

Oppg 3

X inneholder til en tilfeldig lønnsmottaker i en spesifik befolkningssgruppe

Det er da vanlig å anta at X er Pareto-fordelt.

Med sannsynlighetstetthet.

$$f(x) = \begin{cases} \theta k^\theta \left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1} & \text{hvis } x > k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

K : minsteinkonten i gruppen. $\theta > 1$ parameter på lønnsforskjeller

a) Vis den kumulative sannsynlighetsfordelingen til X

$$F(x) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{k}{x}\right)^\theta\right) & \text{hvis } x > k \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Integrerer $f(u)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_K^x f(u) du = \int_K^x \theta k^\theta \left(\frac{1}{u}\right)^{\theta+1} du \\ &= \theta k^\theta \int_K^x u^{-\theta-1} du = \theta k \left[-\frac{1}{\theta} u^{-\theta}\right]_K^x \\ &= \theta k (-\theta)^{-1} \left[x^{-\theta} - k^{-\theta}\right] = -\frac{k}{x} + 1 \end{aligned}$$

Vidre for $x \leq k$

$$F(x) = \int_k^x 0 \, du = 0$$

Så vi har da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ellers} \\ 1 - \frac{k}{x} & \text{for } x > k \end{cases}$$

#

Bruk dette til å vise at medianen er $\tilde{\mu} = 2^{1/\theta} k$

Vet at medianen er $F(\tilde{\mu}) = \frac{1}{2}$, dermed har vi

$$1 - \left(\frac{k}{\tilde{\mu}}\right)^{\theta} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad | -1, \cdot -1$$

$$\left(\frac{k}{\tilde{\mu}}\right)^{\theta} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\mu}^{\theta} = \sqrt[\theta]{2 \cdot k^{\theta}}$$

$$\tilde{\mu} = \underline{\underline{2^{1/\theta} k}} = \text{Medianen}$$

b) Vis at forventet inntekt er $E(x) = \theta k / (\theta - 1)$

Definisjonen av forventning er $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$

$$x(\frac{1}{x})^{\theta+1} = (\frac{1}{x})^{\theta+1}$$

Då blir da

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_k^{\infty} x \theta k^{\theta} \left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1} dx = \theta k^{\theta} \int_k^{\infty} x \left(\frac{1}{x}\right)^{\theta+1} dx \\ &= \theta k^{\theta} \int_k^{\infty} x^{-\theta} dx = \theta k^{\theta} (-\theta + 1)^{-1} \left[x^{-\theta+1} \right]_k^{\infty} \\ &= \frac{\theta k^{\theta}}{1-\theta} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{\theta+1}} - k^{-\theta+1} \right) = \frac{\theta k^{\theta}}{1-\theta} k^{\theta+1} = \frac{\theta k}{1-\theta} \end{aligned}$$

c) Vis at $y = 2\theta [\ln(x) - \ln(k)]$ er kjøkvadrat-fordelt med 2 frihetsgrader

Må først finne kumulative fordelingen

$$F(Y) = P(2\theta [\ln(x) - \ln(k)] \leq y)$$

Løser likheten for x

$$2\theta [\ln(x) - \ln(k)] \leq y \quad | \cdot \frac{1}{2\theta}$$

$$\ln(x) - \ln(k) \leq \frac{y}{2\theta}, \quad \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\ln\left(\frac{x}{k}\right) \leq \frac{y}{2\theta} \quad ; \text{ ann høyre i e, } \cdot k$$

$$x \leq k e^{y/2\theta}$$

Da har vi

$$F(Y) = P(X \leq k e^{y/2\theta})$$

$$e^{-y/2\theta} \cdot \theta = e^{-y/2}$$

Sætter,

$$F(Y) = 1 - \left(\frac{k}{k e^{y/2\theta}} \right)^{\theta} = 1 - e^{-y/2}$$

$$F(Y) = 1 - e^{-y/2} =$$

Siden $F(0) = 0$ så har vi sannsynlighetsfordelingen

$$G(Y) = \begin{cases} 1 - e^{-y/2} & \text{for } y > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Sjekker om fordelingen har 2 frihetsgrader

Finner derfor sannsynlighetstettheten

$$g(y) = G'(y)$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y/2} & \text{for } y > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Ser derved at det er 2 frihetsgrader

