BIMA - Examen session 1

16 janvier 2018

Le barème, sur 40, donné à titre indicatif, est susceptible d'être modifié. Aucun document ni machine électronique ne sont autorisés. Durée de l'examen : 2h.

Exercice 1 Questions de cours (10 points)

1. Pour un point d'une image au voisinage duquel la matrice d'auto-corrélation est M, quel est le critère de Harris pour la détection d'un coin ? Le détecteur ainsi défini est-il invariant par rotation ? Justifier.
2. Quelle est la dimension du descripteur SIFT ? Par rapport à quelles transformations ce descripteur est-il invariant ?
3. Pour un ensemble de données caractérisé par une matrice de variance-covariance Σ et un vecteur unitaire v, quel est le critère défini pour la minimisation de la variance projetée sur la droite vectorielle engendrée par v ? Comment résoudre cette équation en pratique ?
4. Expliquer ce qu'est l'*aliasing* et dans quelles conditions elle se produit. Donner une méthode qui permette de réduire l'*aliasing*.
5. Sur quel principe peut-on généraliser en dimension quelconque les propriétés de la transformé de Fourier en dimension 1 ? Illustrer en montrant le lien entre la transformé de Fourier 1D et la transformée de Fourier 2D.
6. On souhaite classer les pixels d'une image dans 10 catégories différentes. Pour cela, on utilise la méthodes des k-moyennes. Quelle valeur donner à k ? Combien obtient-on de régions connexes après classification ?
7. Quelle est la différence entre une égalisation d'histogramme et un étalement de l'histogramme ? Est-ce que ces transformations sont réversibles ?

Answer of exercise 1

Barème : 2-2-2-1-1-1-1

1. Le critère de harris est : $H = det(M) - k.trace(M)^2$. H est invariant par rapport à la rotation (par rapport au detecteur de Moravec vu en TD) car une rotation est une matrice orthogonale et ne change pas les valeurs propres de H, et éventuellement au scaling si on fait une extension multiscale.
2. Le descripteur SIFT est de dimension 128, il est invariant par rapport à la rotation (si on tourne la fenêtre d'étude par rapport à l'orientation dominante), ainsi qu'à des variations globales de luminosité (grâce à la normalisation L2) ainsi qu'aux phénomènes de saturation (seuillage par hystérésis).
3. L'expression de la variance totale projetée est $v^T \Sigma v$, sa minimisation sous contrainte revient à rechercher les valeurs et vecteurs propres de Σ et à sélectionner la valeur propre la plus grande et le sous-espace propre associé.

4. L'aliasing se produit lorsque la condition de Shannon n'est pas respecté, la fréquence max du signal est plus grande que deux fois celle de l'échantillonnage. Pour s'en prévenir, on peut lisser l'image avec un filtre gaussien pour supprimer les fréquences les plus hautes de façon à revenir aux conditions de Shannon
5. La transformé de Fourier est séparable. Ainsi les propriétés vérifiées dans une direction, le sont également dans toutes les autres. On a $= TF(I)(f,g) = TF(y \mapsto K(f,y))(g)$ et $K(f,y) = TF(x \mapsto I(x,y))(f)$.
6. On prend k à 10 (10 classes). Le nombre de composantes **connexes** ne peut pas être connu à l'avance, les k-moyennes classifient indépendemment des pixels voisins.
7. Une égalisation d'histogramme peut réduire le nombre de niveaux de gris (pour obtenir une fonction de répartition la plus linéaire possible), alors que l'étirement renormalise les valeurs de niveaux de gris sans changer leur nombre. La première n'est donc pas réversible au contraire de la seconde.

Exercice 2 Calcul de transformée de Fourier (10 points)

On rappelle la définition de la fonction porte vue en cours : $\mathrm{Rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, de la transformée de Fourier d'un signal x : $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2i\pi ft}dt$ et de la propriété de translation de cette dernière : $TF(t \mapsto x(t-t_0))(f) = X(f)e^{-2i\pi ft_0}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de Rect.
2. Soit la fonction Sign définie par : $\mathrm{Sign}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$. Dessiner le graphe de cette fonction.
3. Soit les fonctions $U(t) = \mathrm{Sign}(t+\frac{1}{2})$ et $V(t) = \mathrm{Sign}(t-\frac{1}{2})$. Dessiner leur graphe et trouver une relation simple entre Rect, U et V.
4. En déduire la transformée de Fourier de Sign.
5. Soit la fonction de Heavyside définie par $H(t) = \frac{1}{2}(1+\mathrm{Sign}(t))$. En déduire sa transformée de Fourier.

