Hvis A er n × n inverterbar matrise

Betegner vi den inverse matrisen med A^{-1}

$(A A^{-1} = I_n$ og $A^{-1} A = I_n)$

Eks finne den inverse matrisen til den matrisen hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & v \end{pmatrix}$$

1) a $BA = I_n$, da

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & 2x - y \\ z + 2u & 2z - u \end{pmatrix} = I_2$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ligningen:

$$x + 2y = 1 \qquad z + 2u = 0$$
$$2x - y = 0 \qquad 2z - u = 1$$

$y = 2x$

$x + 2(2x) = 1$

$5x = 1$

$x = \frac{1}{5}$

$\underline{y = \frac{2}{5}}$

$z = -2u$

$2(-2u) - u = 1$

$-5u = 1 \Rightarrow u = -\frac{1}{5}$

$z = \frac{2}{5}$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$ har den egenskapen at $BA = I_2$

Må egentlig også ha $AB = I_2$

Det stemmer.

Prøv å finne den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}$$

og $BA = I_n$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & 2x+4y \\ u+2z & 2u+4z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$x + 2y = 1 \qquad u + 2z = 0$

$2x + 4y = 0 \qquad 2u + 4z = 1$

$\times 2$

$2x + 4y = 2$

Selvmotsigende

Matrise ligning: Hvordan løser man

$$\vec{y} = A\vec{x} \quad \text{for } (\vec{x})$$

anta at A er inverterbar

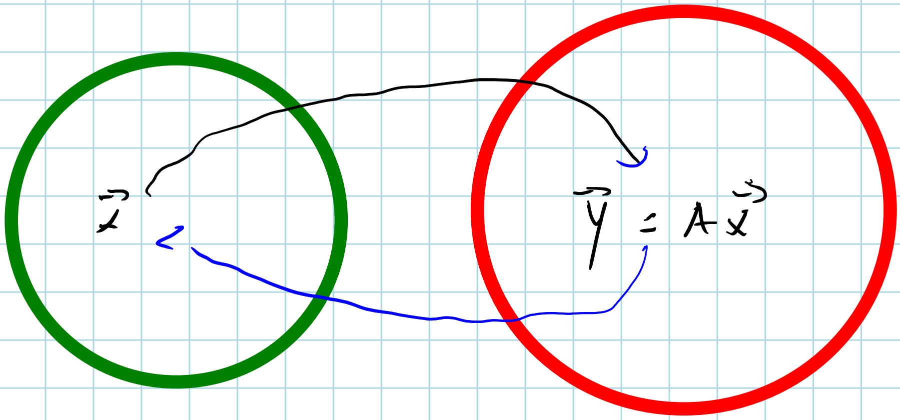
Bruker A^{-1} fra begge sider

$$A^{-1}y = A^{-1}(A\vec{x})$$

$$A^{-1}y = (A^{-1}A)\vec{x}$$

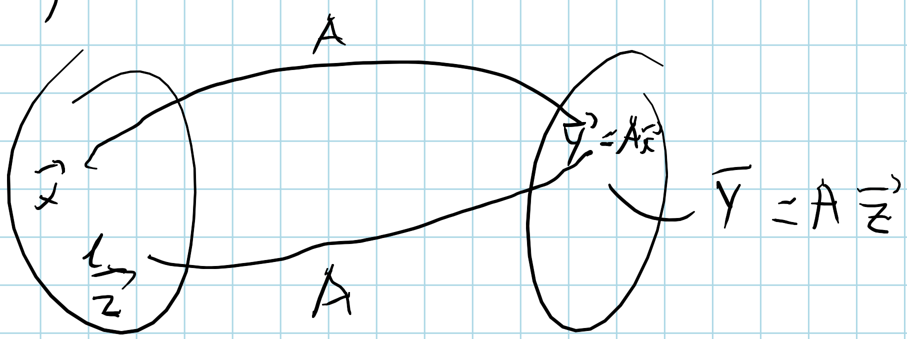
$$A^{-1}y = I_n\vec{x} = \vec{x}$$

Løsning: $x = A^{-1}\vec{y}$



A^{-1} er den motsatte transformasjonen av A

Ingen invers



Setning: Hvis A og B er invertebar, Da er AB invertbare og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bevis: Vi må vite at $(A+B)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$

$$\underbrace{(AB)}\underbrace{(B^{-1}A^{-1})}_{C} = A(B(B^{-1}A^{-1})) = A(\underbrace{(BB^{-1})}_{I_n})A^{-1}$$

$$(AB)\,C = A\,(BC) \qquad = AA^{-1}$$

Determinanter

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} & & \\ a_n & a_{nn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} & & \\ a_n & a_{nn} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$ er determinanten til A

