Modèles et Algorithmes pour la Décision dans l'Incertain

Patrice PERNY

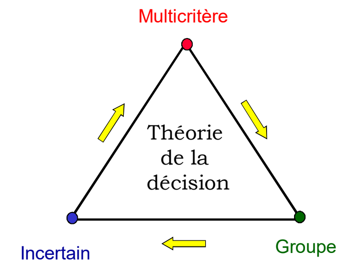
Sorbonne Université

Patrice.Perny@lip6.fr

http://madi.lip6.fr

Décision en IA / RO

- Décision automatique
- Aide à la décision



- ➢ Elaboration de modèles formels (actions possibles, préf., croyances,…) et analyse axiomatique
- ➢ Procédures d'exploitation pour le choix, le classement
- ➢ Systèmes décisionnels et SIADs

Plan et contenu du cours

Partie I : Modèles graphiques probabilistes

Partie II : Modèles pour la décision ds l'incertain et le risque

- **S1** : modèles pour l'incertain total, modèle EU dans le risque
- **S2** : Le modèle Rank Dependent Utility
- **S3** : Arbres de décision et PDMs à horizon fini
- **S4 :** PDMs à horizon infini, modèle BEU, CEU
- **S5** : Théorie des possibilités, utilité qualitatives, PDM possibilistes

Partie III : Modèles graphiques pour les préférences

Chapitre I : décision dans l'incertain et décision dans le risque

1. Introduction à la décision dans l'incertain et dans le risque

Décision dans l'incertain et dans le risques.

Arbitrage entre des choix dont les conséquences sont mal connues. Risque = incertain probabilisé.

$\Rightarrow$ Modèles formels

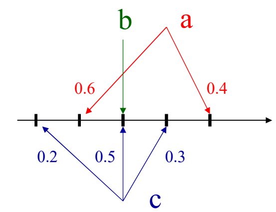
- Préférences, croyances
- Critères et règles de décision EU, RDU

$\Rightarrow$ propriétés caractéristiques, pouvoir descriptif, paramétrage pour modéliser des comportements

Décision dans le risque

Risque = contexte incertain probabilisé

Contexte : 1 agent, n actions possibles aux conséquences incertaines (connues en probabilités)



But : Choisir la meilleure action

$a \succsim b$?

=> Modèle décisionnel

Incertain et Risque

Formalisme de la décision l'incertain total :

S ensemble des états de la nature
2^S ensemble des événements
X ensemble des conséquences
Acte : $f : S \to X$

Formalisme de la décision dans le risque :

Hypothèse : on connaît la loi de probabilité $P : 2^S \to X$
A tout acte f on associe la loi de probabilité
$P_f : 2^S \to X$ avec $P_f(x) = P(\{s \in S : f(s) = x\})$

Exemples de jeux avec un dé

Exemple : Dé 2 jeux f et g : si équilibré

	1	2	3	4	5	6
f	1	0	1	0	1	0
g	1	-1	0	3	-1	0

X	-1	0	1	2	3
P_f	0	1/2	1/2	0	0
P_g	1/3	1/3	1/6	0	1/6

Incertain : on compare des actes

Risque : on compare des lois de proba sur X

2. Notions de base pour la décision dans le risque

Dominance stochastique d'ordre 1

X DS1 Y ssi $\forall x \in X, P(X > x) \geq P(Y > x)$

x	-1	0	1	2	3
X	0	$1/2$	$1/2$	0	0
Y	$1/3$	$1/3$	$1/6$	0	$1/6$

x	-1	0	1	2	3
$P(X > x)$	$\boxed{1}$	$1/2$	0	0	0
$P(Y > x)$	$2/3$	$\boxed{1/3}$	$1/6$	$1/6$	0

non Y DS1 X

Dominance stochastique d'ordre 2

Fonction cumulative : $F_X(x) = P(X \leq x)$

Fonction décumulative : $G_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$

