Livsforsikring - et eksempel på bruk av forventningsverdi

Notat til STK1100

Ørnulf Borgan

Februar 2017

Innledning

Vi skal i dette notatet se hvordan en kan bestemme premien (= prisen) til en livsforsikring. Framstilling er en forenkling av det som gjøres i et forsikringsselskap. Men notatet illustrerer likevel prinsippet for beregning av livsforsikringspremier. Forenklingene består blant annet i at vi:

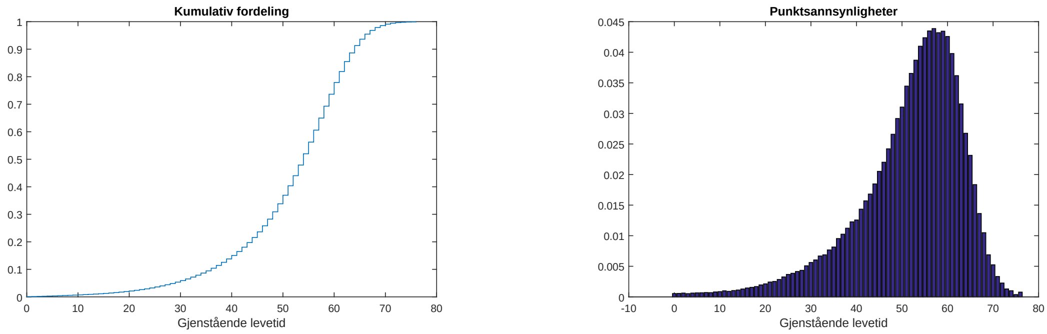
- regner med fast rente (3%)
- ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste
- benytter dødelighetsopplysninger fra Statistisk sentralbyrå over dødeligheten i den norske befolkningen i perioden 2011-2015 i stedet for dødeligheten blant forsikrede
- regner som om inn- og utbetalinger bare kan skje én gang hvert år

Problemstilling

For å være konkrete vil vi anta at en 30 år gammel kvinne tegner en livsforsikring som vil gi hennes etterlatte (mann og barn) en erstatning på en million kroner hvis kvinnen dør før hun fyller 65 år[1]. Hvis hun blir minst 65 år utbetales ingen ting. For denne livsforsikringen må kvinnen hvert år betale en viss premie (så sant hun er i live).

De innbetalingene kvinnen gjør til selskapet og de utbetalingene kvinnen får fra selskapet er stokastiske størrelser. For hvor mye kvinnen betaler inn i premie og hvor mye hennes etterlatte får utbetalt i erstatning vil avhenge av hvor gammel kvinnen blir. Premien bestemmes slik at forventningsverdien til nåverdien av premieinnbetalingene er lik forventningsverdien til nåverdien av erstatningsutbetalingen. Det gir en "rettferdig premie" (når vi ser bort fra selskapets omkostninger og fortjeneste). For hvis selskapet tegner mange livsforsikringer av den typen vi har beskrevet, vil gjennomsnittlig inn- og utbetaling pr. polise bli like store.

[1]Livsforsikringer koster i dag det samme for kvinner og menn. En tar altså ikke hensyn til at dødeligheten er forskjellig for de to kjønn. Prisen på livsforsikringen vil derfor bli den samme om det er en 30 år gammel mann som tegner forsikringen.



Figur 1: Kumulativ fordeling og punktsannsynligheter for gjenstående levetid.

Gjenstående levetid

Vi lar den stokastiske variabelen X angi kvinnens *gjenstående levetid* i hele år, dvs. levetiden i hele år fratrukket 30 år. Vi kan bestemme den kumulative fordelingsfunksjonen $F(x) = P(X \leq x)$ fra en tabell over ett-årige dødssannsynligheter. For hvis q_k er sannsynligheten for at en k år gamme kvinne skal dø i løpet av ett år, gir produktsetningen at

$$F(x) = 1 - P(X > x) = 1 - \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{30+y}) \tag{1}$$

Her er $\prod$ tegnet for produkt på tilsvarende måte som $\sum$ er tegnet for sum. Punktsannsynlighetene til X er dermed gitt ved

$$p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-1) \quad \text{for } x = 0, 1, 2, \ldots, 76 \tag{2}$$

når vi regner 106 år som den høyest mulige levealder (slik det gjøres i statistikken fra Statistisk sentralbyrå). Figur 1 viser den kumulative fordelingen og punktsannsynlighetene basert på dødelighetsstatistikk for Norge for perioden 2011-15.

Nåverdi

Kvinnen betaler inn premier til forsikringsselskapet hvert år fra hun er 30 år, mens en eventuell erstatningsutbetaling til de etterlatte først kommer senere. For å ta hensyn til denne forskjellen i tid mellom inn- og utbetalinger benyttes nåverdiene av disse. Nåverdien av et beløp på B kroner som betales om k år, er det beløpet en må sette i banken i dag for å ha B kroner om k år når det beregnes renter og renters rente. Vi regner med at forsikringsselskapet benytter en rentefot på 3% pro anno. Da er nåverdien av B kroner som betales om k år lik $B/1.03^k$.

