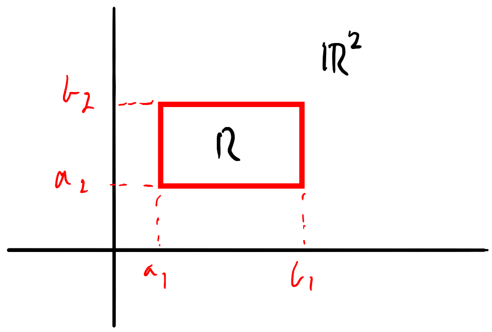
Teori for integraler for multiple integrale

Rektangler i $\mathbb{R}^n$: Mengder R på formen

$$R = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 \le x_1 \le b_1, \dots, a_n \le x_n \le b_n \}$$



$|R|$ = Volum av R

$$\overset{\text{def}}{=} (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

Partisjoner Π av R i delrektangler $R_1, \dots, R_k$ ved å dele intervallene på hver akse som vanlige partisjoner

$f : R \to \mathbb{R}$ begrenset funksjon

$$m_j = \inf \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in R_j \}$$
$$M_j = \sup \{ f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in R_j \}$$
for $j = 1, \dots, k$

$N(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} m_i |R_i|$ nedre trappesum

$\emptyset(\Pi) = \sum_{i=1}^{k} M_i |R_i|$ øvre — " —

utplukk u for Π: Et punkt $\vec{c}_i \in R_i$ for hver i

$R(\Pi, u) = \sum_{i=1}^{k} f(\vec{c}_i) |R_i|$ Riemannsum for Π og u

Definisjon (6.1.1 og 6.1.9. med litt løl)

$$\overline{\int \cdots \int_R} f(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n = \inf \left\{ \emptyset(\Pi) \right\} \Big| \, \Pi \text{ partisjon av } R \Big\}$$

$$\underline{\int \cdots \int_R} f(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n = \sup \left\{ N(\Pi) \,\Big|\, \Pi \text{ — '' — } \right\}$$

Er disse like så kaller vi f integrerbar på R. skriver begge som

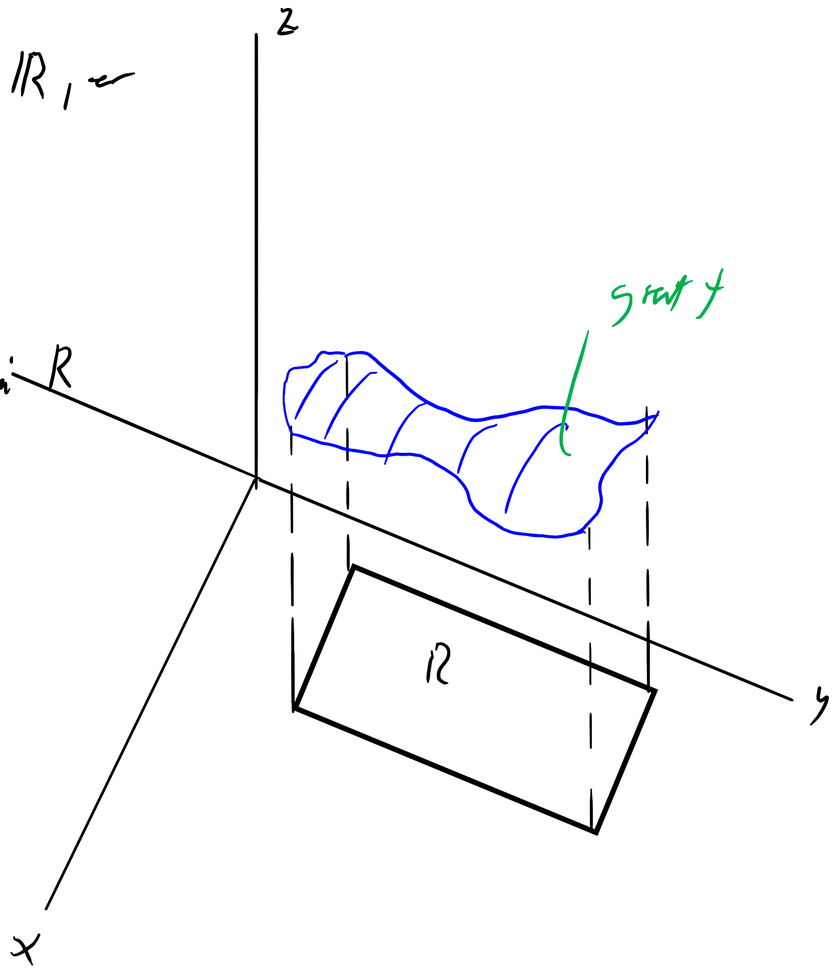
$$\int \cdots \int_R f(\vec{x})\, dx_1 \ldots d_n$$

