Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехника и Комплексная автоматизация»

КАФЕДРА РК9 «Компьютерные системы автоматизации производства»

Отчет по Домашней Работе №1 по курсу «Имитационное моделирование технологических производственных процессов»

Выполнил: **Громадский В.В.**
Проверил: **Берчун Ю.В.**

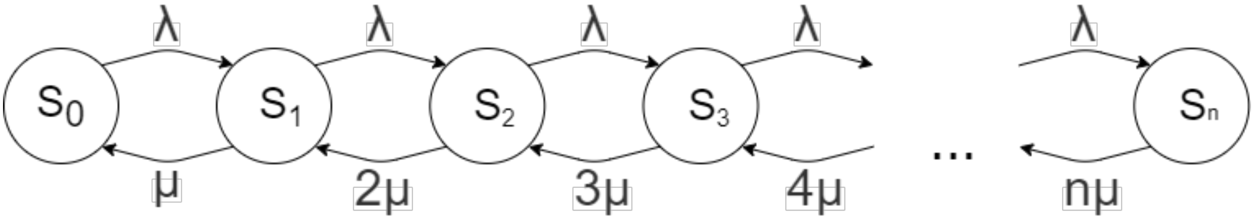
2024 г

Задача №1. Проектирование Call-центра.

Известно, что среднее время между звонками клиентов составляет Tc = 15, секунд, а среднее время обслуживания Ts = 59 секунд. Все потоки случайных событий считать пуассоновскими. Если все операторы заняты, звонок теряется.

1. Рассмотреть систему без очереди. Построить графики от числа операторов: вероятности отказа (вплоть до обеспечения отказов менее 1%); математического ожидания числа занятых операторов; коэффициента загрузки операторов.

Граф состояний:



Найдём интенсивность потока заявок и интенсивность потока обслуживания:

$$\lambda = \frac{1}{T_c}\ \text{звон}/c$$

$$\mu = \frac{1}{T_S}\ \text{обсл.звон}/c$$

Запишем формулы предельных вероятностей:

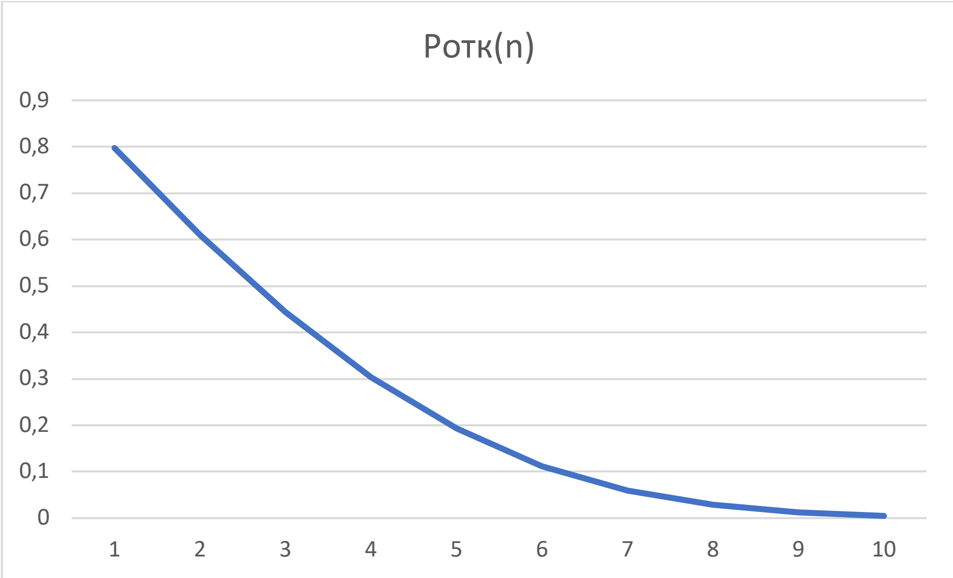
$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n}(\frac{\lambda}{\mu})^i * \frac{1}{i!}}$$

$$P_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i * \frac{1}{i!} P_0$$

Отказ происходит во время того, как все операторы заняты.

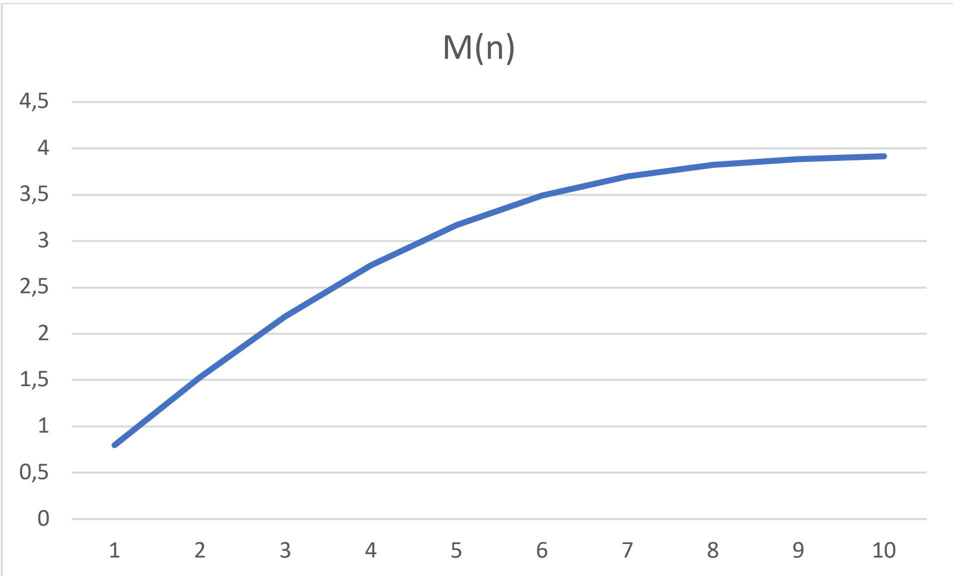
Вероятность отказа есть предельная вероятность того, что все операторы системы будут заняты:

