MODI – projekt I, zadanie 14

Adam Misiak 310204

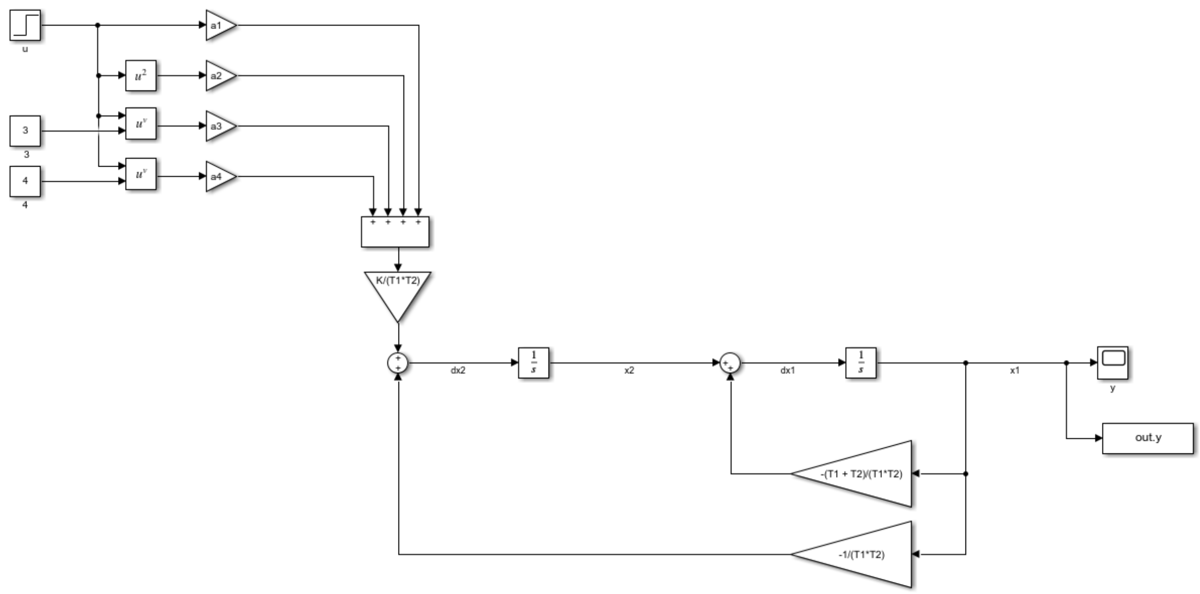
Obiekt dynamiczny opisany jest ciągłym modelem w przestrzeni stanu

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2}(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t))$$

y(t) = $x_1(t)$

gdzie:
K = 2, $T_1 = 5$, $T_2 = 8$, $\alpha_1 = 0{,}32$, $\alpha_2 = 0{,}45$, α_3 = -0,29, $\alpha_4 = -0{,}1$
Oraz
-1 ≤ u ≤ 1

Zad 1.
Narysować interpretację graficzną dynamicznego modelu ciągłego



Rys.1 zawartość pliku: ciagly_model_dynamiczny.slx

Zad 2.
Wyznaczyć równania dynamiczne modelu dyskretnego, narysować jego reprezentację graficzną

Równania dynamiczne modelu dyskretnego:

Jako T przyjmę czas próbkowania dla modelu dyskretnego.

x_1:

$$\frac{x_1(k+1) - x_1(k)}{T} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(k) + x_2(k)$$

$$x_1(k+1) = (-T\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 1)\, x_1(k) + T x_2(k)$$

x_2:

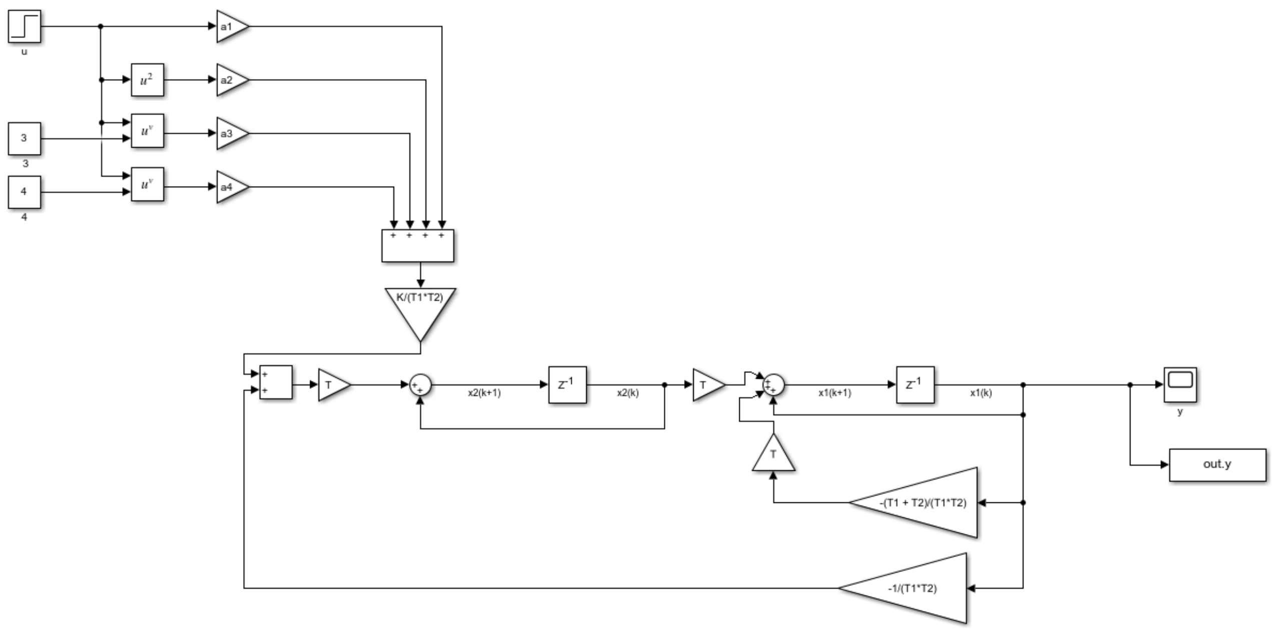
$$\frac{x_2(k+1) - x_2(k)}{T} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2}(\alpha_1 u(k) + \alpha_2 u^2(k)$$
$$+ \alpha_3 u^3(k) + \alpha_4 u^4(k))$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + T(-\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k) + \frac{K}{T_1 T_2}(\alpha_1 u(k) + \alpha_2 u^2(k)$$
$$+ \alpha_3 u^3(k) + \alpha_4 u^4(k))$$

y:

$$\mathrm{y(k)} = x_1(k)$$

Reprezentacja graficzna modelu dyskretnego:



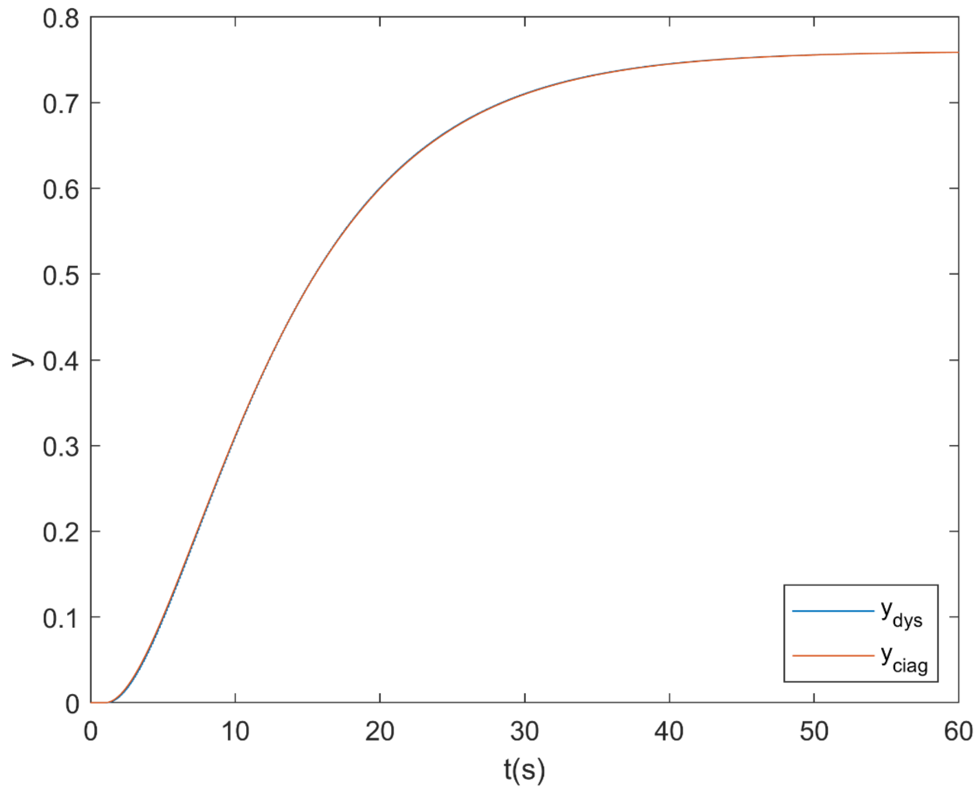
Rys. 2 zawartość pliku: dyskretny_model_dynamiczny.slx

Zad 3.
Zasymulować dynamiczny model ciągły i dyskretny dla tego samego skoku sygnału sterującego przy zerowych warunkach początkowych.

