Funksjoner av flere variable

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\vec{x}} \xrightarrow{\vec{F}} \underbrace{\vec{y} = \vec{F}(x)}_{\mathbb{R}^m}$$

Definisjon: En funksjon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en regel / tilordning som enhver $\vec{x} \in \vec{\mathbb{R}}$ gir en $\vec{y} = \vec{F} \in \mathbb{R}^m$

Alternative skrivemåter: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix}$

$$F(x_1, x_2, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ F_2(x_2, \dots, x_n) \\ F_1(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Komponenter

Eksempler: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 y + z \\ e^{x^2} + 2yz \end{pmatrix}$$

$$F(1, -1, 2) = \begin{pmatrix} 1^2(-1) + 2 \\ e^{1^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-3} \end{pmatrix}$$

b) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^1$

$$F(x, y, z, u) = \arctan\left(e^{\sin x\, y^2 + \cos(x y z u^2)}\right)$$

Bruk for dette

Temperatur $T(x,y,z,t)$ = temperaturen i punktet (x,y,z) ved tiden t

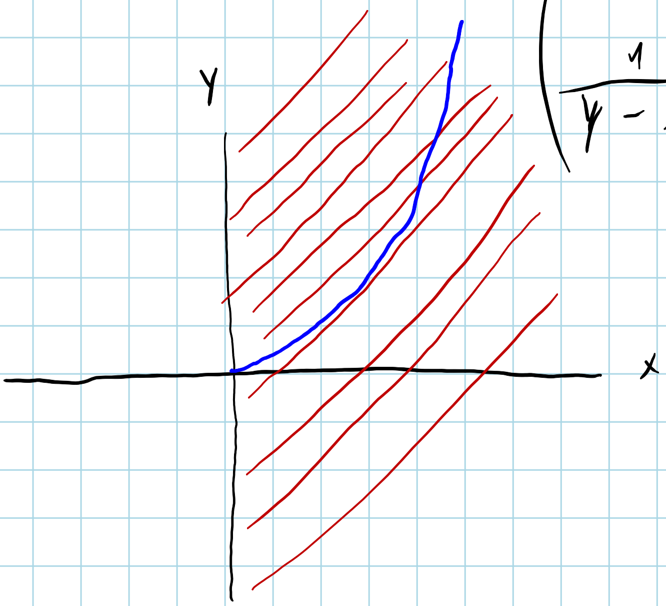
Vind: $\vec{V}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} V_1(x,y,z,t) \\ V_2(x,y,z,t) \\ V_3(x,y,z,t) \end{pmatrix}$

$\vec{V}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

Definisjonsmengde

Funksjonene er vanligvis definert i alle punkt det funksjonsuttrykket gir mening

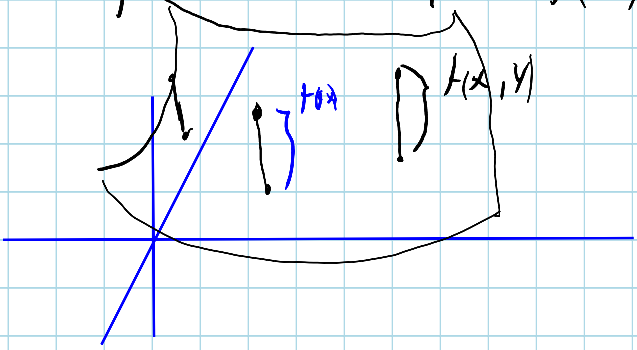
Eksempel $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y\ln(x) \\ \frac{1}{y-x^2} \end{pmatrix}$ $x > 0$, $y \neq x^2$



$D_f = \{(x,y) : x > 0 \text{ og } y \neq x^2\}$

Hva med grafer

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$



Kontinuitet

Hvis jeg har $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, når er den kontinuerlig

Idéen: Vi kan få $\bar{F}(\bar{x})$ så nær $F(\bar{a})$ ved å sette $\bar{x}$ tilstrekkelig nære $\vec{a}$

Def: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig i punkt $a \in \mathbb{R}^n$ dersom $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at hver avstanden $|\vec{x} - \bar{a}| < \delta$ så er $|\vec{F}(x) - F(a)|$, så er $|F(\bar{x}) - F(\vec{a})| < e$

Setning: en funksjon $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig hvis og bare hvis alle komponenter F_1, F_2, F_m er det.

