

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Nauk Ekonomicznych

Łukasz Madej  
Nr albumu: 452956

**Raport z badania ekonometrycznego: analiza  
szeregu czasowego CPI dla odzieży w miastach oraz  
mediany cen sprzedanych domów w USA**

Praca wykonana pod kierunkiem  
dr Piotra Żocha  
z Katedry Statystyki i Ekonometrii  
WNE UW

Warszawa, czerwiec 2025

### Oświadczenie autora pracy

Świadom(a) odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca została napisana samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Data

01.06.2025

Podpis autora pracy

Lukasz Madej

## SPIS TREŚCI

Wprowadzenie.....	3
ROZDZIAŁ I. SZEREG NIESEZONOWY – MEDIANA CEN SPRZEDAŻY DOMÓW W USA.....	4
1.1. Opis szeregu niesezonowego.....	4
1.2. Dekompozycja szeregu niesezonowego.....	5
1.3. Model ARIMA.....	6
1.4. Model ekstrapolacyjny i porównanie z modelem ARIMA.....	12
ROZDZIAŁ II. SZEREG SEZONOWY - CPI DLA KONSUMENTÓW MIEJSKICH W USA: UBRANIA.....	16
2.1. Opis szeregu sezonowego.....	16
2.2. Dekompozycja szeregu sezonowego.....	17
2.3. Model ekstrapolacyjny.....	18
ZAKOŃCZENIE.....	20
BIBLIOGRAFIA.....	21
SPIS RYSUNKÓW.....	22
SPIS TABEL.....	22

## Wprowadzenie

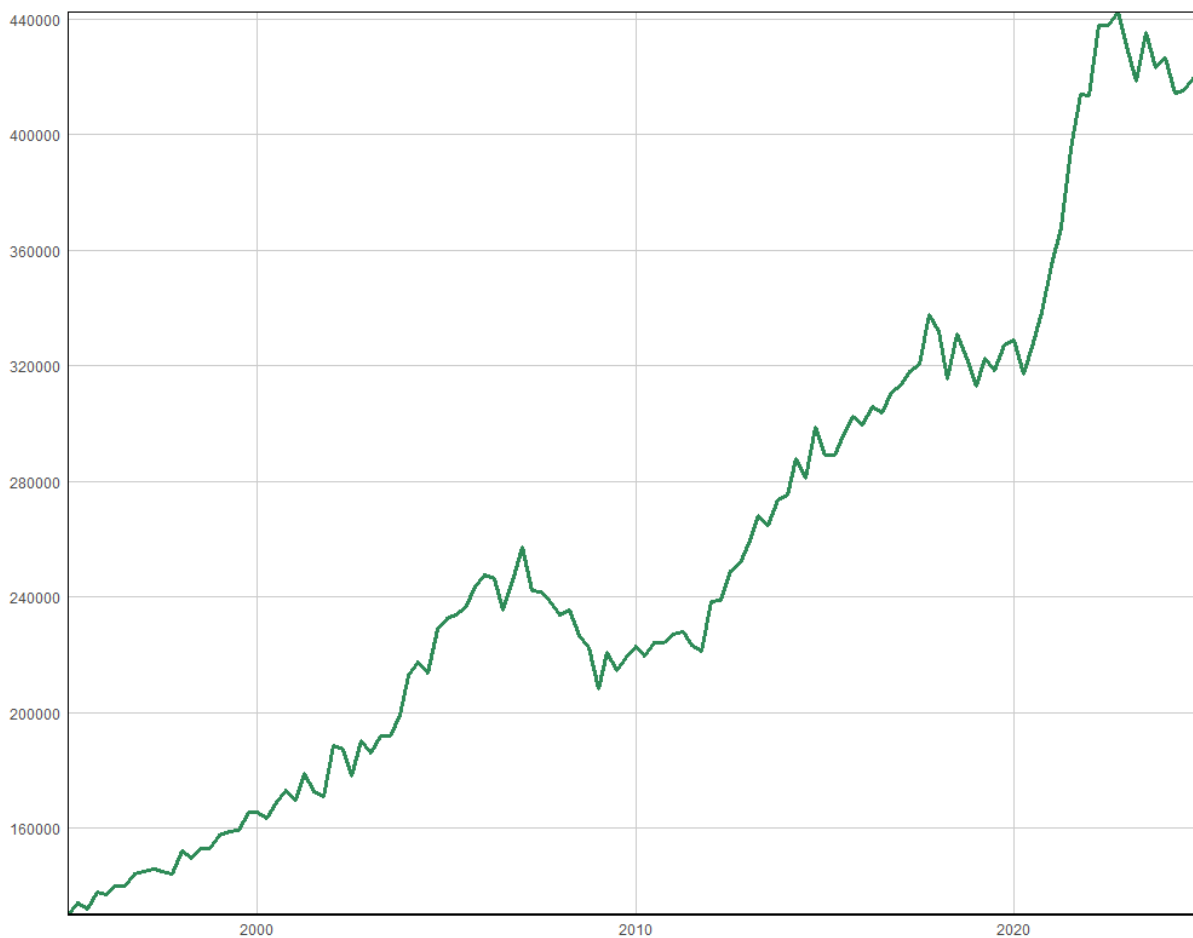
Raport ma na celu przeprowadzenie analizy dwóch szeregów. Pierwszy z nich jest niesezonowy i przedstawia medianę cen sprzedaży domów sprzedanych w USA. Dane obejmują zakres trzydziestu ostatnich lat (01.01.1995-01.01.2025) i mają charakter kwartalny. Drugi analizowany szereg jest natomiast sezonowy i przedstawia wskaźnik cen konsumpcyjnych (*CPI*) dla wszystkich konsumentów miejskich: odzież w miastach USA (średnia). Dane dla tego szeregu obejmują z kolei ostatnie 40 lat (01.01.1985-01.01.2025) i są przedstawione w sposób miesięczny. Dla obu szeregów została dokonana dekompozycja w programie JDemetra+, próba oszacowania prognoz za pomocą modeli z klas ARIMA (to akurat tylko dla niesezonowego), a także zastosowanie metod ekstrapolacyjnych i ocena jakości prognoz. Do wszystkich testów statystycznych przyjęto poziom istotności  $\alpha = 0,05$ .

## ROZDZIAŁ I. SZEREG NIESEZONOWY – MEDIANA CEN SPRZEDAŻY DOMÓW W USA

### 1.1. Opis szeregu niesezonowego

Szereg przedstawia medianę cen (w dolarach) sprzedaży domów w Stanach Zjednoczonych w okresie od 1 stycznia 1995 roku do 1 stycznia 2025 roku. Dane pochodzą z bazy danych Rezerwy Federalnej w St. Louis ([fred.stlouisfed.org](http://fred.stlouisfed.org)) i są prezentowane w ujęciu kwartalnym. Łącznie analizie poddano 121 obserwacji. Rysunek 1. Przedstawia analizowany szereg w tym okresie. Na podstawie wykresu można stwierdzić, że szereg nie zawiera sezonowości. Zauważalny jest jednak wyraźny trend wzrostowy (z wyjątkiem umiarkowanego spadku związanego z globalnym kryzysem finansowym). Trend wzrostowy może być związany z efektem skumulowanej (szczególnie wysokiej w ostatnich latach) inflacji, a także rosnącą populacją USA - w przeciągu tych trzydziestu lat liczba ludności wzrosła o 73,5 mln osób.