Odpowiedzi układów w zależności od czasu próbkowania T
Sygnał sterujący to skok jednostkowy w 1 sekundzie

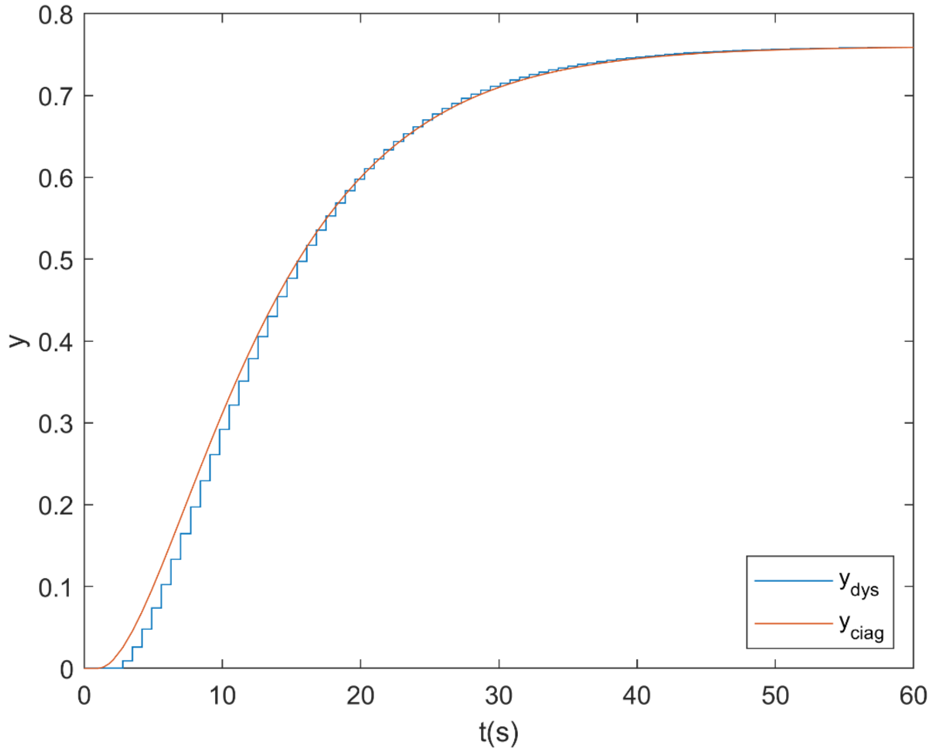
(Symulacje w pliku: *modele_dynamiczne.slx*)

T = 0.1



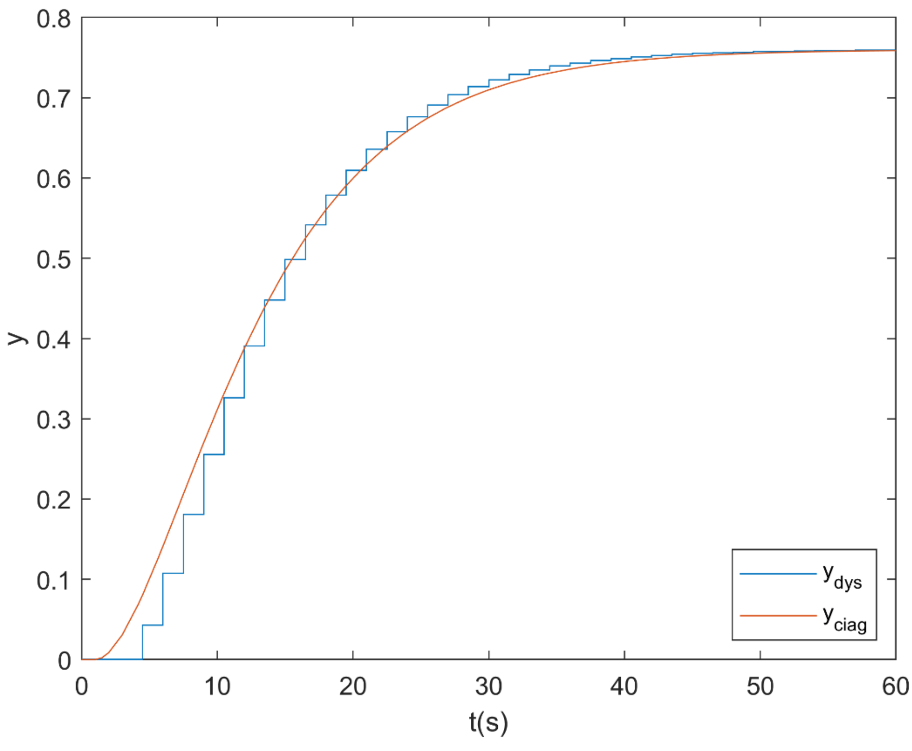
Rys. 3a Odpowiedź układów dla małego czasu próbkowania T = 0.1

T = 0.7



Rys. 3b Odpowiedź układów dla średniego czasu próbkowania T = 0.7

T = 1.5



Rys. 3c Odpowiedź układów dla dużego czasu próbkowania T = 1.5

Wnioski:
Wraz ze zwiększaniem czasu próbkowania T, model dynamiczny coraz mniej dokładne odwzorowuje model ciągły (na wykresie możemy zaobserwować coraz większe schody)

Zad 4.
Na podstawie dynamicznego modelu dyskretnego wyznaczyć wzór i narysować charakterystykę statyczną y(u)

Wyprowadzanie charakterystyki statycznej
1)

$$x_1(k+1) = x_1(k)$$

$$x_1(k+1) = (-T\,\frac{T_1 + T_2}{T_1T_2} + 1)\,x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$0 = (-T\,\frac{T_1 + T_2}{T_1T_2})\,x_1(k) + Tx_2(k)$$

$$x_2 = \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}\,x_1$$

2)

$$x_2(k+1) = x_2(k)$$

$$x_2(k+1) = x_2(k) + T(-\frac{1}{T_1T_2}x_1(t) + \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1u(t) + \alpha_2u^2(t)$$

$$+ \alpha_3u^3(t) + \alpha_4u^4(t)))$$

$$0 = T(-\frac{1}{T_1T_2}x_1(t) + \frac{K}{T_1T_2}(\alpha_1u(t) + \alpha_2u^2(t)$$

$$+ \alpha_3u^3(k) + \alpha_4u^4(k))$$

$$x_1K(\alpha_1u + \alpha_2u^2 + \alpha_3u^3 + \alpha_4u^4)$$

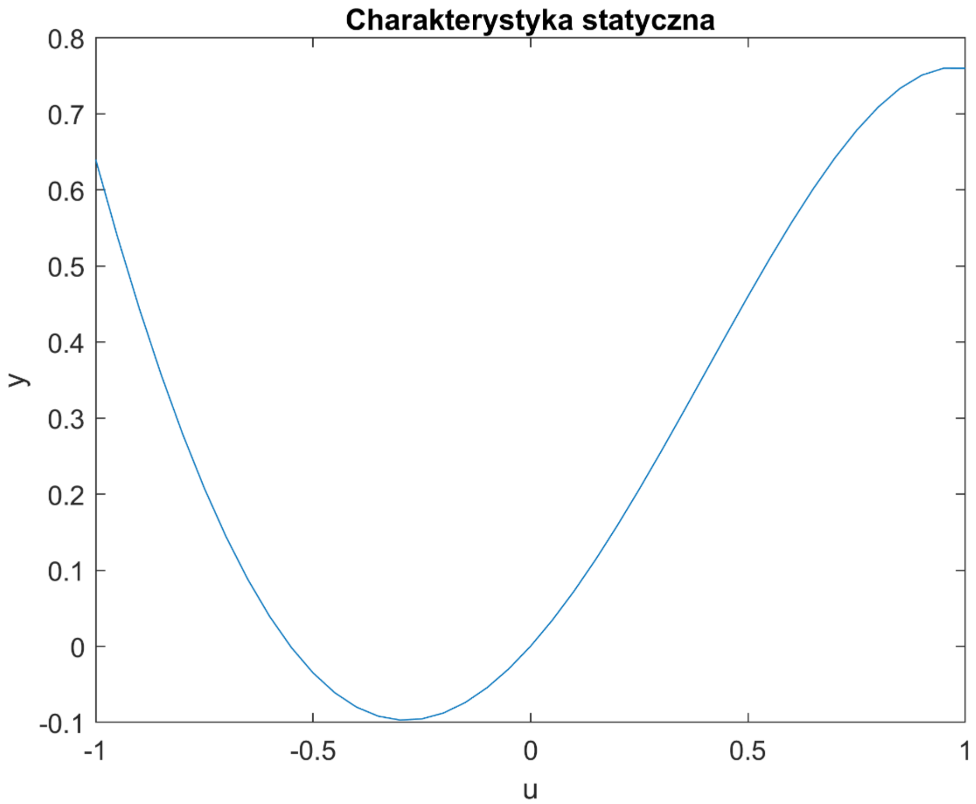
3)