Answer of exercise 2

barème : 2-1-2-3-2

1. vu en TD : $TF(\mathrm{Rect})(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Rect}(t)e^{-2i\pi ft}dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi ft}dr = [e^{-2ift}/(-2i\pi f)]_{t=-1/2}^{t=1/2}$ $= (e^{2i\pi 1/2f} - e^{-2i\pi 1/2})/(2i\pi f) = \sin(\pi f)/(\pi f) = \mathrm{sinc}(\pi f)$
2. a faire
3. dessin à faire, permet d'en déduire que $\mathrm{Rect}(t) = \frac{1}{2}(U(t) - V(t))$
4. $TF(\mathrm{Rect}) = \frac{1}{2}(TF(S(t+1/2) - S(t-1/2))) = \frac{1}{2}(TF(S)e^{2i\pi f/2} - TF(S)e^{-2i\pi f/2}) = TF(S)(i\sin(\pi f))$ or $TF(\mathrm{Rect})(f) = \mathrm{sinc}(\pi f) = TF(S)(i\sin(\pi f))$, donc $TF(S) = \frac{1}{i\pi f}$
5. $H(t) = \frac{1}{2}(1+S(t))$, donc $TF(H) = \frac{1}{2}(TF(1) + TF(S)) = \frac{1}{2}(\delta(f) + \frac{1}{i\pi f})$

Exercice 3 Echantillonnage (10 points)

Rappels : le peigne de Dirac est défini par : $⧢_T(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-kT)$ et sa transformée de Fourier est : $\frac{1}{T}⧢_{\frac{1}{T}}(f)$.

1. Soit un signal continu $x(t)$ que l'on échantillonne à une période T_e pour obtenir un signal $x_e(t) = Ш_{T_e}(t)x(t)$. Rappeler le lien entre $X(f)$ et $X_e(f)$ qui sont les transformées de Fourier respectives des signaux $x(t)$ et $x_e(t)$.
2. On suppose que le spectre de $x(t)$ est borné, et on appelle f_m sa plus haute fréquence. On pose $X_L(f) = X_e(f)\,\mathrm{Rect}(\frac{f}{L})$. À quelle condition est-il possible de retrouver X à partir de X_L ?
3. Pour la suite et pour simplifier on pose $L = 1$. Soit la fonction $\mathrm{Tri}(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{si } |t|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et dont la transformée de Fourier inverse est $\mathrm{sinc}^2(\pi f)$. Dessiner le graphe de Tri.
4. On choisit maintenant de tronquer X_e avec Tri, c'est-à-dire que l'on pose $X_T(f) = X_e(f)\,\mathrm{Tri}(f)$. À quelle condition est-il possible de retrouver X à partir de X_T ?
5. Donner la formule d'interpolation qui permet de reconstruire X à partir de X_T.
6. Est-ce que cette interpolation est meilleure que celle de Shannon ? Argumentez.

Answer of exercise 3

barème : 2-2-1-1-2-2

1. Question de cours, vue en TD : puisque $x_e(t) = Ш_{T_e}(t)x(t)$, on trouve que $X_e(f) = \frac{1}{T_e}\sum_{k\in\mathbb{Z}} X(f - \frac{k}{T_e})$, c'est la T.F. périodisée.
2. Toujours du cours : pour être capable de trouver X il faut que $2f_m < f_e = 1/T_e$ (théorème de Shannon). Puisqu'on tronque X_e avec la porte de longueur L, il faut prendre $L = f_e$
3. à faire (c'est un triangle de base 2 et de hauteur 1 centré en 0)
4. Les conditions sont les mêmes que pour l'échantillonnage de Shannon.
5. $X(f) = X_T(f) = \mathrm{Tri}(f)X_e(f)$. On applique une TF inverse : $x(t) = \mathrm{sinc}^2(\pi t) \star x_e(t) = \sum_k x_e(kT_e)\,\mathrm{sinc}^2(\pi(t - kT_e))$
6. Le sinus cardinal (<= 1) au carré décroît plus vite que le sinus cardinal, donc ses effets passe-bande sont plus forts et il est moins soumis à l'aliasing .

