# BIMA - Examen session 1

6 janvier 2015

Le barème, sur 40, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié. Aucun document ni machine électronique ne sont autorisés. Durée de l'examen : 2h.

## Exercice 1 Questions de cours (12 points)

1. Expliquer le principe du filtrage numérique anti-aliasing (3 lignes max).
2. Soit un ensemble de données vectorielles de taille 100. Peut-on réduire la taille des données à 3 sans aucune perte (processus réversible) avec une ACP (3 lignes max) ?
3. Est ce que le détecteur de Harris est invariant à une rotation de l'image ? à un changement d'échelle ? Justifier (3 lignes max).
4. peut-on faire une ALD lorsqu'on ne connait pas les classes des individus (données vectorielles) considérés ? (2 lignes max)
5. Quelle est la principale différence entre les descripteurs SIFT et DAISY ?
6. Donner deux filtres d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2 permettant de réaliser une détection de contours.
7. Rappeler brièvement les avantages et inconvénients des filtres d'ordre 1 par rapport aux filtres d'ordre 2 (4 lignes max)
8. On souhaite segmenter une image avec une méthode de type *Mean Shift* et une méthode de type *Split and Merge*. Quelle est la différence **fondamentale** entre ces deux méthodes en ce qui concerne les propriétés topologiques des ensembles résultants (3 lignes max).

## Exercice 2 Traitement d'images (10 points)

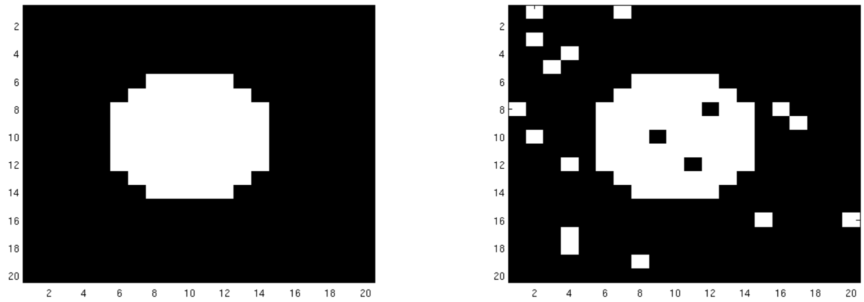
On considère l'image initiale donnée à la Figure 1a), qui a été bruitée avec un bruit "poivre et sel" - Figure 1b). On rappelle que ce bruit consiste à modifier aléatoirement un pourcentage $p$ des pixels en leur affectant [1] le niveau de gris 0 (noir) ou 255. Dans la Figure 1b), on a $p = 10\%$.

1. Écrire le code matlab/octave d'une fonction `J = salt_peper_noise(I,p)` qui renvoie une image bruitée par un bruit poivre et sel avec $p$% de pixels modifiés.
2. On va filtrer l'image de la la figure 1b) avec un filtre médian $3 \times 3$.
   Rappel : ce filtrage coniste à trier les niveau de gris dans un voisinage et à affecter au pixel considéré la valeur médiane après tri.
   — Le filtrage médian est-il linéaire ? Justifier.

1. une fois sur deux

— Écrire le code matlab/octave d'une fonction `J = median(I,d)` qui effectue le filtrage médian par un filtre de taille $d \times d$. <u>N.B.</u> : on effectuera un zero-padding.
— Donner l'image résultant du filtrage de la figure 1b) pour un filtre médian $3 \times 3$.

3. On va filtrer l'image de la la figure 1b) avec un filtre moyenneur $3 \times 3$.
   — Rappeler le principe du filtre moyenneur.
   — Donner l'image résultant du filtrage de la figure 1b) pour un filtre moyenneur $3 \times 3$.
4. Calculer l'erreur après filtrage pour les filtres médian et moyenneur. Lequel semble le plus adapté ? Expliquer.




a) Image Source　　　b) Image bruitée

FIGURE 1 – Débruitage d'image

## Exercice 3　Transformée de Fourier (5 points)

— Quelle est la fonction 2d qui correspond à l'image source de la Figure 2 ? Quelle est la forme analytique attendue pour sa transformée de Fourier ?
— Parmi les tranformées de Fourier TF1, TF2 ou TF3, quel est celui correspondant à l'image source de la Figure 2 ? Justifier.

