UTBM - MT44 - Analyse numérique et splines
TP3 - Intégration numérique

Printemps 2015

NB : le compte-rendu de ce TP sera à remettre au plus tard le **22 juin pour tous les groupes**

1 Mise en oeuvre des méthodes d'intégration classiques

Introduction
Soient A et B deux réels tels que $A < B$, f une fonction de $[A, B]$ dans $\mathbb{R}$. On désire obtenir une approximation de l'intégrale de f sur $[A, B]$ par les méthodes classiques d'intégration (méthodes des rectangles, des milieux, des trapèzes et de Simpson) en prenant N sous-intervalles (N entier naturel non nul). On considère le pas de discrétisation défini par $h = (B - A)/N$.

(a) Ecrire la fonction Matlab $integ\_classique(type, A, B, N, f)$ qui renvoie la valeur I de l'intégrale (supposée existée) à partir du type d'intégration choisi parmi les méthodes classiques, de la fonction f, de l'intervalle d'intégration $[A, B]$ et du nombre N de points. La fonction f, passée en paramètre, désignera une chaîne ; elle représente alors une fonction "mathématique" ordinaire.

(b) Mise en oeuvre et tests de performance.
Pour le calcul d'intégrales connues, par exemple :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$I_3 = \int_0^1 x^3 + xdx$$

lancer l'exécution de $integ\_classique()$ pour différentes valeurs de N.
Comparer les valeurs approchées obtenues à leur valeur exacte. Quelle méthode vous paraît la plus performante ? Quel critère objectif vous permet-il de justifier cela ? Que remarquez-vous de particulier pour l'intégrale I_3 ? Les résultats obtenus sont-ils conformes aux calculs d'erreur de chacune des méthodes, établis en TD.
Produire une (ou des) représentation(s) graphique(s) qui permette(nt) de visualiser les performances comparées des différentes méthodes.

2 Intégration gaussienne

Introduction
L'objet de cette partie est de préparer, sans qu'il soit nécessairement complet, un "kit d'intégration gaussienne". On se préoccupera de le rendre opérationnel pour les méthodes de Legendre et Tchebyschev ; les autres cas constitueront le "default" d'un switch à développer ultérieurement. La structure globale de la fonction d'intégration gaussienne doit exister ; l'utilisateur peut choisir la méthode à mettre en oeuvre.
On ne réfléchira, qu'une fois le reste du TP terminé, à la reconnaissance de la forme d'intégration gaussienne à utiliser en process automatique !

Développement des outils de base
(a) Détermination des polynômes orthogonaux
Construire la suite des n_max (par exemple $n\_max = 20$) premiers polynômes orthogonaux de Legendre et Tchebyschev. On utilisera la relation de récurrence fournie en cours ; on rappelle que :

$$L_0(x) = 1 \qquad L_1(x) = x \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* L_{k+1}(x) = \tfrac{2k+1}{k+1} x L_k(x) - \tfrac{k}{k+1} L_{k-1}(x)$$

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x \qquad \forall k \in \mathbb{N}^* T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

On stockera les résultats dans des matrices.

(b) Détermination des zéros des polynômes orthogonaux
Pour les différentes familles de polynômes orthogonaux prises en compte au paragraphe précédent déterminer leurs zéros et les stocker dans une matrice appropriée.

(c) Détermination des coefficients d'intégration
On rappelle qu'en intégration gaussienne

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b r(x)w(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} D_i r(x_i)$$

où $[a, b]$ désigne l'intervalle conventionnel d'intégration pour la méthode étudiée, r la régularisée de la fonction à intégrer, w la fonction poids associée, D_i les coefficients cherchés et x_i les zéros déterminés à la question précédente.
A partir des résultats fournis dans le polycopié, déterminer pour chaque méthode prise en compte, les coefficients nécessaires et les stocker.

(d) Intégrer les éléments antérieurs pour calculer une valeur approchée d'intégrales convenables par méthode gaussienne.
On écrira une fonction $integration\_gaussienne(type, nb\_points, r)$ qui renvoie une valeur approchée de $I = \int_a^b r(x)w(x)dx$, à partir de la donnée du type d'intégration gaussienne requis, du nombre de points à prendre en compte et de la fonction régularisée associée r passée comme une chaîne.

(e) Etude de performances
Pour une ou plusieurs intégrales calculables explicitement, évaluer l'erreur de calcul commise et visualiser cette erreur en fonction du nombre de points considérés.