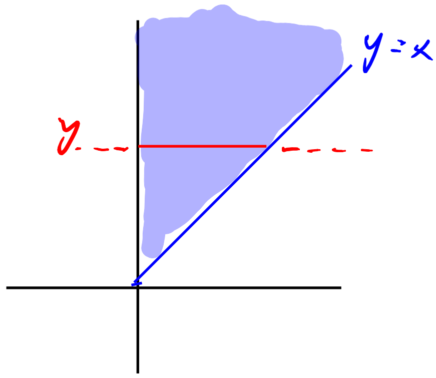
oppg 2 2016

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k e^{-(x+y)} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$



a vis $k=2$ Hvor at

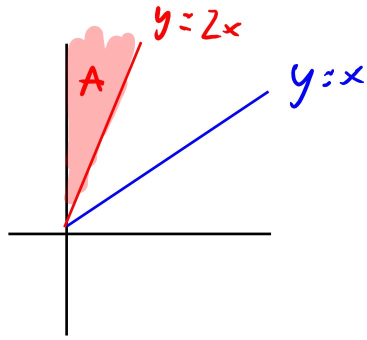
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= k\int_0^\infty\int_0^y e^{-(x+y)}\,dx\,dy = k\int_0^\infty e^{-y}\left[\int_0^y e^{-x}\,dx\right]dy$$

$$= k\int_0^\infty e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^y dy = k\int_0^\infty (e^{-y})\,dy = k\int_0^\infty e^{-y} - e^{-2y})\,dy$$

$$= k\left[-e^{-y} + \frac{1}{2}e^{-2y}\right]_0^\infty = k\left(1-\frac{1}{2}\right) = k/2 \quad \text{, dvs } k = 2$$

b) $P(2X \le Y)$



$= P(X,Y \in A)$

$= \int_A$ simultantetthet

$$= \iint_A f_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty\int_0^{y/2} 2e^{-(x+y)}\,dx\,dy$$

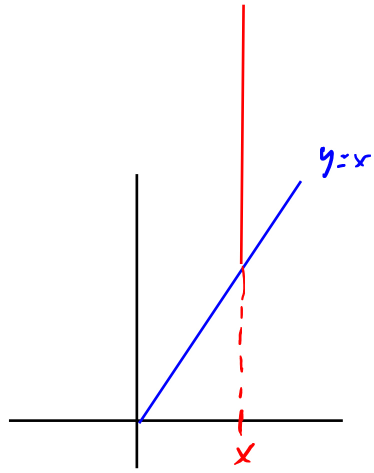
$$= 2\int_0^\infty e^{-y}\left[\int_0^{y/2} e^{-x}\,dx\right]dy = 2\int_0^\infty e^{-y}\left[-e^{-x}\right]_0^{y/2} dy$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-y}\left(1 - e^{-y/2}\right)dy$$

$$= 2\int_0^\infty (e^{-y} - e^{-3y/2})\, dy = 2\left[-e^{-y} + \frac{2}{3} e^{-3y/2}\right]_0^\infty$$

$$= 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2\,\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Marginal tetthetu til x (for $x > 0$)



$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & 0 < x < y < \infty \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$f_x(x) = \int_x^\infty 2e^{-(x+y)} dy$$

$$= \int_x^\infty 2e^{-(x+y)} = 2e^{-x}\int_x^\infty e^{-y} dy$$

$$= 2e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_x^\infty = 2e^{-x}e^{-x} = 2e^{-2x}$$

Oppgave 1 2012

Ved en bestemt butikk i en større dagligvarekjede viser langvarige data at 30% av kundene handler for mindre enn kr. 500, 40% av kundene handler for kr. 500 eller mer men mindre enn kr. 1000, mens de resterende 30% av kundene handler for kr. 1000 eller mer. Videre viser dataene at henholdsvis 40%, 70% og 90% av kundene i de tre gruppene kommer i bil.

a) Innfør en passende notasjon for de fire begivenhetene over og uttrykk prosenttallene som passende tilhørende sannsynligheter.

b) Hva er sannsynligheten for at neste kunde handler for mindre enn kr. 500 og kommer i bil?

c) Hva er sannsynligheten for at neste kunde kommer i bil?

d) Anta vi ser at neste kunde kommer i bil. Hva er sannsynlighetene for at vedkommende handler for henholdsvis mindre enn kr. 500, kr. 500 eller mer men mindre enn kr. 1000, kr. 1000 eller mer?