Exercice 4 Filtrage spatial (10 points)

Soit l'image A et l'algorithme suivant :
— étape 1 : filtrer l'image A avec un moyenneur de taille 3×3, on obtient une image B.
— étape 2 : soustraire B à A, on obtient une image C.
— étape 3 : multiplier C par un coefficient scalaire $k > 0$, on obtient une image D.
— étape 4 : ajouter D à A, on obtient l'image finale E.

1. Associer les images B, C, D, et E aux images 1, 2, 3 et 4 respectivement affichées dans la figure 1. Dans cet exemple, k a été choisi à 3. Pour vous aider, nous avons calculé les extremum et la moyenne de ces images, en plus de l'image originale :

	min	moyennne	max
image 1	-0.058824	0.276561	1.0
image 2	0.000000	0.276441	0.996078
image 3	-0.129412	0.000087	0.294118
image 4	-0.043137	0.000029	0.098039
image originale A	0.000000	0.276471	0.996078

2. Nous avons extrait de l'image originale une petite zone :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 32 & 79 & 136 & 177 & 185 \\ 0 & 1 & 8 & 32 & 79 & 135 & 176 & 184 \\ 0 & 1 & 8 & 31 & 78 & 134 & 175 & 183 \end{pmatrix}$$

   Appliquez le filtre sur la seconde ligne de cette région en excluant également la première et la dernière colonne (il y a donc 6 valeurs à calculer). On prendra $k = 3$.
3. Expliquer, en justifiant, l'action de ce filtre. Le filtre est-il linéaire ? Si oui, est-il passe-haut, passe-bas ou passe-bande ? et donner le noyau de convolution.
4. Expliquer l'action du paramètre k.
5. Écrire un code matlab qui implémente ce filtre.

Answer of exercise 4

barème : 2-3-2-2-1

1. B : image 2
   C : image 4
   D : image 3
   E : image 1
2. B
   ans =

   3 14 39 82 130 165
   C

   ans =

   −2 −6 −7 −3 5 11
   D

   ans =

   −6 −17 −22 −8 15 33
   E

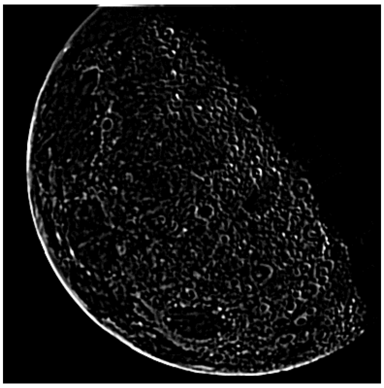
   ans =

   −5 −9 10 71 150 209
3. Ce filtre renforce les contours (ou filtre réhausseur) : en effet, on calcule d'abord les contours (moyenneur soustrait à l'image) que l'on ajoute à l'image. Le filtre est linaire et

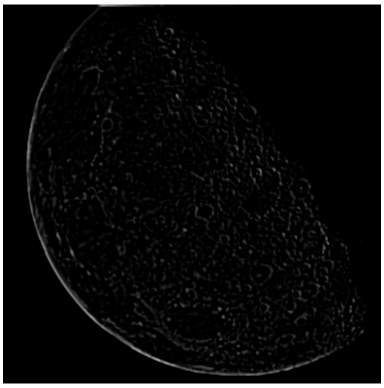
(a) image originale A

(b) image 1

(c) image 2



(d) image 3



(e) image 4

FIGURE 1 – Images

il est passe-haut. Le noyau de convolution se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
E &= A + k \times (A - A \star \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix})\\
&= A \star \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + k \times (A \star \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \frac{1}{9} A \star \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix})\\
&= A \star (\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} - \frac{k}{9}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix})\\
&= A \star \begin{pmatrix}-\frac{k}{9} & -\frac{k}{9} & -\frac{k}{9}\\ -\frac{k}{9} & 1+\frac{8k}{9} & -\frac{k}{9}\\ -\frac{k}{9} & -\frac{k}{9} & -\frac{k}{9}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. si $k = 0$ le filtre est l'identité. Plus k est grand, plus les contours sont réhaussés

5.
```
function E=filtre(A,k)
m = ones(3)/9;
E = A + k*(A-conv2(A,m), 'same');
```