$$P_{\text{отказа}} = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0$$



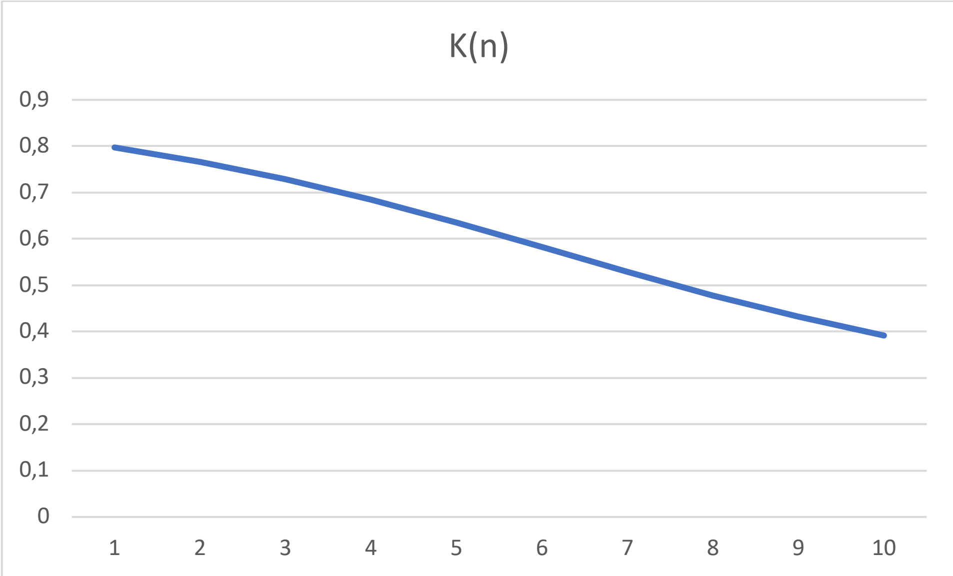
Среднее число занятых каналов есть математическое ожидание числа занятых каналов:

$$M(n) = \sum_{i=1}^{n} iP_i$$

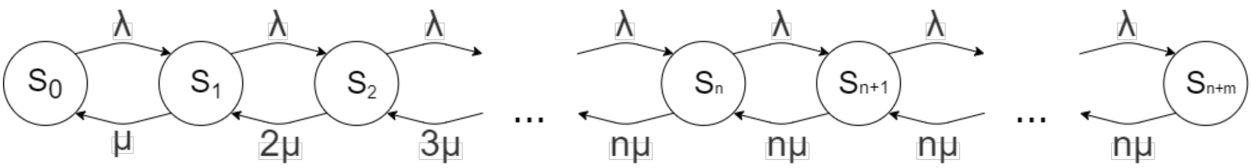


Коэффициент загрузки операторов можно вычислить как отношение среднего числа занятых операторов (мат. ожидания), к их общему числу:

$$K_{\text{загрузки}} = \frac{M(n)}{n}$$



2. Рассмотреть систему с ограниченной очередью. Варьируя число операторов (вплоть до 15), построить семейства графиков от числа мест в очереди: вероятности отказа; математического ожидания числа занятых операторов; коэффициента загрузки операторов; вероятности существования очереди; математического ожидания длины очереди; коэффициента занятости мест в очереди. Варьируя число место в очереди, построить семейства графиков от числа операторов: вероятности отказа; математического ожидания числа занятых операторов; коэффициента загрузки операторов; вероятности существования очереди; математического ожидания длины очереди; коэффициента занятости мест в очереди.



Найдем предельные вероятности, для каждого оператора и для каждого места в очереди, по формулам:

$$P_i = \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} P_0 \quad i = \overline{1, n}$$

$$P_{n+r} = \frac{\lambda^{n+r}}{n^r \times n!\,\mu^{n+r}} P_0 \quad r = \overline{1, m}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} + \sum_{r=1}^{n+m} \frac{\lambda^{n+r}}{n^r \times n!\,\mu^{n+r}}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^1}{1!\,\mu^1} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{\lambda^{n+1}}{n^1 \times n!\,\mu^{n+1}} + \cdots + \frac{\lambda^{n+m}}{n^m \times n!\,\mu^{n+m}}}$$

n – это количество операторов. m - количество заявок, стоящих в очереди, т.е. заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь, только если в ней находится менее m заявок. Если число заявок в очереди равно m, то последняя прибывшая заявка в очередь не становится и покидает систему не обслуженной.

Найдем $P_{отказа}$:

$$P_{отказа} = P_{n+m} = \frac{\lambda^{n+m}}{n^m \times n!\,\mu^{n+m}} P_0$$

График вероятности отказа от числа операторов:

