1, 2, 4) Vis at $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n(n+1)}{2}$

1 $P_1 : \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

2 $P_{k+1} : \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}$

$= \frac{k+1}{k+2}$

$\frac{k}{(k+1)} + \frac{1}{(k+1)((k+1)+1)}$

$(k+1)+1$

$k+2$

2017.10.29

29 October 2017 16:15

$\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$

$\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$

$\frac{\cancel{(k+1)}(k+1)}{\cancel{(k+1)}(k+2)}$

$\frac{k+1}{k+2}$

$= \frac{k+1}{k+2}$

1,2 5 Vis at $n^5 - n$ er delelig med 5 for alle naturlige tall

P_{n_0}: $n = 1$, $\frac{1^5 - 1}{5} = 0$

siden $\frac{0}{5} = 0$ vet vi at P_{n_0} er sann

P_{n+1}: $(n+1)^5 - n + 1$

$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 4n$

For å finne det orginale utrykket skriver jeg det om til

$\Rightarrow n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n - n$

$= n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$

så kan jeg sette 5 utafor resten av utrykket $(5n^4 + \dots + 5n)$

$\Rightarrow n^5 - n + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$

Jeg har bevist at $n^5 - n$ er delelig på 5 og hvis man multipliserer et tall med 5 er tallet du får ut delelig på 5 (heltall)

1,2,6 Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle naturlige n

P_{n_0} : $1(1^2+5) = 6$, $n_0 = 1$

$\frac{6}{6} = 1$, dermed stemmer P_{n_0}

P_{n+1} : $(n+1)((n+1)^2+5$ # $n(n^2+5) = n^3+5n$

$= n^3 + 3n^2 + 8n + 6$

Finner det originale uttrykket i dette uttrykket

$\Rightarrow n^3 + 3n^2 + 3n + 5n + 6$

$= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6$

$= n(n^2 + 5n) + 3n^2 + 3n + 6$

Sjekker delelig ledd med 6

delelig delelig

$n(n^2+5n) + 3n(n+1) + 6$ <- (uttrykk A

$(3 \cdot 2)(2+1)$

$6(3)$ — delelig

$= (3 \cdot 1)(1+1)$

$= 3 \cdot 2$

$= 6$, delelig

Vi kan observere at hvis n er et partall er første faktor delelig med 6 og hvis n er et oddetall er andre faktor et partall og dermed vil 3 og 2 være av faktorene til produktet.

Dermed er alle leddene fra uttrykk A delelig med 6 og derfor er også $(n+1)((n+1)^2+5)$ også delelig med 6.

Dette kikkeren beviser at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle naturlige tall

11.12 T_n av $f(x) = \sin x$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1\\
f''''(x) &= \sin x, & f''''(0) &= 0
\end{aligned}$$

$$= 0 + 1(x-0)^1 + \frac{0(x-0)^2}{2!} + \frac{-1(x-0)^3}{3!} + 0\frac{(x-0)^4}{4!}$$

$$= x + \frac{-x^3}{3!}$$

$$|R_n f(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

$$R_4 f(b) \le \frac{\sin b}{(4+1)!}|b-0|^5$$

$$R_4 f(b) \le \frac{\sin b}{(120)} b^5$$

11.1.6. Finn $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{1x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \qquad = \frac{T_2 e^x + R_2 e^x - 1 - x}{x^2}$$

Vi vet at $e^x \approx 1 + x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2}) - \cancel{1} - \cancel{x} + R_2 e^x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2} + \frac{R_2 e^x}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{R_2 e^x}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}}{6\cancel{x^2}} = \frac{1}{2} \lim \frac{x}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$R_n f(x) = \frac{1}{3!}(x-0)^3$$

$$= \frac{x^3}{6}$$