Лабораторна робота № 2

Тема**:** ПРОВЕДЕННЯ ДВОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ

Мета: провести двофакторний експеримент, перевірити однорідність дисперсії за критерієм Романовського, отримати коефіцієнти рівняння регресії, провести натуралізацію рівняння регресії.

Введемо такі позначення:
N – кількість точок плану (рядків матриці планування)
k – кількість факторів(кількість **x**)
m – кількість дослідів **y** за однієї і тієї ж комбінації факторів (test)
$\overline{x_s}$ - нормовані значення факторів $(s = \overline{1,k})$

Завдання на лабораторну роботу

1. Записати лінійне рівняння регресії.
2. Обрати тип двофакторного експерименту і скласти матрицю планування для нього з використанням додаткового нульового фактору (x_o=1).
3. Провести експеримент в усіх точках повного факторного простору (знайти значення функції відгуку y). Значення функції відгуку задати випадковим чином у відповідності до варіанту у діапазоні $y_{min} \div y_{max}$

   y_{max} = (30 - $N_{варіанту}$)*10,
   y_{min} = (20 - $N_{варіанту}$)*10.

   Варіанти обираються по номеру в списку в журналі викладача.

Таблиця 1.

№$_{варіанта}$	x_1		x_2	
	min	max	min	max
101	-10	50	20	60
102	20	70	-20	40
103	-20	30	30	80
104	15	45	-25	10
105	-30	20	15	50
106	10	40	25	45
107	-5	15	-15	35
108	-30	0	-35	10
109	-20	15	10	60
110	-25	-5	-30	45
111	10	60	-70	-10
112	-40	20	-35	15

113	-15	30	5	40
114	-25	75	25	65
115	10	50	-20	60
116	-10	50	-20	60
117	20	70	25	65
118	-20	30	5	40
119	15	45	-35	15
120	-30	20	-70	-10
121	10	40	-30	45
122	-5	15	10	60
123	-30	0	-25	10
124	-20	15	-15	35
125	-25	-5	25	45
126	10	60	15	50
127	-40	20	-25	10
128	-15	30	30	80
129	-25	75	-20	40
130	10	50	20	60
131	-45	10	5	35
132	0	30	-10	40
133	5	25	-20	15
134	10	45	-20	25
135	-10	30	-5	20
201	-10	50	-20	40
202	20	70	30	80
203	-20	30	-25	10
204	15	45	15	50
205	-30	20	25	45
206	10	40	-15	35
207	-5	15	-35	10
208	-30	0	10	60
209	-20	15	-30	45
210	-25	-5	-70	-10
211	10	60	-35	15
212	-40	20	5	40
213	-15	30	25	65
214	-25	75	-20	60
215	10	50	-20	60
216	-10	50	25	65
217	20	70	5	40
218	-20	30	-35	15
219	15	45	-70	-10

220	-30	20	-30	45
221	10	40	10	60
222	-5	15	-25	10
223	-30	0	-15	35
224	-20	15	25	45
225	-25	-5	15	50
226	10	60	-25	10
227	-40	20	30	80
228	-15	30	-20	40
229	-25	75	20	60
230	10	50	-15	45
231	-35	10	-25	20
232	-10	55	0	30
233	5	25	-10	35
234	15	40	-15	20
235	-5	30	0	30
301	-10	50	20	60
302	20	70	-15	45
303	-20	30	-20	40
304	15	45	30	80
305	-30	20	-25	10
306	10	40	15	50
307	-5	15	25	45
308	-30	0	-15	35
309	-20	15	-35	10
310	-25	-5	10	60
311	10	60	-30	45
312	-40	20	-70	-10
313	-15	30	-35	15
314	-25	75	5	40
315	10	50	25	65
316	-10	50	-20	60
317	-10	50	20	60
318	20	70	-15	45
319	-20	30	20	60
320	15	45	-15	45
321	-30	20	-20	40
322	10	40	30	80
323	-5	15	-25	10
324	-30	0	15	50
325	-20	15	25	45
326	-25	-5	-15	35

327	10	60	-35	10
328	-40	20	10	60
329	-15	30	-30	45
330	-25	75	-70	-10
331	-10	30	-15	40
332	-5	20	10	50
333	-30	10	-50	-10
334	5	25	20	50
335	-10	30	5	25

4. Перевірити однорідності дисперсії за критерієм Романовського
5. Знайти коефіцієнти нормованих рівнянь регресії і виконати перевірку (підставити значення нормованих факторів і коефіцієнтів у рівняння).
6. Провести натуралізацію рівняння регресії й виконати перевірку натуралізованого рівняння.
7. Написати комп'ютерну програму, яка все це виконує.