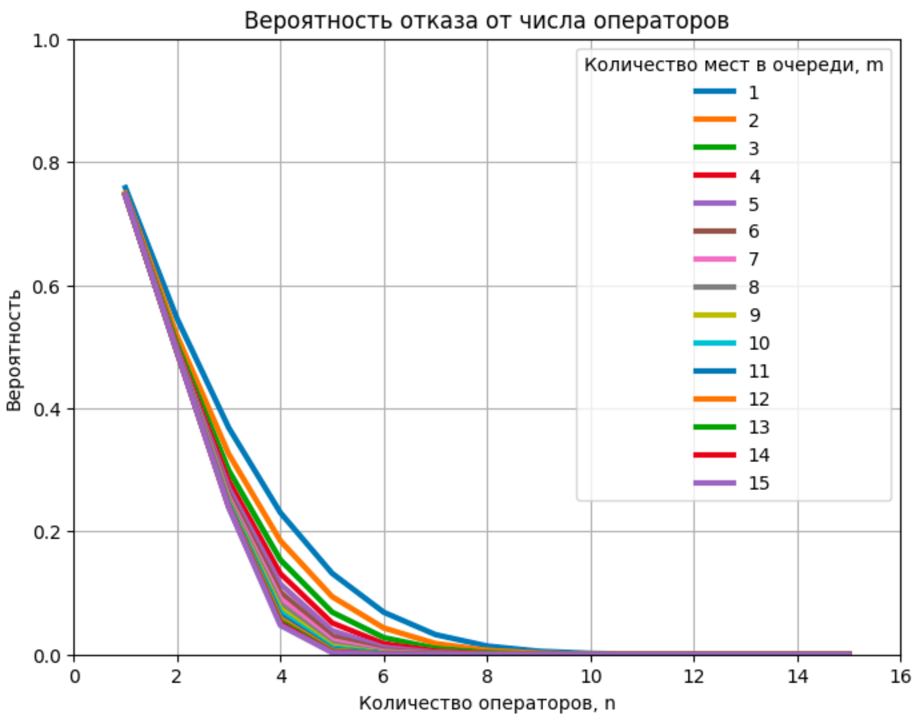
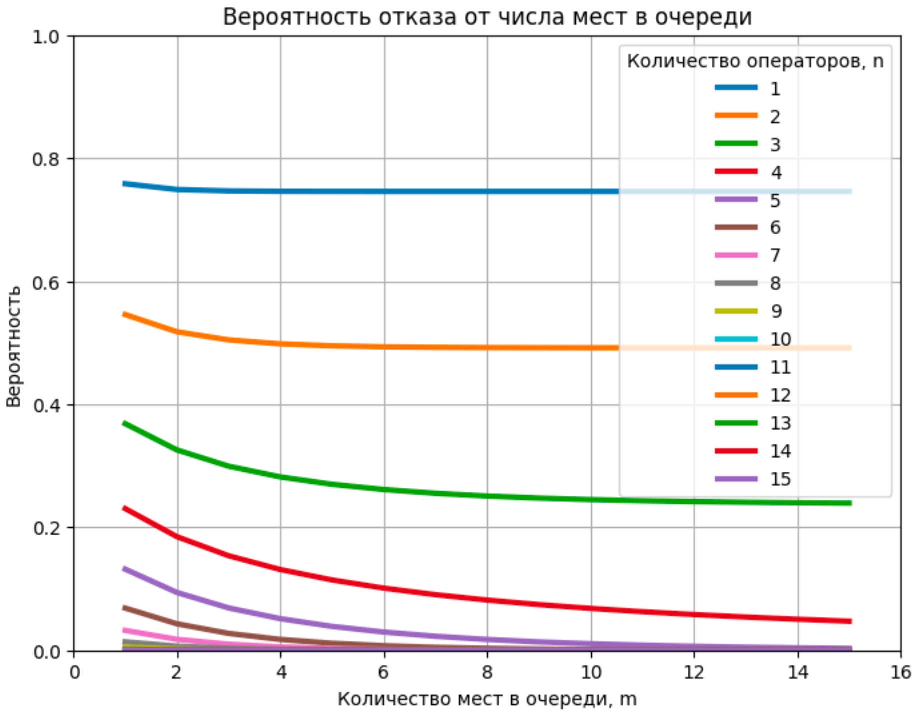


График вероятности отказа от числа мест в очереди:



Математическое ожидание числа занятых каналов, найдем по формуле:

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{r=1}^{m} nP_{n+r}$$

График математического ожидания числа занятых каналов от числа операторов:

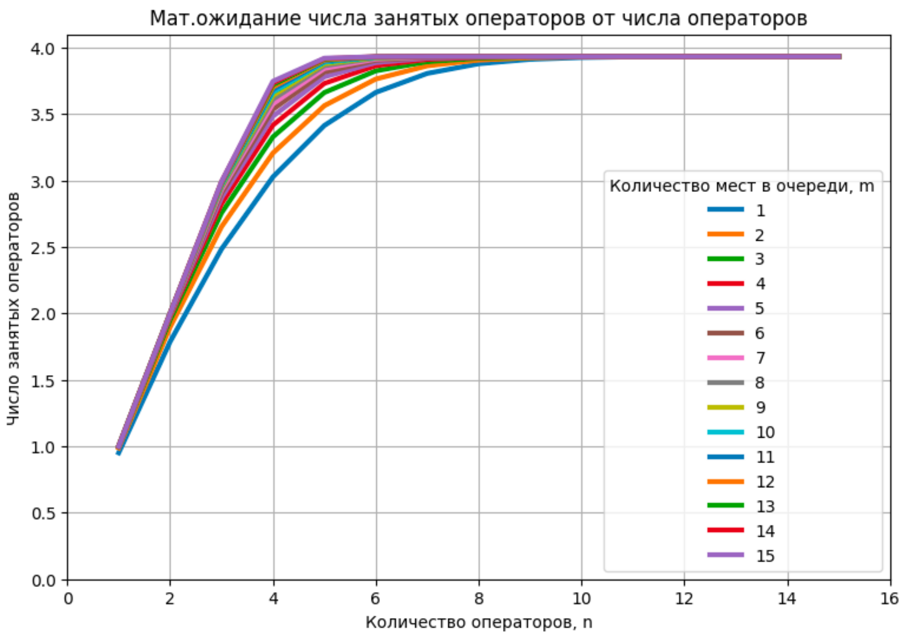
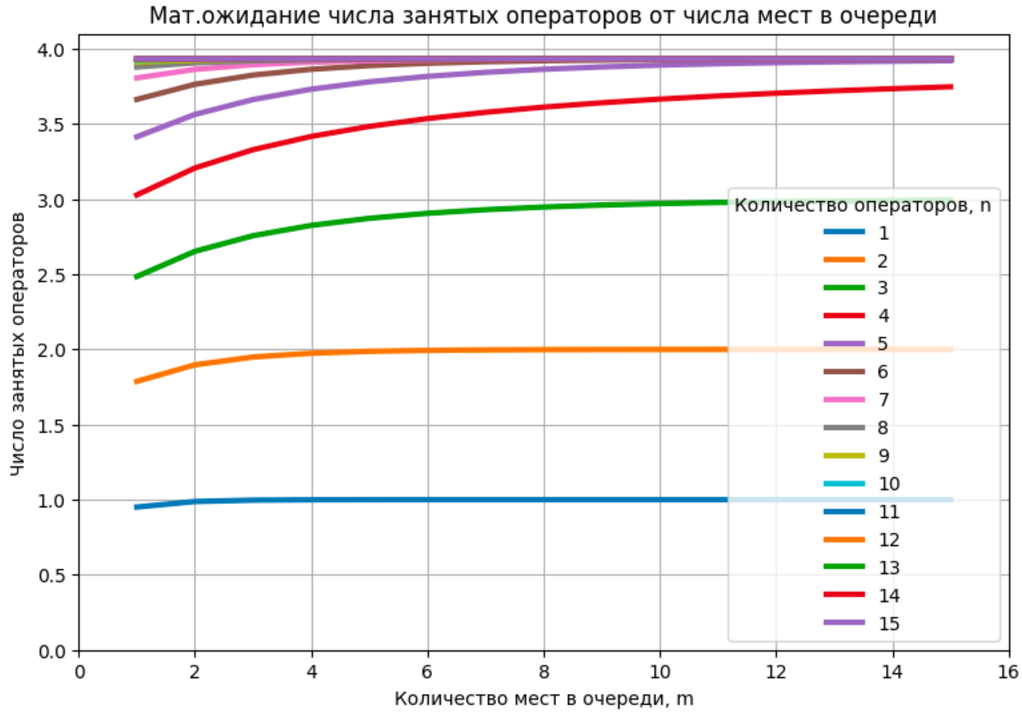


