8/1/2019

1) Ho 10 euro, voglio fare 6 scommesse da 5 euro l'una. Ogni puntata ha probabilità 60% di perdere i 5 euro e 40% di vincere 5 euro. $Y_i = \#$ vittorie nelle prime i scommesse
$X_i = \#$ soldi rimasti dopo le prime i scommesse.

a. Densità di X_1 e di X_2

$\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\right)$: Avevo vinto e ho perso oppure Avevo perso e ho vinto

$$d_{X_1}(k) = \begin{cases} \frac{2}{5} & \text{se } k=15 \\ \frac{3}{5} & \text{se } k=5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

k = soldi totali

$$d_{X_2}(k) = \begin{cases} \frac{12}{25} & \text{se } k=10 \\ \frac{4}{25} & \text{se } k=20 \\ \frac{9}{25} & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b. Densità delle Y_i:

$$Y_i \sim B(i, 0.40) \Rightarrow d_{Y_i}(k) = \begin{cases} \binom{i}{k}\cdot 0.40\cdot (0.60)^{i-k} & \text{per } k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c. Mostrare che $X_i = 10 + 5Y_i - 5\cdot(i-Y_i)$

$(i-Y_i) = \#$ perdite nelle prime i scommesse

$5Y_i =$ soldi vinti con Y_i vittorie in i scommesse

$10 =$ soldi iniziali

Si vede che il risultato dell'operazione sono i soldi posseduti all'i-esima W.

d. $X_6 = 10 + 5Y_6 - 5\cdot(6-Y_6) = 10Y_6 - 20$

$E[Y_6 \sim B(6, 0.40)] = 6\cdot 0.40 = 2.4$

$E[X_6] = 10\,E[Y_6] - 20 = 24 - 20 = 4$

e. $P(X_4>0) = P((10+5Y_4-5\cdot(4-Y_4))>0) = P(10+5Y_4-20+5Y_4>0) = P(Y_4>1) =$ ($10Y_4>10$)

$= 1-P(Y_4<1) = 1-P(Y_4=0)-P(Y_4=1) = 1-0.6^4 - 4\cdot 0.4\cdot 0.6^3 = 0.5248$

$d_{Y_4}(0) = \binom{4}{0}\cdot 0.4^0\cdot(0.6)^4 = 0.4\cdot 0.6^4 \quad d_{Y_4}(1) = \binom{4}{1}\cdot 0.4^1\cdot(0.6)^3 = 4\cdot 0.4\cdot 0.6^3$

$P(X_6>0) = P((10+5Y_6-5\cdot(6-Y_6))>0) = P(10+5Y_6-30+5Y_6>0) = 1-P(Y_6<2) =$

$= 1-P(Y_6=0)-P(Y_6=1)-P(Y_6=2) = 1-0.6^6 - 6\cdot 0.4\cdot 0.6^5 - 15\cdot 0.4^2\cdot 0.6^4 = 0.45568 = 45.57\%$

$d_{Y_6}(0) = \binom{6}{0}\cdot 0.4^0\cdot(0.6)^6 \quad d_{Y_6}(1) = \binom{6}{1}\cdot 0.4^1\cdot(0.6)^5 \quad d_{Y_6}(2) = \binom{6}{2}\cdot 0.4^2\cdot(0.6)^4$

f. $P(X_4>0, X_6>0)$

X_4 può assumere valori: $\{10, 20, 30\}$

- 0 : 1 vinta 3 perse ✗
- 10 : 2 vinte 2 perse ✓
- 20 : 3 vinte 1 persa ✓
- 30 : 4 vinte ✓

La probabilità che $X_6>0$ dipende da quanti soldi ho dopo le 4 scommesse

Se perdo entrambe le partite $X_6>0$ solo se ho almeno 20€

$P(X_4 \geq 20, P_6>0) = P(X_4 \geq 20)$

Se $X_4=10$ $X_6>0$ solo se non perdo entrambe (Sto calcolando $P(X_6>0 \cap X_4=10)$)

$$P(X_6>0 \cap X_4=10) = \underbrace{P(X_6>0 \mid X_4=10)\cdot P(X_4=10)}_{P(B\cap A) = P(B|A)\cdot P(A)}$$

$$P(X_4>0, X_6>0) = P(X\geq 20) + P(X_6>0 \mid X_4=10)\cdot P(X_4=10) = 0.1792 + 0.3456\cdot(1-0.6^2) =$$

$$= 0.4004$$

$$P(X_4=10) = P(Y_4=2) = \binom{4}{2}\cdot 0.4^2\cdot 0.6^2 = 0.3456$$

$$P(X_4\geq 20) = P(X_4>0) - P(X_4=10) = 0.5248 - 0.3456 = 0.1792$$

$$P(X_6>0 \mid X_4=10) = 1 - P(\underbrace{\text{perdere 2 scommesse}}_{\text{é il caso in cui perderei tutto}}) = 1-0.6^2 = 1-0.36$$

2) $X, Y, Z,$

$$d_{XYZ}(h,k,m) = \begin{cases} 1/9 & \text{se } (h,k,m) = (1,1,1),(1,1,2),(2,1,1),(2,2,1),(2,2,2) \\ 2/9 & \text{se } (h,k,m) = (1,2,1),(1,2,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Densitá marginali

$h \in \{1,2\}$

$$d_X(h) = \begin{cases} 2\cdot\frac{1}{9} + 2\cdot\frac{2}{9} & h=1 \\ 3\cdot\frac{1}{9} & h=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{3} & h=1 \\ \frac{1}{3} & h=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$k \in \{1,2\}$

$$d_Y(k) = \begin{cases} \frac{3}{9} & k=1 \\ \frac{2}{9}+\frac{4}{9} & k=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} & k=1 \\ \frac{2}{3} & k=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$d_Z(m) = \begin{cases} 3\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{9} & m=1 \\ 2\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{9} & m=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{5}{9} & m=1 \\ \frac{4}{9} & m=2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) X, Y indipendenti se $d_{XY}(h,k) = d_X(h)\cdot d_Y(k) \ \forall h,k$

$d_{XYZ}(1,1,1) = \frac{1}{9}$
" $(1,1,2) = 1/9$
" $(1,2,1) = 2/9$
" $(1,2,2) = 2/9$
" $(2,1,1) = 1/9$
" $(2,2,1) = 1/9$
" $(2,2,2) = 1/9$

4 casi: $(h,k) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$$d_{XY}(h,k) = \begin{cases} 2\cdot\frac{1}{9} & (h,k)=(1,1) \\ 2\cdot\frac{2}{9} & (h,k)=(1,2) \\ 1/9 & (h,k)=(2,1) \\ 2\cdot 1/9 & (h,k)=(2,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{2}{9} & (h,k)=(1,1),(2,2) \\ 4/9 & (h,k)=(1,2) \\ 1/9 & (h,k)=(2,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$d_X(1) = \frac{2}{3}$ $d_Y(1) = \frac{1}{3}$

$d_X(2) = \frac{1}{3}$ $d_Y(2) = \frac{2}{3}$

$d_{XY}(1,1) = d_{XY}(2,2) = \frac{2}{9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$ ✓

$d_{XY}(1,2) = \frac{4}{9} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ ✓

$d_{XY}(2,1) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ ✓

X, Y indipendenti ✓

c) X, Z indipendenti?