Порядок виконання роботи

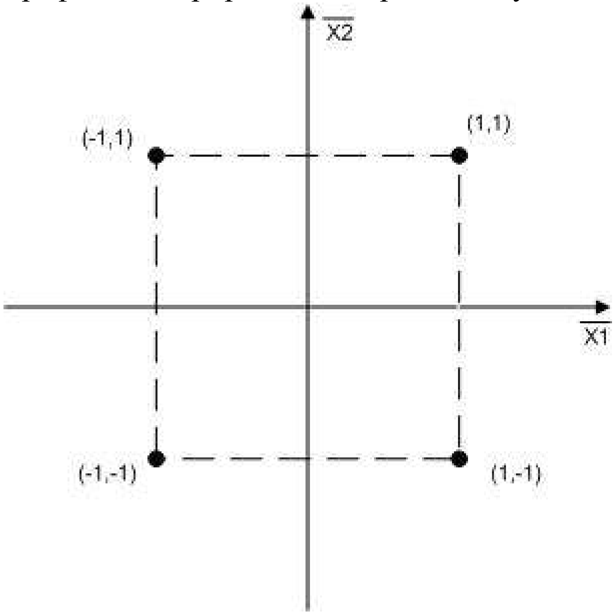
1. Записати лінійне рівняння регресії для нормованих значень x_i.
   $\hat{y} = b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2$
2. Для знаходження коефіцієнтів у лінійному рівнянні регресії застосовують повний факторний експеримент (ПФЕ). Якщо в багатофакторному експерименті використані всі можливі комбінації рівнів факторів, то такий експеримент називається **повним факторним експериментом.** Але, оскільки коефіцієнтів рівняння регресії всього 3 (b_0, b_1, b_2), то достатньо проведення 3 експериментів (3 рядки в матриці планування)
3. Складемо матрицю планування для повного і заповнимо таблицю нормованими значеннями $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$.

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	y_{i1}	y_{i2}	y_{ik}	y_{im}
1	-1	-1				
2	-1	+1				
3	+1	-1				
4	+1	+1				

Оскільки коефіцієнтів рівняння регресії всього 3 (b_0, b_1, b_2), то достатньо обрати будь-які три рядки, наприклад:

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	y_{i1}	y_{i2}	y_{ik}	y_{im}
1	-1	-1				
2	-1	+1				
3	+1	-1				

Графічна інтерпретація матриці планування :



4. Провести експеримент в усіх точках плану.
   $y_{\max}$ = (30 - $N_{варіанту}$)*10 = (30-0)*10 = 300;
   $y_{\min}$ = (20 - $N_{варіанту}$)*10 = (20-0)*10 = 200.
   (Для прикладу взято номер варіанту 0, що не існує)
5. Перевірити однорідність дисперсії за критерієм Романовського. Якщо дисперсії однорідні, то провести розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії. Якщо дисперсії неоднорідні, то необхідно збільшити *m* – кількість дослідів *y* за однієї і тієї ж комбінації факторів (test) (m=m+1), провести нові досліди і перевірити критерій знову.
6. Обчислити нормовані коефіцієнти рівняння регресії b_0, b_1, b_2
   Рівняння регресії має вигляд:
   $\hat{y} = b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2$
   Для перевірки нормованих коефіцієнтів рівняння регресії (b_0, b_1, b_2) необхідно підставити нормовані значення факторів для кожного досліду і обчислити експериментальні значення функції відгуку $\hat{y}_j$ $(j = \overline{1, N})$, де *N* – кількість комбінацій (рядків матриці планування).

