⋮

eks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Konvergerer? $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$

integraltesten med $f(x)=\frac{1}{x}$:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\ln x\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\ln b - \ln 1\right] = +\infty$$ dvs. divergens

p-rekker

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer for $p>1$ og divergerer for $p\leq 1$

Bevis $p\neq 1$. integraltesten

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} b^{1-p} - \frac{1}{-p+1}\cdot 1\right]$$

∞ hvis $p<1$

0 hvis $p>1$

Så vi har da divergens for $p<1$ og konvergens for $p>1$. ☐

Sammenligningstesten

Anta at du har $0 \le a_n \le b_n$ for alle n.

Da: (1) $\sum b_n$ konv. $\Rightarrow \sum a_n$ konv.

(2) $\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum b_n$ div.

Bevis: kompletthet. (Detaljer droppes)

eks. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\underbrace{(\sin^2 n)\sqrt{n}}_{\text{Rusk som gjør leddene mindre}} + 2^n}$$ konvergerer?

Vi har $$\frac{2}{(\sin^2 n)\sqrt{n} + 2^n} \le \frac{2}{2^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n}$ er rekke

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

Dette er en geometrisk rekke med sum 2

Dermed konvergerer rekken vår ved sml-testen ∎

Grensesammenligningstesten (GS-testen)

La $\sum a_n$ og $\sum b_n$ være rekker med positive ledd

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

L finnes og $0 < L < \infty$, så enten konvergerer begge rekker eller divergerer begge rekker

Hvis $L = 0$ og $\sum b_n$ konv. så konvergerer $\sum a_n$ også

Bevis

Velg P og Q slik at $0 < P < L < Q$.

Siden $\frac{a_n}{b_n} \to L$, har vi for store n

$$P < \frac{a_n}{b_n} < Q \text{, dvs } P \cdot b_n < a_n < Q \cdot b_n$$

Vanlig sml-test:

$\sum a_n$ div $\Rightarrow \sum Q b_n = Q \cdot \sum b_n$ div, dvs. $\sum b_n$ div

$\sum a_n$ konv. $\Rightarrow \sum P \cdot b_n = P \cdot \sum b_n$ konv, dvs. $\sum b_n$ konv #