,\bar{u}_0) + (c'\,\bar{u}_0) = (c + c')\,\bar{u}_0 \in L$

$c'(c\,\bar{u}_0) = c'c\;\bar{u} \in L$

er et underrom

$\downarrow$

- Et plan i $\mathbb{R}^3$ som går gjennom origo er dermed et underrom av $\mathbb{R}^3$



- Betrakt $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

La $\mathbb{P} = \{ P \in V \mid p$ er et polynom (i en reell variabel $\}$

så $\mathbb{P} \subseteq V$

Da er $\mathbb{P}$ et underrom av V

Videre la $\mathbb{P}_n = \{ p \in \mathbb{P} \mid p$ har grad høyst $n \}$

Da er $\mathbb{P}_n$ et underrom av V (og et underrom av $\mathbb{P}$)

Siden hvis $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

$$q(t) = b_0 + b_1 t + \dots + a_n t^n$$

så er $p(t) + q(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) t^2 + \dots + (a_n + b_n) t^n$

d.v.s. $p + q \in \mathbb{P}_n$

Tilsvarende $cp \in \mathbb{P}_n$ når $c \in \mathbb{R}$

Eks: $H = \{ p \in \mathbb{P}_2 \mid p(t) = a + t^2 \text{ for en } a \in \mathbb{R} \}$

$K = \{ p \in \mathbb{P}_2 \mid p(0) = 0 \}$

Da er K et underom av $\mathbb{P}_2$ siden

- null-pol er med i K
- Hvis $p, q \in K$, så $(p+q)(0) = \underbrace{p(0)}_{0} + \underbrace{q(0)}_{0} = 0$

  så $p+q \in K$
- Vi har, hvis $c \in \mathbb{R}$, så er $(cp)(0) = c\,p(0) = 0$

  dvs $cp \in K$

Derimot er ikke H et underom av $\mathbb{P}_2$

fordi ~~null-pol er ikke med i H~~

Anta at vi hadde $\underbrace{0(t)}_{0} = a + t^2$ for alle $t \in \mathbb{R}$

for en $a \in \mathbb{R}$

da måtte $t^2 = -a$

$\begin{cases} \text{umulig hvis } a > 0 \\ t = \sqrt{-a} \text{ hvis } a \leq 0 \text{. umulig fordi det skulle holde for alle } t \end{cases}$