□

d) Bestem momenterestimatorene for θ ,

$$\bar{X} = E(\bar{x}) = \frac{\theta k}{\theta - 1}, \text{ fra punkt b}$$

Løsning for $\hat{\theta} \approx \bar{\theta}$

$$\bar{X} = \frac{\bar{\theta} k}{\bar{\theta} - 1}$$

$$\bar{X}(\bar{\theta} - 1) = \bar{\theta} k$$

$$\bar{X}\bar{\theta} - \bar{X} = \bar{\theta} k$$

$$\bar{X}\bar{\theta} - \bar{\theta} k = \bar{X}$$

$$\bar{\theta}(\bar{x} - k) = \bar{x} \quad / : (\bar{x} - k)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - k} = \text{momentestimaten for } \theta$$

e) Sett opp likelihooden og vis at maksimum estimaten for θ blir $\hat{\theta}$

Bruker den kumulative sannsynlighetfordelingen til X
og setter opp log-likelihooden

$$L(x; \theta) = \prod_{i=1}^n \theta k^\theta \left(\frac{1}{x_i}\right)^{\theta+1}, \text{ Setter } \theta \text{ ig k}^\theta \text{ utenforr}$$

$$= \theta^n k^n \prod_{i=1}^n x_i^{-\theta-1}$$

Finner log-L

$$L(x; \theta) = n \ln(\theta) + n \ln(k) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

$$= n \ln(\theta) + n \ln(k) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad \text{ln}(x^2) = \ln(x) + \ln(x)$$

Optimerer m.h.p θ .

$$\dot{L}(x; \theta) = \frac{n}{\theta} + n \ln k - \sum \ln(x_i) = 0 \quad / -\frac{n}{\theta}, -1$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum \ln(x_i) - n \ln(k)}$$

f) Vis at $2n\theta/\hat{\theta}$ er k_{ij}^2 -fordelt med $2n$ frihetsgrader

Bruker tilsett i skriver

$$\begin{aligned}\frac{2n\theta}{\hat{\theta}} &= 2\theta \sum_{i=1}^n h(x_i) - n \ln(k) \\ &= \sum_{i=1}^n 2\theta (h(x_i) - n \ln(k)) \quad (*)\end{aligned}$$

Det er en sum av k_{ij}^2 -fordelinger med hver en frihetsgrad på 2 og siden de er antatt uavhengige så er (*) en k_{ij}^2 -fordeling med $2n$ frihetsgrader \checkmark

g) Hvis v er en stokastisk variabel som er k_{ij}^2 -fordelt med v frihetsgrader, så er

$$E(v^k) = \left(\frac{2^k \Gamma(\frac{v}{2} + k)}{\Gamma(\frac{v}{2})} \right) \text{ så langt } k > v/2$$

g) Fin forventningen og variansen til MLE'en

$$\begin{aligned}E\left[\left(\frac{2n\theta}{\hat{\theta}}\right)^{-1}\right] &= \frac{2^{-1} \Gamma\left(\frac{2n}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{2n}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma(n-1)}{2 \Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n-1)}{2(n-1) \Gamma(n-1)} = \frac{1}{2(n-1)} \quad \textcircled{1}\end{aligned}$$

Förventningar:

$$E(\hat{\theta}) = E\left[2n\theta\left(\frac{2n\theta}{\hat{\theta}}\right)^{-1}\right] = 2n\theta E\left[\left(\frac{2n\theta}{\hat{\theta}}\right)^{-1}\right]$$
$$\underset{\text{---}}{= 2n\theta \frac{1}{2(n-1)} \underset{\text{---}}{= \frac{n\theta}{n-1}}}$$

För att finna variansen främger vi

$$E(\hat{\theta}^2), \text{ därmed främger vi } E(v^{-2})$$

$$E\left(\frac{2n\theta}{\hat{\theta}}\right)^2 = \frac{\Gamma(n-2)}{4\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(n-2)}{4(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)}$$
$$= \frac{1}{4(n-2)(n-1)} - \textcircled{2}$$

Finns så $E(\hat{\theta}^2)$

\textcircled{2}

$$1 = E\left[4n^2\theta^2\left(\frac{2n\theta}{\hat{\theta}}\right)^{-2}\right] = 4n^2\theta^2 E\left[\left(\frac{2n\theta}{\hat{\theta}}\right)^{-2}\right]$$

$$= 4n^2\theta^2 \frac{1}{4(n-2)(n-1)} = \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-1)}$$