$d_{XYZ}(1,1,1) = \frac{1}{9}$
$\quad " \quad (1,1,2) = \frac{1}{9}$
$\quad " \quad (1,2,1) = \frac{2}{9}$
$\quad " \quad (1,2,2) = \frac{2}{9}$
$\quad " \quad (2,1,1) = \frac{1}{9}$
$\quad " \quad (2,2,1) = \frac{1}{9}$
$\quad " \quad (2,2,2) = \frac{1}{9}$

$(h,m) \in \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$

$$d_{XZ}(h,m) = \begin{cases} \frac{1}{9}+\frac{2}{9} & (h,m)=(1,1) \\ \frac{1}{9}+\frac{2}{9} & (h,m)=(1,2) \\ \frac{1}{9}+\frac{1}{9} & (h,m)=(2,1) \\ \frac{1}{9} & (h,m)=(2,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} & (h,m)=(1,1),(1,2) \\ \frac{2}{9} & (h,m)=(2,1) \\ \frac{1}{9} & (h,m)=(2,2) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$d_X(1) = \frac{2}{3} \quad d_Z(1) = \frac{5}{9} \quad d_{XZ}(1,1) = d_{XZ}(1,2) = \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{9} = \frac{10}{27} \neq \frac{1}{3}$ ✗

$d_X(2) = \frac{1}{3} \quad d_Z(2) = \frac{4}{9}$

X e Z NON sono indipendenti

3) Componente elettrico ha durata esponenziale media 30 giorni.

a) Probabilità che duri almeno 30 giorni:

$X \sim Exp(\frac{1}{30})$; $P(X \geq 30) = 1 - P(X < 30) = 1 - F_X(30)$

$F_X(t) = 1 - e^{-at} \Rightarrow 1 - F_X(30) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{30}\cdot 30}) = \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-1} = e^{-1} = 0.3679$

b) Probabilità che X_1, X_2, X_3 durino ciascuno almeno 25 giorni

$P(X_1 \geq 25)\cdot P(X_2 \geq 25)\cdot P(X_3 \geq 25) = P(X \geq 25)^3 = (1 - P(X_1 \leq 25)^3) = (1 - (1 - F_X(25))) =$

$= 1 - (1 - e^{-\frac{25}{30}})^3 = 1 - (1^3 - e^{-\frac{25}{10}}) = 1 - 1 + e^{-\frac{5}{2}} = e^{-\frac{5}{2}} = 0.082$

c) Probabilità che 38 componenti durino almeno 3 anni.

$\Rightarrow P(X_1 + \ldots + X_{38} \geq 3 \cdot 365)$.

Per il teorema del limite centrale:

$(X_1 + \ldots + X_{38}) \sim N(\mu, \sigma^2)$ t.c. $\mu = E[X_i]$, $\sigma^2 = Var[X_i]$

$\Rightarrow (X_1 + \ldots + X_{38}) \sim N(38 \cdot 30, 38 \cdot 900) \Rightarrow \sim N(1140, 34200)$

Standardizzazione:

$P(X_1 + \ldots + X_{38} > 1095) = P\left(Z_0 > \frac{1095 - 1140}{\sqrt{34200}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{1095-1140}{\sqrt{34200}}\right) = 1 - (1 - \phi(0.24))$

$= \phi(0.24) = 0.5948 = 59.48\%$

29/1/2019

1) 7 coppie. 10 posti, 10 estratti a caso.

a) Probabilità di estrarre almeno una persona per coppia?

$\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\},\{7,8\},\{9,10\},\{11,12\},\{13,14\}\}$

Ho $\binom{14}{10}$ scelte possibili.

Per scegliere un rappresentante per coppia, devo sicuramente scegliere 3 delle 7 coppie (in quanto scegliendo una persona per coppia restano 3 posti, da assegnare a coppie di cui ho già estratto un rappresentante), $\binom{7}{3}$ modi

Restano 4 coppie da cui scegliere un rappresentante (il marito o la moglie): 2^4 modi

I casi favorevoli sono quindi $\binom{7}{3}\cdot 2^4$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\binom{7}{3}\cdot 2^4}{\binom{14}{10}} = \dfrac{35\cdot 16}{1001} = \dfrac{80}{143}$

Quelli possibili $\binom{14}{10}$

b) $d_X(k)$:

$P(X=7) = \frac{80}{143}$ (visto prima)

$P(X=6)$: 6 coppie devono avere un rappresentante. Restano 4 posti, quindi 2 coppie hanno 2 rappresentanti, e 4 coppie ne hanno 1.

Selezioniamo le coppie con 1 rappresentante: $\binom{7}{4}$

Selezioniamo i 2 rappresentanti dalle $(7-4=)3$ coppie rimaste: $\binom{3}{2}$

Da queste posso scegliere i 2 rappresentanti in 2 modi: 2^2

Casi favorevoli: $\dfrac{\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{2}\cdot 2^2}{\binom{14}{10}} = \dfrac{420}{1001} = \dfrac{60}{143}$

Casi possibili:

Resta solo $P(X=5)$: $\dfrac{\binom{7}{5}}{\binom{14}{10}} = \dfrac{21}{1001} = \dfrac{3}{143}$

$$d_X(k) = \begin{cases} \frac{3}{143} & k=5 \\ \frac{60}{143} & k=6 \\ \frac{80}{143} & k=7 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) $Y = \#$ donne estratte

7 U, 7 D, 10 estrazioni, D = successo

$Y \sim H(7,7,10)$

$$d_Y(k) = \begin{cases} \dfrac{\binom{7}{k}\cdot\binom{7}{10-k}}{\binom{14}{10}} & \text{per } k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

d) Determinare $P(X=6, Y=6)$

(Estratto almeno un rappresentante per 6 coppie, qual è la probabilità che 6 siano donne?)