   Порівняти кожне експериментальне значення функції відгуку $\hat{y}_j$ із середнім значенням функції відгуку у рядку.
   $$\bar{y}_j = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m} y_{jg} \quad (j = \overline{1, N},\ g = \overline{1, m});$$
   де N – кількість комбінацій (рядків матриці планування),
   m – кількість дослідів y за однієї і тієї ж комбінації факторів (test).

   Якщо рівність виконується:
   $\hat{y}_j = \bar{y}_j$ $(j = \overline{1, N})$, то значення коефіцієнтів рівняння регресії знайдені вірно.
7. Провести натуралізацію коефіцієнтів рівняння регресії і отримати нові коефіцієнти a_0, a_1, a_2. Рівняння регресії матиме вигляд:

$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$

Для перевірки натуралізованих коефіцієнтів рівняння регресії (a_0, a_1, a_2.), необхідно підставити натуральні значення факторів: x_{imax} замість +1, та x_{imin} замість -1, для кожної точки плану і обчислити експериментальні значення функції відгуку $\hat{y}_j$ ($j = \overline{1, N}$), де N – кількість комбінацій (рядків матриці планування).

Порівняти кожне експериментальне значення функції відгуку із середнім значенням функції відгуку у рядку.

$$\overline{y}_j = \frac{1}{m} \sum_{g=1}^{m} y_{jg} \; (j = \overline{1, N}, \; g = \overline{1, m});$$

Якщо рівність $\hat{y}_j = \overline{y}_j$ ($j = \overline{1, N}$) виконується, то значення коефіцієнтів натуралізованого рівняння регресії знайдені вірно.

Зміст звіту

1) Результати підготовки (нормована матриця планування);
2) Результати виконання роботи (пп. 11,12,13).

Контрольні запитання

1) Що таке регресійні поліноми і де вони застосовуються?
2) Визначення однорідності дисперсії.
3) Що називається повним факторним експериментом?

Теоретичні відомості

В теорії планування експерименту найважливішою частиною є оцінка результатів вимірів. При цьому використовують апроксимуючі поліноми, за допомогою яких ми можемо описати нашу функцію. В ТПЕ ці поліноми отримали спеціальну назву - регресійні поліноми, а їх знаходження та аналіз - регресійний аналіз. Найчастіше в якості базисної функції використовується ряд Тейлора, який має скінченну кількість членів.

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1!}F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}F''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^N}{N!}F^{(N)}(a)$$

Але при використанні апроксимуючого полінома Тейлора в його початковому вигляді виникає ряд проблем, пов’язаних із знаходженням похідних, оскільки нам невідома функція, а відомий лише ряд її значень. Тому ми замінюємо поліном Тейлора аналогічним йому рівнянням регресії:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{i,i} x_i^2 + \sum_{i,j,n=1}^{k} b_{i,j,k} x_i x_j x_n + \ldots$$

де k –кількість факторів (кількість x)

Мета даної роботи – дослідити лінійну регресійну модель

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i$$

Мають місце наступні припущення:

1) Результати вимірів вихідної величини y в N експериментах є реалізація нормально розподіленої величини.
2) Дисперсії реалізації в усіх точках факторного простору повинні бути однаковими, оскільки дисперсія не повинна залежати від абсолютного значення величини.
3) Вхідні змінні (фактори) - це незалежні величини, які вимірюються з нескінченно малою похибкою відносно похибки вихідної величини.

Будь який багатофакторний експеримент є результатом варіювання усіх факторів.

Властивості ортогонального факторного експерименту

Матриця планування має ряд властивостей, теоретичні аспекти яких представлені нижче:

N – кіль кість комбінацій значень факторів (рядків матриці планування)

k– кількість факторів (кількість x)

1) Симетричність плану відносно центру експерименту:

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{x}_{s,j} = 0 \ (s = \overline{1,k});$$

тобто сума нормованих значень рівнів будь-якого фактора (стовпця) дорівнює 0.