Rysunek 1. Mediana cen sprzedaży domów w USA

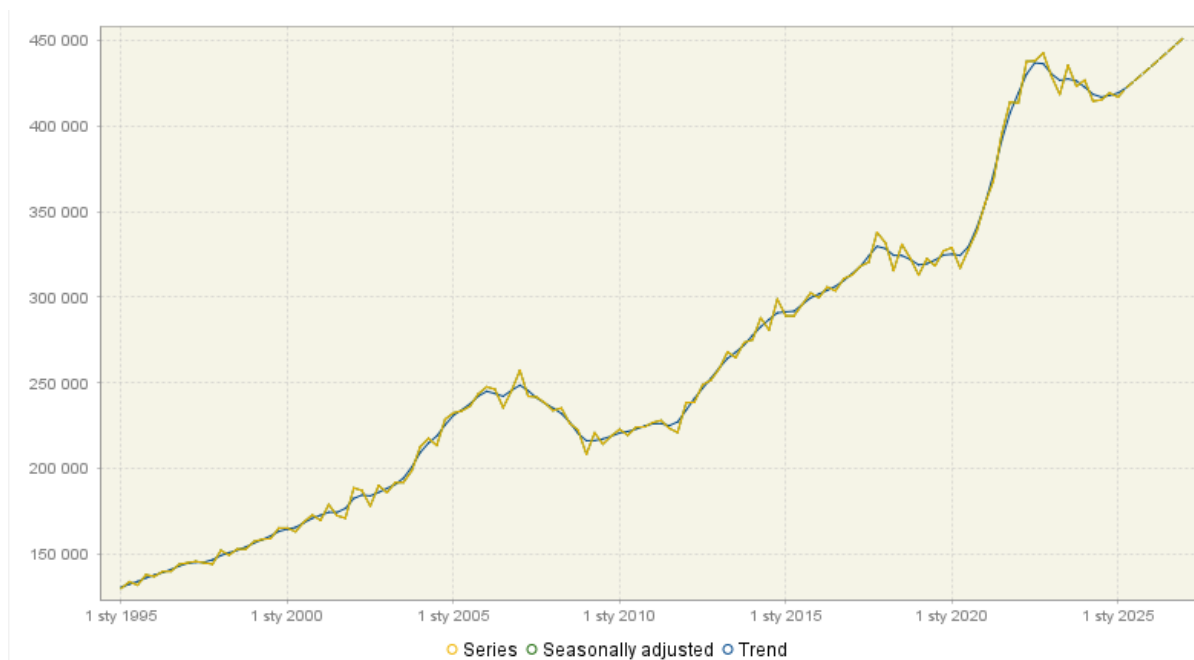


Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

## 1.2. Dekompozycja szeregu niesezonowego

Następnie, dokonano dekompozycji szeregu za pomocą metody TramoSeats w programie JDemetra+, czego efekt przedstawiono na rysunku 2. Wstępne założenia z poprzedniego podrozdziału zostały potwierdzone - szereg nie zawiera sezonowości (warto zauważyć, że szereg oczyszczony z sezonowości całkowicie pokrywa się z pierwotnym). Linia trendu zaś w głównej mierze (i w ujęciu całościowym tj. dla całego okresu) pozostaje wzrostowa oraz przyjmuje wartości zbliżone do rzeczywistych. Nie zostały wykryte żadne obserwacje odstające - zarówno obserwacje z okresów: globalnego kryzysu finansowego w 2008 jak i pandemii Covid-19 nie zostały uznane jako *outliers*. Co ciekawe, dane podczas procesu dekompozycji zostały automatycznie zlogarytmowane, co może być użyteczną informacją przechodząc do dalszej analizy. Wszystkie testy diagnostyczne dla modelu zostały również spełnione.

Rysunek 2. Dekompozycja szeregu niesezonowego - mediana sprzedaży cen domów w USA

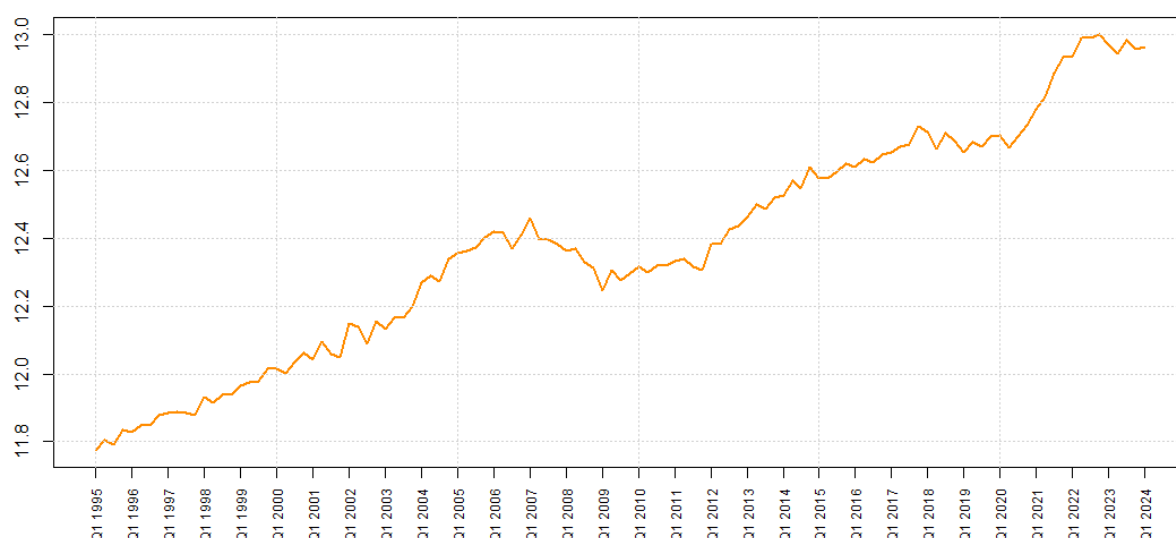


Źródło: Opracowanie własne w programie JDemetra+.

### 1.3. Model ARIMA

Próba została podzielona na okres in-sample (*training data*) i out-of-sample (*test data*), do której zaklasyfikowano 4 ostatnie obserwacje (2 kwartał 2024 - początek 2025). W celu przeprowadzenia estymacji dla modelu ARIMA, szereg poddany analizie musi spełnić założenie stacjonarności. Odnosząc się ponownie do Rysunku 1, należy zauważyć, że oprócz wyraźnego trendu wzrostowego, amplituda wahań szeregu również rośnie w czasie - szczególnie zauważalne jest to w okolicach roku 2020, gdzie wzrosty są znacznie bardziej dynamiczne niż we wcześniejszych okresach. Są to zatem przesłanki do uznania szeregu za niestacjonarny. W celu umiarkowania efektu trendu wzrostowego i wzmożonej wariancji w późniejszych okresach zdecydowałem się na zlogarytmowanie szeregu treningowego, czego rezultat został przedstawiony na Rysunku 3.

Rysunek 3. Zlogarytmowany szereg niesezonowy



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Stacjonarność modelu należy jednak formalnie sprawdzić za pomocą odpowiednich testów - wstępna analiza wykresów nie jest wystarczająca. W tym celu przeprowadziłem zarówno testy Dickey-Fullera, jak i rozszerzone testy Dickey-Fullera (ADF): z uwzględnieniem samego dryfu (1), a także dryfu i trendu (2). ADF z dwoma rozszerzeniami jest w tej sytuacji wskazany, ze względu na wcześniej wskazaną obecność trendu wzrostowego i niestabilnej wariancji. Aby móc poprawnie interpretować wyniki owych testów, konieczne jest spełnienie założenia o braku autokorelacji reszt w modelu - w tym celu przeprowadzono testy Breuscha-Godfrey dla regresji reszt uzyskanych z testów DF i ADF, co przedstawia rysunek 4.

