Varmeligningen i to romlige dimensjoner

Marko Jevtic og Mads Hartig

April 2024

1 Introduksjon

Varmeligningen er en partiell differensialligningn (PDE), og den modellerer hvordan varme utvikler seg gjennom et eller annet medium. Den er meget nyttig, for å f.eks. modellere hvordan varme sprer seg gjennom en flate eller et rør over tid. Varmeligningen kan utledes, men alle barn i barnehagen vet hvordan dette gjøres, så vi sparer oss for bryet her. Det finnes flere PDE-er som ligner veldig mye på varmeligningen, f.eks. diffusjonslikningen. Diffusjonsligningen og varmeligningen er matematisk sett helt like, men beskriver to ulike naturlige fenomener.

Varmeligningen tar den generelle formen:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) \tag{1.1}$$

den kan løses både analytisk og numerisk. Ved enkle rand- og initialkrav er den grei å løses med separasjon av variable og fourierrekker. Men dersom vi begynner å få mer kompliserte rand- og initialkrav (eller større dimensjoner) blir det meget vanskelig å løse den analytisk, derfor trenger vi en numerisk løser. Med en numerisk løser kan vi også relativt enkelt plotte varmeendringen over tid, og dermed se hvordan varmen øker/minker.

I denne oppgaven løser vi varmeligningen i to romlige dimensjoner (som kan tolkes som f.eks. en veldig tynn stålplate eller lignende) med en numerisk løser, og ser på varmeutviklingen.

2 Metode og teori

I dette prosjektet tar vi ibruk blant annet forelesningsnotater fra forelesningen i Uke 3, hvor det ble gjennomgått hvordan vi utleder Euler-Eksplisitt metode, som vi fremover kun kommer til å kalle Euler-metoden. Vi starter med definisjonen til den deriverte

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.1}$$

Denne kan også skrives som

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{2h} \tag{2.2}$$

Ut fra denne kan vi videre utlede for den dobbeltderiverte med to variabler

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) + u(x_{i+\frac{1}{2}}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})h} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i-\frac{1}{2}}, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+\frac{1}{2}}, t_j) - 2\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)}{h} \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u(x_{i-1}, t_j) + u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j)}{h^2} \tag{2.5}$$

For varmelikningen blir dette (merk at α er satt $= 1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \tag{2.6}$$

Slik at

$$u_{i,j+1} - u_{i,j} = \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}) \tag{2.7}$$

$$u_{i,j+1} = (\gamma)u_{i+1,j} + (1-2\gamma)u_{i,j}) + (\gamma)u_{i-1,j} \quad , \gamma = \frac{k}{h^2} \tag{2.8}$$

Hvis vi er lure kan vi sette opp dette i et matrisesystem, slik at vi istedenfor å finne ett og ett punkt for hvert tidssted, så kan vi finne alle punktene for hvert tidssteg. Da bli formen seende slik ut

$$\overrightarrow{u}_{j+1} = (I - \gamma A)\overrightarrow{u}_j \tag{2.9}$$

Hvor $(I - \gamma A)$ kun inneholder elementer med γ og $(1-2\gamma)$ Problemet som dukker opp her er at

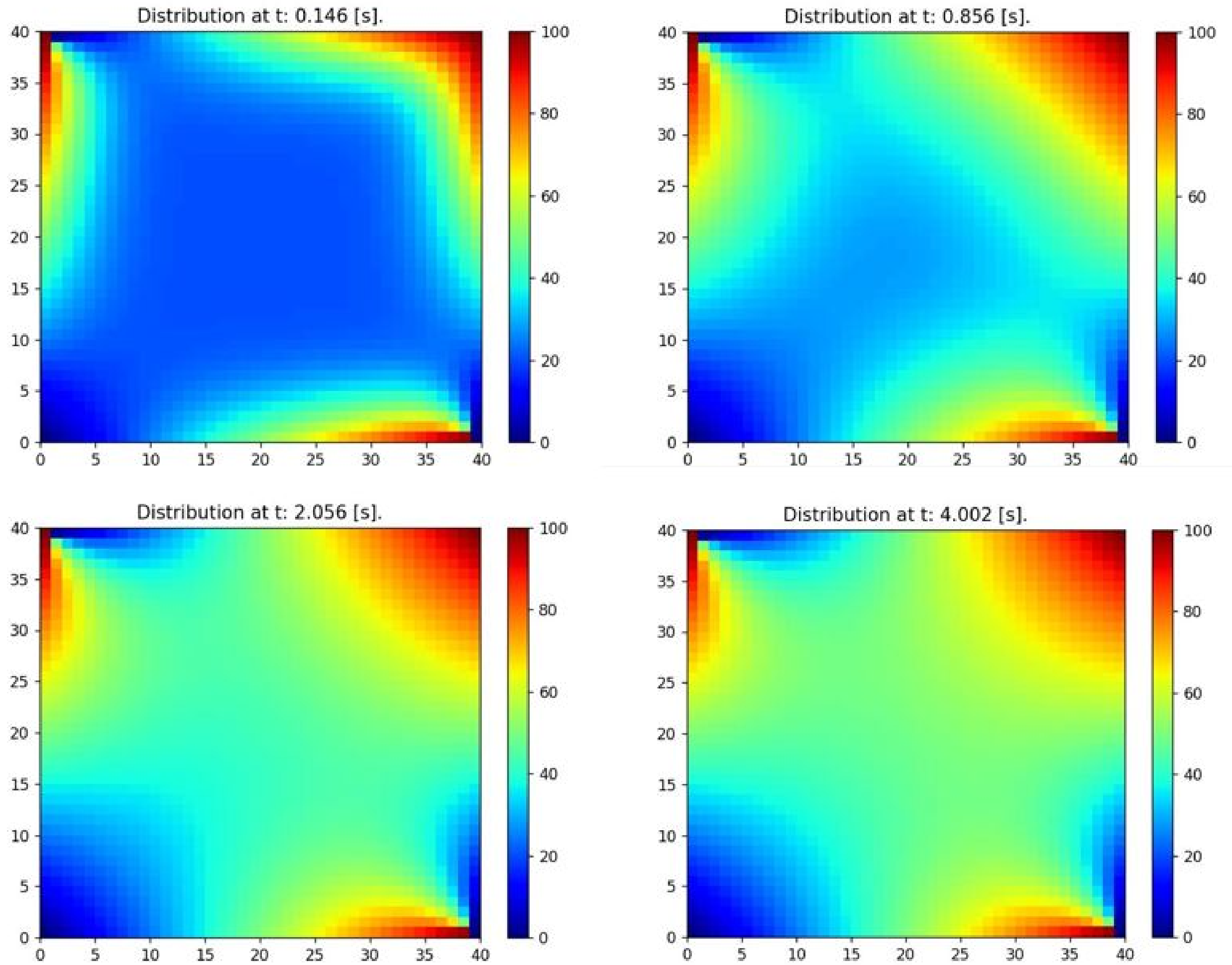
$$\overrightarrow{u}_{j+n} = (I - \gamma A)^n \overrightarrow{u}_j \tag{2.10}$$

og hvis γ blir for stor, så vil denne måten å løse på etterhvert eksplodere. Derfor finnes det et krav om at

$$\gamma \leq \frac{1}{2} \tag{2.11}$$

3 Resultat

Her er noen skjermbilder av utviklingen til systemet. Randkravene er stigende temperaturer fra 0 til 100 grader Celsius på både x og y-aksene og er konstante. Ellers har flaten en temperatur på 20 grader Celsius Det vil derfor kun være en endring innad i figuren.


Distribution at t: 0.146 [s].
Distribution at t: 0.856 [s].
Distribution at t: 2.056 [s].
Distribution at t: 4.002 [s].