Setning: Dersom $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er kontinuerlige så er også $f + g$ kontinuerlig, $f - g$, fg og $\frac{f}{g}$ er kontinuerlig $g \neq 0$

Setning: Dersom $G : \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^m$, $\vec{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der $\bar{G}$ er kontinuerlig i punktet $\vec{a}$ og $\vec{F}$ er kontinuerlig i $\vec{b} - \vec{G}(\vec{a})$ så er $\vec{F} \cdot \vec{G}$ kontinuerlig i $\vec{a}$

Grenseverdier.

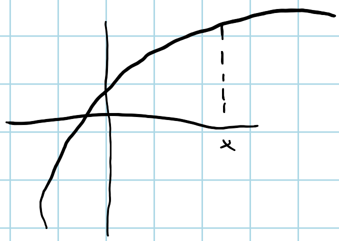
anta at $\vec{F}$ er definert i alle punkter i nærheten av a men ikke i a

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \bar{F}(\vec{x}) = \bar{r}$$

Hvis det finnes en $\varepsilon > 0$ finnes det en $\delta > 0$ slik at når $0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$, så er $|\bar{F}(\bar{x}) - \bar{F}(\bar{a})| < \varepsilon$

Derivasjon:

$Y = f(x)$, $f'(x)$ angir hvor fort funksjonen øker i x



Z er en funksjon av (x, y)

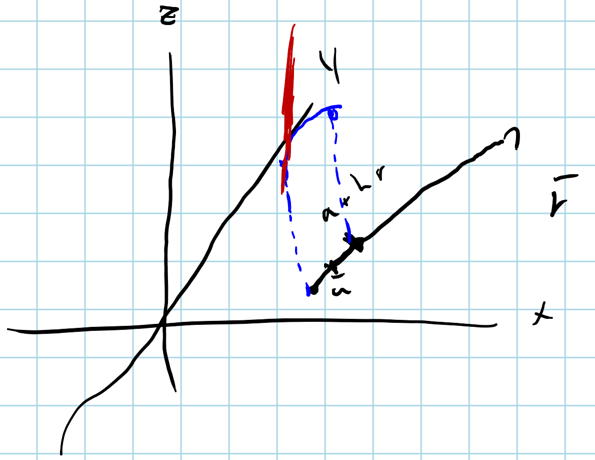
Hvor fort funksjonen vokser er avhengig av hvor fort funksjonen vokser

- V: må angi retning

Retningsderivert:

Den retningsderiverte til f i punktet $\bar{a}$ og i retningen $\bar{r}$ er definert ved

$$f'(\bar{a}, \bar{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + hr) - f(a)}{h}$$



Det viser seg at det er spesielt enkelt å regne ut de retningsderiverte parallelt med aksene. Dvs. når

$$\vec{r} = (1, 0, 0, 0, \dots, 0) = \vec{e}_1$$

$$\vec{r} = (0, 1, \dots 0) = \bar{e}_2$$

$$\vdots$$

$$= 0, 0, 0, \dots, 1 = e_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \; f'(\vec{x}, \vec{e}_i) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h} =$$

deriverer med hensyn på x_i, ... ser på resten som konstant

Eks: $f(x, y) = x^2 y + x$

$$\frac{\partial f(x\,y)}{\partial x_i} = 2xy + 1, \quad \frac{df}{dy} = x^2 + 0 = x^2$$

Eks: $f(x, y, z) = \underbrace{x\,y\,\sin(xz)}_{\text{Produktregelen }(x)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\,y\,\sin(xz) + x\,y\cos(xz)\cdot z$$

$$= y\sin xz + xyz\cos(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\sin(xz)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy\cos xz$$