Contents1

Oppg1

a) Forklar at forsøket er binomisk fordelt og finn E(x) og SD(x)

Vi gjør n forsøk.

I dette tilfelle spiller spilleren 20 runder.

I hvert forsøk er det 2 muligheter, S og F

I dette tilfelle er S et vinn og F et tap.

Forsøkene er uavhengige.

I dette tilfelle endrer ikke sannsynligheten seg ut ifra tidligere resultat.

I hvert forsøk er sannsynligheten lik P for at S skal inntreffe og 1-P for at F skal inntreffe.

I dette tilfelle er sannsynligheten 18/37 for at S skal inntreffe og 1-(18/37) for at F skal inntreffe

Finn E(x):

E(x) i et binomisk forsøk er gidd ved funksjonen n * p. det gir oss:

$$E(x) = 20 * \left(\frac{18}{37}\right) = 9.73$$

E(x) = 9.73

Finn SD(x):

SD(x) er gidd ved $\sqrt{\sigma} = \sqrt{n * p(1-p)}$ det gir oss

$$SD(x) = \sqrt{\sigma} = \sqrt{20 * \left(\frac{18}{37}\right) * (1 - (\frac{18}{37})} = \frac{6\sqrt{190}}{37} = 2.24$$

SD(x) = 2.24

b) Finn Y(x), E(Y) og SD(Y)

Finn Y(x):

Y(x) er nettogevinsten, og er da en funksjon av det man vinner trukket fra det man betaler.

Gevinst er gidd ved (x er antall vinn):

$$100\left(\frac{36}{k} - 1\right) * x$$

Det man trekker fra når man ikke vinner er gidd ved

$$-100 * (20 - x)$$

Dermed blir Y(x) (når k = 16

$$Y(x) = 100\left(\frac{36}{16} - 1\right) * x - 100\,(20 - x) = 200x - 2000$$

Finn E(Y):

Bruker forventet x verdi og setter den inn i funksjonen til Y(x).

$$E(Y) = Y(\mu_x) = 200 * 9.73 - 2000 = -54$$

Finn SD(Y):

200 * 2.24 = 448

c) Finn $P(Y \geq 1000)$ og $P(Y \leq 1000)$

For å finne $P(Y \geq 1000)$, trengs antall ganger spilleren må vinne for å vinne 1000 kr. Det finner man ved å sette Y(x) = 1000

$$Y(x) = 200x - 2000 = 1000$$

$$x = 15$$

Dermed vet vi at spilleren må vinne 15 ganger for å tjene minst 1000 kr. Da må vi finne sannsynligheten for å vinne 15 ganger.

Bruker MatLab funksjonen binocdf for å finne $\mathrm{P(X \geq\ 15)}$

```
>> (1-binocdf(14,20,18/37))*100

ans =

    1.5385

fx
```

Det er 1.54% sannsynlighet for at spilleren vinner over 1000 kr.

For å finne $P(Y \leq -1000)$ bruker vi tilsvarende metode:

Finner ut hvor mange ganger spilleren må vinne for å tape 1000 kr.

$$Y(x) = 200x - 2000 = -1000$$

$$x = 5$$

Finner sannsynligheten for å maks tape 5 ganger:

Bruker MatLab funksjonen binocdf

```
>> (binocdf(5,20,18/37))*100

ans =

    2.7464
```

Det er 2.75% sannsynlig at spilleren taper minst 1000 kr.

d) Ny spiller: n = 20, k = 6, innsats = 100

Finn sannsynligheten for at personen vinner 1000 kr. og finn sannsynligheten for at han taper minst 1000 kr.

Ny funksjon for Y(x) er funnet på samme måte som i oppg b):

$$Y(x) = 600x - 2000$$

For å finne sannsynligheten for at personen vinner 1000 kr. må jeg finne hvor mange runder personen må vinne for å i totalt vinne 1000 kr..

$$Y(x) = 700x - 2000 = 1000$$

$$x = \frac{30}{7}$$

Finner sannsynligheten for å vinne mer enn 5 ganger i MatLab

```
>> (1-binocdf(4,20,6/37))*100

ans =

   21.4007
```

Det er 21.40% sannsynlighet for at spilleren vinner minst 1000kr.

For å finne sannsynligheten for å minst tape 1000 kr. setter jeg Y(x) = -1000

$$Y(x) = 700x - 2000 = -1000$$

$$x = \frac{10}{7}$$

Det vil si at spilleren kan maks vinne 1 runde for å tape mer enn 1000 kr.