Rysunek 4. Wyniki testu Breuscha-Godfrey'a przeprowadzonego na resztach regresji testów DF i ADF dla zlogarytmowanego szeregu niesezonowego

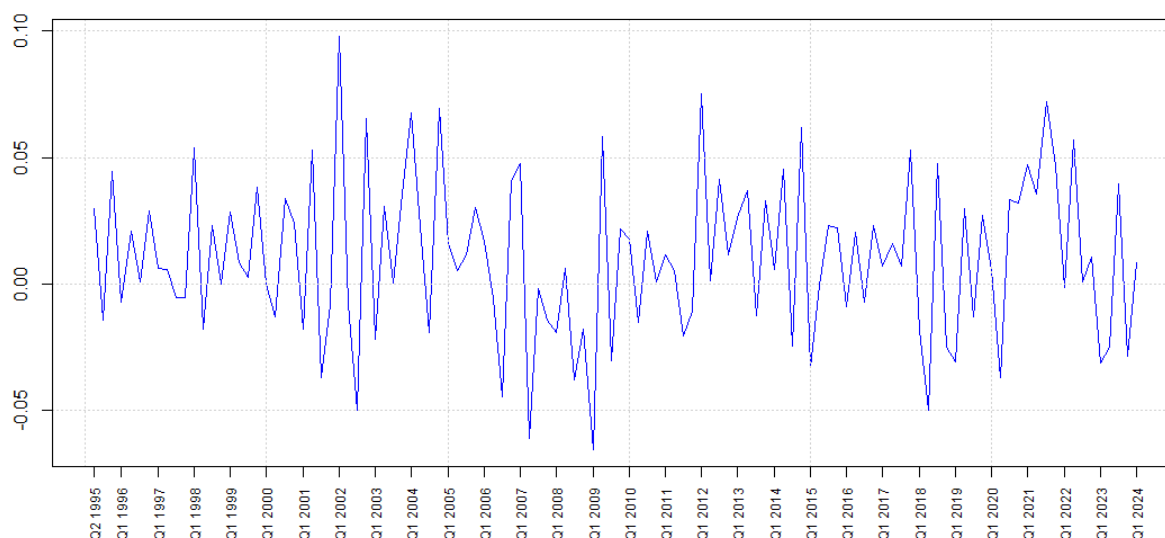
Lag	B-G.test.statistic_DF	p-value_DF	B-G.test.statistic_ADF1	p-value_ADF1	B-G.test.statistic_ADF2	p-value_ADF2
1	0.002769	0.958	0.0012614	0.9717	0.073125	0.7868
2	8.1283	0.01718	7.6513	0.0218	7.4261	0.0244
3	3.2626	0.3529	3.3731	0.3376	7.4144	0.0598
4	5.2053	0.2669	4.9267	0.2949	4.7788	0.3108
5	4.8738	0.4315	4.792	0.4418	3.7421	0.5871
6	8.0647	0.2334	6.5393	0.3656	2.8971	0.8216

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Interesującym przypadkiem jest fakt, iż na poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ , nie wykazano podstaw do odrzucenia  $H_0$  o braku autokorelacji reszt w teście Breuscha-Godfrey'a przeprowadzonego na regresji reszt z testów DF i ADF już dla pierwszego opóźnienia dla każdego z tych testów. Sytuacja odwraca się jednak dla drugiego opóźnienia, gdzie odrzucamy  $H_0$  w teście B-G dla regresji reszt każdego z testów na rzecz  $H_1$  o autokorelacji reszt. Dla każdego kolejnego opóźnienia sytuacja jest natomiast analogiczna jak dla opóźnienia pierwszego. Testy dodatkowych opóźnień zostały przeprowadzone ze względu na brak podstaw do odrzucenia  $H_0$  o niestacjonarności modelu zarówno dla testów DF, jak i obu testów ADF dla przedstawionych opóźnień (dla każdego z nich statystyka testowa była większa od wartości krytycznej). Sprawdzono również kolejne opóźnienia (większe niż 6), aczkolwiek dla tych testów wartość statystyki testowej oddalała się znacznie bardziej od wartości krytycznej, niż dla testów przedstawionych na rysunku 4. (dlatego zostały pominięte).

Mając to na uwadze, a także fakt, że trend wygląda potencjalnie na stochastyczny, dalszą analizę postanowiłem przeprowadzić dla pierwszych różnic logarytmu szeregu mediany cen sprzedaży domów w USA. Zróżnicowany szereg został przedstawiony na rysunku 5.

Rysunek 5. Zróżnicowany szereg niesezonowy po transformacji logarytmicznej



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.



Efekt rosnącego trendu został zażegnany - średnia wartość oscyluje w okolicach 0. Z tego powodu testy ADF przeprowadzono tylko uwzględnieniem dryfu - bez drugiego wariantu zawierającego dryf i trend. Wariancja została poniekąd ustabilizowana, aczkolwiek nadal może być problematyczna. Dla zróżnicowanego, zlogarytmowanego szeregu przeprowadzono ponownie testy DF i ADF oraz na podstawie uzyskanych z nich reszt - testy Breuscha-Godfrey. Dla pierwszego i drugiego opóźnienia odrzucono  $H_0$  w teście B-G o braku autokorelacji dla reszt tylko z testu DF. Natomiast dla opóźnienia trzeciego i każdego kolejnego nie znaleziono podstaw do odrzucenia  $H_0$  (dla obu testów: DF i ADF), co przedstawiono na rysunku 6.

Rysunek 6. Wyniki testu Breuscha-Godfrey przeprowadzonego na resztach regresji testów DF i ADF dla pierwszych różnic zlogarytmowanego szeregu niesezonowego

Lag	B-G.test.statistic_DF	p-value_DF	B-G.test.statistic_ADF1	p-value_ADF1
1	10.86	0.0009827	2.989	0.08383
2	6.1162	0.04698	2.6601	0.2645
3	3.7169	0.2937	3.5325	0.3166
4	2.8547	0.5824	4.8873	0.2991
5	4.0687	0.5396	5.6916	0.3374
6	2.3656	0.8832	3.5858	0.7325

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Wartość statystyki w przeprowadzonym teście ADF jest mniejsza od wartości krytycznej dla każdego poziomu istotności, co przedstawia rysunek 7. Są to zatem podstawy do odrzucenia  $H_0$  o niestacjonarności szeregu na rzecz  $H_1$  o jego stacjonarności. Przedstawiono wynik testu dla 2. opóźnienia, które jest bezpieczniejsze - na tym etapie analizy nie byłem jeszcze pewien jaki poziom istotności powinienem przyjąć (nie wybrałem opóźnienia 1. ze względu na to, że dla poziomu istotności równego 0,1 odrzucilibyśmy  $H_0$  w teście B-G dla tego opóźnienia).

Rysunek 7. Wyniki testu ADF dla zróżnicowanego, zlogarytmowanego szeregu niesezonowego

test_statistic_value	critical_value_0.01	critical_value_0.05	critical_value_0.1
-5.0243	-3.46	-2.88	-2.57

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

W celu sprawdzenia stacjonarności, przeprowadzono również test KPSS, który przede wszystkim sprawdza obecność trendu. Bazując na poprzedniej analizie zróżnicowanego, zlogarytmowanego szeregu, nie jest zaskoczeniem to, że nie odrzucono w owym teście  $H_0$  o stacjonarności wokół średniej, co przedstawiono na rysunku 8. Wartość statystyki testowej (0.0611) jest znacznie mniejsza od wartości krytycznej dla każdego z poziomów istotności. Na podstawie powyższych testów można stwierdzić, iż zróżnicowany, zlogarytmowany szereg

niesezonowy jest zatem potencjalnie stacjonarny. Zlogarytmowany szereg niesezonowy jest natomiast zintegrowany w stopniu pierwszym.