$$\mathrm{y} = x_1$$

$$\mathrm{y(u)} = K(\alpha_1u + \alpha_2u^2 + \alpha_3u^3 + \alpha_4u^4)$$

Wzór na charakterystykę statyczną y(u):

$$\mathrm{y(u)} = \frac{16\,u}{25} + \frac{9\,u^2}{10} - \frac{29\,u^3}{50} - \frac{u^4}{5}$$



Rys. 4 Charakterystyka statyczna

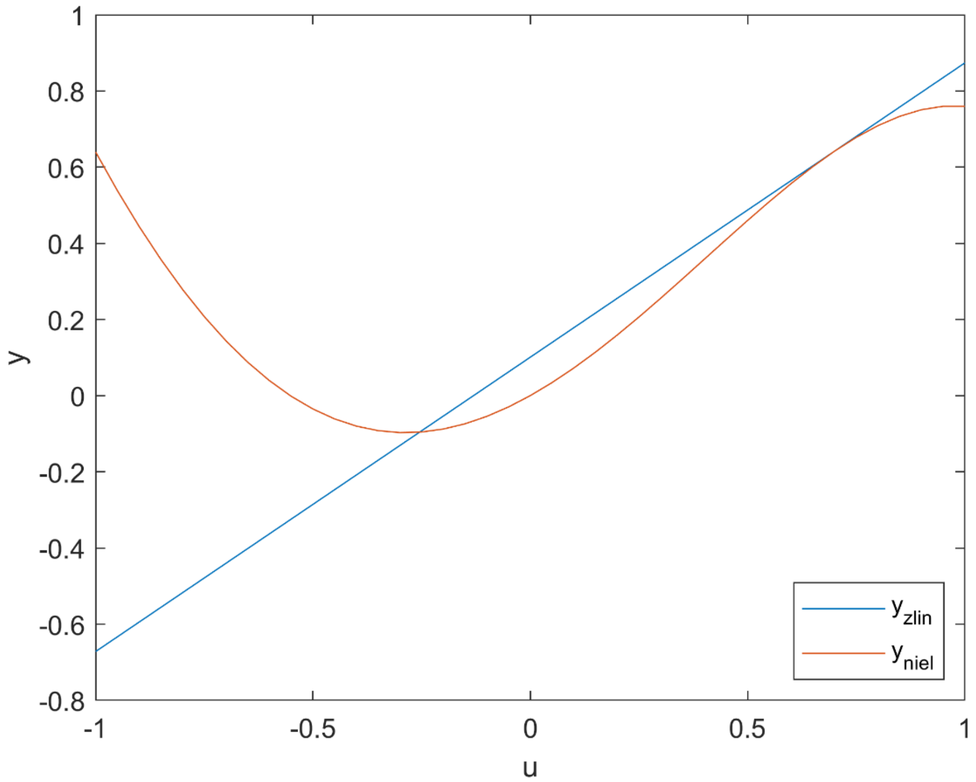
Zad 5.
Wyznaczyć analitycznie charakterystykę statyczną zlinearyzowaną w dowolnym punkcie ū.

Wzór po zlinearyzowaniu:

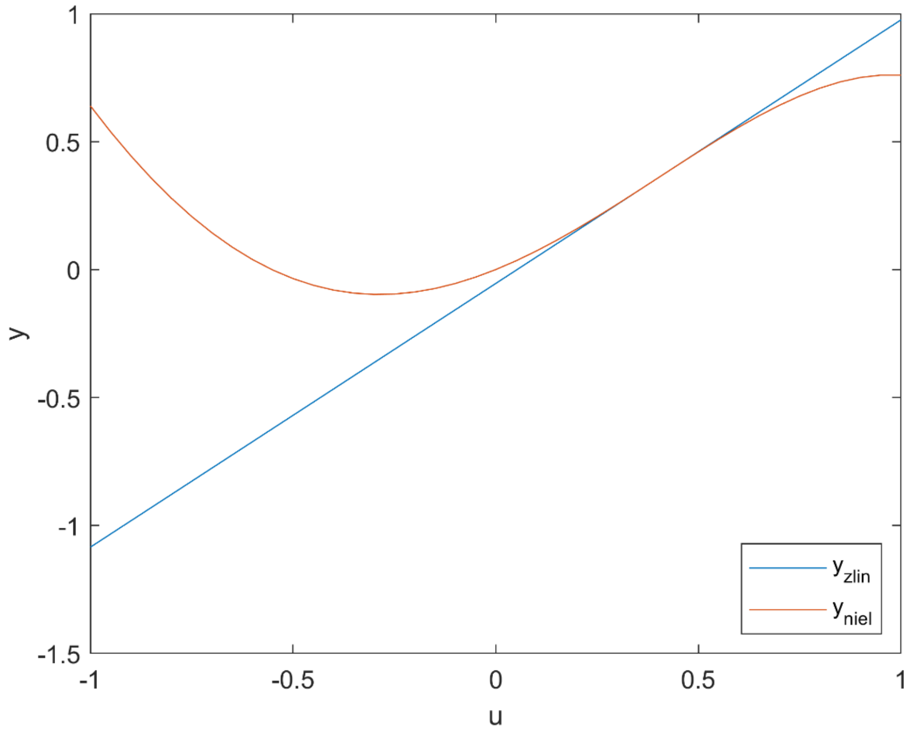
$$y(u) \approx \frac{u\left(-40\,\bar{u}^3-87\,\bar{u}^2+90\,\bar{u}+32\right)}{50}-\frac{9\,\bar{u}^2}{10}+\frac{29\,\bar{u}^3}{25}+\frac{3\,\bar{u}^4}{5}$$

Zad 6.
Narysować zlinearyzowaną charakterystykę statyczną na tle charakterystyki nieliniowej.