2) Нормування плану:

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{x}^2_{s,j} = N \ (s = \overline{1,k});$$

тобто сума квадратів нормованих значень рівнів будь-якого фактора дорівнює N.

3) Ортогональність плану:

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{x_{s,j}} \cdot \overline{x_{u,j}} = 0 \ (s, u = \overline{1,k}; s \neq u);$$

тобто сума попарних добутків нормованих значень рівнів будь-яких 2 факторів (крім $s = u$) дорівнює 0.

Перевірка однорідності дисперсій за критерієм Романовського

В результаті виконання експериментів заповнюється матриця планування експерименту. Для кожної комбінації факторів проводиться m дослідів, тобто отримуються y_{jg} – експериментальні значення відгуку для кожного g-го досліду j-го експерименту ($j = \overline{1,N}$, $g = \overline{1,m}$).

Середнє значення функції відгуку обчислюється за формулою: $\overline{y}_j = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m} y_{jg}$ ($j = \overline{1,N}$, $g = \overline{1,m}$).

Дисперсія – це сума квадратів відхилень величин y_{jg} від середнього значення $\overline{y}_j$. Дисперсія обчислюється для кожного рядка за формулою:

$$\sigma^2\{y_j\} = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}(y_{jg} - \overline{y_j})^2, (j = \overline{1,N},\ g = \overline{1,m}), \overline{y}_j = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m} y_{jg}$$

Якщо y_{jg} – нормально розподілена величина, і кількості дослідів m є достатньою, то дисперсії розподілів y_{jg} для кожної комбінації повинні бути **рівними**.

Тобто, для будь-яких i та j ($i = \overline{1,N}$; $j = \overline{1,N}$): $\sigma^2\{y_i\} = \sigma^2\{y_j\}$;

Груба похибка (промах) – це похибка результату окремого виміру, що входить в ряд вимірів, котра для даних умов різко відрізняється від інших результатів цього ряду. Причинами появи грубих похибок є різкі зміни умов вимірювання і помилки, допущені оператором. Наявність грубих похибок говорить про неоднорідності дисперсії.

Одним з критеріїв виявлення грубих похибок є **критерій Романовського**. Критерій Романовського перевіряється за наступним алгоритмом:

1. Для кожної комбінації знайти $\sigma^2\{y_j\}$ – дисперсію експериментальних значень вихідної змінної для j-ї комбінації ($j = \overline{1,N}$).
2. Обчислити основне відхилення:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{2(2m-2)}{m(m-4)}}$$

3. Для кожної пари комбінацій u, v ($u = \overline{1,N};\ v = \overline{1,N}$) обчислити:

$$F_{uv} = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2\{y_u\}}{\sigma^2\{y_v\}}, \text{якщо } \sigma^2\{y_u\} \geq \sigma^2\{y_v\} \\ \dfrac{\sigma^2\{y_v\}}{\sigma^2\{y_u\}}, \text{якщо } \sigma^2\{y_u\} < \sigma^2\{y_v\} \end{cases}$$

де дисперсії по рядках $\sigma^2\{y_j\} = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m}(y_{jg} - \overline{y_j})^2$, $\quad j = \overline{1,N}\ g = \overline{1,m}$,

де $\overline{y}_j = \frac{1}{m}\sum_{g=1}^{m} y_{jg}$

$$\theta_{uv} = \frac{m-2}{m} F_{uv}$$

$R_{uv} = \frac{|\theta_{uv} - 1|}{\sigma_\theta}$ — експериментальне значення критерію Романовського

4. Обирають так названу «довірчу ймовірність» ***p*** – ймовірність, з якою вимагається підтвердити гіпотезу про однорідність дисперсій. У відповідності до *p* і кількості дослідів *m* обирають з таблиці критичне значення критерію $R_{кр}$.
5. Кожне R_{uv} (експериментальне значення критерію Романовського) порівнюється з $R_{кр}$ (значення критерію Романовського за різних довірчих ймовірностей ***p***) і якщо для усіх $u = \overline{1,N};\ v = \overline{1,N}$ кожне $R_{uv} < R_{кр}$, то гіпотеза про однорідність дисперсій підтверджується з ймовірністю ***p***.