A_1 = Handler < 500 kr $P(A_1) = .3$ $P(B|A_1) = .4$

A_2 = Handler [500, 1000) $P(A_2) = .4$ $P(B|A_2) = .7$

A_3 = Handler > 1000 $P(A_3) = .3$ $P(B|A_3) = .9$

B = kommer i bil

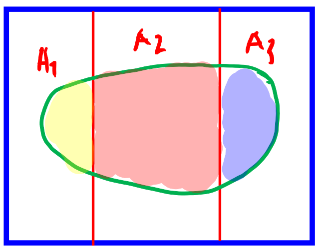
b) $P(A_1 \cap B) \overset{\text{Produktsetningen}}{=} P(A_1)\, P(B|A_1) = .3 \cdot .4 = .12$

c) $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$

$= P(A_1)\, P(B|A_1) + P(A_2)\, P(B|A_2) + P(A_3)\, P(B|A_3)$

$= 0.3 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.9$

$= 0.12 + 0.28 + 0.27 = 0.67$



$P(A_k | B)$ $k = 1, 2, 3$

$$\frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_k)\,P(B \mid A_k)}{P(B)}$$

Dermed

$$P(A_1 \mid B) = \frac{0.3 \cdot 0.4}{0.67} = \underline{0.179}$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.67} = \underline{0.418}$$

$$P(A_3 \mid B) = \frac{0.3 \cdot 0.9}{0.67} = \underline{0.403}$$

Oppgave 2

Lederen for butikken er interessert i hvor lenge den enkelte kunde er der. Innfør følgende tilfeldige variabel:

$X =$ Antall minutter en tilfeldig valgt kunde oppholder seg i butikken.

(Fortsettes på side 2.)

Ut fra noen data har en kommet frem til at X er uniformt $[0, \theta]$ fordelt, der θ er en ukjent parameter. Sannsynlighetstettheten til X er da gitt ved:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{1}$$

a) Vis at $EX = \theta/2$ og $V(X) = \theta^2/12$.

b) Anta at $X_1, \dots, X_n$ er n uavhengige tilfeldige variable, svarende til n kunder som oppholder seg i butikken, hver med samme sannsynlighetstetthet som X. La $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Beregn $E\bar{X}$ og $V(\bar{X})$.

c) Foreslå en forventningsrett estimator for θ. Begrunn svaret. Hva er estimatorens varians?

d) Anta $n = 192$. Bruk sentralgrenseteoremet til å bestemme en tilnærmet verdi for sannsynligheten $P(\bar{X} \leq 20)$ uttrykt ved θ. Kommenter resultatet for $\theta = 40$.

e) Anta fortsatt at $n = 192$ og at $\bar{x} = \frac{1}{192}\sum_{i=1}^{192} x_i = 20$ der $x_1, \dots, x_{192}$ er de observerte verdiene av $X_1, \dots, X_{192}$. Finn et tilnærmet 95% konfidensintervall for θ. Bruk at for $Z \sim N(0,1)$ er $P[Z \leq -1.96] = 0.025$.