Finner sannsynligheten for å maks vinne 1 runde med MatLab.

```
>> binocdf(1,20,6/37)*100

ans =

   14.1519
```

Det er 14.15% sannsynlighet for at spilleren taper mer enn 1000 kr.

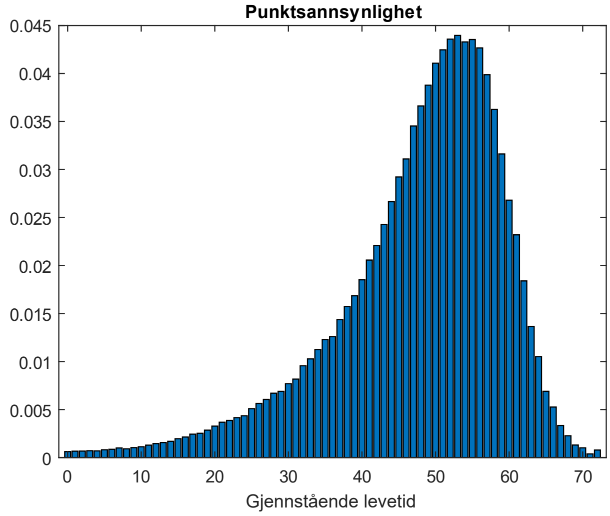
Oppg2

a) Forklar den kumulative fordelingsfunksjonen til X.

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{35} + y)$$

Vi vet at q_x er sannsynligheten for at en person skal dø i en alder av x, da er $1 - q_x$ sannsynlighet for at personen skal overleve. For å få sannsynligheten at en person overlever en mengde år er produktet av alle årene innenfor mengden. Derfor må vi ha produktoperatoren pi. Så for å finne hvor sannsynligheten for at personen overlever tar man 1- produktet. Og da får du den kumulative fordelingen F(x)

b) Plotter punktsannsynligheten $p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-1)$




```
%2c
% for aa plotte punktsannsynligheten trengs, den kumulative fordelingen:

    % for å regne ut den kumulative fordelingen trengs, den ettaarlige
doedssannsynlighetene:

        %finner den ettaarlige doedssannsynlighetene
qk = dod/1000;

    %finner saa den kumulative fordelingen
Fx = 1-cumprod(1-qk(35:107));

% Beregner punktsannsynlighetne
px = Fx -[0;Fx(1:72)];

%plotter punktsannsynlighetene
bar(0:72,px)
xlabel("Gjennstående levetid")
title("Punktsannsynlighet")
```

c) Forklar nåverdien til mannens samlede pensjonsutbetalinger.

For å finne nåvrdien av B kr om k år med rente r har vi formelen $\frac{B}{(1+r)^k}$, som er gitt i oppgaven. Et eksempel er den førske utbetalingen etter 35 år. Med en rente på 3% og B = 100’000.

Da får vi:

$$\frac{100'000\ kr}{(1+0.03)^{35}} = 35'538.34\ kr$$

Og det neste året er:

$$\frac{100'000\ kr}{(1+0.03)^{36}} = 34'503.24\ kr$$

Hvis personen døde etter 36 år så ville totale utbetalingen bli $35'538.34 + 34'503.24 = 70041.58$

Så for å vise den andre siden.

$$h(x) = \frac{100000}{1.03^k} = \frac{100000}{1.03^{35}} * \frac{1 - \left(\frac{1}{1.03}\right)^{X-34}}{1 - \frac{1}{1.03}}$$

$$= 100000 \sum_{k=35}^{X} \frac{1}{1.03^k}$$

$$= 100000 * \frac{1}{1.35^{35}} \left(\frac{1}{1.03^0} + \frac{1}{1.03^1} + \cdots + \frac{1}{1.03^{X-35}} \right)$$

$$= \frac{100000}{1.03^{35}} \sum_{k=0}^{X} \frac{1}{1.03^k}$$

Bruker sum av en geometrisk rekke

$$\frac{100000}{1.03^{35}} * \frac{1 - \left(\frac{1}{1.03}\right)^{x-35+1}}{1 - \frac{1}{1.03}}$$

$$\frac{100000}{1.03^{35}} * \frac{1 - \left(\frac{1}{1.03}\right)^{x-35}}{1 - \frac{1}{1.03}}$$

e)

$$E[h(x)] = \sum_{x=0}^{71} h(x)\,p(x)$$

$$= \frac{100'000}{1.03^{35}} \cdot \frac{P(X \geq 35) - \sum_{x=35}^{71} (1/1.03)^{x-34}\, p(x)}{1 - 1/1.03}$$