$X=6 \Rightarrow \binom{7}{6}$ modi di scegliere le 6 coppie con almeno 1 rappresentante (uomo o donna)

Restano 4 posti da estrarre tra le 6 coppie selezionate: $\binom{6}{4}$ (solo donne)

Casi possibili: $\dfrac{\binom{7}{6}\cdot\binom{6}{4}}{\binom{14}{10}} = \dfrac{15}{143}$

Casi favorevoli:

$$P(X=6 \cap Y=6) = P(X=6 \mid Y=6)\cdot P(Y=6) =$$

$$= \frac{P(Y=6\mid X=6)\cdot P(X=6)}{\cancel{P(Y=6)}} \cdot \cancel{P(Y=6)}$$

$$P(X=6) = \frac{60}{143}$$

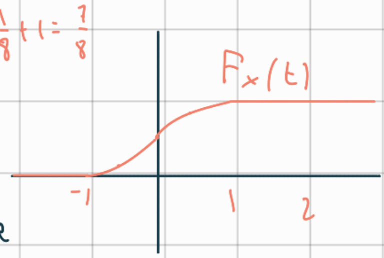
$$P(Y=6) = \frac{\binom{7}{6}\cdot\binom{7}{4}}{\binom{14}{10}} = \frac{\cancel{7}\cdot 35}{\cancel{1001}\,143} = \frac{35}{143}$$

2)

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \le -1 \\ \frac{1}{2}(t+1)^2 & \text{se } -1 \le t \le 0 \\ -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2} & \text{se } 0 \le t \le 1 \\ 1 & \text{se } t \ge 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 =$

$-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}$



a) tracciare un grafico approssimativo di $F_X(t)$ e mostrare che è una funzione di ripartizione di una v.a. continua X:

$F_X(t)$ è una funzione continua, debolmente crescente in $[0,1] \Rightarrow$ è una f. di ripartizione.

b) $P\left(-\frac{1}{2} \le X < \frac{1}{3}\right) = F_X\left(\frac{1}{3}\right) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 = \left(-\frac{1}{18} + \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{8} = \frac{\cancel{14}\,7}{\cancel{18}\,9} - \frac{1}{8} = \frac{56-9}{72} = \frac{45}{72}$

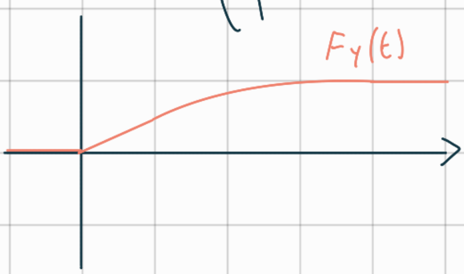
c) $Y = (X+1)^2$

$$F_Y(t) = P\left((X+1)^2 \le t\right) = P\left(X+1 \le \sqrt{t}\right) = P\left(X \le \sqrt{t}-1\right) = F_X\left(\sqrt{t}-1\right)$$

$$F_Y(t) = F_X(\sqrt{t}-1)$$

X assume valori tra -1 e 1; Se $Y = (X+1)^2 \Rightarrow$ Per $X=-1$, $Y=0$; per $X=1$ $Y=4$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}(\sqrt{t}-1+1)^2 \\ -\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{t}-1)^2 + \sqrt{t} - 1 + \frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } t \le (-1+1)^2 \\ \frac{1}{2}t & \text{per } (-1+1)^2 \le t \le (0+1)^2 \\ -\frac{1}{2}t + 2\sqrt{t} - 1 & \text{per } (0+1)^2 \le t \le (1+1)^2 \\ 1 & \text{per } t \ge (1+1)^2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } t \le 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{per } 0 \le t \le 1 \\ -\frac{1}{2}t + 2\sqrt{t} - 1 & \text{per } 1 \le t \le 4 \\ 1 & \text{per } t \ge 4 \end{cases}$$



3) PM10: limite $50 \mu g/m^3$.

$C \sim N(44, 49)$ $\quad \mu = 44$, $\sigma^2 = 49$

a) $P(C > 50) = P\left(Z_0 > \frac{50-44}{7}\right) = 1 - \Phi(0.85) = 1 - 0.8053 = 0.1947 = 19.5\%$

b) $Y_1 = \#$ giorni in una settimana in cui si supera il limite

$Y \sim B(7, 0.195)$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - d_Y(0) - d_Y(1) = 1 - \left[\binom{7}{0} \cdot 0.195^0 \cdot (1-0.195)^7\right] - \left[\binom{7}{1} \cdot 0.195^1 \cdot (1-0.195)^6\right]$

$= 0.4095 = 40.95\%$

c) $Y_2 = \#$ giorni in un anno in cui si supera il limite

Per il teorema centrale del limite: $Var(Y_2) = 365 \cdot 0.195 \cdot (1-0.195) = 57.29 = \mu$

$Y_2 \sim N(71.18, 57.29)$ $\quad E(Y_2) = 365 \cdot 0.195 = 71.18 = \sigma^2$

$\Rightarrow P(Y_2 \geq 30) = 1 - P\left(Z_0 < \frac{30 - 71.18}{\sqrt{57.29}}\right) = 1 - P(Z_0 < -5.44) = 1 - (1 - \Phi(5.44)) = \Phi(5.44) = 1 = 100\%$

12/2/2019

1) 3 lanci di dado. X_1, X_2, X_3 = Risultati dei 3 lanci. $Y = |X_1 - X_2|$.

a) Stabilire se $\{X_2 = 2\}$ e $\{Y = 0\}$ sono indipendenti

$\Leftrightarrow X_2, Y$ sono indipendenti

$$d_{X_1} = d_{X_2} = d_{X_3}(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } k = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\Rightarrow P(X_2 = 2) = \frac{1}{6}$

$P(|X_1 - X_2|) = 0 = P(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$

Ho $6 \cdot 6$ possibilità e 6 casi in cui $X_1 = X_2 \Rightarrow \frac{6}{36}$

$P(Y=0) = P(|X_1 - X_2| = 0) = \frac{1}{6}$

Devo verificare se $P(\{X_2 = 2\} \cap \{Y = 0\}) = P(X_2 = 2) \cdot P(Y = 0) = \frac{1}{36}$

X_1 e X_2 sono indipendenti, quindi $P(X_2 = 2, Y = 0\} = P(X_2 = 2, X_1 = 2) = P(X_2) \cdot P(X_1) = \frac{1}{36}$ ✓

$\{X_2 = 2\}$ e $\{Y = 0\}$ sono indipendenti.

b) Stabilire se Y e X_2 sono indipendenti.