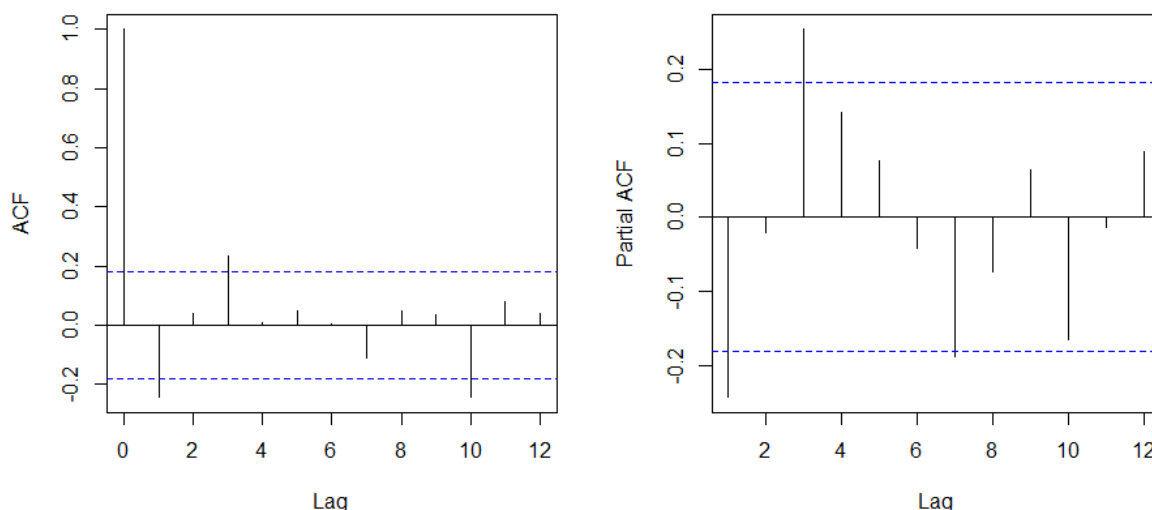
Rysunek 8. Test KPSS dla zróżnicowanego, zlogarytmowanego szeregu niesezonowego

```
test is of type: mu with 4 lags.  
value of test-statistic is: 0.0661  
critical value for a significance level of:  
10pct 5pct 2.5pct 1pct  
critical values 0.347 0.463 0.574 0.739
```

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Po wyznaczeniu stopnia zintegrowania szeregu, przystąpiłem do analizy wykresów autokorelacji (ACF) i cząstkowej autokorelacji (PACF) dla pierwszych różnic szeregu zlogarytmowanego, co przedstawia rysunek 9. Celem było określenie parametrów  $p$  i  $q$  dla procesów AR i MA.

Rysunek 9. Wykres ACF i PACF dla zróżnicowanego logarytmu szeregu niesezonowego



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Analiza wykresu PACF wskazuje, że dla procesu AR rozważne byłoby uwzględnienie pierwszego lub trzeciego opóźnienia, ze względu na ich istotność ( $p = 1$  lub  $p = 3$ ). Z kolei na podstawie analizy wykresu ACF, również wybranie pierwszego lub trzeciego opóźnienia (które również są istotne statystycznie) wydaje się być odpowiednie ( $q = 1$  lub  $q = 3$ ). Zdecydowałem się wstępnie na analizę modeli: ARIMA(1, 1, 1), ARIMA(1, 1, 3), ARIMA(3,1,1) oraz ARIMA

(3,1,3). Modele, które mają zminimalizować wartość AIC i BIC, dla których parametry  $p$ ,  $d$  i  $q$  są automatycznie dopasowywane również zostały przeanalizowane. Są to kolejno ARIMA(1, 1, 0) i ARIMA(0,1,3). Zalecana jest jak najmniejsza złożoność modeli pod względem wartości parametrów, zatem zastosowałem procedury sprowadzenia ogólnej postaci modelu do jak najbardziej szczegółowego. Upraszczając model ARIMA(1, 1, 3) do postaci modelu ARIMA(1, 1, 2) przeprowadziłem test ilorazu największej wiarygodności, którego wyniki przedstawiono na Rysunku 10.

Rysunek 10. Test ilorazu największej wiarygodności

chi2	p.value
5.580642	0.01816007

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Wyniki wskazują na odrzucenie  $H_0$  na rzecz  $H_1$ , co wskazuje na brak poprawności zmniejszenia rzędu  $q$  (pełniejszy model lepiej dopasowuje dane). Postanowiłem go jednak zostawić i przeanalizować dla porównania. Zestawienie kryteriów informacyjnych, wyniki w teście Ljunga-Boxa oraz logarytm funkcji wiarygodności dla każdej wybranej postaci modelu ARIMA przedstawiono w Tabeli 1.

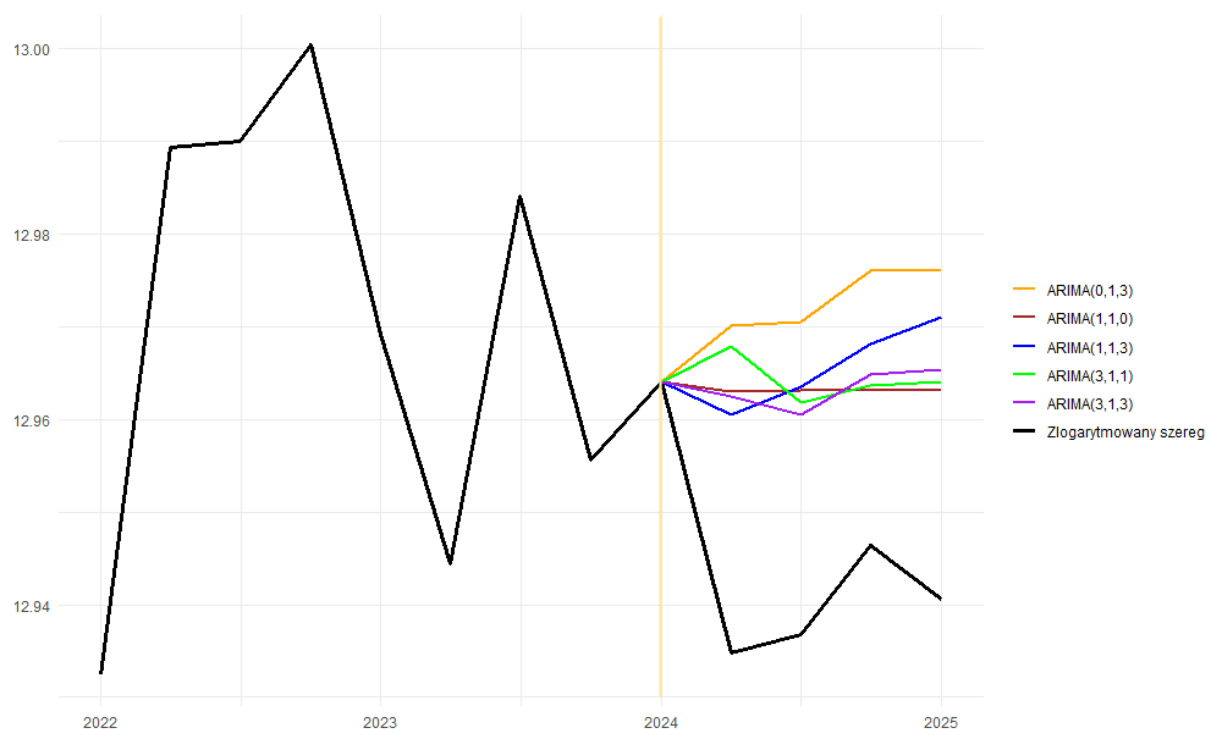
Tabela 1. Wyniki testów Ljunga-Boxa, log. funkcji wiarygodności i kryteriów informacyjnych.

	ARIMA(p, d, q)						
Informacja	(1, 1, 1)	(1, 1, 3)	(3, 1, 1)	(3, 1, 3)	(1, 1, 0)	(0, 1, 3)	(1, 1, 2)
Logarytm funkcji wiarygodności	232.98	244	243.67	244.53	232.83	241.98	241.21
Statystyka Q w Teście Ljunga-Boxa	12.665	3.1318	3.6954	2.157	12.279	2.1117	8.0277
P-value w teście Ljunga-Boxa	0.04868	0.536	0.4488	0.5405	0.09174	0.8335	0.1547
AIC	-459.97	-477.99	-477.34	-475.06	-461.67	-475.95	-474.41
BIC	-451.70	-464.22	-463.57	-455.78	-456.15	-464.93	-463.39

Źródło: Opracowanie własne na podstawie uzyskanych modeli w RStudio.