График математического ожидания числа занятых каналов от числа мест в очереди:



Математическое ожидание длины очереди, найдем по формуле:

$$M(m) = \sum_{r=1}^{m} rP_{n+r}$$

График математического ожидания длины очереди от числа операторов:

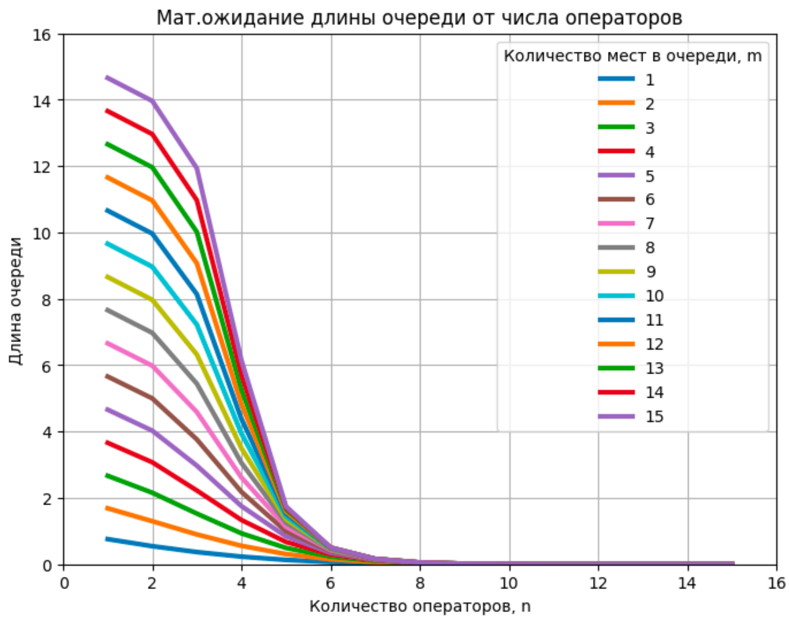
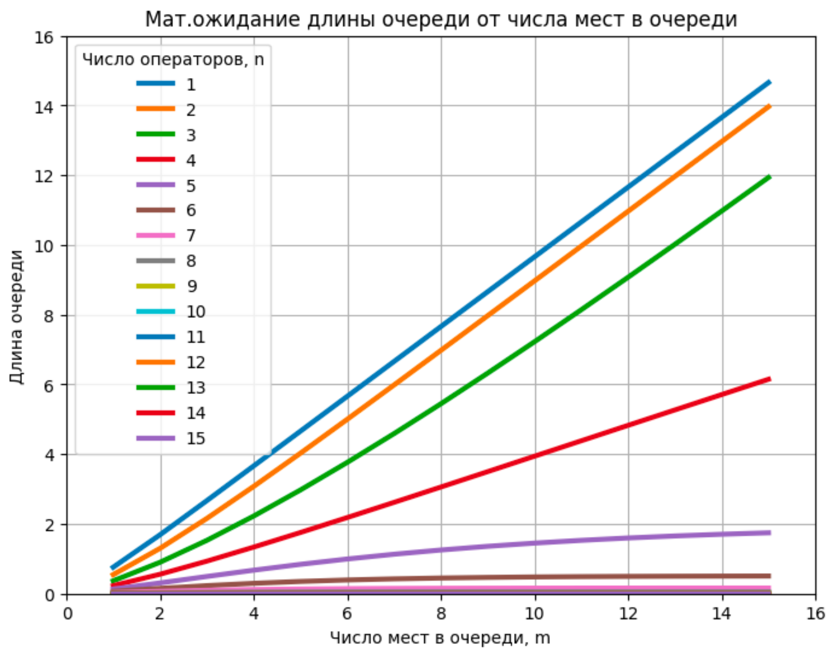


График математического ожидания длины очереди от числа мест в очереди:



Коэффициент загрузки операторов можно вычислить как отношение среднего числа занятых операторов (мат. ожидания), к их общему числу:

$$K_{\text{заг.оп.}} = \frac{M(n)}{n}$$

График коэффициента загрузки операторов от числа операторов:

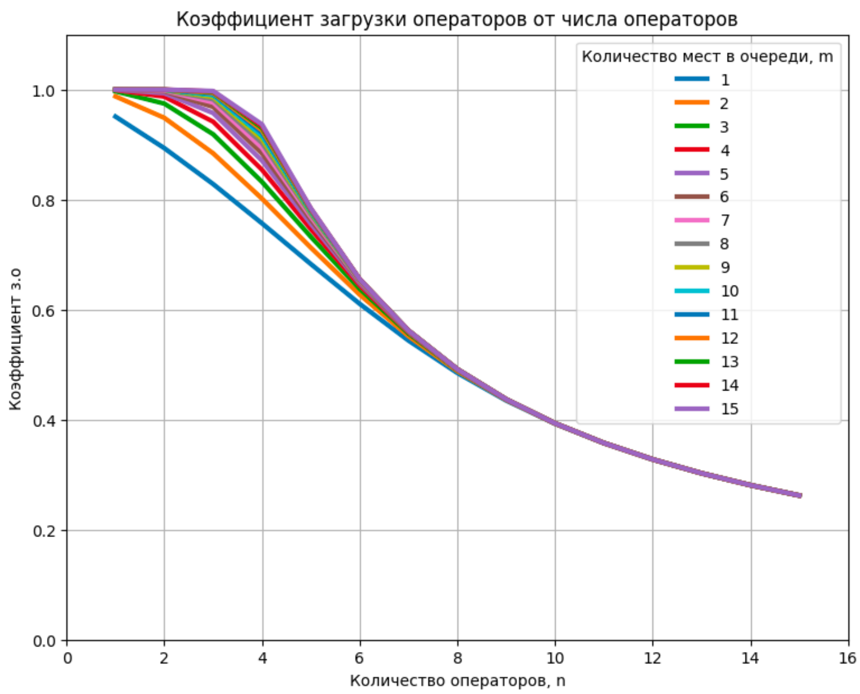
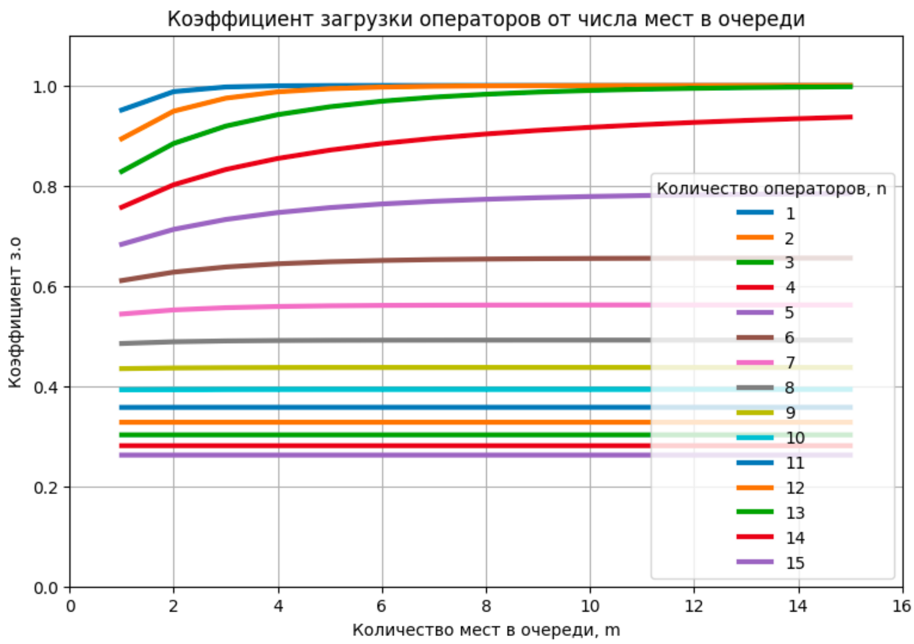


График коэффициента загрузки операторов от числа мест в очереди:



Коэффициент занятости мест в очереди можно вычислить как отношение среднего числа занятых мест в очереди (мат. ожидания), к их общему числу:

$$K_{\text{заг.оч.}} = \frac{M(m)}{m}$$

График зависимости коэффициента занятости мест в очереди от числа операторов:

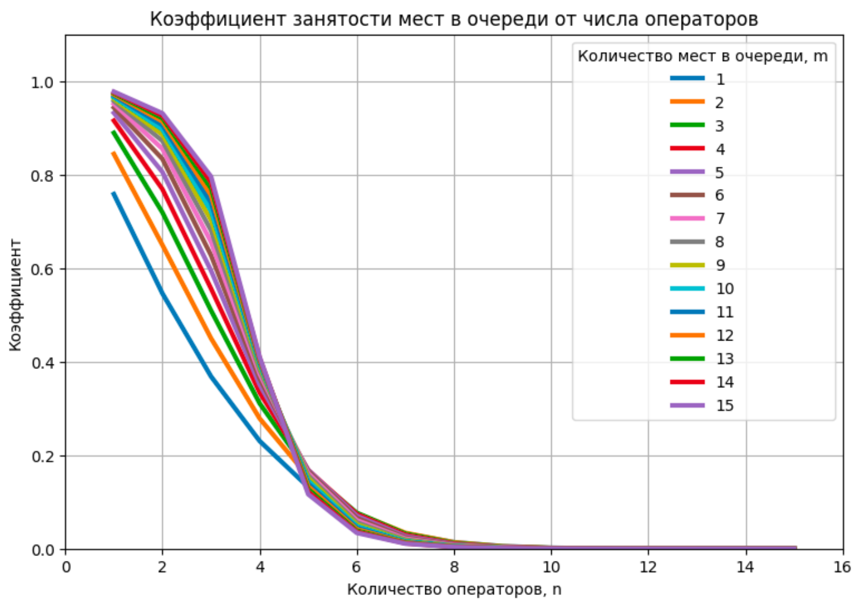
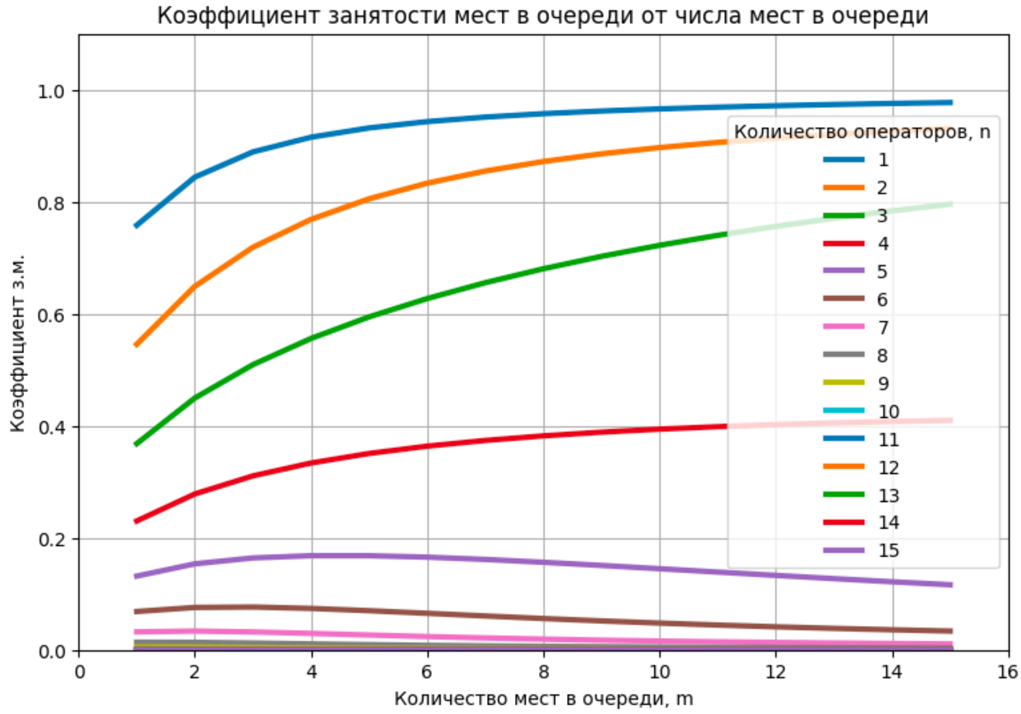