Tolkning i tilfelle $n=2$ $(\mathbb{R}^2)$:

Hvis $f(x,y) \geq 0$ på $\mathbb{R}$, er

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy$$

Volumet under grafen på R



Theorem 6, 1.5 (generalisert)

$R \subseteq \mathbb{R}^n$ rektangel, $f: R \to \mathbb{R}$ kontinuerlig

$\Rightarrow f$ integrerbar på R

Teorem 6, 1.6

$\{\Pi_n\}_{n=1}^{\infty}$ følge av partisjoner av rektangelet $R \subseteq \mathbb{R}^n$

slik at intervallbredden $|\Pi_n| \to 0$ når $n \to \infty$

U_n utplukk for Π_n for hver n

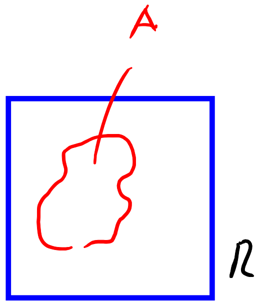
For alle kontinuerlige $f: R \to \mathbb{R}$ er da

$$\int \cdots \int_R f(\vec{x})\, dx_1 \ldots dx_n = \lim_{n \to \infty} R(\Pi_n, U_n)$$

Multiple integraler over begrensede områder

La $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være begrenset

Velg rektangel R slik at $A \subseteq R$



$$\int \cdots \int_A f(\vec{x})\, d\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \int \cdots \int_R f_A(\vec{x})\, d\vec{x}$$

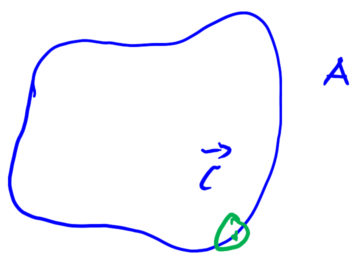
der $f_A(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{hvis } \vec{x} \in A \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

(Hvis integralet fins)

Vi sier at f er integrerbar på A hvis f_A er integrerbar på R

Hva skal til for at f_A er integrerbar på R?

- Randen ∂A til A består av alle punkter $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ slik at enhver kule $B(\vec{c}, r)$ om $\vec{c}$ inneholder både punkter som er med i a og punkter som er med i a og punkter som ikke er det.



.
.
.
.

- En begrenset mengde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kalles jordan-målbar hvis funksjonen 1_A (1 på mengden A og 0 utenfor) er integrerbar på A.

Teorem: 6.6.3 (analogier i høyere dimensjoner)

En begrenset mengde $A \subseteq \mathbb{R}^2$ er jordan-målbar hvis ∂A innhold 0.

Teorem 6.6.6 (analogier i høyere dimensjoner)

Hvis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ er lukket (dvs inneholder randen sin) og jordan-målbar, så er enhver kontinuerlig funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ integrerbar på A. (Dette er typisk oppfylt i oppgaver våre)

Hvordan beregne dobbeltintegraler.