В цьому випадку можна обчислювати коефіцієнти рівняння регресії.

Якщо хоча б для одної пари *u*, *v* має місце $R_{uv} > R_{кр}$, то гіпотеза про однорідність дисперсій не підтверджується. В цьому випадку розбіжність між дисперсіями експериментальних значень u-ї v-ї комбінацій є значною. Необхідно збільшити кількість дослідів *m*=*m*+1, провести нові досліди і заново перевірити критерій.

Значення критерію Романовського за різних довірчих ймовірностей ***p*** кількостях дослідів ***m***

Довірча ймовірність ***p***	Значення $R_{кр}$ за кількості дослідів ***m***						
	2	6	8	10	12	15	20
0.99	1.73	2.16	2.43	2.62	2.75	2.9	3.08
0.98	1.72	2.13	2.37	2.54	2.66	2.8	2.96
0.95	1.71	2.10	2.27	2.41	2.52	2.64	2.78
0.90	1.69	2.00	2.17	2.29	2.39	2.49	2.62

Визначення нормованих коефіцієнтів рівняння регресії

Після проведення *m* дослідів в усіх точках факторного простору ми повинні знайти коефіцієнти рівняння регресії. Це можна зробити методом найменших квадратів. Згідно цього методу рішення знаходиться як мінімум суми квадратів відхилень теоретичних значень від експериментальних y_i.

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - y_i)^{2} \longrightarrow min$$

де:

$$\hat{y} = \phi(x_1, \ldots x_k, \; b_0, b_1, \ldots b_k)$$

N – кількість точок планування експерименту (рядків матриці планування)

k – кількість факторів.

Коефіцієнти b_0, b_1, … b_k можна знайти виходячи з того, що у точці мінімуму ***E*** часткові похідні по b_0, b_1, … b_k мають дорівнювати нулю. Запишемо це для *k*=2:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{b}_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{b}_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{b}_2} = 0 \end{cases}$$

або, враховуючи, що похідна суми є сумою похідних та, диференціюючи квадрат, різниць запишемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{N} (\phi_i - y_i) * \dfrac{\partial \phi_i}{\partial b_0} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N} (\phi_i - y_i) * \dfrac{\partial \phi_i}{\partial b_1} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{N} (\phi_i - y_i) * \dfrac{\partial \phi_i}{\partial b_2} = 0 \end{cases}$$

Знаходимо часткові похідні по b_0, b_1, b_2

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial b_0} = 1 \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_1} = x_{1i} \qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial b_2} = x_{2i}$$

Запишемо рівняння у повній формі:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}(b_0+b_1x_{1i}+b_2x_{2i}-y_i)*1=0\\ \sum_{i=1}^{N}(b_0+b_1x_{1i}+b_2x_{2i}-y_i)*x_{1i}=0\\ \sum_{i=1}^{N}(b_0+b_1x_{1i}+b_2x_{2i}-y_i)*x_{2i}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(\sum_{i=1}^{N}1)b_0+(\sum_{i=1}^{N}x_{1i})b_1+(\sum_{i=1}^{N}x_{2i})b_2=\sum_{i=1}^{N}y_i\\ (\sum_{i=1}^{N}x_{1i})b_0+(\sum_{i=1}^{N}x_{1i}{}^2)b_1+(\sum_{i=1}^{N}x_{2i}x_{1i})b_2=\sum_{i=1}^{N}x_{1i}y_i\\ (\sum_{i=1}^{N}x_{2i})b_0+(\sum_{i=1}^{N}x_{1i}x_{2i})b_1+(\sum_{i=1}^{N}x_{2i}{}^2)b_2=\sum_{i=1}^{N}x_{2i}y_i\end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n}1=N$ Поділимо кожне рівняння на N

$$\begin{cases}b_0+(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i})b_1+(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i})b_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i\\ (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i})b_0+(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}{}^2)b_1+(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i}x_{1i})b_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}y_i\\ (\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i})b_0+(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}x_{2i})b_1+(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i}{}^2)b_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i}y_i\end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}=m_{x1} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i}=m_{x2}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}{}^2=a_1;\ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}x_{2i}=a_2;\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i}{}^2=a_3$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{1i}y_i=a_{11} \quad \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_{2i}y_i=a_{22}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}y_i=m_y$$