График зависимости коэффициента занятости мест в очереди от числа мест в очереди:



Образование очереди происходит, когда в момент поступления в СМО очередной заявки все n каналов заняты, т. е. когда в системе будет находиться либо n, либо $n+1,\ldots$, либо $(n+m-1)$ заявок. Так как эти события несовместимы, то вероятность образования очереди $P_{оч}$ равна сумме соответствующих вероятностей $P_n, P_{n+1},\ldots, P_{n+m-1}$:

$$P_{оч} = \sum_{r=1}^{m} P_{n+r}$$

График зависимости вероятности образования очереди от числа операторов:

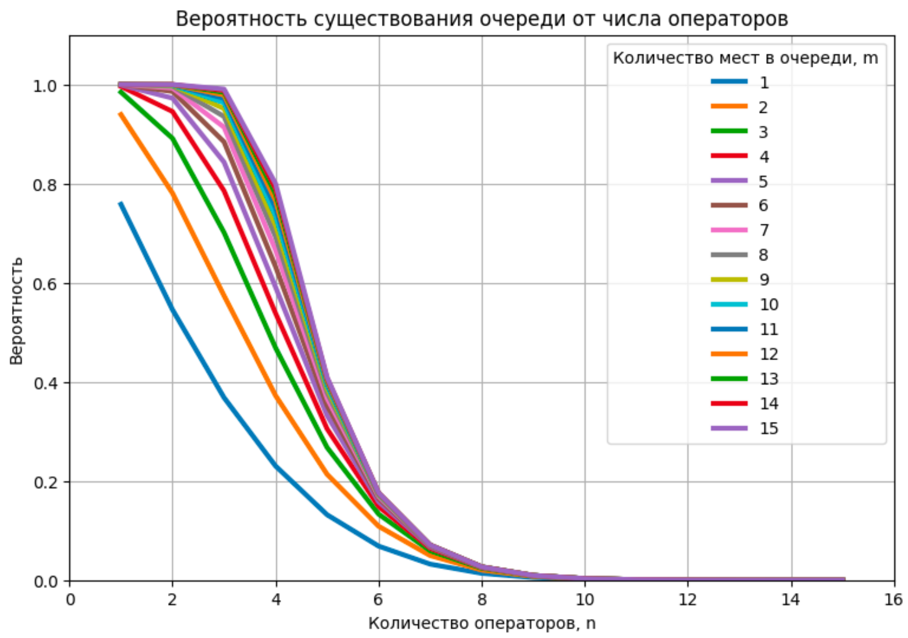
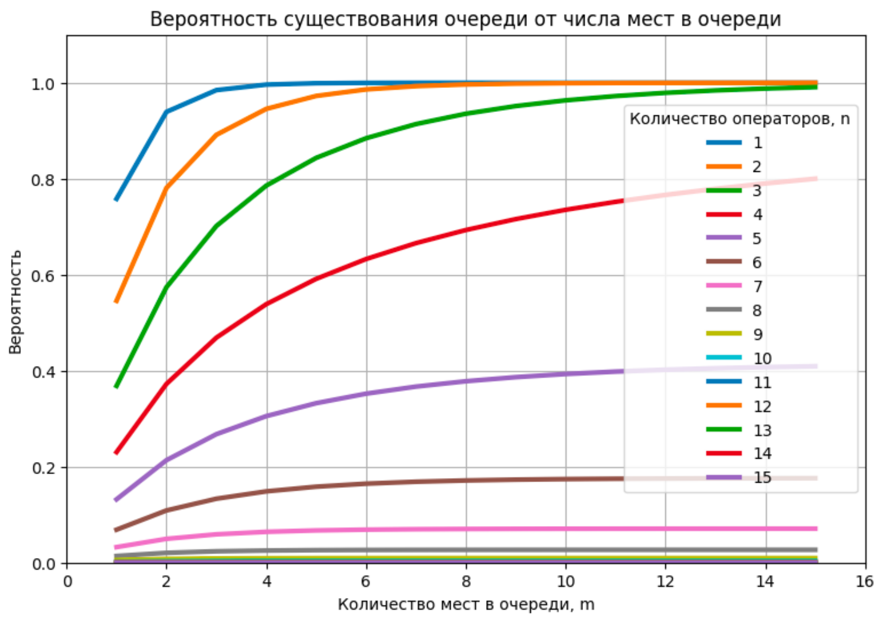
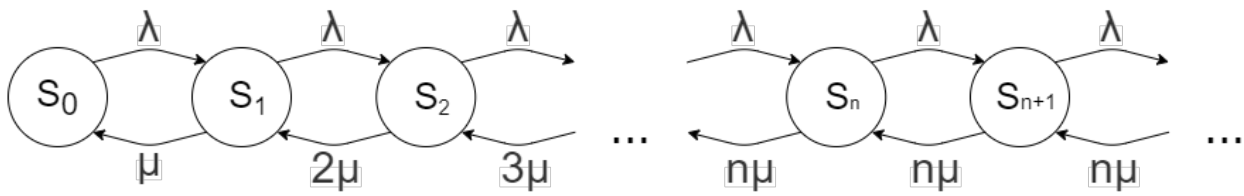


График зависимости вероятности образования очереди от числа мест в очереди:



3. Рассмотреть систему без ограничений на длину очереди. Построить графики от числа операторов (вплоть до 15): математического ожидания числа занятых операторов; коэффициента загрузки операторов; вероятности существования очереди; математического ожидания длины очереди.