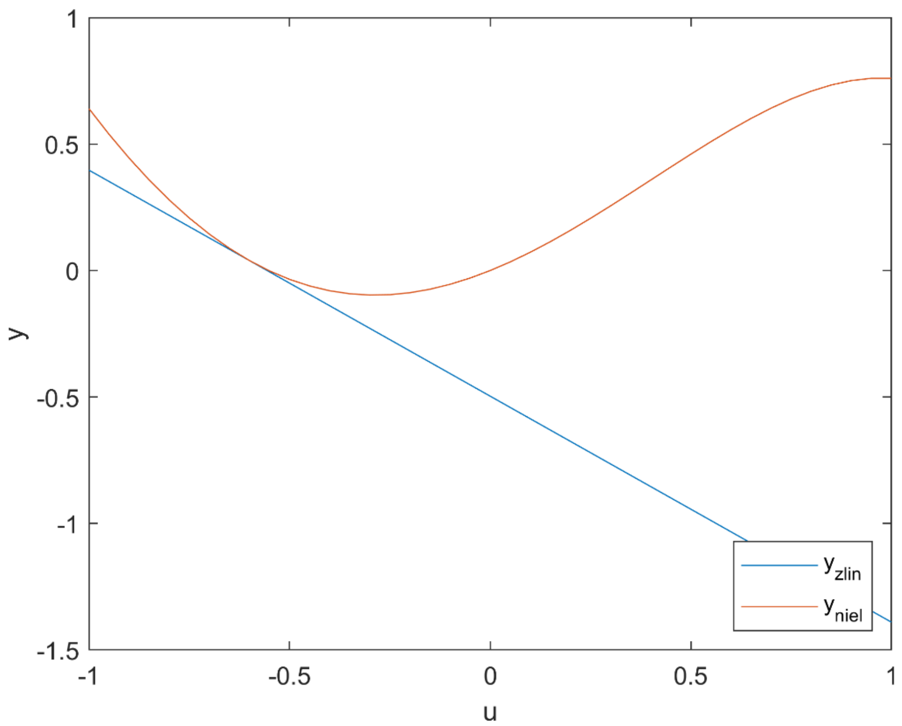
ū = 0.7



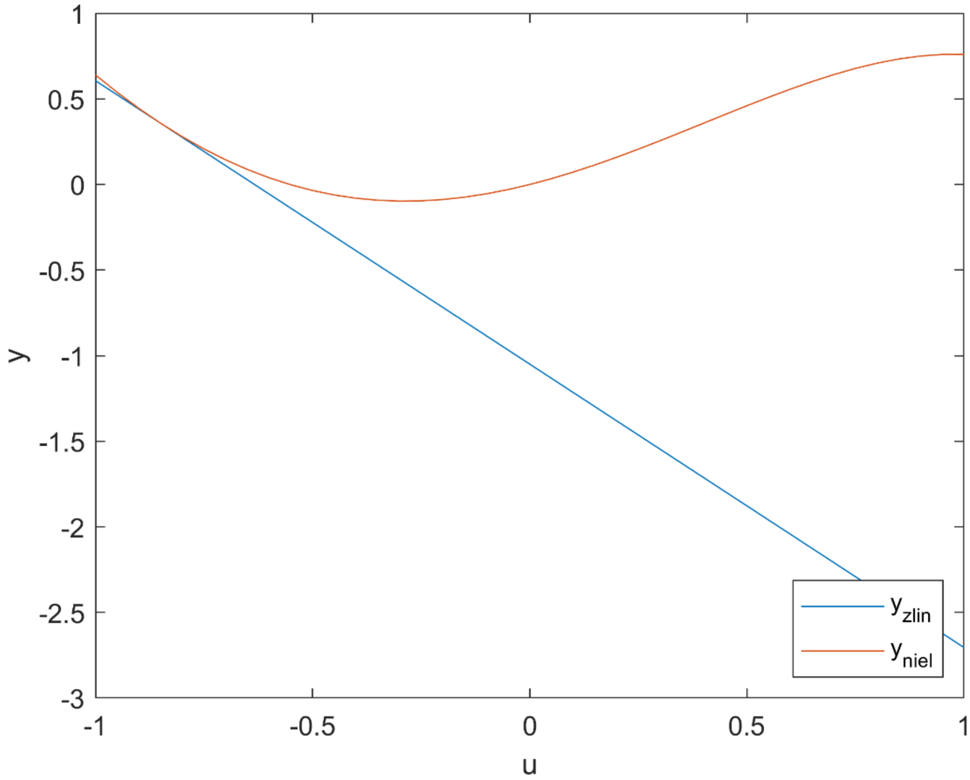
$\bar{u}$ = 0.4



$\bar{u}$ = -0.6



$\bar{u}$ = -0.85



Wnioski:

Ciężko jest wyznaczyć punkt, który dawałby dobre rezultaty (funkcja zlinearyzowana na stosunkowo długim odcinku odzwierciedlałaby funkcje nieliniową) dla całej charakterystyki, jednakże w podanym przedziale dobre dopasowanie osiąga charakterystyka zlinearyzowana w punkcie $\bar{u}$ = 0.7 oraz $\bar{u}$ = 0.4

Zad 7.
Wyznaczyć analitycznie dynamiczny dyskretny model zlinearyzowany w dowolnym punkcie ū.

W członie x_2 występuje nieliniowość w postaci nieliniowego sygnału sterującego, linearyzując x_2 otrzymujemy następujące równania zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego

x_1:

$$x_1(k+1) = \left(-T\,\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 1\right) x_1(k) + T x_2(k)$$

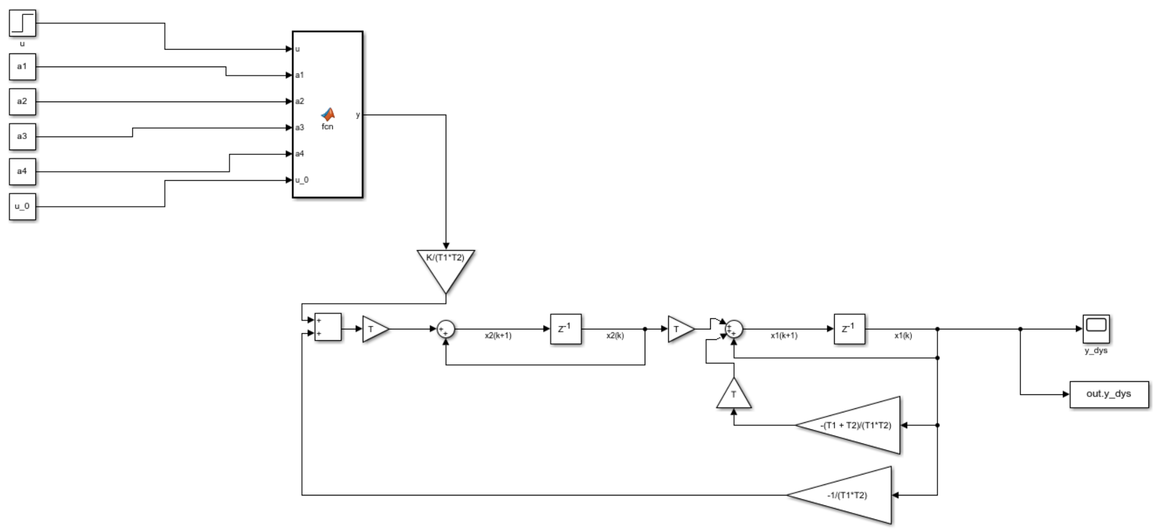
x_2:

$$x_2(k+1) = x_2(k) + T\left(-\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k) + \frac{K}{T_1 T_2}\left(\alpha_1 u(k) + \alpha_2(\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})) + \alpha_3(\bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u - \bar{u})) + \alpha_4(\bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u - \bar{u}))\right)\right)$$

y:

$$y(k) = x_1(k)$$

Zad 8.
Narysować reprezentację graficzną zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego



Rys. 8 zawartość pliku: zlinearyzowany_dyskretny_model_dynamiczny.slx

Gdzie zawartość bloku MATLAB Function jest następująca:

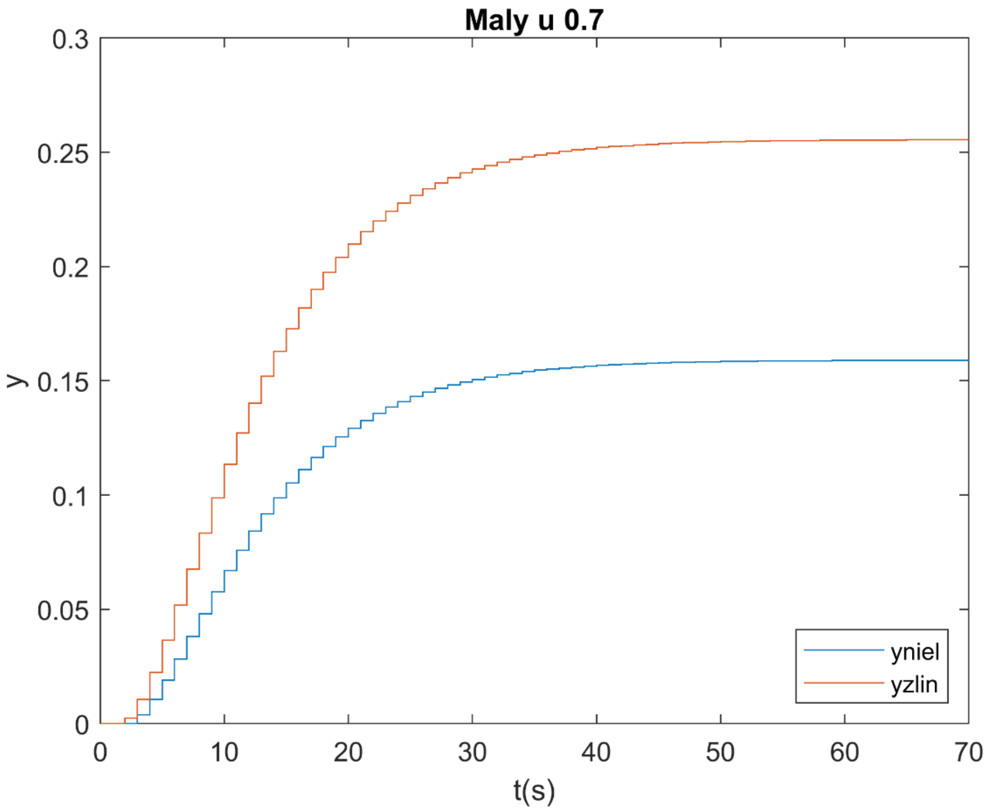
```
function y = fcn(u,a1,a2,a3,a4,u_0)
y = a1* u + a2*((u_0)^2 + 2*u_0*(u-u_0)) + a3*((u_0)^3 +
3*(u_0^2)*(u-u_0)) + a4*((u_0)^4 + 4*(u_0^3)*(u-u_0));
end
```

Zad 9.
Zasymulować dynamiczny model dyskretny w wersji nieliniowej i zlinearyzowanej.