$$\sum_{x=0}^{71} h(x)\,p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{34} \underbrace{h(x)}_{=0} p(x) + \sum_{x=35}^{71} h(x)\,p(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{71} \frac{100'000}{1.03^{35}} \cdot \frac{1 - (1/1.03)^{x-34}}{1 - 1/1.03} \cdot p(x)$$

setter konstanten utenfor

$$= \frac{100'000}{1.03^{35}} \frac{\sum_{x=0}^{71} p(x) - (1/1.03)^{x-34} \cdot p(x)}{1 \quad 1/1.03}$$

$$\sum_{x=0}^{71} p(x) = P(X \geq 35)$$

$$\Rightarrow \frac{100'000}{1.03^{35}} \cdot \frac{P(X \geq 35) - \sum_{x=35}^{71} (1/1.03)^{x-34}\, p(x)}{1 - 1/1.03}$$

f) Finn E[h(x)]

```
SUM = 0;
for x = 35:71
    SUM = SUM + (1/1.03)^(x-34)*px(x+1);
end

Ehx = (100000/1.03^35) * (((1-Fx(35)) - SUM)  / (1-
1/1.03))

Ehx =

   3.8714e+05

E[h(x)] = 387140
```

g) forklar mannens samlede premieinnbetalinger, gidd ved K*g(x). der g(X) er:

$$K * g(X) = K * \sum_{k=0}^{\min(X,34)} \frac{1}{1.03^k}$$

På samme måte som med utbetalingene må innbetalingene også justeres for nåverdi. Her har vi K som innbetaling i mot B som utbetaling. K-en er trukket ut av summen i dette eksempelet. Første innbetaling er

$\frac{K}{1.03^1}$ og neste innbetaling er $\frac{K}{1.03^2}$. så den samlede innbetalingen blir summen av innbetalingene. På grunn av forklaringen på nåverdi gidd i oppgaveheftet.

En mulighet er at personen dør før det har gått 34 år. Da slutter innbetalingen. Derfor går summen fra 0 til (min(X,34)) der X er antall år etter tegning at personen dør.

h) for klar K*E[g(x)]

Forventningen til til h(x) finner man ved å bruke funksjonen n*p , så da får vi h(x)*g(x). dette ganges med K for å få forventet innbetaling.

$$E[g(x)] \sum_{x=0}^{71} g(x)\, p(x) \quad , \quad g(x) = \sum^{\min(x,14)} \frac{1}{1.03^k}$$

$$\sum_{x=0}^{71} \left(\sum_{k=0}^{\min(x,34)} \frac{1}{1.03^k} \right) p(x) \quad / \quad \text{Geom rekke } \frac{a_0(1-r^n)}{1-r}$$

$$\sum_{x=0}^{71} \left(\frac{1-(1/1.03)^{x-34}}{1-(1/1.03)} \right) p(x)$$

i) finn E[g(X)]

```
SUM2 =0;
for x = 0:34
    SUM2 = SUM2 + (1/1.03)^(x+1)*px(x+1);
end
Egx = (1- SUM2 - (1/1.03)^35*(1-Fx(35)))/(1/1.03)
```

Egx =

0.6469

E[g(x)] = 0.6469

J) finn K

K er gidd ved formelen K * E[g(x)] = E(h(x)]

Hvis vi setter inn for både E[g(x)] og E(h(x)] får vi

$$K * 0.6469 = 387140$$

Dermed er K

$$K = 598454.16$$

Dermed er den årlige premien 598454.16 kr.

Matlab koden

```
%2c
% for aa plotte punktsannsynligheten trengs, den
kumulative fordelingen:

    % for å regne ut den kumulative fordelingen trengs,
den ettaarlige doedssannsynlighetene:

        %finner den ettaarlige doedssannsynlighetene
qk = dod/1000;

    %finner saa den kumulative fordelingen
Fx = 1-cumprod(1-qk(35+1:107));

% Beregner punktsannsynlighetne
px = Fx -[0;Fx(1:71)];

%plotter punktsannsynlighetene
bar(0:71,px)
xlabel("Gjennstående levetid")
title("Punktsannsynlighet")

%2f
SUM = 0;
for x = 35:71
    SUM = SUM + (1/1.03)^(x-34)*px(x+1);
end

Ehx = (100000/1.03^35) * (((1-Fx(35)) - SUM)  / (1-
1/1.03))
%i)
SUM2 =0;
for x = 0:34
    SUM2 = SUM2 + (1/1.03)^(x+1)*px(x+1);
end
Egx = (1- SUM2 - (1/1.03)^35*(1-Fx(35)))/(1/1.03)
```