5.1 Topologi i $\mathbb{R}^m$

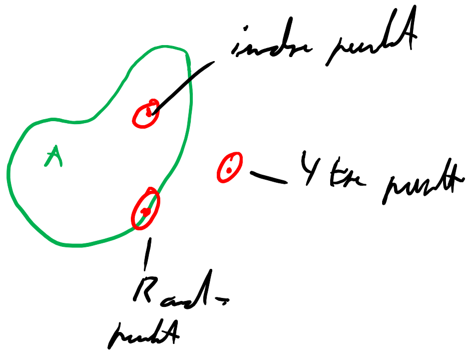
$B(\bar{a}, \bar{r}) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| < r\}$: åpen kule om $\bar{a}$

Mengen av alle punkter i $\mathbb{R}^m$ begrenset av $|x - a| < r$

$\bar{B}(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m : |\bar{x} - \bar{a}| \leq r\}$ lukket kule

Def La $A \subset \mathbb{R}^n$ være et punkt $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et

- indre punkt for A hvis det finnes en kule $B(\bar{a}, r) \subseteq A$
- randpunkt for A hvis enhver kule $B(\bar{a}, r)$ inneholder både punkter som er med i A og punkter som ikke er med i A.
- Ytre punkt for A hvis det finnes en kule $B(\bar{a}, r)$ som ikke inneholder punkter fra A.



Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ kalles <u>lukket</u> hvis den inneholder sine randpunkter og <u>åpen</u> hvis den ikke inneholder noen randpunkter

Mengdene $\emptyset$ (den tomme mengde) og hele $\mathbb{R}^n$ regnes som både <u>åpne</u> og <u>lukkede</u>

Def. Følgen $\{\bar{x}_n\} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots\}$ i $\mathbb{R}^m$ konvergerer mot $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$
hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ fins $N \in \mathbb{N}$ slik at
$|\bar{x}_n - \bar{a}| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$
Vi skriver da $\lim_{n \to \infty} \bar{x}_n = \bar{a}$

Setning 5.1.5

Hvis $\lim_{n \to \infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ og $\lim_{n \to \infty} \bar{y}_n = \bar{y}$, så gjelder

(i) $\lim_{n \to \infty} (c\,\vec{x}_n) = c \cdot \bar{x}$ for alle reelle tall c

(ii) $\lim_{n \to \infty} (\bar{x}_n + \bar{y}_n) = \lim_{n \to \infty} \bar{x}_n + \lim_{n \to \infty} y_n = \bar{x} + \bar{y}$

(iii) $\lim_{n \to \infty} (\bar{x}_n \cdot \bar{y}_n) = \bar{x} \cdot \bar{y}$ (skalarprodukt)

Bevis (ii)

$$|(\bar{x}_n + \bar{y}_n) - (\bar{x} + \bar{y})| = |(\bar{x}_n - \bar{x}) + (\bar{y}_n - \bar{y})|$$

Trekant ulikheten setning 1.2.5

$$\leq |\bar{x}_n - \bar{x}| + |\bar{y}_n - \bar{y}| \quad (*)$$

Kan gjøre de uavhengige små

Gitt $\varepsilon > 0$, kan vi velge N_1 slik at $|\bar{x}_n - \bar{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N$

og N_2 slik at $|\bar{y}_n - \bar{y}| < \frac{\varepsilon}{2}$ for $n \geq N$

Hvis da N er større enn både N_1 og N_2, er $(*) < \varepsilon$

$\#$

Setning 5.1.6

$$\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{x} \iff \lim_{n\to\infty} \overbrace{x_i^{(n)}}^{\text{komponent } i \text{ fra } \bar{x}_n} \text{ for alle } i$$

Setning 5.1.8

Anta at A er lukket, og at $\{\bar{x}_n\}$ er en følge av punkter i A som konvergerer mot $\bar{x}$. Da er $\bar{x} \in A$

Bevis

Anta at $\bar{x} \notin A$. Siden A er lukket, fins det da en hele $B(\bar{x}, r)$ som ikke inneholder punkter fra A. Da må $\bar{x}_n \notin B(\bar{x}, r)$ for alle n, noe som strider mot at $\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ $\#$

Setning 5.1.9

Anta at $\bar{F} : A \to \mathbb{R}^m$, der $A \subseteq \mathbb{R}^k$. La $\bar{a} \in A$

Da er F kontinuerlig i $\bar{a}$ hvis $\bar{F}(\bar{x}_n) \to \bar{F}(\bar{a})$ for alle følger $\{\bar{x}_n\}$ fra A slik at $\bar{x}_n \to \bar{a}$.