Erstatningsutbetalingen

La oss se nærmere på nåverdiene av inn- og utbetalingene og deres forventningsverdier. Vi ser først på erstatningsutbetalingen. Hvis kvinnen dør før hun blir 65 år, dvs. hvis $X \leq 34$, vil selskapet betale ut en million kroner til de etterlatte om X år. Hvis kvinnen blir minst 65 år, dvs. hvis $X \geq 35$, vil selskapet utbetale ingen ting. La $h(X)$ være nåverdien av erstatningsutbetalingen. Da er

$$h(X) = \begin{cases} \frac{1\,000\,000}{1.03^X} & \text{for } X \leq 34 \\ 0 & \text{for } X \geq 35 \end{cases}$$

Forventet nåverdi av erstatningsutbetalingen er derfor

$$E[h(X)] = \sum_{x=0}^{76} h(x)p(x) = 1\,000\,000 \sum_{x=0}^{34} \frac{p(x)}{1.03^x} \tag{3}$$

Ved å bruke (2) og (3) finner vi at forventet nåverdi av erstatningsutbetalingen er 42 800 kroner.

Premieinnbetalingene

Vi ser så på premieinnbetalingene. Vi antar at kvinnen betaler en årlig premie på K kroner pr. år fra og med sin 30 årsdag og til og med sin 64 årsdag (men selvfølgelig bare hvis hun er i live). Vi får nåverdien av alle premieinnbetalingene ved å summere nåverdiene av hver av dem. Dermed blir nåverdien av kvinnens samlede premieinnbetalinger

$$g(X) = \sum_{k=0}^{\min(X,34)} \frac{K}{1.03^k} = K\,\frac{1 - (1/1.03)^{\min(X,34)+1}}{1 - 1/1.03} \tag{4}$$

Her følger den siste likheten av formelen for summen av en endelig geometrisk rekke:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Av (4) finner vi at forventet nåverdi av premieinnbetalingene er

$$\begin{aligned} E[g(X)] &= \sum_{x=0}^{76} g(x)p(x) \\ &= K\,\frac{\sum_{x=0}^{76} p(x) - \sum_{x=0}^{34}(1/1.03)^{x+1}\,p(x) - \sum_{x=35}^{76}(1/1.03)^{34+1}\,p(x)}{1 - 1/1.03} \\ &= K\,\frac{1 - \sum_{x=0}^{34}(1/1.03)^{x+1}\,p(x) - (1/1.03)^{35}\,P(X \geq 35)}{1 - 1/1.03} \end{aligned} \tag{5}$$

Ved å bruke (2) finner vi at brøken i (5) er lik 21.76. Forventet nåverdi av premieinnbetalingene er dermed $21.76\,K$ kroner.

Årlig premie

Den årlige premien K bestemmes nå slik at forventet nåverdi av premieinnbetalingene blir lik forventet nåverdi av erstatningssutbetalingen, dvs. slik at (5) og (3) blir like. Det gir $21.76\,K = 42\,800$. Kvinnen må altså betale en årlig premie på $K = 42\,800/21.76 = 1967$ kroner for livsforsikringen.

Livsforsikring

30 år

Sikre ektefelle 1" kr hvis hun dør før 65 år

Hvis hun lever minst 65 blir ingen utbetaling

Premie (= prisen) k kr per år fra og med

30 årsdagen og til og med 64 årsdagen (hvis hun er i live)

Hva skal K være

Både innbetaling og utbetaling er stokastiske

Vil bestemme K slik at nåverdien av forventede innbetalinger er lik forventet utbetaling

"Rettferdig netto premie"

setter X = gjenstående levetid i hele år

Må finne $p(x) = P(X = x)$ $x = 0, 1, \ldots, 76$ (maks 106)

Har at (hun er 30 år når forsikringen tegnes)

$$P(X > 0) = 1 - q_{30}$$

$$P(X > 1) = (1 - q_{30})(1 - q_{31})$$

$$P(X > x) = \prod_{y=0}^{x} (1 - q_{30+y})$$

Punktsannolikhet

$$p(x) = P(X = x) = F(x) - F(x-1) \quad x = 0, 1, \ldots, 76$$

Beräkning i MATLAB

Nuvärde av utbetalningen

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1''}{1.03^x} & x \leq 64 \\ \\ 0 & x \geq 65 \end{cases}$$

Stokastisk

Förväntat nuvärde

$$E(h(x)) = \sum_{x=0}^{76} h(x)\, p(x) = \sum_{x=0}^{34} \frac{1''}{1.03^x} p(x)$$

Beräkning i matlab 42'800 kronor

Nuvärde av inbetalningen (K kronor per år)

$$g(x) = \sum_{x=0}^{\min(x,34)} \frac{k}{1.03^x} = K \sum_{x=0}^{\min(x,34)} \left(\frac{1}{1.03}\right)^x = K \frac{1 - \left(1/1.03\right)^{\min(x,34)+1}}{1 - 1/1.03}$$

Forventet nåverdi

$$E(g(X)) = \sum_{x=0}^{76} g(x)\,p(x)$$

$$= \frac{K}{1-1/1.03} \sum_{x=0}^{76} \left(1-(1/1.03)^{\min(x,34)+1}\right) p(x)$$

$$= \frac{K}{1-1/1.03} \left(\sum_{x=0}^{34} p(x) - \sum_{x=0}^{34} (1/1.03)^{x+1} \right.$$

$$\left. - \sum_{x=35}^{76} (1/1.03)^{35} p(x) \right)$$

$$= \frac{K}{1-1/1.03} \left(1 - \sum_{x=0}^{34} (1/1.03)^{x+1} p(x) \right.$$

$$\left. - (1/1.03)^{35} P(X \geq 35) \right)$$

Regne ut i MatLab

21.76 kroner

$$\underset{\text{innbet}}{K \cdot 21.76} = \underset{\text{utbet}}{42800}$$

$$K = \frac{42800}{21.76} = 1967$$

Dersom vi setter K av ligningen