Ми отримали систему лінійних рівнянь з коефіцієнтами регресії в якості невідомих. Скористаймося методом Крамера для її вирішення:

$$\begin{cases}b_0+m_{x1}b_1+m_{x2}b_2=m_y\\ m_{x1}b_0+a_1b_1+a_2b_2=a_{11}\\ m_{x2}b_0+a_2b_1+a_3b_2=a_{22}\end{cases}$$

$$b_0=\frac{\begin{vmatrix}m_y & m_{x1} & m_{x2}\\ a_{11} & a_1 & a_2\\ a_{22} & a_2 & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & m_{x1} & m_{x2}\\ m_{x1} & a_1 & a_2\\ m_{x2} & a_2 & a_3\end{vmatrix}} \qquad b_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & m_y & m_{x2}\\ m_{x1} & a_{11} & a_2\\ m_{x2} & a_{22} & a_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & m_{x1} & m_{x2}\\ m_{x1} & a_1 & a_2\\ m_{x2} & a_2 & a_3\end{vmatrix}} \qquad b_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & m_{x1} & m_y\\ m_{x1} & a_1 & a_{11}\\ m_{x2} & a_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & m_{x1} & m_{x2}\\ m_{x1} & a_1 & a_2\\ m_{x2} & a_2 & a_3\end{vmatrix}}$$

Натуралізація плану

За необхідності, нормалізоване рівняння регресії приводять до натурального вигляду (приводять до вихідних змінних - струм, напруга, температура і т.д.).

Натуралізація - операція обернена нормалізації (тобто перерахунок значень факторів так, що –1 → min, +1 → max).

Для цього в нормалізованому рівнянні регресії виконують заміну значень факторів на натуральні, а також обчислюють натуралізовані коефіцієнти рівняння регресії $y=a_0+a_1x_1+a_2x_2$.

1. Нехай фактори x_1 і x_2 змінюються в таких межах:

$x_{1min}<x_1<x_{1max} x_{2min}<x_2<x_{2max}$

$\Delta x_1 =| x_{1max}- x_{1min}|/2$

$\Delta x_2=| x_{2max}- x_{2min}|/2$

$x_{10} = (x_{1max}+ x_{1min})/2$

$x_{20} = (x_{2max}+ x_{2min})/2$

Запишемо ці значення у вигляді таблиці:

Фактор	x_{imin}	x_{imax}	x_{i0}	Δx_i
x_1	x_{1min}	x_{1max}	$(x_{1max} + x_{1min})/2$	$\| x_{1max} - x_{1min} \|/2$
x_2	x_{2min}	x_{2max}	$(x_{2max} + x_{2min})/2$	$\| x_{2max} - x_{2min} \|/2$

Приклад: *k*=2 (кількість факторів), лінійна модель.

Рівняння регресії:

Нормоване

$\hat{y} = b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2$

Натуралізовані коефіцієнти обчислюються так:

$a_0 = b_0 - b_1 * \frac{x_{10}}{\Delta x_1} - b_2 * \frac{x_{20}}{\Delta x_2}$;

$a_1 = \frac{b_1}{\Delta x_1}$;

$a_2 = \frac{b_2}{\Delta x_2}$;

Приклад виконання роботи

1. Запишемо лінійне рівняння регресії:

$$\hat{y} = b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2$$

2. Нормована матриця планування експерименту

Для знаходження 3-х коефіцієнтів рівняння регресії достатньо N=3 експериментів. Для прикладу візьмемо x1min=-25, x1max=75, x2min=5, x2max=40.

X1	X2	Y1	Y2	Yi		Ym
-1.0	-1.0					
+1.0	-1.0					
-1.0	+1.0					

3. Для прикладу взяті y_{min}=9; y_{max}=20.

Заповнимо матрицю планування для m=5

Значення факторів нормовані.