f) Vis at den momentgenererende funksjonen til X er gitt ved:

$$M_X(t) = Ee^{tX} = \begin{cases} \frac{e^{\theta t}-1}{\theta t} & t \neq 0 \\ 1 & \text{t=0} \end{cases} \tag{2}$$

g) Anta at X_1 og X_2 er 2 uavhengige tilfeldige variable, svarende til 2 kunder som oppholder seg i butikken, hver med samme sannsynlighetstetthet som X. La $V = X_1 + X_2$. Butikksjefen lurer på hva sannsynlighetstettheten til V er og spør en student i STK1100 om å beregne denne. Neste dag kommer studenten med følgende forslag:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{v}{\theta^2} & 0 \leq v \leq \theta \\ \frac{2\theta - v}{\theta^2} & \theta \leq v \leq 2\theta \end{cases} \tag{3}$$

Beregn EV ved å benytte uttrykket for $f_V(v)$. Tyder svaret på at studenten har regnet riktig? Begrunn svaret.

h) Beregn den momentgenererende funksjonen $M_V(t)$ ved å benytte uttrykket for $f_V(v)$. Kommenter resultatet.

X = antall minutt i kutikken

Anta at $X \sim$ uniform $[0, \theta]$, dvs

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/\theta & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Vi finner

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^\theta x \frac{1}{\theta}\,dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\theta = \frac{\theta^2}{\theta 2} = \frac{\theta}{2}$$

$$E(x^2) = \int_0^\theta x^2 \frac{1}{\theta}\,dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\theta = \frac{1}{\theta}\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^3}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\theta^3}{3} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{12}$$

b) $X_1, \ldots, X_n$ uavh og alle $X_i \sim$ unif $[0, \theta]$

har at

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i)}_{\theta/2} = \frac{1}{n} n \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

$$V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum \underbrace{V(X_i)}_{\frac{\theta^2}{12}} = \frac{1}{n^2} n \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{12n}$$

c) Foreslå en forventningsrett estimator for θ?

$\boxed{\text{Lag på estimator}}$

Ser på $\hat{\theta} = 2\bar{X}$

Har

$$E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2\frac{\theta}{2} = \theta$$ (dvs. forventningsrett

$$V(\hat{\theta}) = V(2\bar{X}) = 2^2 V(\bar{X}) = 4\frac{\theta^2}{12n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

d) Har ved sentralgrensesetningen at

$$\frac{\bar{X} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/12n}} \overset{\text{Tilnærmet}}{\sim} N(0,1)$$

Mer presist

$$P\left(\frac{\bar{x} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/12n}} \le z\right) \approx P(Z \le z) \quad \text{der } Z \sim N(0,1)$$

Med $\Phi(z) = P(Z \le z)$ har vi da at $n = 192$

$$P(\bar{x} \le 20) = P\left(\frac{\bar{x} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/(12 \cdot 192)}} \le \frac{20 - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/(12 \cdot 192)}}\right)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{20 - \theta/2}{\theta/48}\right) = \Phi\left(\frac{960}{\theta} - 24\right)$$

For $\theta = 40$ får vi

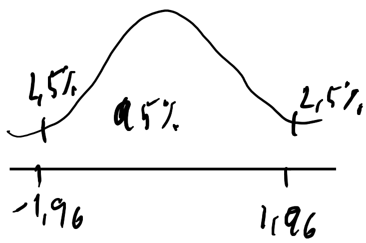
$$P(\bar{x} \le 20) \approx \Phi\left(\frac{960}{40} - 24\right) = \Phi(0) = 0.5$$

e) $n = 192 \quad \bar{x} = 20$

95% konfidensintervall for θ (tilnærmet)

La $X_1, \dots, X_{192}$ uniform $[0, \theta]$

Har at



$$P\left(-1{,}96 \le \frac{\bar{x} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/12 \cdot 192}}\right) \approx 0{,}95$$

dvs.

$$P\left(-1.96 \le \frac{\bar{x} - \theta/2}{\theta/48} \le 1.96\right) \approx 0{,}95$$

Ser på middelen

$$-1.96 \leq \frac{\bar{x} - \theta/2}{\theta/48} \leq 1.96$$

$\iff$

$$-1.96 \frac{\theta}{48} \leq \bar{x} - \theta/2$$