Därmed kan vi finna variansen

$$V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2 = \frac{n^2\theta^2}{(n-2)(n-1)} - \left(\frac{n\theta}{n-1}\right)^2$$

$$\underset{\text{---}}{= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}}$$

Därmed har vi

$$\text{Forventningen } \frac{n-\theta}{n-1}$$

v3

$$\text{Variansen } \frac{\frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}}{}$$

Oppgave 1, (Utregning tilsvarende vedlegg notstullen)

a) Estimert alder til Bergart:

$$\mu = 276,89 \text{ millioner år}$$

90% CI:

$$t(1) = [266, 288]$$

b) Estimert måleusikkerhet σ

$$\sigma = 27,08 \text{ millioner år}$$

konfidensintervall

$$\text{chi}(1) = [21,4 ; 37,5]$$

○ Det forutsetter at begge ζ 'ene er normalfordelte og uavhengige. Jeg sier her om verdiene er tilhørende normalfordelt i Plot 1

Der vises job ab dataen er tilhørende normalfordelt.

Oppg 2

a) Ta utgangspunkt i ① og led et $100(1-\alpha)\%$ CI for μ

$$P\left(-t_{\alpha/2, n-1} < \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2, n-1}\right) = 1 - \alpha$$

Løser ulikheten for μ , og setter $t_{\alpha/2, n-1} = t$ for å slippe rot

$$P\left(-t < \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} < t\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t s/\sqrt{n} < \bar{x} - \mu < t s/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-t s/\sqrt{n} - \bar{x} < -\mu < t s/\sqrt{n} - \bar{x}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(t s/\sqrt{n} + \bar{x} > \mu > -t s/\sqrt{n} + \bar{x}\right) = 1 - \alpha$$

Der med er $100(1-\alpha)\%$ CI

$$\underline{(\bar{x} - t s/\sqrt{n}, \bar{x} + t s/\sqrt{n})}$$

b) Ta utgangspunkt i ② og nytles $100(1 - \alpha)\%$. (J)

$$\text{Sett for } \chi^2_{1-\alpha/2, n-1} = x_1 \text{ og}$$

$$\chi^2_{\alpha/2, n-1} = x_2, \text{ dafor for } \sigma$$

$$P\left(x_1 < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < x_2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{1}{x_1} < \frac{\sigma^2}{(n-1)s^2} < \frac{1}{x_2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{x_1} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{x_2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(s\sqrt{\frac{n-1}{x_1}} < \sigma < s\sqrt{\frac{n-1}{x_2}}\right) = 1 - \alpha$$

Dette gir oss $100(1 - \alpha)\%$

$$\left(s\sqrt{\frac{n-1}{x_1}}, s\sqrt{\frac{n-1}{x_2}}\right) \quad \#$$

c) Utregnet vedlegg

antall verdier som var unntatt i

$$\mu = 940 \quad \sigma = 952$$

d) Utregnet i vedlegg

antall verdier som var unntatt når $n=30$

$$\mu = 946 \quad \sigma = 942$$

$$(946, 942) \\ (960, 955)$$

os for $n = 200$

$$\mu = 960, \sigma = 955$$

i) Utregning i vedlegg
antall verdier som var innenfor

$$\mu, \sigma = 699, 787$$

Disse verdiene er nøyde lengre unna 95% - 1066

j) Utregning i vedlegg
antall verdier innenfor

$$n = 30:$$

$$\mu = 932, \sigma = 714$$

$$n = 200:$$

$$\mu = 932, \sigma = 686$$

Ser dermed ut at denne sikkeringen gir veldig god
trefikk for σ selv med stor n

Oppg 1 e) Hypotesetest

$$H_0: \mu = 265, H_a: \mu < 265, \alpha = 0,05$$

V: finner grenverdien

Regnet i R

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{276,89 - 265}{27,1/\sqrt{19}} \stackrel{?}{=} 1,96$$

Finner så $t_{\alpha/2, n-1}$

$$\alpha = 0,05, n-1 = 18$$

$$t_{0,05, 18} = 1,73$$

$$Siden t_{0,05, 18} = 1,73 \leq 1,96 = t$$

så kan vi ikke kaste H_0 #

Vi ser også at $276,89$ er innenfor (I) 'en fra (a) Π