X1	X2	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5
-1.0	-1.0	9.0	10.0	11.0	15.0	9.0
+1.0	-1.0	15.0	14.0	10.0	12.0	14.0
-1.0	+1.0	20.0	18.0	12.0	10.0	16.0

4. Перевіримо однорідність дисперсії за критерієм Романовського:

1) Знайдемо середнє значення функції відгуку в рядку:

$\overline{y}_1$ = $(y_{11}+y_{12}+y_{13}+y_{14}+y_{15})/5=(9+10+11+15+9)/5=10.8$

$\overline{y}_2$ = $(y_{21}+y_{22}+y_{23}+y_{24}+y_{25})/5=(15+14+10+12+14)/5=13.0$

$\overline{y}_3$ = $(y_{31}+y_{32}+y_{33}+y_{34}+y_{35})/5=(20+18+12+10+16)/5=15.2$

2) Знайдемо дисперсії по рядках:

$$\sigma^2\{y_1\} = \frac{1}{5}((y_{11}-\overline{y_1})^2 + (y_{12}-\overline{y_1})^2 + (y_{13}-\overline{y_1})^2 + (y_{14}-\overline{y_1})^2 + (y_{15}-\overline{y_1})^2) =$$

$$= \frac{1}{5}((9-10.8)^2 + (10-10.8)^2 + (11-10.8)^2 + (15-10.8)^2 + (9-10.8)^2) = 0.53$$

$$\sigma^2\{y_2\} = \frac{1}{5}((y_{21}-\overline{y_2})^2 + (y_{22}-\overline{y_2})^2 + (y_{23}-\overline{y_2})^2 + (y_{24}-\overline{y_2})^2 + (y_{25}-\overline{y_2})^2) =$$

$$= \frac{1}{5}((15-13)^2 + (14-13)^2 + (10-13)^2 + (12-13)^2 + (14-13)^2) = 0.53$$

$$\sigma^2\{y_3\} = \frac{1}{5}((y_{31}-\overline{y_3})^2 + (y_{32}-\overline{y_3})^2 + (y_{33}-\overline{y_3})^2 + (y_{34}-\overline{y_3})^2 + (y_{35}-\overline{y_3})^2) =$$

$$= \frac{1}{5}((20-15.2)^2 + (18-15.2)^2 + (12-15.2)^2 + (10-15.2)^2 + (16-15.2)^2) = 1.24$$

3) Обчислимо основне відхилення:

$$\sigma_\theta = \sqrt{\frac{2(2m-2)}{m(m-4)}} = \sqrt{\frac{2(2*5-2)}{5(5-4)}} = 1.79$$

4) Обчислимо F_{uv}:

$F_{uv1} = \sigma^2\{y_1\}/\sigma^2\{y_2\} = 0.53/0.53=1$

$F_{uv2} = \sigma^2\{y_3\}/\sigma^2\{y_1\} = 1.24/0.53=2.4$

$F_{uv3} = \sigma^2\{y_3\}/\sigma^2\{y_2\} = 1.24/0.53 =2.4$

5) θ_{uv1}=(m-2/m)* F_{uv1}=3/5*1=0.6

θ_{uv2}=(m-2/m)* F_{uv2}=3/5*2.4=1.44

θ_{uv3}=(m-2/m)* F_{uv3}=3/5*2.4=1.44

6) $R_{uv1}=|\theta_{uv1}-1|/\sigma_\theta=|0.6-1|/1.79=0.22$

$R_{uv2}=|\theta_{uv2}-1|/\sigma_\theta=|1.44-1|/1.79=0.25$

$R_{uv3}=|\theta_{uv3}-1|/\sigma_\theta=|1.44-1|/1.79=0.25$

7) Оскільки m=5 (в таблиці немає даних для такого значення), візьмемо значення $R_{кр} = 2$ для m=6 і довірчою ймовірністю p=0.9

$R_{uv1}=0.22<R_{кр}=2$

$R_{uv2}=0.25<R_{кр}=2$

$R_{uv3}=0.25<R_{кр}=2$

Отже, дисперсія однорідна.

