BIMA - Examen session 1

5 janvier 2016

Le barème, sur 40, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié. Aucun document ni machine électronique ne sont autorisés. Durée de l'examen : 2h.

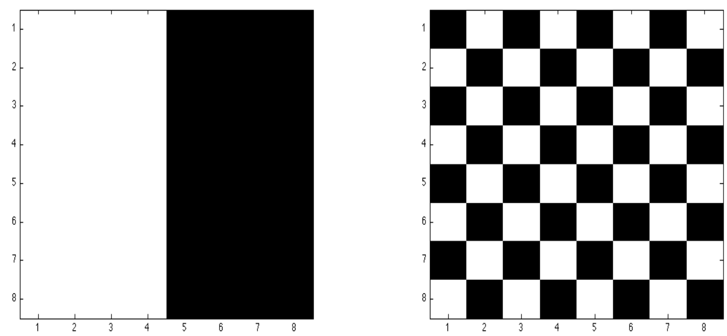
Exercice 1 Questions de cours (12 points)

1. La normalisation d'histogramme et l'égalisation d'histogramme sont-elles des transformations linéaires de niveaux de gris ? Justifier (3 lignes max).
2. Donner la formule de filtrage faisant intervenir la convolution pour les systèmes Linéaires Invariants par Translation (LIT). Donner un exemple de filtre linéaire passe-bas et passe-haut, et un exemple de filtre non-linéaire en justifiant sa non-linéarité (4 lignes max).
3. La transformée de Fourier d'un signal échantillonné et la Transformée de Fourier Discrète sont-elles des fonctions continues ou discrètes ? Quel est leur lien ? (4 lignes max).
4. Soit un ensemble de données vectorielles de taille 100 réunies dans une matrice X dont la matrice de variance-covariance est E. Quel est le critère optimisé pour l'ACP ? Quelle est la condition nécessaire à vérifier pour tout vecteur v solution ?(3 lignes max)
5. Pour les données X ci-dessus, peut-on réduire la taille des données à 3 sans aucune perte (processus réversible) avec une ACP (3 lignes max) ?
6. Peut-on faire une ALD lorsqu'on ne connaît que les classes de la moitié des individus (données vectorielles) considérés ? (2 lignes max)
7. Donner deux opérateurs linéaires permettant de calculer un gradient d'image et qui ne soient pas les opérateurs de Sobel.
8. Expliquer pourquoi la méthode de passage par zéro du laplacien permet d'obtenir des contours fins, au contraire d'un seuillage de la norme d'un gradient d'image.
9. Comment obtenir des contours fins à partir d'un gradient d'image ?
10. Rappeler le principe de la méthode des k-moyennes, et la méthode de croissance de région. Expliquer la différence fondamentale qui existe entre les deux méthodes.

Exercice 2 Traitement d'images (10 points)

On considère les deux images de la figure 1.

1. Rappeler la définition d'un histogramme, d'un histogramme normalisé et d'un histogramme cumulé normalisé d'une image.
2. Déterminer et tracer les histogrammes normalisés et cumulés normalisés pour les images (1) et (2) de la figure 1.
   — Comparer les histogrammes pour les deux images. Qu'est-ce que cela illustre ?
3. On va filtrer chacune des deux images par un filtre moyenneur 2D. On rappelle que la réponse impulsionnelle d'un tel filtre est la suivante : $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   — Rappeler la méthodologie pour le filtrage d'une image, pour un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF), à partir de la réponse impulsionnelle du filtre.
   — Déterminer les deux images filtrées résultant de l'application du filtre moyenneur sur les images (1) et (2) (arrondir si besoin à l'entier le plus proche). N.B. on appliquera un *padding* par recopie aux bords de l'image.
   — Déterminer et tracer les histogrammes normalisés des deux images filtrées.
      — Comparer les deux histogrammes sur les deux images filtrées. Comment expliquer la différence par rapport à la question 2 ?



(1) (2)

FIGURE 1 – Deux Images (1) et (2) à traiter. Blanc $\leftrightarrow$ 255, noir $\leftrightarrow$ 0.

Exercice 3 Filtrage spatial et fréquentiel (8 points)

On considère le filtre RIF 1D suivant, dont la fonction de transfert h s'écrit :

$$h(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ -1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

On rappelle que la transformée du signal échantillonné $h(k)$ s'écrit :

$$H(f) = \sum_k h(k) e^{-i2\pi f k} \tag{2}$$

On rappelle que $H(f)$ est périodique, les basses fréquences (resp. hautes fréquences) correspondent à $|f|$ proche de 0 (respectivement $\frac{1}{2}$).

1. Intuitivement, quelle va être l'action du filtre h donné à l'équation 1 lors de l'application de la convolution ? Quelle filtre reconnaissez-vous ?
2. Calculer $H(f)$ à l'équation 2 pour le filtre h donné à donné à l'équation 1.
3. En déduire que $|H(f)|^2 = 2\left[1 - cos(2\pi f)\right]$.
4. Tracer la forme de la fonction $|H(f)|^2$ pour $f \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.
5. Quel type de filtrage fréquentiel ce filtre effectue-t-il ? Le filtrage fréquentiel est-il idéal ?
6. On considère maintenant le filtre de réponse impulsionnelle $h_2(k) = [-1; 0; 1]$ pour $k \in \{1; 0; -1\}$ et 0 sinon.
   — Calculer la fonction $|H_2(f)|$ pour $h_2(k)$, et la représenter graphiquement.
   — Commenter le type de filtrage fréquentiel effectué, est-il idéal ?

Exercice 4 Détecteur Hessien (12 points)

On considère une image I comme une fonction 2d : $I : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & I(x, y) \end{array} \right.$.

La matrice Hessienne $H(x, y)$ en chaque pixel (x, y) de I s'écrit de la manière suivante :

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} \\ I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Les vecteurs propres de H avec leurs valeurs propres associées définissent les directions de variations principales de la fonction $I(x, y)$ (*i.e.* courbures principales de I en (x, y))

Rappels :

— Pour une matrice 2×2 symétrique $M = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, le déterminant s'écrit $det(M) = ab - c^2$.

— Le déterminant est invariant par changement de base orthonormée. Il en suit immédiatement que le déterminant de M est le produit de ses valeurs propres.

1. Détecteur Hessien

   (a) Quelle est la valeur attendue pour les valeurs propres de H dans le cas d'un coin ? D'une région homogène ? D'un contour ?

   (b) Le détecteur Hessien propose comme critère de détection $C_h(x, y) = |det(M)|$. Expliquer comment utiliser $C_h(x, y)$ pour détecter les coins.
      — $C_h(x, y)$ permet-il de séparer coins, contours et régions homogènes comme le détecteur de Harris ? Justifier.

   (c) Algorithme de détection. Donner le code matlab :
      — D'une fonction `Ch = calculeH(I)` qui calcule le critère de détection Hessien $C_h(x, y)$ en chaque pixel (x, y) d'une image I. N.B. : on dispose d'une fonction de `If = convolution(I,M)` qui effectue la convolution de l'image I avec le masque M.
      — D'un script `detectionHessien` effectue la détection globale de points d'interêts à partir du critère de détection Hessien. En particulier, préciser les étapes de post-traitement mises en place.

2. Invariance du détecteur Hessien

   (a) Le détecteur Hessien est-il invariant à la rotation ? Justifier.

   (b) On considère une transformation affine d'illumination : $I'(x, y) = a \cdot I(x, y) + b$.

      i. Soit $H'(x, y)$ la matrice Hessienne de $I'(x, y)$. Exprimer $H'(x, y)$ en fonction de $H(x, y)$.

      ii. Le critère de détection Hessien $C_h(x, y)$ est-il invariant aux transformations affines d'illumination ? Justifier.

      iii. Les maxima locaux de $C_h(x, y)$ sont-ils invariants aux transformations affines d'illumination ? Si oui, proposer comment adapter le seuil de détection entre I et I'. Sinon, justifier.