Сначала найдем предельные вероятности, для каждого оператора и для каждого места в очереди, по формулам:

$$P_i = \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} P_0 \quad k = \overline{1,n}$$

$$a = \frac{\lambda}{n\mu}$$

$$P_{n+k} = a^k P_n = \frac{\lambda}{n\mu} P_n = \frac{\lambda^{n+k}}{n^k \times n!\,\mu^{n+k}} P_0 \quad k = \overline{1,\infty}$$

> Доказано, что *если* $a < 1$*, т.е. среднее число приходящих заявок меньше среднего числа обслуженных заявок (в единицу времени), то предельные вероятности существуют. Если* $a \geq 1$*, очередь растет до бесконечности.*

Для нахождения P_0, воспользуемся формулой:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^1}{1!\,\mu^1} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} \sum_{j=1}^{\infty} a^j}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\lambda^1}{1!\,\mu^1} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} * \frac{a}{1-a}}$$

Математическое ожидание числа занятых каналов, можно найти по формуле:

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{r=1}^{\infty} nP_{n+r}$$

Но также, математическое ожидание числа занятых операторов, можно определить, как среднее число занятых операторов, каждый занятый оператор обслуживает в единицу времени в среднем μ заявок, а вся система $A = \lambda$ заявок.

$$M(n) = \frac{\lambda}{\mu}$$

Коэффициент загрузки операторов можно вычислить как отношение среднего числа занятых операторов (мат. ожидания), к их общему числу:

$$K_{\text{загрузки}} = \frac{M(n)}{n}$$

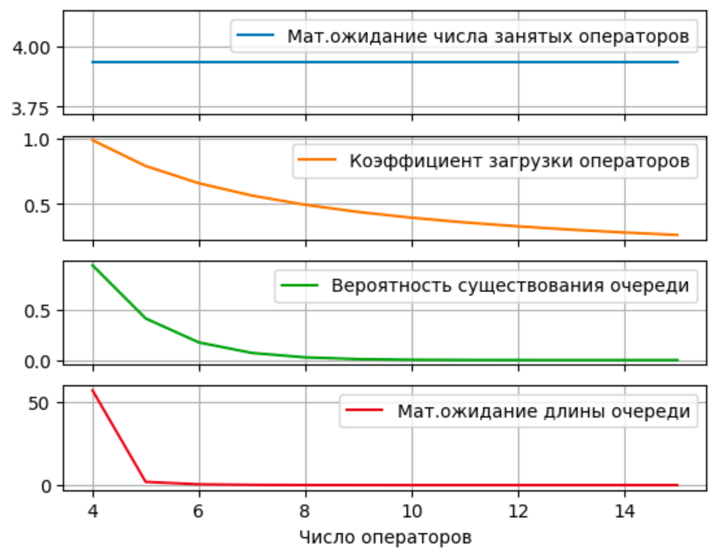
Вероятность образования очереди равна вероятности застать все каналы уже занятыми обслуживанием, т. е. когда в системе будет находиться, $n, n + 1, \ldots,$ требований. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что все каналы заняты, равна сумме вероятностей $P_n, P_{n+1} \ldots$ Отсюда вероятность образования очереди:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} P_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n+r}}{n^r \times n!\, \mu^{n+r}} P_0 = \sum_{r=1}^{\infty} a^r P_r$$

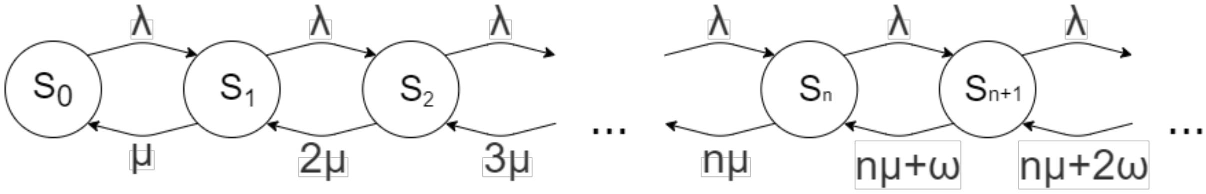
Найдем математическое ожидание очереди, складывая произведения возможного числа заявок на вероятность того, что число заявок будет в очереди:

$$M_{\text{оч}} = \sum_{r=1}^{\infty} r P_{n+r} = \sum_{r=1}^{\infty} r \frac{\lambda^{n+r}}{n^r \times n!\, \mu^{n+r}} P_0$$

Графики:



4. Рассмотреть систему без ограничений на длину очереди, учитывающей фактор ухода клиентов из очереди (среднее приемлемое время ожидания – Tw = 105 секунд). Построить графики от числа операторов (вплоть до 15): математического ожидания числа занятых операторов; коэффициента загрузки операторов; вероятности существования очереди; математического ожидания длины очереди.



Для такой СМО время ожидания обслуживания, когда заявка находится в очереди, считается случайной величиной, распределённой по показательному закону с параметром $\omega = \frac{1}{T_w}$, ω - имеет смысл интенсивности потока ухода заявок из очереди.

Теперь найдем предельные вероятности, для каждого оператора и для каждого места в очереди, по формулам:

$$P_i = \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} P_0 \quad i = \overline{1,n}$$

$$P_{n+r} = \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} \times \frac{\lambda^r}{\prod_{i=1}^{r}(n\mu + i\omega)} P_0 \quad r = \overline{1,\infty}$$

Для нахождения P_0, воспользуемся формулой:

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^1}{1!\,\mu^1} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\left(\frac{\lambda}{(n\mu + \omega)} + \ldots + \frac{\lambda^r}{\prod_{j=1}^{r}(n\mu + j\omega)} + \ldots\right)}$$

Математическое ожидание числа занятых каналов, найдем по формуле

$$M(n) = \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{r=1}^{\infty} nP_{n+r} = P_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{i \cdot \lambda^i}{i! \cdot \mu^i} + nP_n \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda}{n\mu + k\nu}$$