Jedynym modelem, w którym odrzucono  $H_0$  w teście Ljunga-Boxa o tym, że reszty w modelu są białym szumem jest  $ARIMA(1, 1, 1)$  - zatem ten model na pewno zostaje odrzucony. Największą wartość logarytmu funkcji wiarygodności ma model  $ARIMA(3, 1, 3)$ , ale jest również najbardziej złożony - co może poniekąd unieważnić istotność tego faktu. Najmniejsze AIC ma model  $ARIMA(1, 1, 3)$  – co jest ciekawe, gdyż automatyczna funkcja w RStudio wskazała model  $ARIMA(1, 1, 0)$ . Największe BIC pozostaje zaś dla modelu  $ARIMA(0, 1, 3)$ . Do dalszej analizy prognoz i ich błędów zostaną zatem wybrane modele  $ARIMA(1, 1, 3)$ ,  $ARIMA(3, 1, 1)$ ,  $ARIMA(3, 1, 3)$ ,  $ARIMA(1, 1, 0)$  i  $ARIMA(0, 1, 3)$ . Prognoza otrzymanych modeli w zestawieniu z zlogarytmowanym szeregiem niesezonalnym znajduje się na rysunku 11.

Rysunek 11. Prognoza wybranych modeli ARIMA



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Sugerując się wykresem, modele nie najlepiej prognozują dany szereg. Modele  $ARIMA(3, 1, 3)$  i  $ARIMA(3, 1, 1)$  poniekąd sugerują odpowiedni kierunek, jednak brakuje im mocy (tj. spadek/wzrost powinien być po prostu większy). Najmniejsze wartości błędów MAE, MSE, MAPE i AMAPE zawiera model  $ARIMA(1, 1, 0)$ , aczkolwiek ze względu na jego nijaką strukturę, z prognozą ekstrapolacyjną porównany zostanie również model  $ARIMA(3,1,3)$ . Ten model ma lepszą strukturę (posiada wcześniej wspomniany poprawny kierunek, aczkolwiek

nieadekwatną siłę spadków i wzrostów). Błędy prognoz dla tego modelu są jednak ledwo wyższe, niż dla ARIMA(1, 1, 0) - różnica o  $\sim 0.0002$  dla MAE i MSE, zaś dla MAPE i MAPE  $\sim 0.002$  - co pokazano na rysunku 12.

Rysunek 12. Błędy prognoz dla wybranych modeli ARIMA

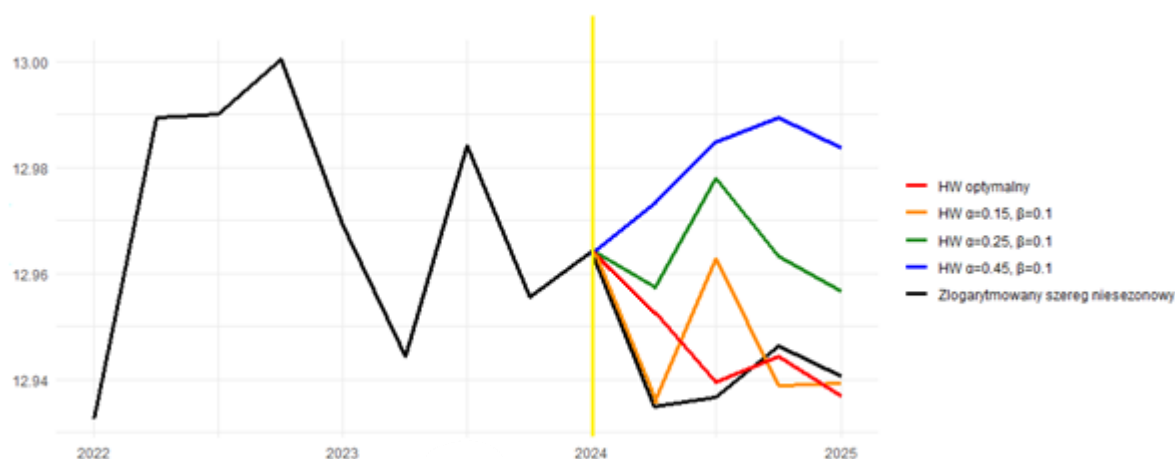
Model	MAE	MSE	MAPE	AMAPE
ARIMA(1,1,3)	0.02620063	0.0006958719	0.2024873	0.2022797
ARIMA(3,1,1)	0.02471171	0.0006422525	0.1909907	0.1907990
ARIMA(3,1,3)	0.02368800	0.0005722845	0.1830735	0.1829027
ARIMA(0,1,3)	0.03354109	0.0011303194	0.2592170	0.2588799
ARIMA(1,1,0)	0.02347934	0.0005703581	0.1814644	0.1812942

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

#### 1.4. Model ekstrapolacyjny i porównanie z modelem ARIMA

W celu porównania z prognozami modeli ARIMA, dla logarytmu szeregu niesezonowego dopasowano model ekstrapolacyjny. Zastosowano metodę Holta-Wintersa czyli podwójne wygładzanie wykładnicze o dwóch parametrach, ze względu na występowanie trendu. Sprawdzone różne konfiguracje odnośnie parametrów  $\alpha$  i  $\beta$ . Najlepszą (optymalną) kombinacją okazały się wartości kolejno: 0.5725 i 0.2649. Wykres przedstawiający prognozę w modelach liniowych Holta dla różnych parametrów przedstawiono na rysunku 13.

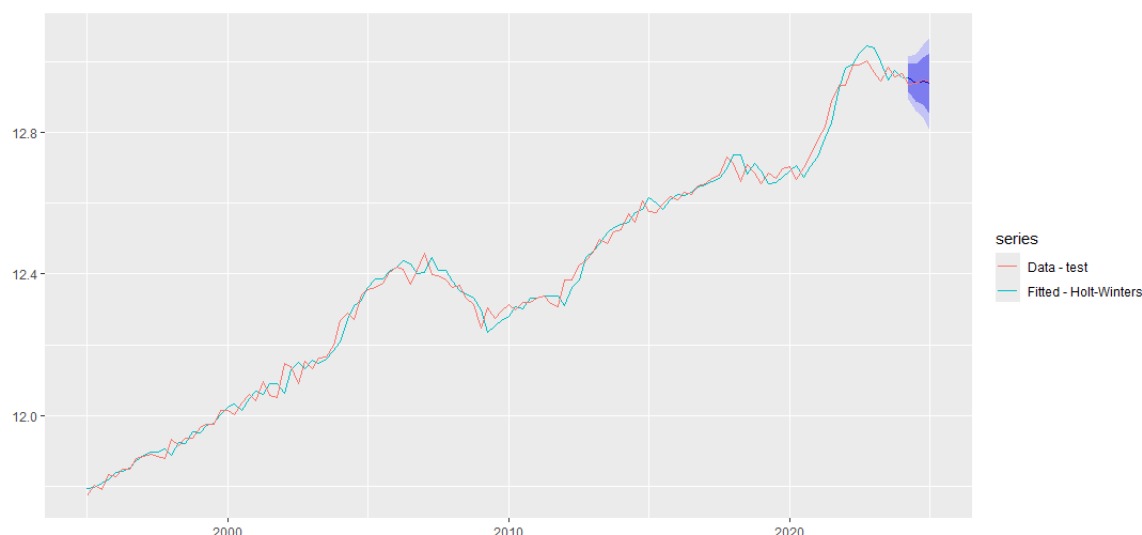
Rysunek 13. Prognoza logarytmu szeregu niesezonowego w modelach liniowych Holta (Q2 2024 - Q1 2025)



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Model ekstrapolacyjny o optymalnej wartości parametrów bardzo dobrze oddaje logarytm szeregu niesezonowego, zarówno jeśli chodzi o okres testowy, jak i treninowy - co pokazuje rysunek 14. Wygląda na to, że jest znacznie lepiej dopasowany niż nawet najlepsze wyselekcjonowane modele ARIMA.

Rysunek 14. Model ekstrapolacyjny o optymalnych parametrach dla całego okresu



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Oszacowania modelu ekstrapolacyjnego o parametrach  $\alpha = 0,15$  i  $\beta = 0,1$  również są obiecujące (rysunek 13.). Oprócz samej analizy wykresów, należy również sprawdzić błędy prognoz modeli ekstrapolacyjnych, których wartości przedstawiono na rysunku 15. Błędy prognozy są najmniejsze oczywiście dla modelu HW o optymalnych parametrach, a następnie dla tego o parametrach  $\alpha = 0,15$  i  $\beta = 0,1$  - dlatego to właśnie te dwa modele zostaną porównane z wyselekcjonowanymi modelami ARIMA.

Rysunek 15. Błędy prognoz dla wybranych modeli ekstrapolacyjnych

Model	MAE	MSE	MAPE	AMAPE
HW $\alpha=0.45$ , $\beta=0.1$	0.043074153	0.00186721574	0.33288411	0.0033288546
HW $\alpha=0.25$ , $\beta=0.1$	0.024101031	0.00068429712	0.18627189	0.0018625746
HW $\alpha=0.15$ , $\beta=0.1$	0.008906903	0.00018463011	0.06883843	0.0006883428
HW optymalny	0.006674812	0.00008835217	0.05159588	0.0005158424

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Zestawienie błędów prognoz modeli ARIMA i Holta-Wintersa potwierdza wstępne przypuszczenia po analizie wykresów. Oba modele ekstrapolacyjne mają znacznie mniejsze błędy prognoz niż oba, wyselekcjonowane jako najlepsze, modele ARIMA - co przedstawiono na rysunku 16.

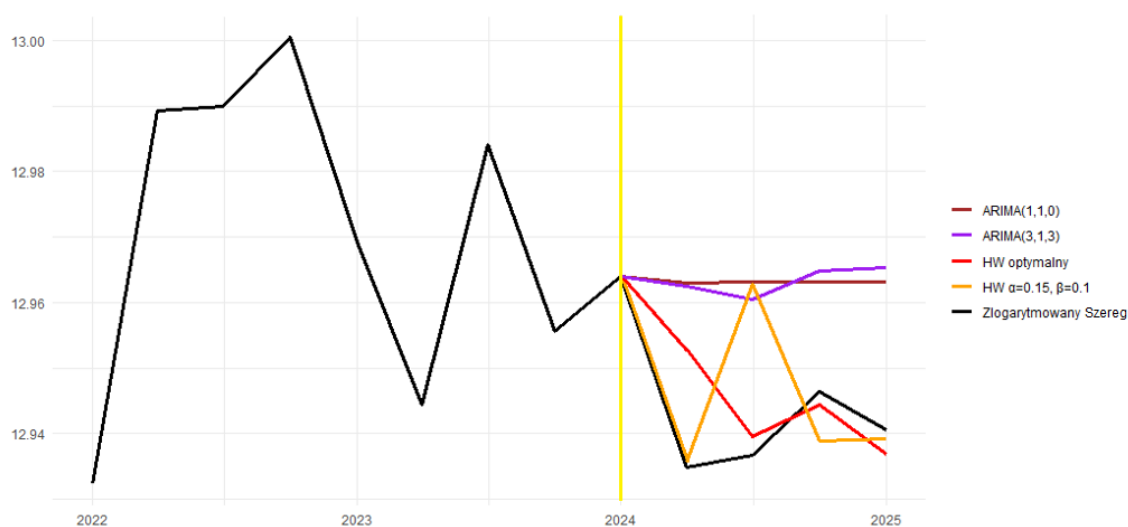
Rysunek 16. Porównanie błędów prognozy dla wyselekcjonowanych modeli ekstrapolacyjnych i ARIMA

Model	MAE	MSE	MAPE	AMAPE
ARIMA(3,1,3)	0.02368800	0.0005722845	0.1830735	0.1829027
ARIMA(1,1,0)	0.02347934	0.0005703581	0.1814644	0.1812942
HW $\alpha=0.15$ , $\beta=0.1$	0.00890690	0.0001846301	0.0688384	0.0006883
HW optymalny	0.00667481	0.0000883521	0.0515958	0.0005158

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Zestawienie prognoz na wykresie również nie pozostawia złudzeń - modele ekstrapolacyjne znacznie lepiej prognozują wartość logarytmu mediany sprzedaży domów w USA na okres Q2 2024-Q1 2025 niż wyselekcjonowane modele ARIMA – oprócz odpowiedniego kierunku, wielkość spadków i wzrostów została lepiej dobrana, w szczególności dla modelu HW o optymalnych parametrach.

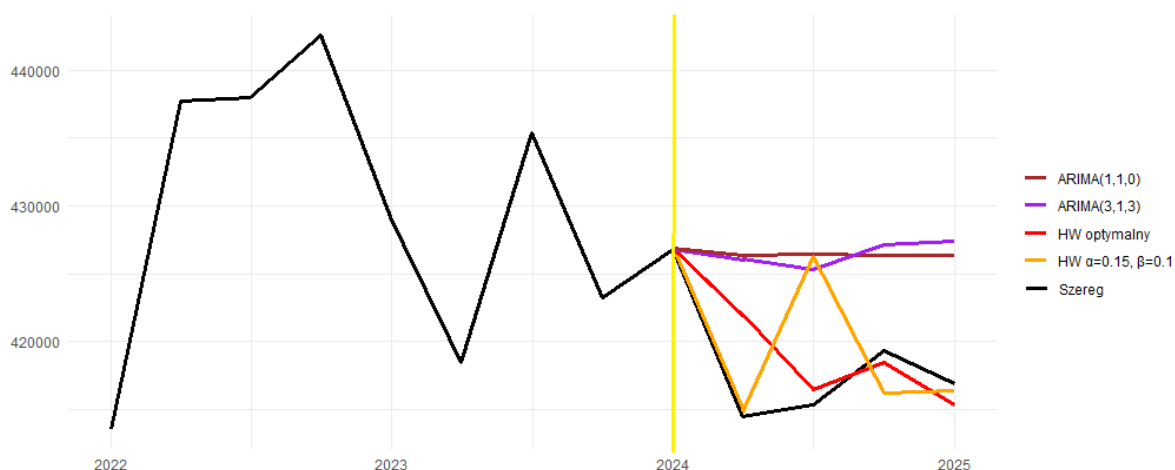
Rysunek 17. Zestawienie prognoz logarytmu szeregu niesezonowego na wykresie: modeli ekstrapolacyjnych i ARIMA



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Dla porównania na rysunku 18. pokazano również uzyskane prognozy, przedstawione na niezmiennym szeregu niesezonalnym. Oprócz obserwacji w Q2 2024, model ekstrapolacyjny HW o optymalnych parametrach różni się od faktycznych wartości szeregu maksymalnie o około ~1000\$, zaś modele ARIMA o mniej więcej dziesięciokrotność - około ~10000\$. Nie ma żadnych wątpliwości – modele ekstrapolacyjne znacznie lepiej prognozują przyszłe obserwacje dla tego szeregu. Było to jednak do przewidzenia - na rysunku 9. wykresy ACF i PACF mają dość skomplikowaną strukturę. To może być sygnałem, że modele ARIMA nie są najlepszym rozwiązaniem w kwestii prognozowania tego szeregu czasowego.

Rysunek 18. Zestawienie prognoz szeregu niesezonalnego na wykresie: modeli ekstrapolacyjnych i ARIMA



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

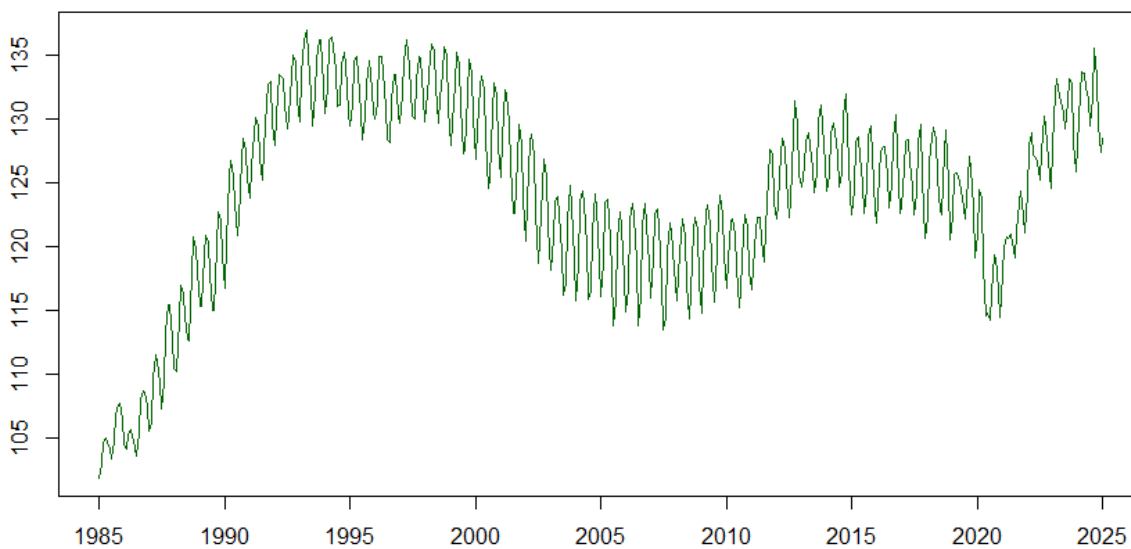


## ROZDZIAŁ II. SZEREG SEZONOWY - CPI DLA KONSUMENTÓW MIEJSKICH W USA: UBRANIA

### 2.1. Opis szeregu sezonowego

Analizowany szereg przedstawia miesięczne wartości wskaźnika Consumer Price Index (CPI) ubrań dla wszystkich miejskich konsumentów w USA, publikowanego przez U.S. Bureau of Labor Statistics. Dane również pochodzą z bazy danych Rezerwy Federalnej w St. Louis ([fred.stlouisfed.org](http://fred.stlouisfed.org)) i odnoszą się do średniego poziomu cen odzieży dla konsumentów miejskich w Stanach Zjednoczonych, obejmujące okres 01.01.1985-01.01.2025. CPI jest przedstawione jako % średniej ceny w porównaniu do cen ubrań z okresu 1982-1984. Szereg cechuje się wyraźną sezonowością roczną oraz długookresowymi zmianami poziomu trendu, które można określić jako cykl koniunkturalny. Tego typu struktura wskazuje na mieszany charakter sezonowości: krótkookresową (sezonową) i długookresową (cykliczną). Łącznie zanotowano 481 obserwacji.

Rysunek 19. CPI odzieży w USA (w porównaniu do średnich cen z 1982-1984)



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

## 2.2. Dekompozycja szeregu sezonowego

Ponownie, podobnie jak dla szeregu niesezonowego, dokonano dekompozycji szeregu. Wykorzystano w tym celu metodę TramoSeats w programie JDemetra+ - czego efekt przedstawiono na rysunku 20. W otrzymanym modelu większość testów zostało spełnionych, oprócz normalności i niezależności w resztach Regarima. Znalaziono również 3 obserwacje odstające. Pierwsza przypada na Sierpień 1998, aczkolwiek na pierwszy rzut oka nie wygląda na odstającą. Dwie następne to kwiecień i maj 2020. Jest to oczywiście okres pandemii, zaś te dwie obserwacje cechują się tym, że różnice pomiędzy nimi, a obserwacjami przed i po nich są nieduże (znacznie mniejsze niż dla innych obserwacji w tym samym cyklu „sezonu” w innych latach), a także większy spadek „sezonowo-konijkturalny” spotęgowany efektem pandemii w porównaniu do analogicznych wartości w okresie około 2002-2010. Trend praktycznie pokrywa się z szeregiem dopasowanym.

Rysunek 20. Dekompozycja szeregu sezonowego - CPI odzieży dla konsumentów miejskich w USA

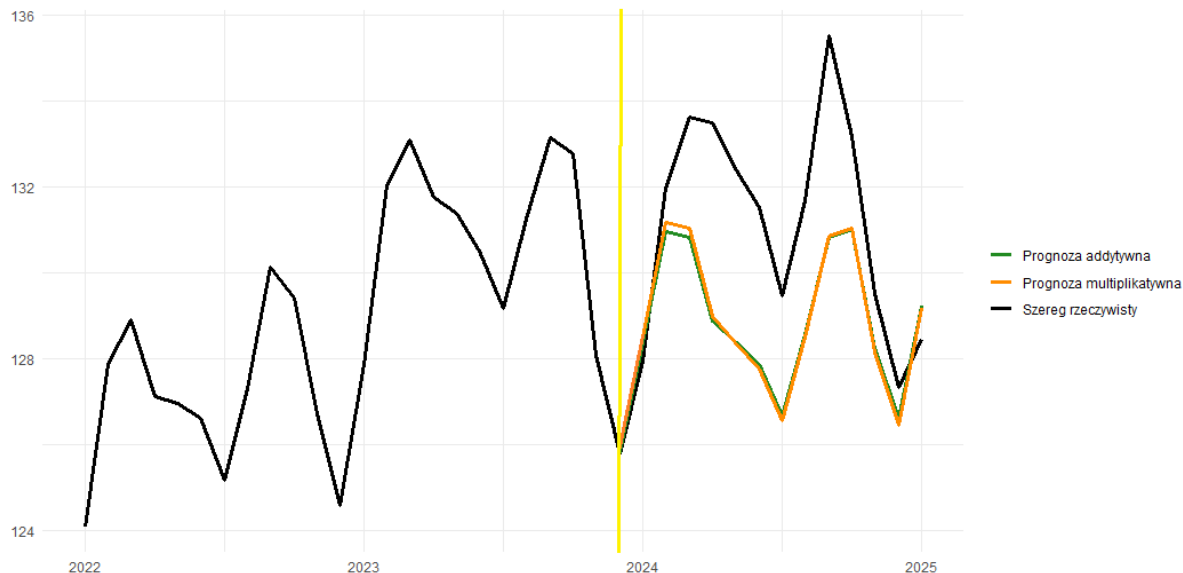


Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

### 2.3. Model ekstrapolacyjny

W celu prognozy wykorzystany zostanie model ekstrapolacyjny Holta-Wintersa, przystosowany do szeregów sezonowych. Szereg wydaje się być addytywny, jednak wahania w okolicach 2020 związane z pandemią są niepokojące – tak samo początek okresu - gdzie wahania są trochę mniejsze, niż dla reszty okresu. Aby mieć jednak pewność, należy porównać błędy prognoz dla obu wariantów modeli: zarówno addytywnego, jak i multiplikatywnego. Jako próbę przeznaczoną do trenowania obu modeli wyselekcjonowałem obserwacje z okresu: 01.01.1985-01.12.2023. Okres testowy to: 01.01.2024-01.01.2025. Modele zostały zbudowane za pomocą automatycznej funkcji, wybierającej optymalne parametry. Ich jedyna różnica, to oczywiście rodzaj sezonowości: multiplikatywny ( $\alpha = 0,641$ ,  $\beta = 0,006$ ,  $\gamma = 0,358$ ) i addytywny ( $\alpha = 0,659$ ,  $\beta = 0,009$ ,  $\gamma = 0,338$ ). Co ciekawe, model o zarówno optymalnych, wybranych automatycznie parametrach, jak i rozpoznanemu rodzajowi sezonowości jest identyczny do powyżej opisanego modelu addytywnego. Należy jednak potwierdzić formalnie, która forma modelu jest najlepsza. Rysunek 21. przedstawia prognozy wyżej wymienionych modeli.