$X_1, X_2, X_3 \sim U([1, 6])$

$Y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$Y = 0$ $(X_1 = X_2)$: $\frac{6}{36}$ $\qquad Y = 3$ $(X_1 = X_2 - 3 \vee X_2 = X_1 - 3) = \frac{6}{36}$

$Y = 1$ $(X_1 = X_2 - 1 \vee X_2 = X_1 - 1)$: $\frac{10}{36}$ $\qquad Y = 4$ $(X_1 = X_2 - 4 \vee X_2 = X_1 - 4) = \frac{4}{36}$

$Y = 2$ $(X_1 = X_2 - 2 \vee X_2 = X_1 - 2)$: $\frac{8}{36}$ $\qquad Y = 5$ $(X_1 = X_2 - 5 \vee X_2 = X_1 - 5) = \frac{2}{36}$

$$d_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{6} & k = 0 \\ \frac{5}{18} & k = 1 \\ \frac{2}{9} & k = 2 \\ \frac{1}{6} & k = 3 \\ \frac{1}{9} & k = 4 \\ \frac{1}{18} & k = 5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

X_2 e Y NON possono essere indipendenti, in quanto $Y = |X_1 - X_2| \Rightarrow$ Il valore di Y dipende direttamente dal valore di X_2.

c) $E[Y] = |E[X_1] - E[X_2]| = \left| \frac{1+2+3+4+5+6}{6} - \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \right| = 0$

d) $P(Y=0 \mid X_1+X_2+X_3=7) = P(\underbrace{|X_1-X_2|=0}_{B} \mid \underbrace{X_1+X_2+X_3=7}_{A}) = \frac{P(|X_1-X_2|=0,\ X_1+X_2+X_3=7)}{P(X_1+X_2+X_3=7)}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

$= \frac{\frac{\cancel{3}\,1}{\cancel{6^3}}}{\frac{\cancel{15}\,5}{\cancel{6^3}}} = \frac{1}{5}$

$P(X_1+X_2+X_3=7)$:

(1,1,5) (2,1,4) (3,1,3) (4,1,2) (5,1,1)
(1,2,4) (2,2,3) (3,2,2) (4,2,1)
(1,3,3) (2,3,2) (3,3,1)
(1,4,2) (2,4,1)
(1,5,1)

$\frac{15}{6^3} = P(X_1+X_2+X_3=7)$

Scelgo solo le combinazioni in cui $X_1 = X_2 \Rightarrow \frac{3}{6^3}$

2) $X \sim U([0,3])$ e $Y \sim U([1,4])$. $Z = \max(X,Y)$

a) Stabilire i valori assunti da Z e $F_Z(t)$:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{4} \cdot t & 0 \le t \le 3 \\ 1 & t > 3 \end{cases} \qquad F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{4} t & 1 \le t \le 4 \\ 1 & t > 4 \end{cases}$$

$Z \in [0,4]$

$$F_Z(t) = F_X(t) \cdot F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{1}{16} t^2 & 1 \le t \le 3 \\ \frac{1}{4} t & 3 < t \le 4 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

$$d_Z(k) = \begin{cases} \frac{1}{8} & k=1 \\ \frac{2}{8} & k=2 \\ \frac{3}{8} & k=3 \\ \frac{1}{4} & k=4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$E[Z] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 1 = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{9}{8} + \frac{8}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4} = 2.75$

$E[Z^2] = 1^2 \cdot \frac{1}{8} + 2^2 \cdot \frac{2}{8} + 3^2 \cdot \frac{3}{8} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{8}{8} + \frac{27}{8} + \frac{32}{8} = \frac{68}{8} = \frac{17}{2} = 8.5$

$Var(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = 8.5 - 2.75^2 = 0.9375$

Stesso esercizio, su variabile continua:

$X \sim U([0,3])$; $Y \sim U([1,4])$, $Z = \max(X,Y)$

$$f_X(s) = \begin{cases} 0 & \text{per } s<0,\ s>3 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 0 \le s \le 3 \end{cases} \qquad f_Y(s) = \begin{cases} 0 & \text{per } s<1,\ s>4 \\ \frac{1}{3} & \text{per } 1 \le s \le 4 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}t & \text{per } 0<t<3 \\ 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t>3 \end{cases} \qquad F_Y(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{3} & 1<t<4 \\ 0 & t<1 \\ 1 & t>4 \end{cases}$$

$F_Z(t) = F_X(t) \cdot F_Y(t)$

$Z \in [1,4]$

Per $t<1$: $F_X(t) \cdot F_Y(t) = 0$

Per $1<t<3$: $F_X(t) \cdot F_Y(t) = \frac{1}{3}t \cdot \frac{t-1}{3} = \frac{t^2-t}{9}$

Per $3<t<4$: $F_X(t) \cdot F_Y(t) = 1 \cdot \frac{t-1}{3} = \frac{t-1}{3}$

Per $t>4$: $F_X(t) \cdot F_Y(t) = 1 \cdot 1 = 1$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ \frac{t^2-t}{9} & 1 \le t \le 3 \\ \frac{t-1}{3} & 3<t<4 \\ 1 & t \ge 4 \end{cases}$$

$$f_Z(s) = \begin{cases} 0 & t<1 \\ \frac{2}{9}(t-1) & 1 \le t \le 3 \\ \frac{1}{3} & 3<3<4 \\ 1 & t \ge 4 \end{cases}$$

$$\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{26}{27} - 4\right) + \frac{7}{6} = \frac{28}{27} + \frac{7}{6}$$

$$\frac{2}{9}\left(9-\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(8-\frac{9}{2}\right)$$

$$E[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_Z(t)\,dt = \int_1^3 \frac{2}{9}t^2 - t\,dt + \int_3^4 \frac{1}{3}t\,dt = \frac{2}{9}\int_1^3 t^2\,dt - \int_1^3 t\,dt + \frac{1}{3}\int_3^4 t\,dt = \frac{2}{9}\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^3 + \frac{1}{3}\left[\frac{t^2}{2}\right]_3^4 = \frac{119}{54}$$

$$E[Z^2] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_Z(t)\,dt = \int_1^3 \frac{2}{9}t^3 - t^2\,dt + \int_3^4 \frac{1}{3}t^2\,dt = \frac{2}{9}\int_1^3 t^3\,dt - \int_1^3 t^2\,dt + \frac{1}{3}\int_3^4 t^2\,dt = \frac{2}{9}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^3 - \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^3 + \frac{1}{3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_3^4 = \frac{179}{27}$$

$$Var(Z) = E[Z^2] - E[Z]^2 = \frac{179}{27} - \left(\frac{119}{54}\right)^2 = \frac{5171}{2916} = 1.77$$

