2017 - Eksamen

1. $\bar{r}(t) = t\cos(t)\,i + t\sin(t)\,\bar{j}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\bar{F}(x,y) = (-y, x)$, vektorfelt

a) $\boxed{\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt}$

$= \int_0^{2\pi} (-t\sin(t), t\cos(t)) \cdot (\cos t - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t))\,dt$

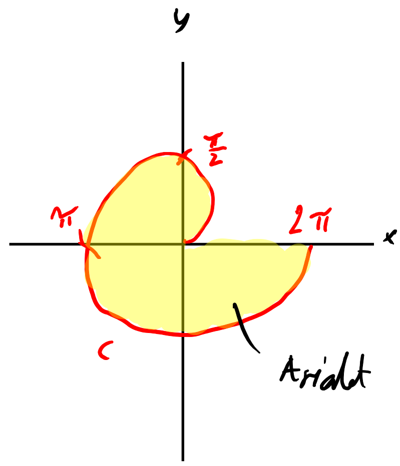
$= \int_0^{2\pi} (-\cancel{t\sin(t)\cos(t)} + t^2\sin^2(t) + t^2\sin^2(t) + \cancel{t\cos t\sin(t)} + t^2\cos^2(t))\,dt$

$= \int_0^{2\pi} t^2(\sin^2(t) + \cos^2(t)) = \int_0^{2\pi} t^2 = \frac{1}{3}\cdot(2\pi)^3 = \frac{8}{3}\pi^3$

b) Regn ut arealet ...

Kurven i polarkoordinater

$r = \theta = t$, $t \in [0, \pi]$



Greens er mulig fortsettelse av a

Vi gjør ikke det nå

Beskrivelse av R i Polarkoordinater:

$\boxed{\theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, \theta]}$

jakobideterminanten

$A = \iint_R 1\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\theta} 1 \cdot r\,dr\right] d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\theta} d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\theta^2 = \frac{1}{6}\left[\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{6} = \frac{4}{3}\pi^3$

(Enklere: Greens' teorem: $A = \frac{1}{2}\underbrace{\oint -y\,dx + x\,dy}_{a)}$)

2. $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gir

$$\begin{cases} x + 2y = b_1 & \mathrm{I} \\ 2x + y = b_2 & \mathrm{II} \\ x + 0 = b_3 & \mathrm{III} \end{cases}$$

III innsettingsmetoden i II gir $2b_3 + y = b_2$, dvs $y = b_2 - 2b_3$

III og II innsatt i I gir da

$$b_3 + 2(b_2 - 2b_3) = b_1$$

$$b_3 + b_2 - b_3 = b_1$$

$$\underline{\underline{b_1 = 2b_2 - 3b_3}}$$

er dette oppfylt, har vi en entydig løsning

Alternativt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & (?) \\ 0 & 3 & (?) \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + 3b_3 \end{pmatrix}$$

muligvis feil i fasitten

Trenger bare 0-er i siste

Entydig løsning hvis denne er 0

c)

$$f(x,y) = \left| A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

Putt inn

$$= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - y \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \\ x - 1 \end{pmatrix} \right|^2$$ ~ Lengden av en vektor

$$= (x+2y)^2 + (2x+y)^2 + (x-1)^2$$ ~ kan være enklere å derivere her

$$= x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 + 4xy + y^2 + x^2 - 2x + 1$$

$$= 6x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 1$$

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 12x + 8y - 2 = 0 & \text{I} \\[2ex] \dfrac{df}{dy} = 8x + 10y = 0 & \text{II} \end{cases}$$

II gir $x = -\frac{5}{4} y$

I gir da $-\frac{12 \cdot 5}{4} y + 8y - 2 = 0$

$$-15y + 8y = 2, \quad \left(y = \frac{-2}{7}\right)$$

Så $x = -\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{5}{14}$ $\qquad \left(\frac{5}{14}, \frac{-2}{7}\right)$

f har et entydig globalt minimum fordi en måler avstanden kvadrert fra punktet $(0,0,1)$ til punktet på planet utspent av vektorene $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$

Altså er $f(x,y)$ minimal for $x = \frac{5}{14}$, $y = \frac{2}{7}$

Oppg 3.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n}$

Rekken er alternerende

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln n}{n}\right| \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = 0$$

Må også sjekke $|a_{n+1}| < |a_n|$ for n stor nok

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ gir } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

Har $f'(x) < 0$ for $x \geq 3$

Så $|a_{n+1}| < |a_n|$ for $n \geq 3$

Altså konvergens ved alt. Rekke-testen

IIII

b) Finne summen av en rekke

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{n+1 \cdot 4^{n+1}}$$ kan oppfattes som

$$\frac{1}{\pi}\sum \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$ med $x = \frac{\pi}{4}$ innsatt

$$= \frac{1}{\pi}\underbrace{\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right)}_{\text{Se i formelsamling } -\ln(1-x)}$$

Skriv det ut i ledd med det

Summen blir dermed

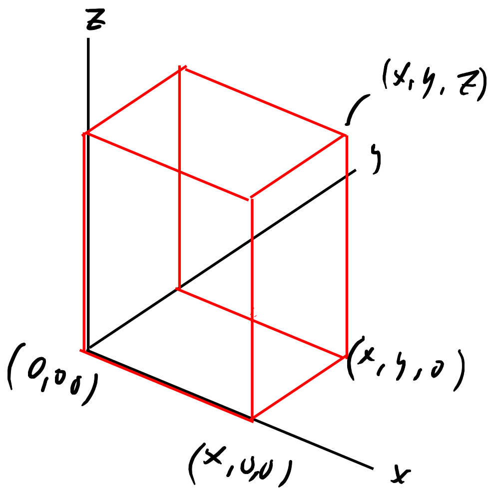
$$\underline{\underline{-\ln\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

4 Finn det største volumet med hjørner $(0,0,0)$, $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, ...

Maksimere $f(x,y,z) = xyz$

under bibetingelsen

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2/4 - 1 = 0$$



Unntatt likt eksempel på forelesning 26.04.2011

Maksverdi $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3\sqrt{3}}}}$

Oppg 5

a) Eksempel: Hvis $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

så velg $S = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{pmatrix}$

Da er $S \cdot S = D$

generelt: Hvis D har elementer d_{ii} på diagonalen, velg S med $s_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$ langs diagonalen og nuller ellers

b) siden a har en basis av egenvektorer, kan A diagonaliseres. Det fins en $(n \times n)$-matrise M slik at

$$A = M \cdot D \cdot M^{-1}$$

Der D er diagonal med egenverdier for A langs diagonalen. Siden alle egenverdiene er ikke-negative, fins ved a) en matrise S slik at $S \cdot S = D$ innsatt får vi

$$A = M \cdot S \cdot S \cdot M^{-1}$$

$$= M \cdot S \cdot \underbrace{M^{-1} \cdot M}_{I} \cdot S \cdot M^{-1}$$

$$= (M S \cdot M^{-1})(M \cdot S \cdot M^{-1}) = B^2$$

Med $B = M \cdot S \cdot M^{-1}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ utregningen :

Egenvektor $\begin{pmatrix} A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = 1$

—"— $\begin{pmatrix} B \\ B \\ 0 \end{pmatrix}$ med —"— $\lambda_2 = 4$

—"— $\begin{pmatrix} C \\ 2C \\ 2C \end{pmatrix}$ —"— $\lambda_3 = 9$

La $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ egenvektorer som søyler

$D = S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, dvs. $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Så: $B = M \cdot S \cdot M^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$