Differensialligninger

iii) To kompleksе røtter r og $\bar{r}$

Da er generell løsning $y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}$

Hvis vi ikke passer og blir $y(x)$ komplekst.

Hvis vi velger $C_2 = \bar{C_1}$ går det fint.

$$y(x) = C_1 e^{rx} + \bar{C_1} e^{\bar{r}x}$$, dette er reelt

sjekke at dette er reelt

Anta at $r = a + ib$, $\bar{r} = a - ib$

$C_1 = A + iB$, $\bar{C_1} = A - iB$

$$y(x) = (A + iB) e^{(a+ib)x} + (A - iB) e^{(a-ib)x}$$

, $e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx}$

$$= e^{ax}\left((A+iB) e^{ibx} + (A - iB) e^{-ibx}\right)$$

$$= e^{ax}\left((A + iB)(\cos bx + i \sin bx) + (A - iB) \cdot (\cos bx - i \sin bx)\right)$$

$$= e^{ax}\left(2A \cos bx + 2 i^2 B \sin bx\right)$$

$$= e^{ax}\left(\underbrace{2A}_{C} \cos bx \underbrace{- 2B}_{D} \sin bx\right)$$, alt er reelt

$$= e^{ax}\left(C \cos bx + D \sin bx\right)$$

iii) igjen To komplekse konjugerte røtter r og $\bar{r}$

der $r = a + ib$

Generell løsning $y(x) = e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$

Dette er alle løsningene

Eks $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Karakteristisk ligning $r^2 + 2r + 4 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$, $a = -1$

$b = \sqrt{3}$

Generell løsning $y(x) = e^{-x}(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x)$

$1 = y(0) = \underbrace{e^{-0}}_{1}(\underbrace{C\cos 0}_{C} + \underbrace{D\sin 0}_{0}) = C$

$y'(x) = -e^{-x}(C\cos + D\sin) + e^{-x}(C\sqrt{3}(-\sin\sqrt{3}x) + D\sqrt{3}\cos\sqrt{3})$

$y'(0) = 0 = \underbrace{-1(C}_{-C} + \underbrace{D \cdot 0}_{0}) + \underbrace{1}_{e^0}(\underbrace{C\sqrt{3}\cdot 0}_{0} + \underbrace{\sqrt{3}D \cdot 1}_{D\sqrt{3}})$

$= -C + D\sqrt{3}$, $C = 1$ så $D = 1/\sqrt{3}$

$y(x) = e^{-x}(\cos\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x)$, Kan være feil hvis oppgaven er rett

Inhomogene ligninger

$$y'' + p y' + q y = f(x)$$

Lemma: anta at y_p er en løsning av (*). Da er enhver annen løsning gitt ved $y = y_p + y_h$ der y_h er en løsning av den homogene ligningen

Generell strategi for å finne y_p.
Prøv med en løsning på samme form som høyre side

Ek:
$$y'' + y' - 2y = 2x$$
Polynom av 1. grad

Gjetter på løsning på samme form som $2x$, men generell

$$y_p(x) = Ax + B, \quad y_p'(x) = A, \quad y_p''(x) = 0$$

$$2x = y'' + y' - 2y = 0 + A - 2(Ax + B)$$
$$2x = -2Ax + A - 2B, \text{ for } \forall x$$

Skal være like, da må coeffesienten være like

$$2 = -2A, \quad 0 = A - 2B$$
$$A = -1 \qquad B = \frac{A}{2} = -\frac{1}{2}$$
$$y_p(x) = Ax + B = -x - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{i)} & f(x) = P(x) - \text{Polynom} \\ \text{ii)} & f(x) = P(x)\, a - P - \text{polynom},\ a \in \mathbb{R} \\ \text{iii)} & f(x) = a^x (A \cos bx + B \sin bx \end{array}}$$