3) $X \sim N(82, 49)$

a) $P(X \ge 75) = P\left(Z_0 \ge \frac{75-82}{\sqrt{49}}\right) = \cancel{1} - \cancel{1} + \Phi(1) = 0.8413 = 84.13\%$

b) $Y \sim B(100, 0.8413)$

$E[Y] = n \cdot p = 84.13 \qquad Var(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = 13.35$

$Y \sim N(84.13, 13.35)$

$P(Y \ge 80) = P(Y \ge 79.5) = P\left(Z_0 \ge \frac{79.5 - 84.13}{\sqrt{13.35}}\right) = \cancel{1} - \cancel{1} + \Phi(1.27) = 0.8980 = 89.80\%$

c) Se vive 80 anni, e la cometa passa ogni 76 anni, la persona deve essere nata tra il 1986 e il 1990 (facendo riferimento all'ultimo passaggio).
Quindi ha a disposizione 4 anni su 76, assumendo che la probabilità di nascere sia distribuita uniformemente: $\frac{4}{76} = 0.0526 = 5.26\%$

13/06/2019

1) 8 variabili $X_1, \dots, X_8$ di Poisson, $X_1, \dots, X_4 \sim P(1)$; $X_5, \dots, X_8 \sim P(2)$. $X = \max\{X_1, \dots, X_8\}$

a) $d_{X_1} = \dots = d_{X_4} = \begin{cases} e^{-1} \cdot \frac{1^k}{k!} & k=1,2,3\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$d_{X_5} = \dots = d_{X_8} = \begin{cases} e^{-2} \frac{2^k}{k!} & k=1,2,3\dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$P(X<3) = F_X(3) = F_{X_1}(3) \cdot F_{X_2}(3) \cdot \dots \cdot F_{X_5}(3) \cdot \dots \cdot F_{X_8}(3) =$
$= F_{X_1}(3)^4 \cdot F_{X_5}(3)^4 =$
$= \left(P(X_1=0) + P(X_1=1) + P(X_1=2)\right)^4 \cdot \left(P(X_5=0) + P(X_5=1) + P(X_5=2)\right)^4 =$
$= \left(\frac{5}{2}e^{-1}\right)^4 \cdot \left(5e^{-2}\right)^4 = \frac{5^8}{16e^{12}} = 0.15 = 15\%$

b) $P(X_1, \dots, X_4 < 3) = \frac{5}{2}e^{-1} = 0.9197 \simeq 92\%$
$P(X_5, \dots X_8 < 3) = 5e^{-2} = 0.6767 = 67.7\%$

Sia $Y_1 \sim B(4, 0.9197)$ e $Y_2 \sim B(4, 0.6767)$
$Y = Y_1 + Y_2 = \#\, X_i$ t.c. $X_i < 3$; $P(Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(Y_1 = i) \cdot P(Y_2 = k-i)$
$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = 0.038 = 3.8\%$

$P(Y=0) = P(Y_1=0) \cdot P(Y_2=0) = 0.000000462$
$P(Y=1) = P(Y_1=0) \cdot P(Y_2=1) + P(Y_1=1) \cdot P(Y_2=0) = 0.00018$
$P(Y=2) = P(Y_1=0) \cdot P(Y_2=2) + P(Y_1=2) \cdot P(Y_2=0) + P(Y_1=1) \cdot P(Y_1=1) = 0.0375$
$P(Y_1=0) = \binom{4}{0} \cdot 0.9197^0 (1-0.9197)^4 = 0.000042$
$P(Y_2=0) = \binom{4}{0} \cdot 0.6767^0 (1-0.6767)^4 = 0.011$
$P(Y_1=1) = \binom{4}{1} \cdot 0.9197^1 (1-0.9197)^3 = 0.002$
$P(Y_2=1) = \binom{4}{1} \cdot 0.6767^1 (1-0.6767)^3 = 0.091$
$P(Y_1=2) = \binom{4}{2} \cdot 0.9197^2 (1-0.9197)^2 = 0.065$
$P(Y_2=2) = \binom{4}{2} \cdot 0.6767^2 (1-0.6767)^2 = 0.574$

c) $P(X \sim P(\lambda) + Y \sim P(\mu)) = P(Z \sim P(\lambda + \mu))$
$P(X_1 + X_2 + \dots + X_8 > 5) = P(Y \sim P(4 \cdot 1 + 4 \cdot 2) > 5) = 1 - (Y \sim P(13) \leq 5) =$
$1 - \left(P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)\right) = 0.9893 = 98.93\%$

d) $E[Y] = 13$

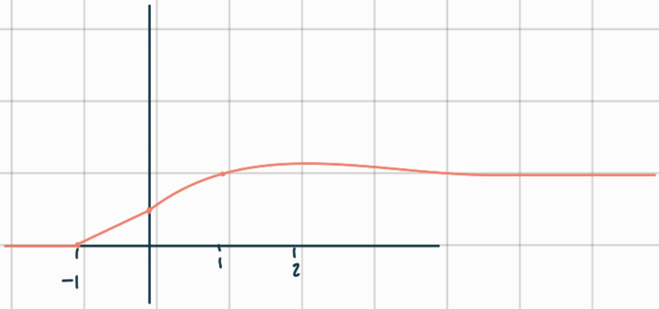
2) $X \sim U([-1,1])$, $Y \sim Exp(1)$ v.a. indipendenti. $Z = \min(X,Y)$

a) $Z \in [-1,1]$

b) $P(Z<t)$ in $-1<t<0 = \frac{1-t}{2}\cdot e^{-t}$

c) $F_Z(t) = P(\min(X,Y) \le t) = P(X \le t \circ Y \le t) = 1 - P(X>t, Y>t) = 1 - P(X>t)\cdot P(Y>t)$

$$\Rightarrow F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t<-1 \\ \frac{t+1}{2} & -1 \le t < 0 \\ 1 - \frac{1-t}{2}\cdot e^{-t} & t>0 \end{cases}$$



d) Stabilire se $Z_1 = X-Y$ e $Z_2 = X+Y$ sono indipendenti

$Var(X) = \frac{(1-(-1))^2}{12} = \frac{1}{3}$

$Var(Y) = 1$

$Cov(X-Y, X+Y) = Cov(X,X) + Cov(X,Y) - Cov(Y,X) - Cov(Y,Y)$

$= Var(X) - Var(Y) = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow$ Sono dipendenti

3) 80 numeri tra -1 e 5, X è la loro somma.

a) $Y_1, Y_2, \dots, Y_{80} \sim U([-1,5])$ per i

$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{80}$

$E[Y_1] = E[Y_2] = \dots = \frac{5-1}{2} = 2$

$Var[Y_1] = Var[Y_2] = \dots = \frac{(5+1)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$

b) $X \sim N(160, 240)$ (Per il TCL) $E[X] = 160$, $Var(X) = 240$

$P(150 \le X \le 190) = P\left(\frac{150-160}{\sqrt{240}} \le Z_0 \le \frac{190-160}{\sqrt{240}}\right) = (-0.65 \le Z_0 \le 1.94) = \Phi(1.94) - (1 - \Phi(0.65)) = 0.9738 - 0.2578 = 0.716$

$= 71.6\%$

c) $P(Y_1, \dots, Y_{40} \ge 2, Y_{41}, \dots, Y_{80} < 2)$

$Y_i \sim B(1, \frac{1}{2}) \rightarrow Y_i =$ l'i-esimo numero è ≥ 2.

