Superpos. prinsippet.

$$x_n = C r_1^n + D r_2^n \quad \text{er løsninger for alle konstanter } C, D \in \mathbb{R}$$

4.2

inhomogen differenseligning på formen

$$x_{n+1} + r x_n = f(n),$$

der $f(n)$ er en gitt funksjon

En inhomogen, andreordens diff. ligning er på formen

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$$

der $f(n)$ er en gitt funksjon

gitt startbetingelser $x_0 = b_0$, $x_1 = b_1$ kan vi beregne x:

$$x_{n+2} = f(n) - b x_{n+1} - c x_n$$

Lemma 4.2.1:

La $\{x_n^p\}$ være en løsning av

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n) \qquad (2)$$

Da er alle andre løsninger av (2) på formen

$$x_n = x_n^p + x_n^h$$

der $\{x_n^h\}$ er en løsning av den homogene ligningen

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0 \qquad (1)$$

__Bevis:__

La $\{x_n\}$ være en vilkårlig ligning av (2). __Definer__

$$y_n = x_n - x_n^p$$

Da er

$$y_{n+2} + b y_{n+1} + c y_n = \underbrace{(x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n)}_{=f(n)} - \underbrace{(x^p_{n+2} + b x^p_{n+1} + c x^p_n)}_{=f(n)}$$

$$= 0$$

Så y er en løsning av (1). Vi får

$$x_n = x_n^p + y_n$$

$\blacksquare$

Moralen er: Det holder å finne én løsning av den inhomogene ligningen, så lenge vi kan løse den homogene ligningen.

__Generell strategi for å finne x^p:__

Gjett på en løsning som "ligner" på f.

- Om $f(n)$ er et polynom av grad k, prøv med et annet polynom av grad k
- Om dette ikke går, øk polygraden med én.

E.) $2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = 3$, $f_n = 3$

Vi gjetter på en løsning $x_n^P = A$, en konstant:

$2 - 5 + 2 = -1$

$$2A - 5A + 2A = -A \overset{!}{=} 3$$

$\Rightarrow A = -3$, så $x_n^P = -3$ løser ligning ②:

Den generelle løsningen av ③ er på formen

$$x_n = -3 + y_n,$$

der y_n løser

$$2y_{n+2} - 5y_{n+1} + 2y_n = 0.$$

Kar pol.:

$2r^2 - 5r + 2$, har røtter $r = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{5 \pm 3}{4}$

$r_1 = 2$, $r_2 = \frac{1}{2}$. Altså er $y_n = C2^n + D\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$\Longrightarrow \underline{\underline{x_n = -3 + C2^n + D\left(\tfrac{1}{2}\right)^n}}$$

6.3 (Kompendiet) Simulering av diff. ligninger.

La ligningen

$$x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = f(n), \quad x_0 = b_0, \quad x_0 = b_1$$

Algoritme:

$x_0, x_1 = b_0, b_1$

for $n = 2, 3, \ldots, N$

$\quad x_n = f(n-2) - b\,x_{n-1} - c\,x_{n-2}$

6.5 diff. ligninger og avrundingsfeil

Eksempel:

Løsningen av $3x_{n+2} - \frac{10}{3} + x_n = -4$

er $x_n = C\left(\frac{1}{3}\right)^n + D\,3^n + 1$

Velg $x_0 = 2$, $x_1 = 4/3 \Rightarrow C = 1, D = 0$, så

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 1$$

Siden $x_1 = 4/3$ ikke kan representeres eksakt, får vi på datamaskinen ikke $D = 0$, men $D \sim 10^{-17}$

$$\tilde{x}_n = \tilde{C}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \tilde{D}\,3^n + 1, \quad \tilde{D} \neq 0$$