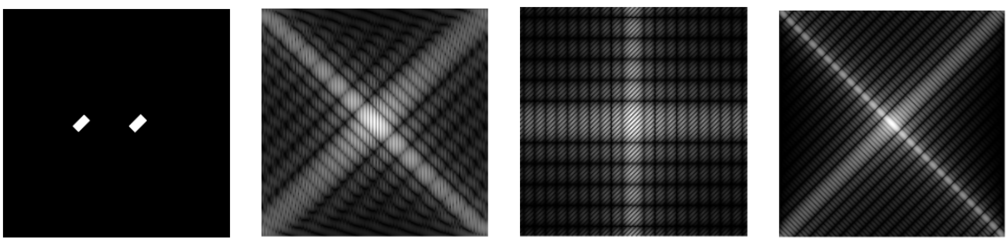


Image source　　TF 1　　TF 2　　TF 3

FIGURE 2 – Associer une image à sa transformée de Fourier

## Exercice 4 Complexité du filtrage spatial et fréquentiel (7 points)

**Filtrage dans le domaine spatial**

On considère un filtre RIF défini par le masque de convolution $h(n, m)$ discret de taille $K \times K$. On veut effectuer le filtrage d'une image $x$ de taille $M \times N$ par ce filtre, donnant une image $x_f$. On rappelle que le filtrage se traduit par un produit de convolution, $x_f = x \star h$.

1. Combien d'opérations faut-il effectuer pour calculer la valeur de $x_f$ au pixel $(n, m)$.
2. Quelle est la complexité globale du filtrage spatial ?

**Filtrage dans le domaine fréquentiel**

Pour un signal 1d de taille $N$, on rappelle qu'il existe des algorithmes efficaces pour le calcul de la transformée de Fourier discrète, de complexité $N \log_2(N)$. Pour une image, le calcul de la transformée de Fourier consiste à effectuer successivement deux transformées 1d : une sur les lignes, puis une sur les colonnes (ou l'inverse).

1. Rappeler le traitement à effectuer pour filtrer une image dans le domaine fréquentiel.
2. Quelle est la complexité du calcul de la transformée de Fourier discrète pour une image de taille $M \times N$ ?
   **<u>indication</u>** : on rappelle que $\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$.
3. Quelle est la complexité globale du filtrage fréquentiel ?

**Comparaison filtrage dans le domaine spatial *v.s.* fréquentiel**

Quel est le filtrage le plus efficace ? De quoi cela dépend-il ?

— On veut filtrer une image de taille $N = M = 1024$ pixels avec un masque de taille 3, quel va être le traitement le plus efficace ? Justifier.

— On veut filtrer une image de taille $N = M = 128$ pixels avec un masque de taille 13, quel va être le traitement le plus efficace ? Justifier.

## Exercice 5 Interpolation (6 points)

On considère un signal continu $x(t)$ et $X(f) = TF[x(t)]$ sa transformée de Fourier. Soit $\delta(t)$ la distribution de Dirac : $\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$. On suppose qu'on a échantillonné $x(t)$ pour produire un signal discret selon le modèle d'échantillonage idéal :

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e)\delta(t - kT_e)$$

On rappelle que l'échantillonage se traduit par une périodisation du spectre dans le domaine fréquentiel :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_e)$$

L'interpolation consiste, à partir du signal discret $x_e(t)$, à déterminer un signal $x_i(t)$ tel que $x_i(kT_e) = x_e(kT_e)$, les valeurs entre les échantillons discrets dépendant de la méthode d'interpolation choisie. L'interpolation est dite "idéale" si le signal interpolé $x_i(t)$ coïncide avec le signal continu $x(t)$ de départ (ceci n'est possible que si le théorème de Shannon est vérifié).

Rappel :

- Propriétés de la distribution de Dirac :
  - $x(t)\ \delta(t - t_0) = x(t_0)\ \delta(t - t_0)$
  - $x \star \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$
- La fonction "rectangle" $\mathrm{Rect}(t)$ s'écrit de la manière suivante :

$$\mathrm{Rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

  Et $TF[\mathrm{Rect}(t)] = \mathrm{sinc}(\pi f)$.

1. On suppose dans la suite que $x(t)$ est un signal tel que $X(f) = 0$ pour $|f| > f_m = \frac{1}{4}$, et qu'on échantillonne $x(t)$ pour produire $x_e(t)$ avec $T_e = 1$. Le signal est-il échantillonné conformément au théorème de Shannon ? Justifier. Représenter graphiquement $X_e(f)$.
2. L'interpolation du signal échantillonné peut s'écrire dans le domaine fréquentiel, de la manière suivante : $X_i(f) = X_e(f)H(f)$ [2], où $H(f)$ est la fonction de transfert définissant le filtre d'interpolation. Montrer alors que l'interpolation peut s'écrire dans le domaine temporel de la manière suivante, avec une fonction $h(t)$ que l'on précisera :

$$x_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)h(t - k) \tag{2}$$

3. Soit la méthode d'interpolation définie par $h(t) = \mathrm{Rect}(t)$. Que vaut $x_i(t)$ ? Quelle méthode d'interpolation reconnaissez-vous ? L'interpolation est-elle idéale ? Quelles en sont les conséquences ?

2. produit simple dans le domaine de Fourier