5. Розрахунок нормованих коефіцієнтів рівняння регресії.

mx1 =(X11+X12+X13)/3=(-1+1+(-1))/3= -0.33

mx2 = (X21+X22+X23)/3=(-1+(-1)+1)/3= -0.33

my = $(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3)$/3=(10.8+13+15.2)/3=13

a1 = $(X11^2+X12^2+X13^2)$/3=(1+1+1)/3= 1.0

a2 = (X11*X21+X12*X22+X13*X23)/3=(1-1-1)/3= -0.33

a3 = $(X21^2+X22^2+X23^2)$/3= (1+1+1)/3 = 1.0

a11 =(X11* $\bar{y}_1$ +X12* $\bar{y}_2$ +X13* $\bar{y}_3$)/3=(-1*10.8+1*13.0-1*15.2)/3 =-4.33

a22 =(X21* $\bar{y}_1$ +X22* $\bar{y}_2$ +X23* $\bar{y}_3$)/3=(-1*10.8-1*13.0+1*15.2)/3 = -2.86

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} m_y & m_{x1} & m_{x2} \\ a_{11} & a_1 & a_2 \\ a_{22} & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} \\ m_{x1} & a_1 & a_2 \\ m_{x2} & a_2 & a_3 \end{vmatrix}} \qquad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_y & m_{x2} \\ m_{x1} & a_{11} & a_2 \\ m_{x2} & a_{22} & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} \\ m_{x1} & a_1 & a_2 \\ m_{x2} & a_2 & a_3 \end{vmatrix}} \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_y \\ m_{x1} & a_1 & a_{11} \\ m_{x2} & a_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_{x1} & m_{x2} \\ m_{x1} & a_1 & a_2 \\ m_{x2} & a_2 & a_3 \end{vmatrix}}$$

$$b_0 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & -0.33 & -0.33 \\ -4.3 & -0.33 & 1 \\ -2.87 & 1 & -0.33 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 1 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 1 \end{vmatrix}} = 14.1 \qquad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 & -0.33 \\ -0.33 & -4.3 & -0.33 \\ -0.33 & -2.87 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 1 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 1 \end{vmatrix}} = 1.1 \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0.33 & 13 \\ -0.33 & -0.33 & -4.3 \\ -0.33 & 1 & -2.87 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -0.33 & -0.33 \\ -0.33 & 1 & -0.33 \\ -0.33 & -0.33 & 1 \end{vmatrix}} = 2.2$$

Отже, нормоване рівняння регресії

y = 14.1 + 1.1*x1 + 2.2*x2

Зробимо перевірку:

14.1-1.1-2.2=10.8

14.1+1.1-2.2=13.0

14.1-1.1+2.2=15.2

Результат збігається з середніми значеннями $\overline{y}_j$.

6. Проведемо натуралізацію коефіцієнтів:

Δx_1 =| x_{1max} - x_{1min} |/2=(75-(-25))/2=50

Δx_2=| x_{2max} - x_{2min} |/2=(40-5)/2=17.5

x_{10} = (x_{1max} + x_{1min})/2=(75-25)/2=25

x_{20} = (x_{2max} + x_{2min})/2=(40+5)/2=22.5

$a_0 = b_0 - b_1 * \frac{x_{10}}{\Delta x_1} - b_2 * \frac{x_{20}}{\Delta x_2}$ =14.1-1.1*25/50-2.2*22.5/17.5=10.72;

$a_1 = \frac{b_1}{\Delta x_1}$ =1.1/50=0.02;

$a_2 = \frac{b_2}{\Delta x_2}$ =2.2/17.5=0.125;

Запишемо натуралізоване рівняння регресії:

y =a_0+a_1x_1+a_2x_2 =10.72+0.02*x1+0.125*x2

Зробимо перевірку по рядках:

10.72+0.02*(-25)+0.125*5=10.8

10.72+0.02*(75)+0.125*5=13.0

10.72+0.02*(-25)+0.125*40=15.2

Отже, коефіцієнти натуралізованого рівняння регресії вірні.