Divergens

$$\nabla \cdot \bar{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)$$

Virvling

$$\nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Strømfunksjon (Ψ) ($\nabla \cdot \bar{v} = 0$)

$$\Psi_1 = \int \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \int -v_x \, dy \,, \quad \Psi_2 = \int \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \int \bar{v}_y \, \partial x \,, \quad c_i = f_1(x), f_2(y)$$

$\Psi_1 = \Psi_2$ ved å bestemme f_1 og f_2

Strømlinje (ϕ)

$$\bar{v} \times d\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = (v_x \, dy - v_y \, dx) \bar{k} = 0$$

$$\phi = \int \bar{v}_x \, dy + \int \bar{v}_y \, dx = 0 + c$$ integrasjonskonstant

Linjene finnes ved å sette en verdi for c

stagnasjonsfunksjonen finner man ved å sette $\phi = 0$

Potensialfunksjon $(\nabla \times \bar{v} = 0)$

$$V_1 = \int \frac{\partial v_x}{\partial x} = \int -v_x\, dx \quad , \quad V_2 = \int \frac{\partial v_y}{\partial y} = \int -v_y\, dy$$

$V_1 = V_2$ ved å bestemme f_1 og f_2

$$V = \frac{\lambda}{2} x^2 + f_1(y) \quad , \quad V = \frac{\lambda}{2} y^2 + f_2(x)$$

$$V = \frac{\lambda}{2}(x^2 + y^2) + C \quad , \quad f_1 = \frac{\lambda}{2} y^2 + C \quad \text{og} \quad f_2 = \frac{\lambda}{2} x^2 + C$$

Partikkelakselerasjon

Regn ut hastighetsfeltet

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{R} = \omega \bar{k} \times (r\, i_r + z \bar{k})$$

$$= \begin{vmatrix} i_r & i_\theta & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & z \end{vmatrix} = \omega r\, \bar{i}_\theta$$

Regn ut partikkelderivert av hastighetsfeltet

$$\bar{a} = \frac{D\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \bar{v}$$

i dette eksempelet får vi ingen bidrag fra $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$

$$\bar{v} \cdot \nabla = \omega r_\theta \cdot \left(\bar{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + i_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = \omega \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Så regner vi ut resten

$(\bar{v}\cdot\nabla)v = w\frac{d}{d\theta} rw\, \bar{i}_\theta = -w^2 r\, \bar{i}_r$

integrert fluks som flateintegral

$x:[0,1]$, $y[0,1]$, $z[0,1]$

$\bar{v} = xyz\,\bar{i} + xyz\,\bar{j} + xyz\,\bar{k}$

$x=0, -\bar{i}$: $\int_0^1\int_0^1 0\cdot y\cdot z\, \underbrace{\bar{i}\cdot -\bar{i}}_{-1}\, dy\,dz$

$x=1, \bar{i}$: $\int_0^1\int_0^1 1\cdot y\cdot z\, \underbrace{\bar{i}\cdot\bar{i}}_{1}\, dy\,dz$

$y=0, -\bar{j}$ $\int_0^1\int_0^1 x\cdot 0\cdot z\, \bar{j}\cdot -\bar{j}\, dx\,dz$

$y=1, \bar{j}$ $\int_0^1\int_0^1 x\cdot 1\cdot z\, \bar{j}\cdot\bar{j}\, dx\,dz$

$z=0, -\bar{k}$ $\int_0^1\int_0^1 x\cdot y\cdot 0\, \bar{k}\cdot -\bar{k}\, dx\,dy$

$z=1, \bar{k}$ $\int_0^1\int_0^1 x\cdot y\cdot 1\, \bar{k}\cdot\bar{k}\, dx\,dy$

Sum av disse

Integrert fluks Gauss

$\bar{v} = 4x^2y\,\bar{i} + xyz\,\bar{j} + yz^2\,k$

$\nabla\cdot\bar{v} = 8xy + xz + 2yz$

$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \nabla\cdot\bar{v}\, dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 8xy + xz + 2yz\, dx\,dz\,dy = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

Eulers ligning uten avhengighet av tid

$$p = p_0 - \rho g z$$

Lokalderivert $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$

Konvektiv derivert

$$(\bar{v} \cdot \nabla)\,\bar{v}$$