Gitt et integral

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$ over et område i xy-planet

1. få oversikt over integrasjonsområdet
   Tegn gjerne en figur

2. Velg et koordinatsystem, u, v slik at du kan beskrive R ved

$$u \in [a,b], \quad v \in [c(u), d(u)]$$

(evt. åpne intervaller), med $c(u)$ og $d(u)$ kontinuerlige funksjoner. Går ikke dette, så prøv å dele R opp.

3. regne ut jakobi-determinanten

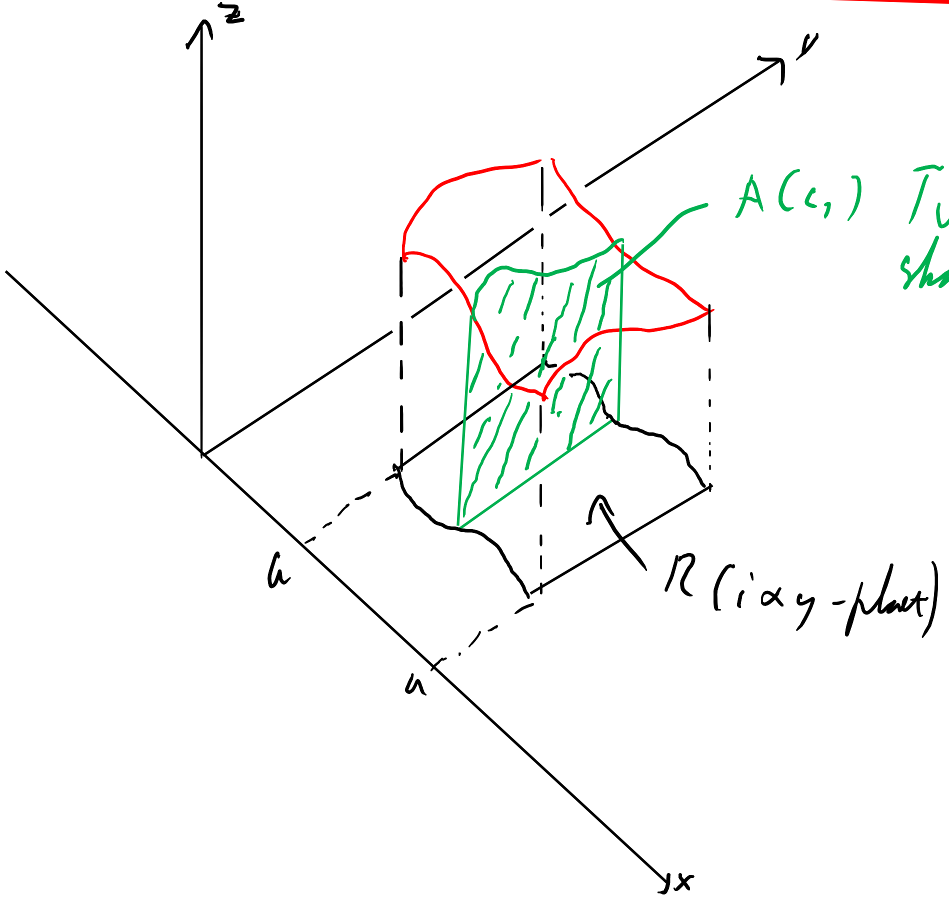
$$j = \begin{vmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{du}{dv} \\ \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{vmatrix}$$ (uttrykt ved u og v)

4 dobbelt integralet er nå lik

$$\int_a^b \left[\int_{c(u)}^{d(u)} f(\vec{T}(u,v)) \cdot |J| \, dv \right] du$$

der $(f(\vec{T}(u,v))$ betyr at (u,v)-uttrykket skal settes inn for (x,y)

Hvorfor fungerer dette? (Ser nå kun på standard koordinater)



Deler $[a,b]$ inn i n delintervaller med lengde Δx_i

$c_i \in$ delintervaller i