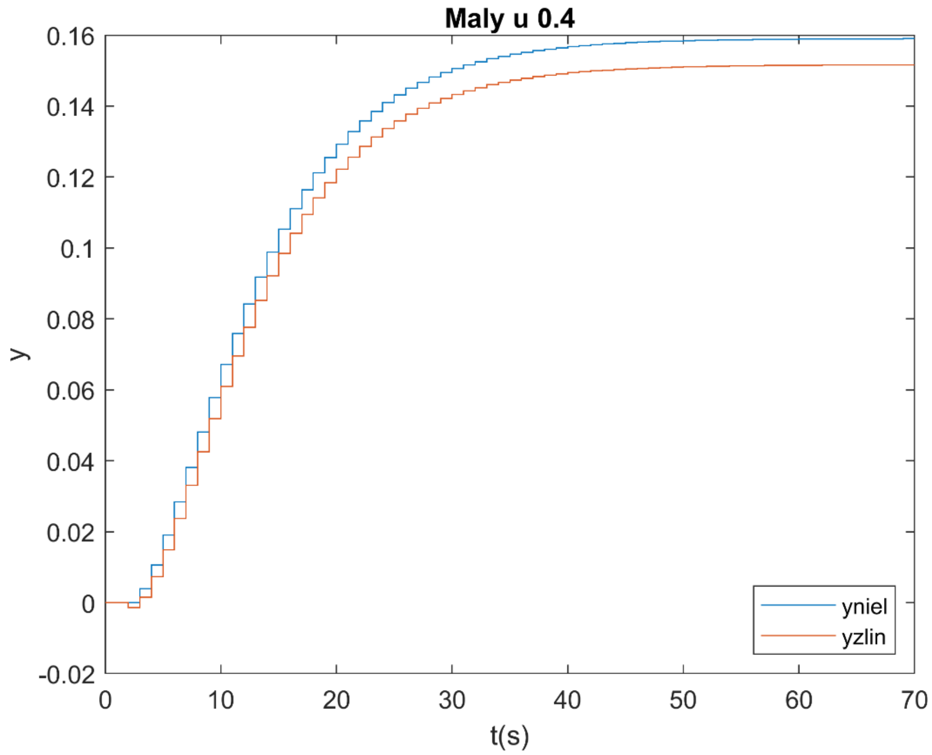
(Symulacje w pliku: modele_dyskretne.slx)
Mały sygnał sterujący:

Skok **ū** z 0 do 0.2 w 1 sekundzie:

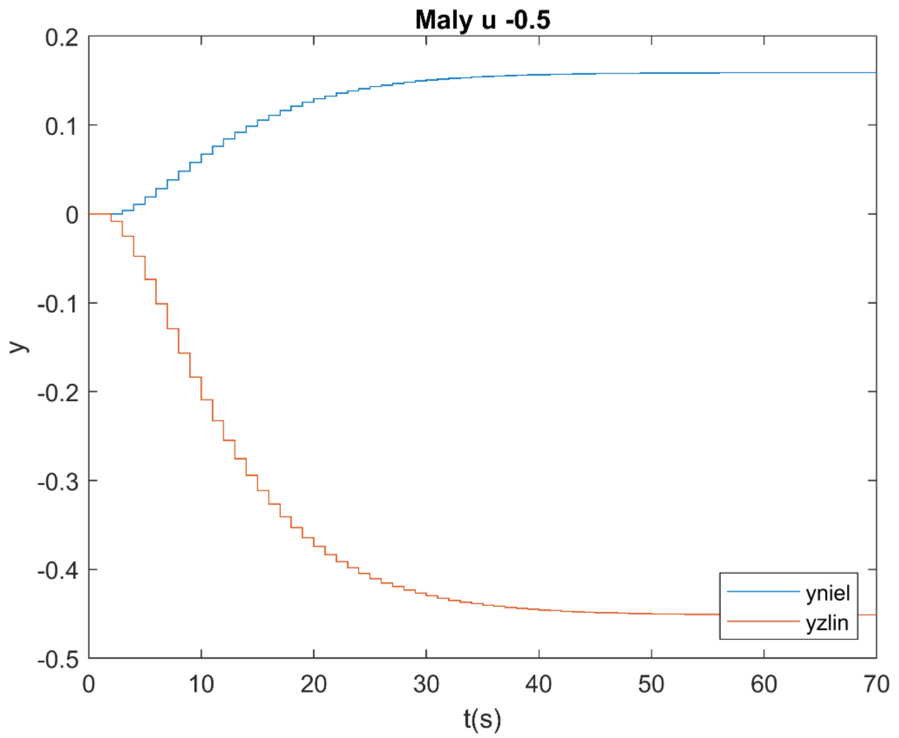
ū = 0.7



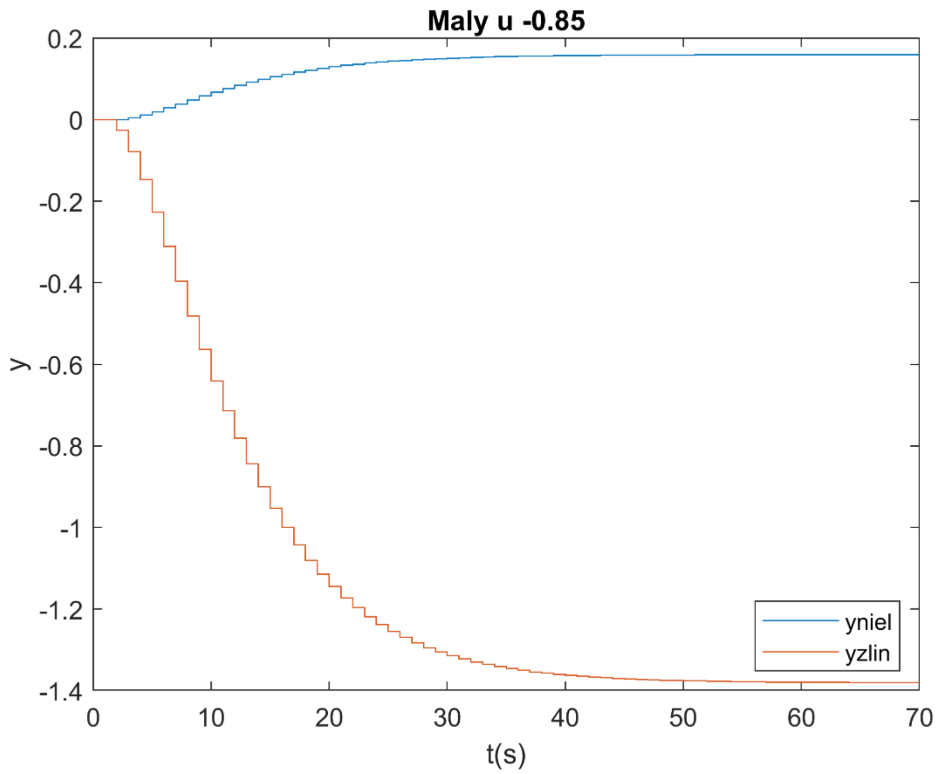
$\bar{u}$ = 0.4



$\bar{u}$ = -0.5



$\bar{u}$ = -0.85

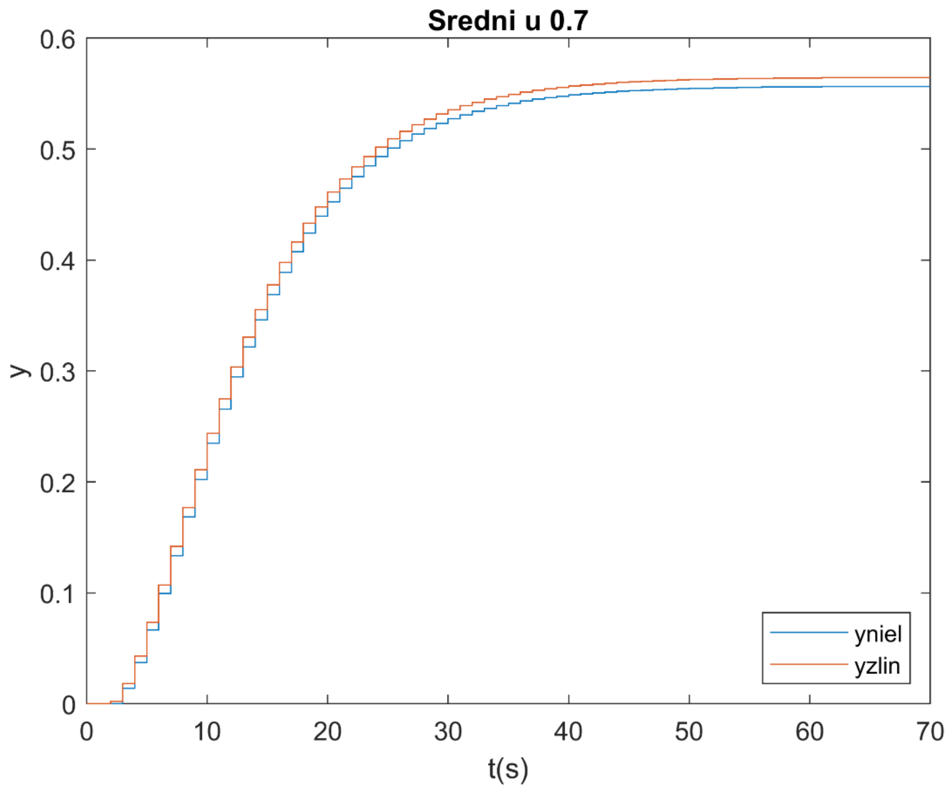


Maly u -0.85
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-1.4
y
0
10
20
30
40
50
60
70
t(s)
yniel
yzlin

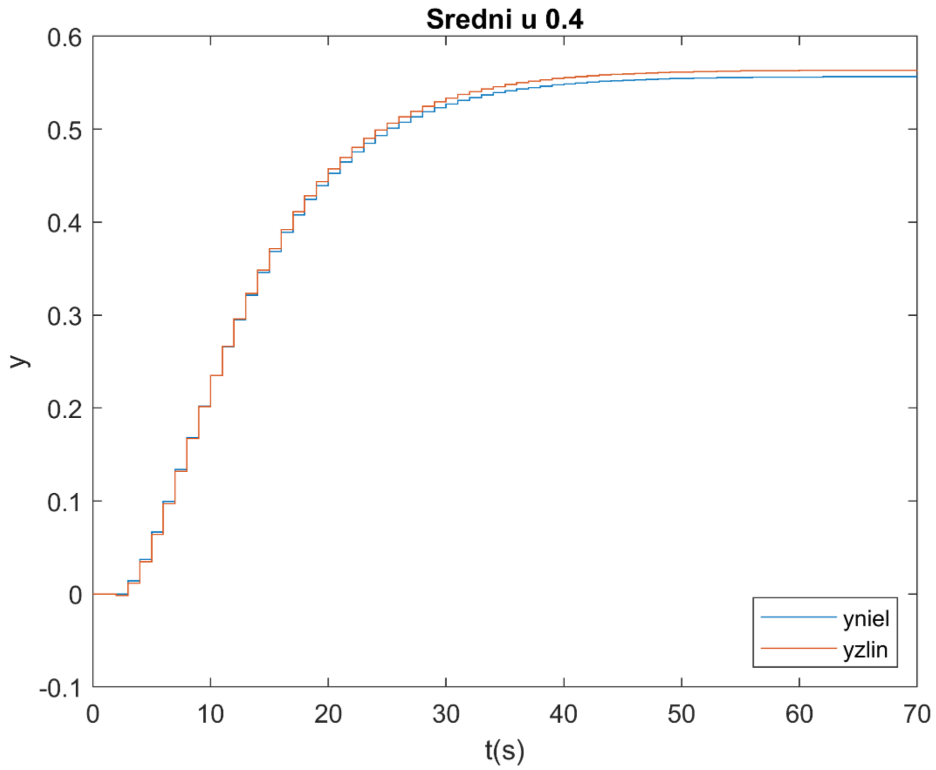
Średni sygnał sterujący:

Skok u z 0 do 0.6 w 1 sekundzie:

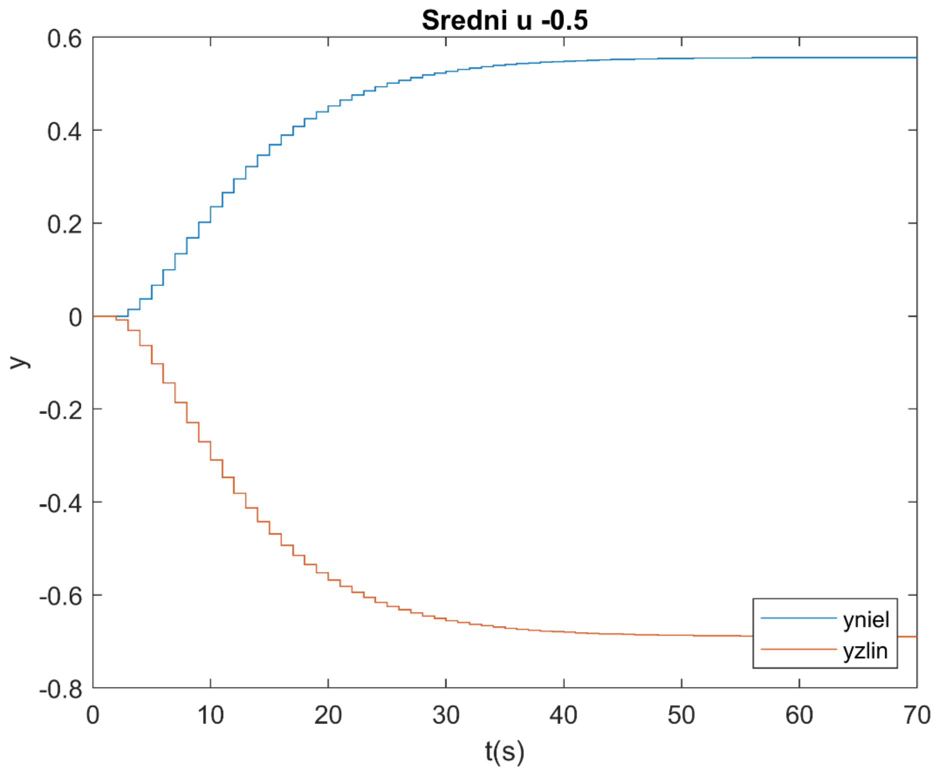
$\bar{u}$ = 0.7



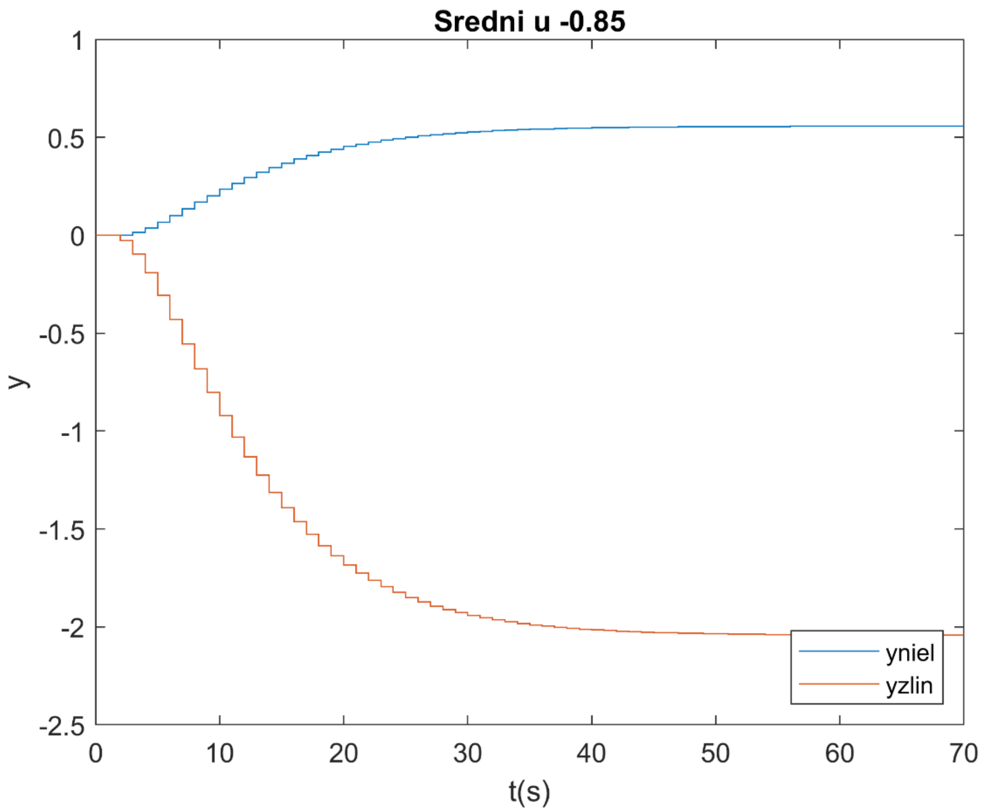
ū = 0.4


Sredni u 0.4
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
y
0
10
20
30
40
50
60
70
t(s)
yniel
yzlin