5.2 Kompletthet av $\mathbb{R}^m$

Hvis $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i $\mathbb{R}^m$ og

$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ er naturlige tall

så kalles følgen $\{\vec{x}_{n_k}\} = \{\vec{x}_{n_1}, \vec{x}_{n_2}, \vec{x}_{n_3}, \dots\}$

for en delfølge av $\{\vec{x}_n\}$

eks. $\{3, 7, 11, 13\}$ (odde primtall)

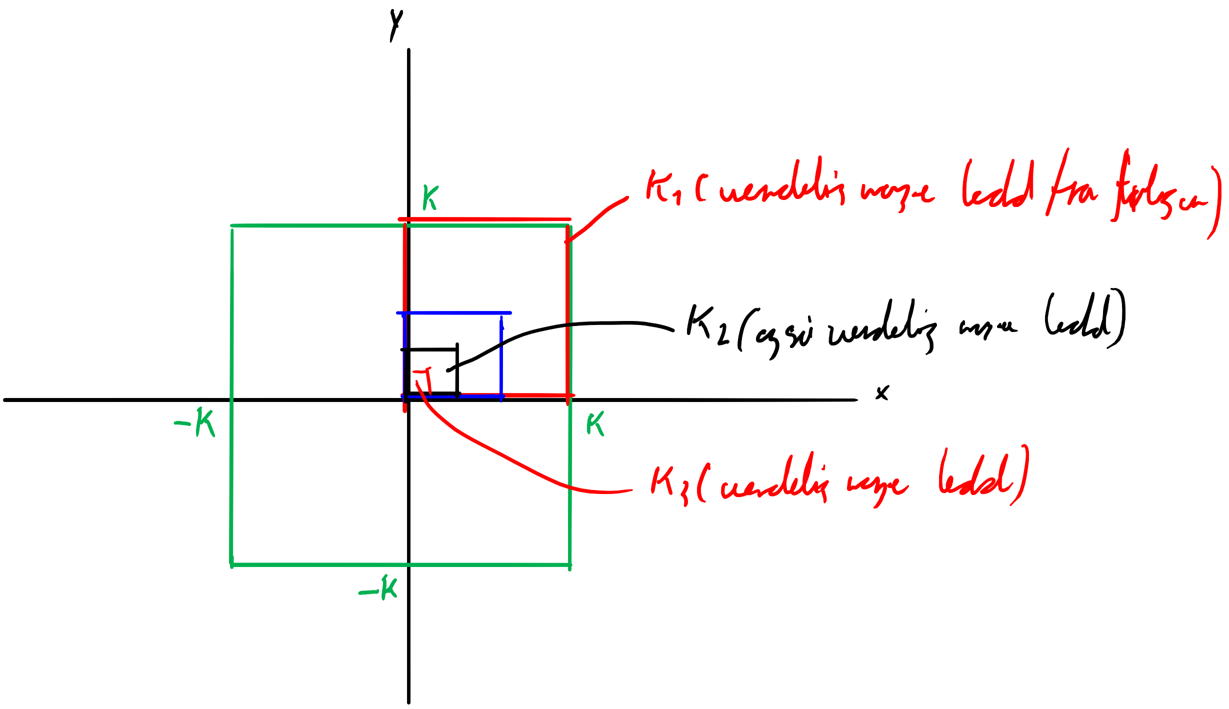
er en delfølge av $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ (oddetallene)

Teorem 5.2.3

Altså alle begrensede følger i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge

Bevis (Fange en løve i Ørkenen) Gitt en følge $\{\vec{x}_n\}$

Velger K slik at $|\vec{x}_n| < K$ for alle n (Alle komponenter er mindre enn K i absoluttverdi)



Plukker ut en delfølge $\{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots\}$ ved å la $\bar{x}_{n_k}$ være første ledd i følgen som ligger i K_k.

Definisjon

$\{x_n\}$ er en cauchy-følge hvis det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\bar{x}_n - x_k| < \varepsilon$ for alle $n, k \geq N$