$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{80} \sim B(80, \frac{1}{2}) \rightarrow$ 80 numeri, ognuno può essere o ≥ 2 o < 2.

Per il TCL: $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{80} \sim N(80 \cdot \frac{1}{2}, 80 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = Z \sim N(40, 20)$

$P(39.5 \le Z \le 40.5) = P\left(\frac{39.5-40}{\sqrt{20}} \le Z_0 \le \frac{40.5-40}{\sqrt{20}}\right) = (-0.11 \le Z_0 \le 0.11) = \Phi(0.11) - 1 + \Phi(0.11) =$

$= 0.0876 = 8.76\%$

31/01/2022

1) 4 atleti $\frac{2}{3}$ p. di vincere, 4 atleti $\frac{1}{3}$ p. di vincere

X = # medaglie vinte

$Y = \begin{cases} 1 & \text{se } X \geq 6 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

a) $X = X_1 + \ldots + X_8$ t.c. $X_{1\ldots4} \sim B(1, \frac{2}{3})$, $X_{5\ldots8} \sim B(1, \frac{1}{3})$

$E[X] = E[X_1 + \ldots + X_8] = E[X_1] + \ldots + E[X_8] = 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = 4$

$Var(X) = Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + \ldots + Var(X_8) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9} + \frac{8}{9} = \frac{16}{9}$

b) $Y \sim B(1, P(X \geq 6))$. Chiamo $X' = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, $X'' = X_5 + X_6 + X_7 + X_8$. $X' \sim B(4, \frac{2}{3})$, $X'' \sim B(4, \frac{1}{3})$

$d_Y(k) = \begin{cases} P(X \geq 6) & \text{se } k = 1 \\ 1 - P(X \geq 6) & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 0.128 & \text{se } k = 1 \\ 0.872 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$P(Y=1) = P(X \geq 6) = P(X=6) + P(X=7) + P(X=8) = \frac{664}{6561} + \frac{160}{6561} + \frac{16}{6561} = \frac{840}{6561} = 0.128$

$P(X=6) = P(X'=4) \cdot P(X''=2) + P(X'=3) \cdot P(X''=3) + P(X'=2) \cdot P(X''=4) =$

$= \cancel{\binom{4}{4}} \cdot \frac{2}{3}^4 \cdot \cancel{\frac{1}{3}^0} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{3}^2 \cdot \frac{2}{3}^2 + \binom{4}{3} \cdot \frac{2}{3}^3 \cdot \frac{1}{3}^1 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{3}^3 \cdot \frac{2}{3}^1 + \binom{4}{2} \cdot \frac{2}{3}^2 \cdot \frac{1}{3}^2 \cdot \cancel{\binom{4}{4}} \cdot \frac{1}{3}^4 \cdot \frac{2}{3}^0 = \frac{128}{2187} + \frac{256}{6561} + \frac{8}{2187} = \frac{664}{6561}$

$P(X=7) = P(X'=4) \cdot P(X''=3) + P(X'=3) \cdot P(X''=4) = \frac{2}{3}^4 \cdot \binom{4}{3} \cdot \frac{1}{3}^3 \cdot \frac{2}{3} + \binom{4}{3} \frac{2}{3}^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}^4 = \frac{160}{6561}$

$P(X=8) = P(X'=4) \cdot P(X''=4) = \frac{2}{3}^4 \cdot \frac{1}{3}^4 = \frac{16}{6561}$

c) $P(X_1 = 4 | X \geq 6) = \frac{P(X'=4 \cap X'' \geq 2)}{P(X \geq 6)} = \frac{P(X'=4) \cdot P(X'' \geq 2)}{P(X \geq 6)} = \frac{0.1975 \cdot 0.4074}{0.128} = \frac{0.080}{0.128} = 0.63 = 63\%$

$P(X_1 = 4) = \binom{4}{4} \cdot \frac{2}{3}^4 = \frac{16}{81} = 0.1975 = 19.75\%$

$1 \; \hat{} \; \frac{16}{81} + \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{48}{81}$

$P(X_2 \geq 2) = 1 - P(X_2 < 2) = 1 - P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1) = 1 - \binom{4}{0} \cdot \frac{1}{3}^0 \cdot \frac{2}{3}^4 + \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}^3 = 1 - \frac{48}{81} = \frac{33}{81}$

d) $P(X \geq 6) = 12.8\%$

Vincita attesa: $(10-1) \cdot P(X \geq 6) = 9 \cdot P(X \geq 6)$ $\quad 9 \cdot P(X \geq 6) > P(X < 6)$?

$\Rightarrow$ Sia $p = P(X \geq 6)$ e $1 - p = P(X < 6) \Rightarrow 9p > 1 - p \Rightarrow 10p > 1 \Rightarrow p > \frac{1}{10}$

$P(X \geq 6) > \frac{1}{10}$? Sí : $0.128 > 0.10 \Rightarrow$ Conviene scommettere.

2) Eruzione in media ogni 5 anni.

$X \sim Exp(\frac{1}{5})$

a) $P(X \leq 2) = F_X(2) = 1 - e^{-\frac{2}{5}} = 0.3297 \simeq 33\%$

b) Le variabili esponenziali hanno mancanza di memoria.