ū = -0.5


Sredni u -0.5
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
y
0
10
20
30
40
50
60
70
t(s)
yniel
yzlin

$\bar{u}$ = -0.85

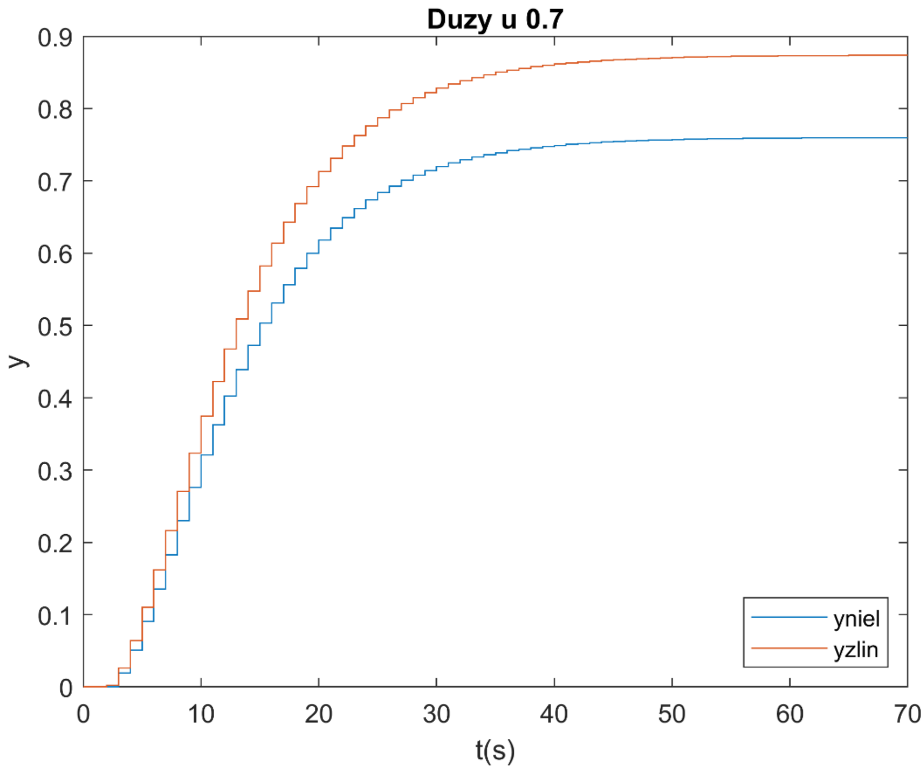


Sredni u -0.85
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
y
0
10
20
30
40
50
60
70
t(s)
yniel
yzlin

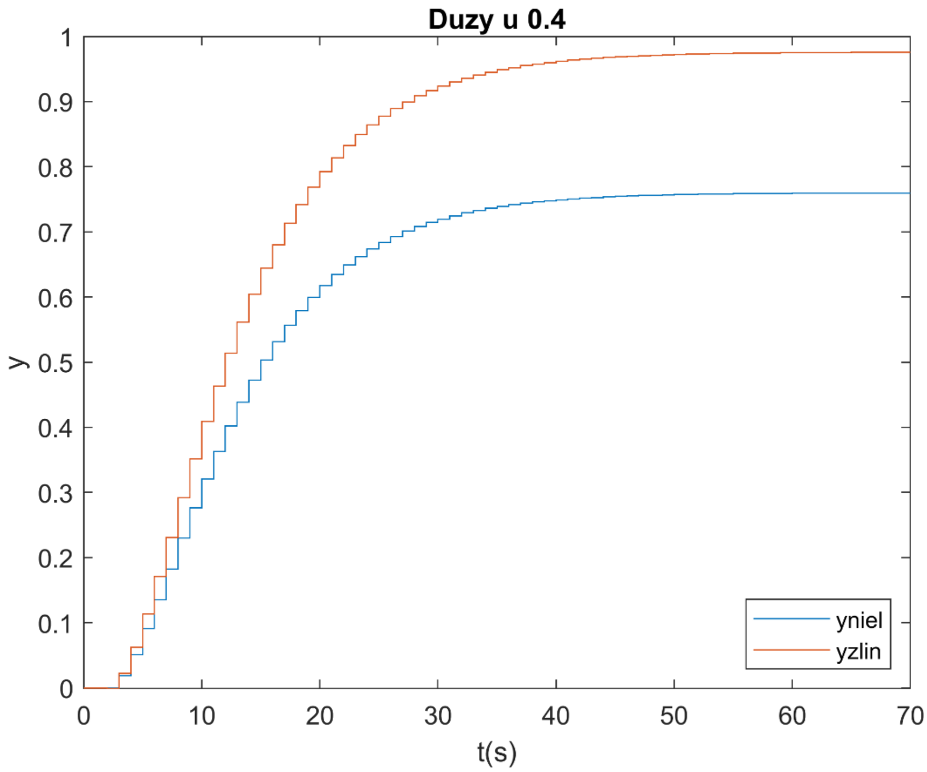
Duży sygnał sterujący:

Skok u z 0 do 1 w 1 sekundzie:

