Trikset kan brukes til å finne taylorrekker

Leddvis derivasjon:

$$f'(x) = c_1 \cdot 1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^4$$

Innsetting $x=a$ gir $f'(a) = c_1$

Ny leddvis derivasjon:

$$f''(x) = 2c_2 \cdot 1 + 3 \cdot 2\, c_3(x-a)^1 + 4 \cdot 3 \cdot c_4(x-a)^2 + \dots$$

Innsetting av $x=a$ gir $f''(a) = 2c_2$, dvs. $c_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$

Ny leddvis derivasjon

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4(x-a)^1$$

Innsetting av $x=a$ gir $f'''(a) = 3 \cdot 2\, c_3$, dvs $c_3 = \dfrac{f'''(a)}{3!}$

Og så videre. Vi ser at koeffisientene c_n må stemme med dem vi har i Taylorrekken

$$f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

dvs. dette er Taylor-rekken

Altså kan de 4 triksene våre brukes til å finne taylorrekker

Konvergens av berømte taylor-rekker

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{alle } x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\text{alle } x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{alle } x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1]$$

Bevis (Delvis)

- Rekken for $\ln(1+x)$ fikk vi ved triks 3 sist
- Rekken for $\frac{1}{1-x}$ er geometrisk
- Rekken for $f(x) = \sin(x)$: Har $a = 0$

Restleddet:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^n \right|$$

$$= \underbrace{\left| f^{(n+1)}(c) \right|}_{\leq 1} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

$f^{(n+1)}(c)$ er enten $\sin(c)$ eller $\cos(c)$

$$\leq 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{når } n \to \infty$$

(fakultetet dominerer potens)

Eks. Anta at

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n!)^2} \quad \text{for alle } x$$

Finn rekker for $f'(x)$ og $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ gyldig for alle x

Løsning: Leddvis derivasjon gir oss at

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4n+1)x^{4n}}{(n!)^2}$$

Leddvis integrasjon

$$F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{(4n+1)}}{(n!)^2} \right) dt$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{t^{4n+2}}{(4n+2)(n!)^2} \right]_{t=0}^{t=x}$$

$$= \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)\cdot(n!)^2}}}$$

Finne summer av potensrekker

1. Absorberer faktorer av typen 2^n, 3^n etc. og flytt sentrum av potensrekken til 0 ved å innføre ny variabel u.
   Sett "ekstra" potenser utenfor

eks. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{(x-1)^n}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$u = \frac{x-1}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} u^n$$

2. "Plukk opp" eventuelle faktorer n, n^2, etc. ved leddvis derivasjon / integrasjon

3. Prøv å gjøre rekken om til en av de kjente

Finne summer av vanlige rekker

Prøve å skrive rekken som en potensrekke med en spesiell x innsatt

Bruk 2^n, 3^n til å "lage" x^n.

eks $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Kan oppfattes som $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \cdot x^n$ med $x = \frac{1}{2}$ innsatt eks. Finn summen av $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n}$

Løsning.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+5}}{n! \cdot 2^n} = x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n! \cdot 2^n}$$

$$= x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

$\boxed{u = \frac{x}{2}}$

$$= x^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

Berømt rekke

$$= x^5 \cdot e^u = x^5 \cdot e^{x/2} \quad \text{for alle } x$$

#

eks. Finn summen av $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2n-1}(2n+2)}$

Rekken kan skrives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n-1}$$

Dette kan oppfattes som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n-1} \quad \text{med } x = \frac{1}{4} \text{ innsatt}$$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2n-2}$$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+2} x^{2+2}$$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left(x^{2n+1} \, dx\right) = \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{x^3} \int_0^x \left(x^3 + x^5 + x^7 + \dots \right) dx$$

geometrisk rekke

$a = x^3$

og $r = x^2$

$$= \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{x^3}{1-x^2} dx = \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^3}{1-t^2} dt$$

$=$ etc. (Regn ut integralet f. eks ved substitusjon $u = t^2$)

Sett til slutt inn $x = \frac{1}{4}$. Summen blir $32 \ln\left(\frac{16}{15}\right) - 2$