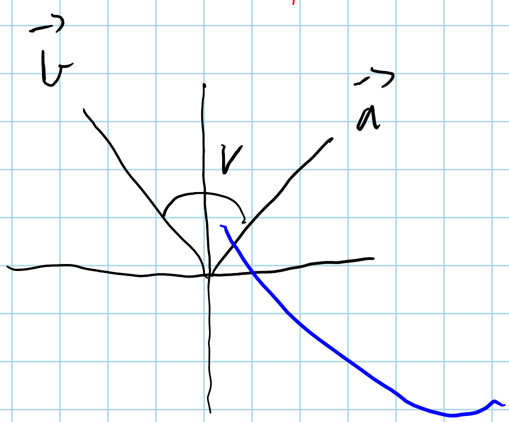
2 x 2 tilfelle

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, determinanten til A er

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = \underline{\underline{10}}$

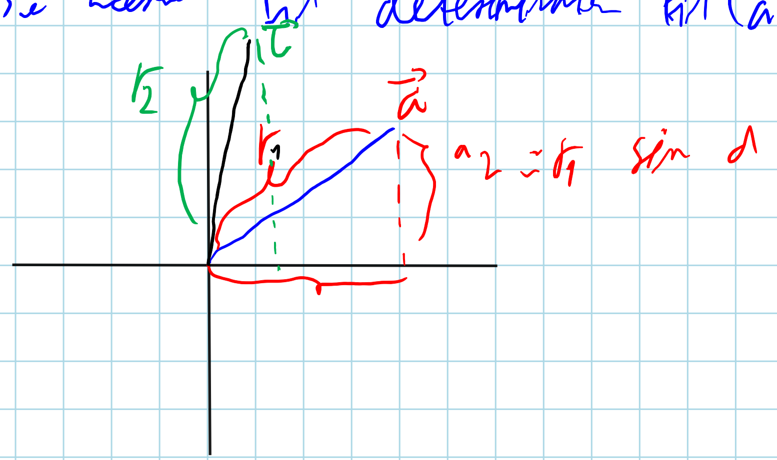
Orientering av vektor par $(\overset{\text{nr. 1}}{\vec{a}}, \overset{\text{nr. 2}}{\vec{b}})$



$(\vec{a}, \vec{b})$ er positivt orientert når vinkelen v fra a til b er $< 180°$

Positiv orientering

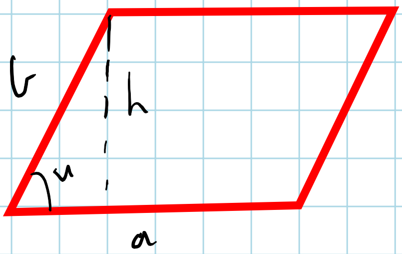
Se nærmere til determinanten til $(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \cos\alpha & r_1 \sin\alpha \\ r_2 \cos\beta & r_2 \sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= r_1 r_2 \left[\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha\right]$$

$$\Rightarrow \quad r_1 r_2 \sin(\beta - \alpha)$$



$A = a\,b\,\sin u$

Setning: - fortegnet til determinanten A, B er positivt hvis A, B har positiv orientering og negativt hvis orienteringen er negativt

- Tallverdien til determinanten til A og B er lik arealet til parallellogrammet utspent av a og b

Eks: Finn arealet til trekanten med hjørner

$$\vec{A} = (2, 1), \quad \vec{B} = (3, 4), \quad \vec{C} = (-1, 3)$$

arealet er halvparten av arealet til parallellogrammet utspent av vektorene

$$\frac{1}{2}\left|\det(\bar{b}-\bar{a},\ \bar{c}-\bar{a})\right|$$

$$\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|1\cdot 2 - 3(-1)\right|$$

$$= \frac{11}{2}$$

3 x 3 determ

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

OBS!

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Setning:

Volumet til parallellepipedet utspent av $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ blir $|\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$

Volumet til tetraederet er volumet $\frac{1}{6} |\det(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$.