Найдем математическое ожидание очереди, складывая произведения возможного числа заявок на вероятность того, что число заявок будет в очереди:

$$M_{оч} = \sum_{r=1}^{\infty} r P_{n+r}$$

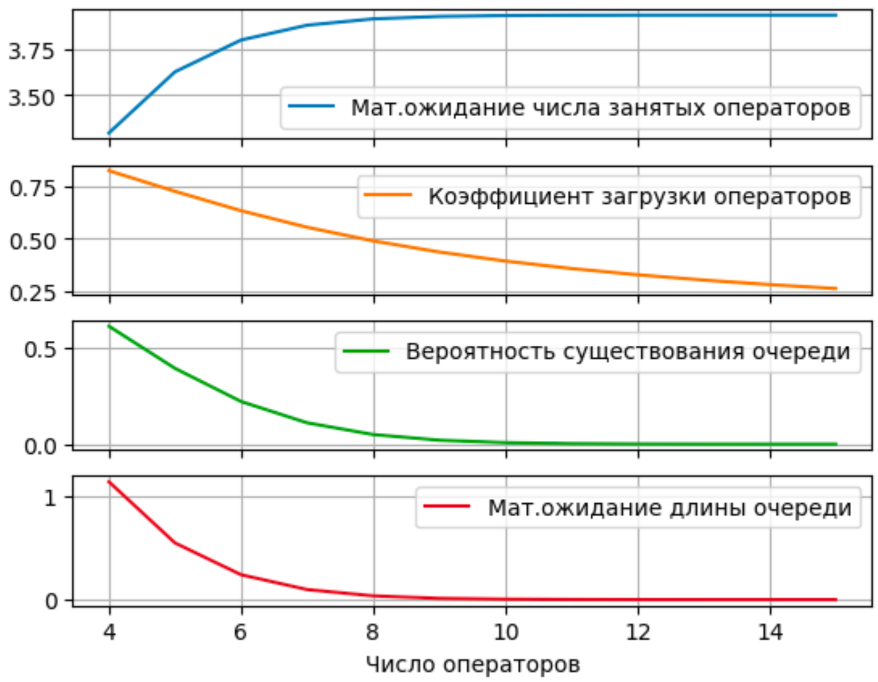
Коэффициент загрузки операторов можно вычислить как отношение среднего числа занятых операторов (мат. ожидания), к их общему числу:

$$K_{загрузки} = \frac{M(n)}{n}$$

Образование очереди возможно, когда вновь поступившее требование застанет в системе не менее n требований, т. е. когда в системе будет находиться, $n, n+1, \dots,$ требований. Эти события независимы, поэтому вероятность того, что все каналы заняты, равна сумме вероятностей P_n, $P_{n+1} \dots$ Отсюда вероятность образования очереди:

$$P_{оч} = \sum_{r=0}^{\infty} P_{n+r}$$

Графики:

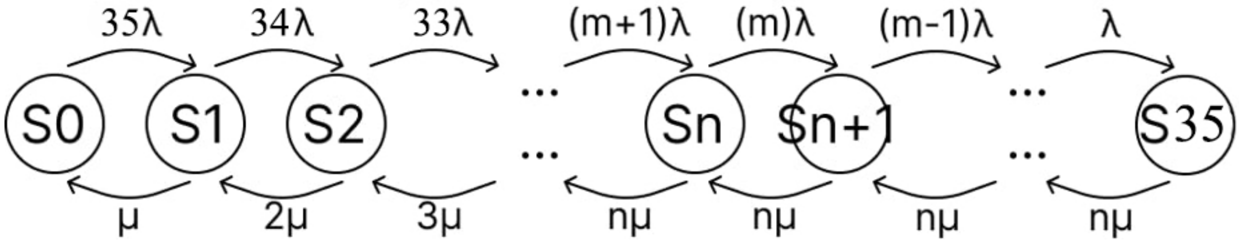


Задача №2. Проектирование производственного участка.
Имеется участок с N = 35 станками. Среднее время между наладками составляет Tc = 105 минут, среднее время наладки – Ts = 44 минут. Все потоки случайных событий считать пуассоновскими. Построить графики от числа наладчиков: математического ожидания числа простаивающих станков; математического ожидания числа станков, ожидающих обслуживания; вероятности ожидания обслуживания; математического ожидания числа занятых наладчиков; коэффициента занятости наладчиков.

$$\lambda = \frac{1}{T_c}\ \text{наладок}/\text{мин}$$

$$\mu = \frac{1}{T_S}\ \text{налаж. станков}/\text{мин}$$

В этой задаче мы рассматриваем замкнутую СМО. Пусть n – это количество наладчиков, тогда n + m = 35 – это количество источников заявок, то есть станков.



$$P_i = \begin{cases} \dfrac{35!\,\lambda^i}{i!\,(35-i)!\,\mu^i} P_0, & i = 1 \dots n \\ \dfrac{35!\,\lambda^i}{n^{i-n} n!\,(35-i)!\,\mu^i} P_0, & i = n+1 \dots 35 \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} \frac{35!\,\lambda^i}{i!\,(35-i)!\,\mu^i} + \sum_{i=n+1}^{35} \frac{35!\,\lambda^i}{n^{i-n} n!\,(35-i)!\,\mu^i}}$$

Математическое ожидание числа простаивающих станков, то есть обслуживаемых и ожидающих обслуживания, можно найти по следующей формуле:

$$M\text{пр} = \sum_{i=1}^{35} i P_i$$

Математическое ожидание числа станков, ожидающих обслуживания (то есть в очереди), можно найти по следующей формуле:

$$Mo = \sum_{i=n+1}^{35} (i - n)P_i$$

Найдем вероятность того, что поступивший станок тут же начнут налаживать:

$$P\text{об} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(35 - i)P_i}{35 - M\text{пр}} = \frac{1}{35 - M\text{пр}} \sum_{i=0}^{n-1} (35 - i)P_i$$

Тогда вероятность того, что станок встанет в очередь (то есть вероятность ожидания обслуживания) можно найти так:

$$P_{\text{оч}} = 1 - P\text{об} = 1 - \frac{1}{35 - M\text{пр}} \sum_{i=0}^{n-1} (35 - i)P_i$$

Математическое ожидание числа занятых наладчиков (среднее число налаживаемых станков) можно найти по формуле:

$$\text{М}_{\text{з}} = n - \sum_{i=0}^{n-1} (n - i)P_i$$

Коэффициент занятости наладчиков:

$$\text{К}_{\text{з}} = \frac{\text{М}_{\text{з}}}{n}$$

Графики: