BIMA - Examen session 1

3 janvier 2017

Le barème, sur 40, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié. Aucun document ni machine électronique ne sont autorisés. Durée de l'examen : 2h.

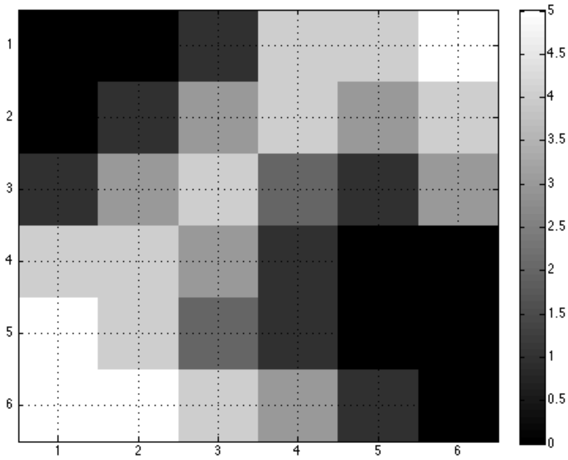
Exercice 1 Questions de cours (12 points)

1. Soit un ensemble de données vectorielles de taille 100 réunies dans une matrice X dont la matrice de variance-covariance est Σ. Quel est le critère optimisé pour l'ACP ? Quelle est la condition nécessaire à vérifier pour tout vecteur v solution ?(3 lignes max).
2. Pour les données X ci-dessus, en supposant que la matrice Σ admet 30 valeurs propres nulles, quelle est la valeur minimale jusqu'à laquelle on peut réduire la taille des données sans aucune perte (processus réversible) avec une ACP (3 lignes max) ?
3. Le descripteur SIFT est-il invariant à une rotation du plan image ? (2 lignes max).
4. On s'intéresse à un problème d'identification de visages. Est-ce une bonne idée de calculer des descripteurs invariants en rotation ? Justifier (2 lignes max).
5. Donner deux opérateurs linéaires permettant de calculer un gradient d'image et qui ne soient pas les opérateurs de Sobel (2 lignes max).
6. Comment obtenir des contours fins à partir d'un gradient d'image ? (2 lignes max).
7. Rappeler le principe de la méthode des k-moyennes, et la méthode de croissance de région. Expliquer la différence fondamentale qui existe entre les deux méthodes (5 lignes max).
8. Expliquer en quoi consiste le phénomène de recouvrement spectral. Comment peut-on le contrer pour un signal à bande limité ? Préciser la fonction de transfert du filtre numérique anti-aliasing, lors du sous-échantillonage (facteur 2) d'une image (5 lignes max).
9. Donner deux filtres linéaires permettant de réaliser un débruitage d'image. Quelle est la transformée de Fourier de leur réponse impulsionnelle ? Quel type de filtrage fréquentiel réalisent-ils ? (5 lignes max).

Exercice 2 Traitement d'images (18 points)

Soit l'image I de taille 6x6 représentée ci dessous :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

1. Rappeler la définition d'un histogramme, d'un histogramme normalisé et d'un histogramme cumulé normalisé d'une image.
   — Calculer et représenter l'histogramme et l'histogramme normalisé de I.
   — Calculer et représenter l'histogramme cumulé et l'histogramme cumulé normalisé de I.
2. Calculer la moyenne μ et la variance σ^2 de I
3. On va centrer et réduire l'image I, de telle sorte que les niveaux de gris de la nouvelle image I' vont s'écrire : $I' = \frac{I-\mu}{\sigma}$.
   — Calculer et représenter I'. Quelle est la moyenne et la variance de I' ?
   — La transformation pour passer de I à I' est-elle linéaire ? Justifier.
4. On va maintenant appliquer un filtrage médian 3x3 à l'image I.
   — Rappeler le principe du filtrage médian.
   N.B. : on effectuera une opération de zero-padding préalablement au filtrage.
   — Calculer le résultat de l'application d'un filtre médian 3x3 à l'image I.
   — Le filtrage médian est-il linéaire ? Justifier.

Partie II

On va appliquer un seuillage basé sur la méthode d'Otsu pour binariser l'image I. Le traitement va donc générer une image binaire I_b telle que :

$$I_b(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } I(x,y) < S \\ 5 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

où S est le seuil de binarisation. On désignera la classe 1 correspondant aux pixels tels que $I_b(x,y) = 0$, et la classe 2 telle que $I_b(x,y) = 5$. Le principe du seuillage d'Otsu consiste à déterminer automatiquement le seuil S de sorte que la variance intra-classe résultant de la binarisation soit minimale.

On rappelle la formule de décomposition de la variance : $\sigma^2 = \sigma_w^2 + \sigma_b^2$, où σ^2 est la variance totale de l'image, σ_b^2 est la variance inter-classe et σ_w^2 est la variance intra-classe. En notant w_1 (resp. w_2) la probabilité d'un pixel d'être assigné à la classe 1 (resp. à la classe 2), on a dans notre cas :

— $\sigma_w^2 = w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2$, où σ_1^2 (resp. σ_2^2) correspond à la variance des pixels assignés à la classe 1 (resp. à la classe 2).

— $\sigma_b^2 = w_1(\mu_1 - \mu)^2 + w_2(\mu_2 - \mu)^2$, où μ_1 (resp. μ_2) est la moyenne des pixels assignés à la classe 1 (resp. classe 2), et $\mu = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$ est la moyenne totale de l'image.

1. Pourquoi est-il équivalent de minimiser la variance intra-classe σ_w^2 ou de maximiser la variance inter-classe σ_b^2 ?
2. Justifier le critère de maximisation de la variance inter-classe (ou minimisation de la variance intra-classe) comme choix du seuil de binarisation.
3. Dans le suite on s'intéresse à la maximisation de $\sigma_b^2 = w_1(\mu_1 - \mu)^2 + w_2(\mu_2 - \mu)^2$.
   — Montrer que $\sigma_b^2 = w_1 w_2^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + w_2 w_1^2(\mu_1 - \mu_2)^2$.
   N.B. : utiliser le fait que $\mu = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$ et $w_1 + w_2 = 1$
   — En déduire que : $\sigma_b^2 = w_1 w_2(\mu_1 - \mu_2)^2$
4. Le principe de l'algorithme d'Otsu consiste à calculer σ_b^2 pour l'ensemble des valeurs possibles du seuil $S \in \mathcal{S}$, par exemple $\mathcal{S} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ pour l'image I précédente. Pour chaque valeur $S = s$, il faut recalculer les valeurs $w1(s)$, $w2(s)$, $\mu_1(s)$ et $\mu_2(s)$: Quelle est la complexité de ce calcul en fonction du nombre N de pixels de l'image ?
5. Pour avoir une complexité constante dans le calcul de σ_b^2, on va proposer un calcul récursif de $w1(s)$, $w2(s)$, $\mu_1(s)$ et $\mu_2(s)$. Montrer que la formule de récursion s'écrit :

$$\begin{aligned}
w1(s+1) &= w1(s) + P(S=s) \\
w2(s+1) &= w1(s) - P(S=s) \\
\mu_1(s+1) &= \frac{w1(s) * \mu_1(s) + s * P(S=s)}{w1(s+1)} \\
\mu_2(s+1) &= \frac{w2(s) * \mu_2(s) - s * P(S=s)}{w2(s+1)}
\end{aligned}$$

   Indication : pour montrer la récursion, partir des formules $\mu_1(s) = \frac{1}{w_1(s)} \sum_{i=0}^{s-1} i \cdot P(S=i)$ et $\mu_2(s) = \frac{1}{w_2(s)} \sum_{i=s}^{|\mathcal{S}|} i \cdot P(S=i)$
6. Écrire une fonction `matlab [w_1, w_2, mu_1, mu_2]=update(w_1,w_2,mu_1,mu_2,ps,s)` qui calcule la mise à jour récursive précédente.
7. En partant de $w1(0) = 0$, $w2(0) = 1$, $\mu_1(0) = 0$ et $\mu_2(0) = \mu$, appliquer l'algorithme d'Otsu pour $S = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ sur l'image I et déterminer le seuil de binarisation optimal. Présenter le résultat final de la binarisation.

Exercice 3 Filtrage spatial et fréquentiel (10 points)

On considère le filtre RIF 1D suivant, dont la fonction de transfert h s'écrit :

$$h(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \{-1; 0; 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

On rappelle que la transformée du signal échantillonné $h(k)$ s'écrit :

$$H(f) = \sum_k x(k) e^{-i2\pi f k} \tag{3}$$

On rappelle que $H(f)$ est périodique, les basses fréquences (resp. hautes fréquences) correspondent à $|f|$ proche de 0 (respectivement $\frac{1}{2}$).

1. Intuitivement, quelle va être l'action du filtre h donné à l'équation 2 lors de l'application de la convolution ? Quelle filtre reconnaissez-vous ?
2. Calculer $H(f)$ à l'équation 3 pour le filtre h donné à donné à l'équation 2
3. Tracer la forme de la fonction $H(f)$ pour $f \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, puis la forme de $|H(f)|$.
4. Donner les valeurs de $|H(0)|$, $|H(\pm\frac{1}{4})|$, $|H(\pm\frac{1}{3})|$, et $|H(\pm\frac{1}{2})|$. Quel type de filtrage fréquentiel ce filtre effectue-t-il ? Quelle forme de fonction reconnaissez-vous ?
5. Tracer la réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas idéal (fréquence de coupure $\frac{1}{3}$), et le comparer à la fonction $|H(f)|$ précédente. Commenter en particulier la différence en terme d'effets de rebond.