La probabilitá é la stessa (c.a. 33%)

c) $P(X > 2 | X \leq 4) = \frac{P(2 < X \leq 4)}{P(X \leq 4)} = \frac{P(X \leq 4) - P(X \leq 2)}{P(X \leq 4)} = \frac{(1 - e^{-\frac{4}{5}}) - (1 - e^{-\frac{2}{5}})}{1 - e^{-\frac{4}{5}}} = 0.40 = 40\%$

3) 50 numeri in $[1,3]$. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{50}$, dove $X_1, X_2, \ldots X_{50} \sim U([1,3])$

a) $E[X] = 50 \cdot E[X_1] = \frac{3+1}{2} = 2 \cdot 50 = 100$

$Var[X] = 50 \cdot Var(X_1) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \cdot 50 = \frac{50}{3}$

b) $X \sim N\left(100, \frac{50}{3}\right)$

$P(95 \leq X \leq 110) = P\left(\frac{95-100}{\sqrt{\frac{50}{3}}} \leq Z_0 \leq \frac{110-100}{\sqrt{\frac{50}{3}}}\right) = P(-1.22 \leq Z_0 \leq 2.45) = \Phi(2.45) - 1 + \Phi(1.22) =$

$= 0.99286 - 1 + 0.88877 = 0.88 = 88\%$

c) $P\left(\frac{X}{50} < 1.9\right) = P(X < 1.9 \cdot 50) = P(X < 95)$

Ossia: $P\left(Z_0 < \frac{95-100}{\sqrt{\frac{50}{3}}}\right) = 1 - \Phi(1.22) = 0.8888 = 0.1112 \simeq 11\%$

16/01/2023

1) Urna con 15 palline: 5r, 5b, 5g. $R = \{$"Viene estratta almeno una rossa"$\}$, B (una blu), G (una gialla).

$X = \#$ rosse estratte, $Y = \#$ blu estratte, $Z = \#$ gialle estratte.

3 estrazioni

a) $P(R) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 1 - \frac{120}{455} = 1 - 0.2637 = 0.7363 = 73.63\%$

$\binom{5}{0} \to 1$, $\binom{10}{3} \to \frac{\cancel{10}^{5} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 8}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}}$, $\binom{15}{3} \to \frac{\cancel{15}^{5} \cdot \cancel{14}^{7} \cdot 13}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}}$

$X \sim (5, \underbrace{10}_{5b+5g}; 3)$

b) Stabilire se R e B sono indipendenti

3 palle estratte, se R e B sono indipendenti, $P(R|B) = \frac{\overbrace{P(\cancel{B|R})}^{\text{Se sono indipendenti} = P(B)} \cdot P(R)}{P(\cancel{B})} = P(R)$

Ricordando che $P(R|B) = \frac{P(R \cap B)}{P(R)}$, e che per eventi indipendenti $P(R \cap B) = P(R) \cdot P(B)$:

$R \cap B = \{X=1, Y=1, Z=1\} \cup \{X=2, Y=1\} \cup \{X=1, Y=2\} = \frac{25}{91} + \frac{10}{91} + \frac{10}{91} = \frac{45}{91} = 0.4945 = 49.45\%$

$P(X=1, Y=1, Z=1) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}\binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{125}{455} = \frac{25}{91} = 0.2747 = 27.47\%$

$P(X=2, Y=1) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{91} = 0.1098 = 10.98\%$

$P(X=1, Y=2) = \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{10}{91} = 0.1098 = 10.98\%$

$P(R) = P(B) = \frac{67}{91}$, $P(R \cap B) = \frac{45}{91}$, $P(B) \cdot P(R) \neq P(R \cap B)$: $\frac{67}{91} \cdot \frac{67}{91} \neq \frac{45}{91}$

c) $R \cap B \cap G = \{X=1, Y=1, Z=1\} \Rightarrow P(X=1, Y=1, Z=1) = \frac{25}{91} = 27.47\%$ (visto sopra).

Con 6 estrazioni: $X \sim H(5, 10; 6)$

$E[X] = 6 \cdot \frac{5}{15} = 2$

$P(R \cap B) = \{$Almeno 1 rossa e 1 blu$\} \Rightarrow \{R \cap B\}^c = \{$Nessuna rossa, nessuna blu$\}$

$$P(X=0)=P(Y=0)=\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{10}{6}}{\binom{15}{6}}=\frac{6}{143}$$

Ma $\{X=0, Y=0\} \Rightarrow \{Z=6\}$ che è impossibile

$\Rightarrow P(R\cap B) = 1-P(X=0)-P(Y=0) = 1-\frac{6}{143}+\frac{6}{143}=\frac{131}{143}$

2) $X\sim Exp\left(\frac{1}{7}\right)$ $R\sim U(\{6,7,8,9,10\})$

a) $P(X<R) = P(X<6, \overbrace{Y\geq 6}^{\text{sempre}}) + P(6<X<7, Y\geq 7) + P(7<X<8, Y\geq 8)$

$+P(8<X<9, Y\geq 9) + P(9<X<10, Y=10) = 0.67396 = 67.4\%$

$P(X>6) = 1-e^{-\frac{6}{7}} = 0.5756$

$P(6<X<7, Y\geq 7) = P(6<X<7)\cdot P(Y\geq 7) = (e^{-\frac{6}{7}}-e^{-\frac{7}{7}})\cdot\frac{4}{5} = 0.045$

$P(7<X<8, Y\geq 8) = (e^{-1}-e^{-\frac{8}{7}})\cdot\frac{3}{5} = 0.029$

$P(8<X<9, Y\geq 9) = (e^{-8/7}-e^{9/7})\cdot\frac{2}{5} = 0.017$

$P(9<X<10, Y=10) = (e^{-9/7}-e^{-\frac{10}{7}})\cdot\frac{1}{5} = 0.007$

b) $P(X<7 \cup Y=6) = P(X<7)+P(Y=6)-P(X<7, Y=6) = 1-e^{-1}+\frac{1}{5}-(1-e^{-1})\cdot\frac{1}{5} = 0.7057 = 70.57\%$

$\Downarrow$

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

c) $P(\{X>7, Y=7\}\cup\{7<X<8, Y\geq 8\}) = P(X>7, Y=7)+P(7<X<8, Y\geq 8) =$

$= P(X>7)\cdot P(Y=7) + P(7<X<8)\cdot P(Y\geq 8) =$

$\hookrightarrow P(X<7)-P(X<8)$

$= \underbrace{P(X>7)}_{e^{-1}}\cdot \overbrace{P(Y=7)}^{\frac{1}{5}} + (\underbrace{P(X<7)}_{e^{-1}} - \underbrace{P(X<8)}_{e^{-\frac{8}{7}}})\cdot \overbrace{P(Y\geq 8)}^{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}e^{-1}+\frac{3}{5}(e^{-1}-e^{-\frac{8}{7}}) = 0.10295 \simeq 10.3\%$

3) Scatole di 150 fiammiferi, $\frac{1}{25}$ difettoso; Scelgo 100 fiammiferi

$X = \#$ fiammiferi difettosi

a) Hanno tutti $p=\frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{25}$ ✓

b) $X\sim B(100, \frac{1}{25})$. $P(X\leq 5) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$= \sum_{k=0}^{5}\binom{100}{k}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^k\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^{100-k}$ difficile!