Rysunek 21. Porównanie prognoz ekstrapolacyjnych: multiplikatywnej oraz addytywnej



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Co ciekawe, na podstawie analizy wykresu można stwierdzić, iż to prognoza multiplikatywna jest minimalnie lepsza niż addytywna – obie prognozy sugerują poprawny kierunek, aczkolwiek siła wzrostów i spadków jest niedoszacowana. Aby jednak rozwiązać

wszelkie wątpliwości, należy przyrzeć się błędom prognoz dla obu modeli i na bazie tego porównania podjąć decyzję - co przedstawiono na rysunku 22.

Rysunek 22. Porównanie błędów prognoz modeli ekstrapolacyjnych: addytywnego i multiplikatywnego

Model	MAE	MSE	MAPE	AMAPE
HW addytywny	2.470144	8.225695	1.866715	0.01882008
HW multiplikatywny	2.471827	8.199061	1.868970	0.01883290

Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

Różnice w błędach dla obu modeli są minimalne, oprócz MSE. Model addytywny ma mniejszą wartość dla MAE, MAPE i AMAPE (o bardzo małe wartości). Z kolei model multiplikatywny ma bardziej korzystną wartość dla MSE, i ta różnica jest troszkę większa niż dla innych błędów. Z tego powodu, po ostrożnym namyśle, wybieram postać modelu HW z sezonowością multiplikatywną. Różnice w błędach, w których wypada mniej korzystnie są znikome, natomiast dla tego w którym wypada lepiej, ta różnica jest znacznie większa. Przeanalizowałem ponownie postać analizowanego szeregu czasowego na wykresie (rysunek 19.) i faktycznie, początkowe różnice pomiędzy wartościami są mniejsze, niż chociażby dla okresu 2004-2012 r. Są to zatem moim zdaniem wystarczające argumenty, aby wybrać akurat tą postać modelu. Prognozę na całym okresie dla wyselekcjonowanego modelu przedstawiono na rysunku 23. Model dobrze prognozuje analizowany szereg na całym okresie – prawie wszędzie pokrywa się z wartościami rzeczywistymi.

Rysunek 23. Prognoza modelu ekstrapolacyjnego (multiplikatywny) dla szeregu sezonowego



Źródło: Opracowanie własne w programie R Studio.

## ZAKOŃCZENIE

Udało się przeprowadzić prognozę dla szeregu niesezonowego - zarówno modelami ARIMA, jak i modelami ekstrapolacyjnymi Holta-Wintersa. W celu uzyskania stacjonarności, szereg należało zróżnicować, przez co można stwierdzić, iż jest zintegrowany w stopniu pierwszym. Analiza wykresów ACF i PACF, a także próby dobrania odpowiedniej kombinacji parametrów  $p$ ,  $d$  i  $q$  dla modelu ARIMA pozostawiła nas z siedmioma potencjalnymi modelami. Ostatecznie wyselekcjonowano modele ARIMA(3, 1, 3) i ARIMA(1, 1, 0) - sugerując się wykresami ich prognoz oraz błędami owych prognoz. Prognoza modelu ARIMA(3, 1, 3) wskazała poprawny kierunek, aczkolwiek siła wzrostów i spadków nie była doszacowana, zaś ARIMA(1, 1, 0) miał nijaką postać - miał po prostu najmniejsze błędy prognoz. Do prognozowania mediany cen sprzedaży domów w USA znacznie lepiej nadają się modele ekstrapolacyjne Holta-Wintersa. Kierunek dla nich był również poprawny (jak dla modeli ARIMA), jednak siła wzrostów i spadków była większa (bardziej adekwatna względem wartości rzeczywistych) - czego również efektem były mniejsze wartości błędów. Do prognozowania tego szeregu - definitywnie lepsze okazały się być modele ekstrapolacyjne.

Prognoza dla szeregu sezonowego również zakończyła się sukcesem. Dekompozycja zarówno tego szeregu, jak i poprzedniego nie wskazywała na żadne większe anomalie. Prognozowano CPI odzieży dla konsumentów miejskich w USA, jedynie za pomocą modeli ekstrapolacyjnych - ponownie Holta-Wintersa, tym razem jednak dopasowanymi do danych sezonowych. Po analizie czy powinien to być model traktujący sezonowość w sposób addytywny, bądź multiplikatywny, przeanalizowano wykresy oraz błędy prognoz dwóch modeli, o optymalnych wartościach parametrów  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Oba modele są bardzo do siebie podobne, zarówno pod względem prognozy w okresie testowym, jak i wartościami otrzymanych błędów. Ostatecznie zdecydowałem się wybrać model multiplikatywny, głównie ze względu na lepsze dopasowanie prognozy na wykresie - błędy prognoz dla obu modeli były praktycznie identyczne. Ostatecznie powróciłem również do analizy wykresu szeregu w jego zwykłej formie i jego postać przekonała mnie do podjęcia takiej decyzji. Prognoza dla tego modelu była bardzo dokładna względem danych rzeczywistych.

## **BIBLIOGRAFIA**

Niesezonowy szereg (01.06.2025): <https://fred.stlouisfed.org/series/MSPUS>

Sezonowy szereg (01.06.2025): <https://fred.stlouisfed.org/series/CPIAPPNS>

## SPIS RYSUNKÓW

Rysunek 1. Mediana cen sprzedaży domów w USA .....	4
Rysunek 2. Dekompozycja szeregu niesezonowego - mediana sprzedaży cen domów w USA .....	5
Rysunek 3. Zlogarytmowany szereg niesezonowy .....	6
Rysunek 4. Wyniki testu Breuscha-Godfrey'a przeprowadzonego na resztach regresji testów DF i ADF dla zlogarytmowanego szeregu niesezonowego .....	7
Rysunek 5. Zróżnicowany szereg niesezonowy po transformacji logarytmicznej .....	7
Rysunek 6. Wyniki testu Breuscha-Godfrey'a przeprowadzonego na resztach regresji testów DF i ADF dla pierwszych różnic zlogarytmowanego szeregu niesezonowego .....	8
Rysunek 7. Wyniki testu ADF dla zróżnicowanego, zlogarytmowanego szeregu niesezonowego .....	8
Rysunek 8. Test KPSS dla zróżnicowanego, zlogarytmowanego szeregu niesezonowego .....	9
Rysunek 9. Wykres ACF i PACF dla zróżnicowanego logarytmu szeregu niesezonowego .....	9
Rysunek 10. Test ilorazu największej wiarygodności .....	10
Rysunek 11. Prognoza wybranych modeli ARIMA .....	11
Rysunek 12. Błędy prognoz dla wybranych modeli ARIMA .....	12
Rysunek 13. Prognoza logarytmu szeregu niesezonowego w modelach liniowych Holta (Q2 2024 - Q1 2025)...	12
Rysunek 14. Model ekstrapolacyjny o optymalnych parametrach dla całego okresu .....	13
Rysunek 15. Błędy prognoz dla wybranych modeli ekstrapolacyjnych .....	13
Rysunek 16. Porównanie błędów prognozy dla wyselekcjonowanych modeli ekstrapolacyjnych i ARIMA .....	14
Rysunek 17. Zestawienie prognoz logarytmu szeregu niesezonowego na wykresie: modeli ekstrapolacyjnych i ARIMA .....	14
Rysunek 18. Zestawienie prognoz szeregu niesezonowego na wykresie: modeli ekstrapolacyjnych i ARIMA ...	15
Rysunek 19. CPI odzieży w USA (w porównaniu do średnich cen z 1982-1984) .....	16
Rysunek 20. Dekompozycja szeregu sezonowego - CPI odzieży dla konsumentów miejskich w USA .....	17
Rysunek 21. Porównanie prognoz ekstrapolacyjnych: multiplikatywnej oraz addytywnej .....	18
Rysunek 22. Porównanie błędów prognoz modeli ekstrapolacyjnych: addytywnego i multiplikatywnego .....	19
Rysunek 23. Prognoza modelu ekstrapolacyjnego (multiplikatywny) dla szeregu sezonowego .....	19

## SPIS TABEL

Tabela 1. Wyniki testów Ljunga-Boxa, log. funkcji wiarygodności i kryteriów informacyjnych .....	10
--	----