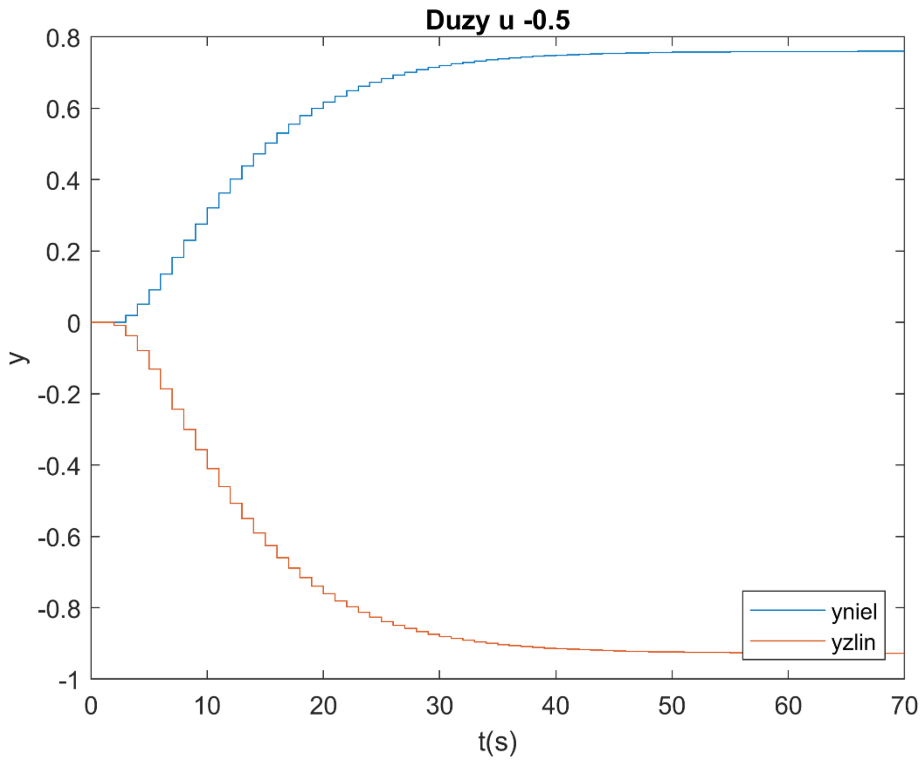
ū = 0.7



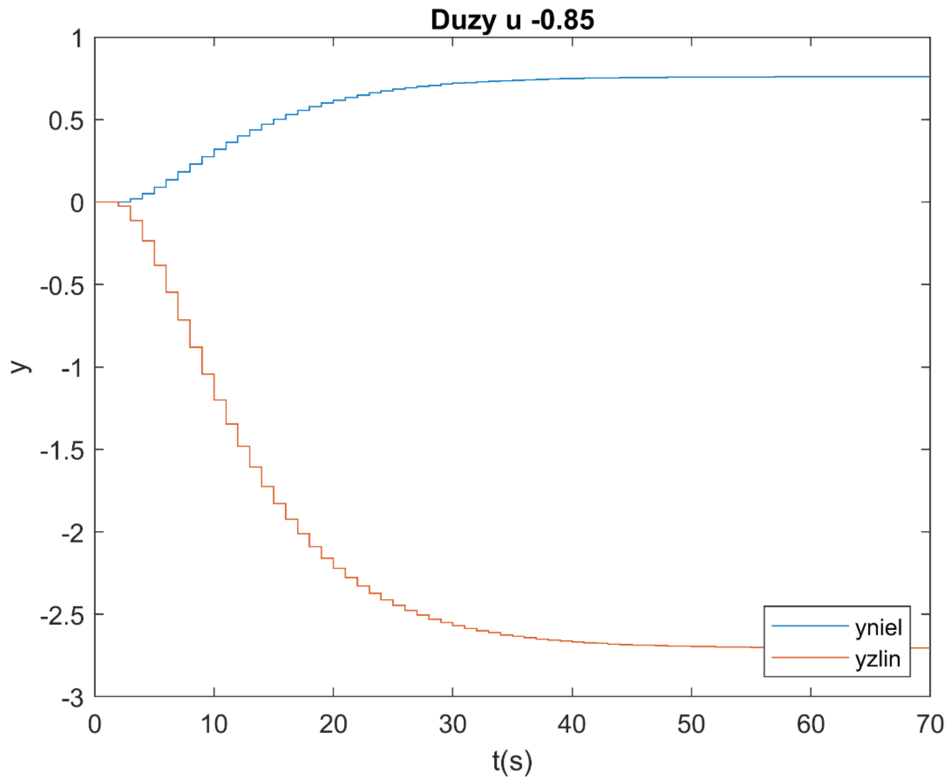
$\bar{u}$ = 0.4



$\bar{u}$ = -0.5



ū = -0.85



Wnioski:

Można zauważyć, że jakoś śledzenia funkcji zlinearyzowanej nie zależy wyłącznie od punktu linearyzacji ū , ale także od wielkości skoku jednostkowego.

W przypadku ū wynoszących -0,5 oraz -0,85 przebieg funkcji w żadnym wypadku nie zgadza się z przebiegiem funkcji nieliniowej, powodem może być przeciwne nachylenie prostej stycznej w tych punktach linearyzacji w stosunku do prostej stycznej dla u z przedziału (0, 1)

Z eksperymentu wynika, że najlepiej używać punktu linearyzacji z sąsiedztwa wartości skoku jednostkowego.

Zad 10.
Na podstawie zlinearyzowanego dynamicznego modelu dyskretnego wyznaczyć odpowiadającą mu transmitancję

Należy uporządkować wcześniej zlinearyzowany dynamiczny model dyskretny:

x_1:

$$x_1(k+1) = \left(-T\,\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 1\right) x_1(k) + T x_2(k)$$

x_2:

$$x_2(k+1) = x_2(k) + T\left(-\frac{1}{T_1 T_2} x_1(k) + \frac{K}{T_1 T_2}\left(\alpha_1 u(k) + \alpha_2(\bar{u}^2 + 2\bar{u}(u - \bar{u})) + \alpha_3(\bar{u}^3 + 3\bar{u}^2(u - \bar{u})) + \alpha_4(\bar{u}^4 + 4\bar{u}^3(u - \bar{u}))\right)\right)$$

y:

$$y(k) = x_1(k)$$

Z równań tych wyznaczyłem macierze równań stanu potrzebne do wyznaczenia transmitancji:

$$A = \begin{bmatrix} -T\,\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + 1 & T \\ -\frac{T}{T_1 T_2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{TK}{T_1 T_2}(\alpha_1 + \alpha_2 2\bar{u} + \alpha_3 3\bar{u}^2 + \alpha_4 4\bar{u}^3) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Posiadając macierze równań stanu możemy obliczyć transmitancję dynamicznego modelu dyskretnego ze wzoru:

$$G(z) = C(z \cdot I - A)^{-1} B + D$$

Transmitancja G(z) wynosi:

$$G(z) = \frac{-40\,T^2\,\bar{u}^3 - 87\,T^2\,\bar{u}^2 + 90\,T^2\,\bar{u} + 32\,T^2}{2000\,z^2 + (650\,T - 4000)\,z + 50\,T^2 - 650\,T + 2000}$$

Gdzie T to okres próbkowania

Zad 11.
Wyznaczyć wzmocnienie statyczne K_{stat} w zależności od punktu linearyzacji ū.

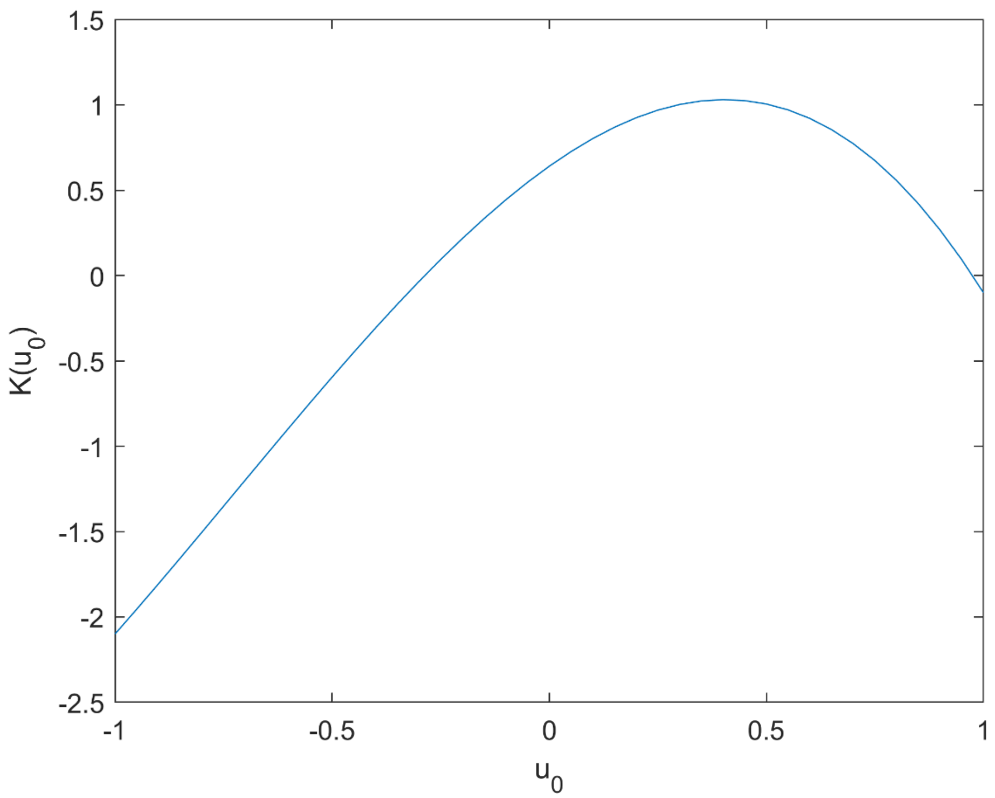
Wiemy, że dla transmitancji w dziedzinie z wzmocnienie statyczne otrzymujemy ze wzoru:

$$K_{stat}(\bar{u}) = \lim_{z \to 1} (G(z, \bar{u}))$$

Po podstawieniu otrzymujemy zależność:

$$K_{stat}(\bar{u}) = -\frac{4\,\bar{u}^3}{5} - \frac{87\,\bar{u}^2}{50} + \frac{9\,\bar{u}}{5} + \frac{16}{25}$$

Zależność $K_{stat}(\bar{u})$:



Wnioski:
Wzmocnienie statyczne w znaczący sposób zależy od punktu linearyzacji. Wynika to z charakteru obiektu, jest to kontynuacja zjawiska, które można było zaobserwować w przypadku porównywania charakterystyk statycznych i zlinearyzowanych dla obiektu dyskretnego (zad 6).

Wzmocnienie może wynosić od wartości -2 do 1, jest to znacząca różnica, pozostawiająca za sobą znaczące konsekwencje, które chociażby można zaobserwować na wykresach z Zad. 9, na których w przypadku linearyzacji w punkcie $\bar{u}$ -0,5 oraz -0,85, sygnału dla układu zlinearyzowanego osiągnął ujemne wartości