Sia $X_i\sim B(1,\frac{1}{25}) =$ "L'i-esimo fiammifero è difettoso".

$X_1+\ldots+X_{100}\sim N\left(100\cdot\frac{1}{25}, 100\cdot\frac{1}{25}\cdot\frac{24}{25}\right) = N(4, 92.16)$

$P(X_1+\ldots+X_{100}\leq 5) = P\left(Z_0\leq\frac{5.5-4}{\sqrt{\frac{96}{25}}}\right) = \Phi\left(\frac{1.5}{\sqrt{\frac{96}{25}}}\right) = \Phi(0.7654) = 77.64\% \sim 78\%.$

c) Non cambia se nei primi 10 ce ne sono di difettosi. $P(90 \text{ non difettosi}) = 1-P(90 \text{ difettosi})$

$= \left(\frac{24}{25}\right)^{90} = 0.02537 = 2.54\%$

15/01/2024

1) 40 carte, 4 semi, da 1 a 10.

Si estrae una carta, il cui seme é "briscola".

Dalle 39 carte restanti si danno 3 carte a testa.

a) P("Aldo ha l'asso di briscola" ∩ "La carta estratta NON é l'asso") =

E_1 ("Aldo ha l'asso di briscola"), A ("La carta estratta NON é l'asso")

$$P(E_1 \cap A) = P(E_1|A) \cdot P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{\binom{38}{2}}{\binom{39}{3}} = 0.0692 = 6.92\%$$

$P(A) = \frac{9}{10}$

$P(E_1|A)$: 39 carte, di cui 3 ad Aldo: $\binom{39}{3}$ casi possibili. → Assumendo che Aldo abbia l'asso, restano 38 carte da cui pescarne 2: $\binom{38}{2}$ casi favorevoli

b) E_2 = {"Aldo ha almeno una briscola"}

$\binom{39}{3}$ casi possibili; 9 briscole nel mazzo; In quanti modi Aldo può NON avere una briscola?

30 carte non sono di briscola, ne scelgo 3: $\binom{30}{3}$.

$$P(E_2) = 1 - \frac{\binom{30}{3}}{\binom{39}{3}} = \frac{10 \cdot 29 \cdot 14}{13 \cdot 19 \cdot 37} = 0.5557 = 55.58\%$$

c) E_3 = {"Aldo ha almeno un asso"} e E_2 sono indipendenti?

Sono indipendenti se $P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$

$$P(E_3) = 1 - \frac{\binom{35}{3}}{\binom{39}{3}} = 1 - \frac{35 \cdot \overset{17}{\cancel{34}} \cdot \overset{11}{\cancel{33}}}{\underset{13}{\cancel{39}} \cdot \underset{19}{\cancel{38}} \cdot 37} = 0.2838 = 28.38\%$$

Questo esame é troppo lungo, rifallo domani a mente fresca!

10/07/2024

1) Urna con 4 palline (numerate da 1 a 4). Estrazioni con rimpiazzo finché non le ho estratte tutte.

$X = \#$ estrazioni effettuate.

$P(X=4)$: Ottengo una pallina diversa ad ogni estrazione.

$$e_1 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Una qualsiasi}}}{\frac{4}{4}} ; \quad e_2 = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Tutte tranne } e_1}}{\frac{3}{4}} ; \quad e_3 = \frac{2}{4} ; \quad e_4 = \frac{1}{4}. \quad P(X=4) = \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

$P(X=8)$: Per le prime 7 ho ottenuto le stesse 3 palline, alla 8ª estraggo la quarta.

Sequenza lunga 4 3-piena?

$\hookrightarrow e_1 = 1 ; \; e_2 = \frac{3}{4} ; e_3 = \frac{2}{4} ; e_{4 \dots 8} = \frac{1}{4}$

$\#$ palline totali: 4; lunghezza seq = 7; $\#$ palline richieste = 3

$$S(4,5,3) = \sum_{j=0}^{3} -1^j \binom{3}{j} (3-j)^7 = \left(-1^{\cancel{0}} \binom{3}{\cancel{0}} \cdot (3)^7\right) + \left(-1^1 \cdot \binom{3}{1} \cdot (2)^7\right) + \left(-1^2 \cdot \binom{3}{2} \cdot (1)^7\right) = 3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3 = 1806$$

1806 sequenze 3-piene. Ogni estrazione ha prob. $\frac{1}{4}$.

7 estrazioni k-piene: $1 \cdot \frac{3}{4}$.

L'ultima estrazione ha p. $\frac{1}{4}$: $1806 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \frac{1}{4} = 1806 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 = 0.02755 = 2.75\%$

c)

$$P(X=k) = d_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{4}^k \cdot \sum_{j=0}^{3} -1^j \binom{3}{j} (3-j)^{k-1} \\ 0 \quad \text{altrimenti} \end{cases}$$

d) Mostrare che $X = 1 + X_1 + X_2 + X_3$ con X_1, X_2, X_3 v. geometriche modificate.

Si è visto in a):

1: Prima pallina (sempre diversa)

X_1: $\#$ estrazioni per avere la seconda pallina diversa.

X_2: $\#$ '' '' '' '' terza '' ''.

X_3: $\#$ '' '' '' '' quarta '' ''.

$P(X_i = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$

$X_1 \sim \tilde{G}\left(\frac{3}{4}\right) \quad X_2 \sim \tilde{G}\left(\frac{2}{4}\right) \quad X_3 \sim \tilde{G}\left(\frac{1}{4}\right)$

$X = 1 + X_1 + X_2 + X_3$.

e) $E[X] = E[1] + E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] = 1 + \frac{1}{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\frac{2}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{4}{3} + 2 + 4 = \frac{19}{3}$

14/06/2024

1) 48 posti, 12 file da 4, divise in 2 coppie di sedili. 30 persone, tra cui A e B, assegnate casualmente.

a) P(A e B siano vicini).

24 coppie di sedili, in cui posso avere sia $\{A,B\}$ che $\{B,A\}$ (2 modi), restano $(48-2)$ posti vuoti: $(46)_{28}$

In tutto ho 30 posti da assegnare: $(48)_{30}$

$$\Rightarrow \frac{24 \cdot 2 \cdot (46)_{28}}{(48)_{30}} = 0.021 = 2.1\%$$

b) P(A è seduta da sola): assegno una coppia ad Adele (Può sedersi su entrambi i sedili) e distribuisco gli altri posti:

$$\frac{2 \cdot 24 \cdot (46)_{29}}{(48)_{30}} = 0.3829 = 38.3\%$$