X DS2 Y ssi $\forall x \in X, \int_{-\infty}^{x} F_X(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x} F_Y(t)dt$

X DS2 Y ssi $\forall x \in X, \int_{-\infty}^{x} G_X(t)dt \geq \int_{-\infty}^{x} G_Y(t)dt$

X DS1 $Y \Rightarrow X$ DS2 Y

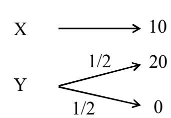
Etalement à moyenne constante

on dit que Y se déduit de X par un étalement à moyenne constante (mean preserving spread) , noté Y MPS X ssi :

$$\begin{cases} E(X) = E(Y) \\ X \text{ DS2 } Y \end{cases}$$

Exemple :

Y plus risqué que X



Attitude vis-à-vis du risque

Aversion au risque :

Un agent est adversaire du risque si pour toute loterie X il préfère un gain certain E(X) que de jouer X

Aversion à l'accroissement du risque :

Un agent a de l'aversion pour un accroissement du risque si, pour toute paire de variables aléatoire X, Y telles que Y MPS X (i.e. Y résulte d'un étalement de X) alors il préfère X à Y

Equivalent certain et prime de risque

Equivalent certain :

L'équivalent certain d'une variable aléatoire X est le gain certain EC(X) tel que X ~ EC(X) (le décideur est indifférent)

Prime de risque :

ρ(X) = E(X) - EC(X) > 0 pour un adversaire du risque et négative pour un décideur qui a du goût pour le risque

Vers un modèle plus discriminant

- DS1 et si adversaire du risque DS2, MPS sont des relations de préférences naturelles mais laissent beaucoup de distributions incomparables,
- Il faut quelque chose de plus discriminant et de bien fondé
- Une solution : le critère de l'utilité Espérée EU

3. Le modèle EU pour la décision dans le risque

Modèle de l'utilité espérée (EU) pour la décision dans le risque

Actions = loteries probabilistes

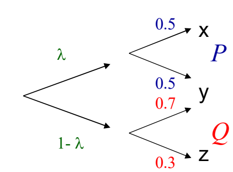
X : l'espace des résultats possibles

loterie : Loi de proba P telle que $\{x \in X : P(x) > 0\}$ est fini

$\mathcal{L}$: ensemble des loteries sur X

mixage de loteries : $\forall P, Q \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in [0,1]$,

$\longrightarrow$ loterie : $\lambda P + (1-\lambda) Q \in \mathcal{L}$



Axiomes du modèle EU dans le risque

Axiome 1 (Complète comparabilité transitive).
$\forall P, Q \in \mathcal{L}, \quad P \succsim Q \;$ ou $\; Q \succsim P$
$\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, \quad (P \succsim Q$ et $Q \succsim R) \Longrightarrow P \succsim R$

Axiome 2 (Continuité). $\forall P, Q, R \in \mathcal{L}$ tels que $P \succ Q \succ R$, $\exists \alpha, \beta \in]0,1[$ tels que :
$\alpha P + (1-\alpha) R \in \mathcal{L} \succ Q \quad$ and $\quad Q \succ \beta P + (1-\beta) R$

Axiome 3 (Indépendance). $\forall P, Q, R \in \mathcal{L}, \; \forall \alpha \in]0,1]$
$P \succsim Q \iff \alpha P + (1-\alpha) R \succsim \alpha Q + (1-\alpha) R$

Théorème

von Neumann et Morgenstern (1947)

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $(\mathcal{L}, \succsim)$ vérifie les axiomes 1, 2 et 3

(ii) il existe un fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

$$U(P) = \sum_{x \in X} P(x) u(x)$$

où $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application définie à une transformation affine positive près, telle que :
$\forall P, Q \in \mathcal{L}, \quad P \succsim Q \iff U(P) \geq U(Q)$

Remarques

- $u(x)$: utilité de la conséquence x pour l'agent
- u caractérise les préférences de l'agent et son attitude vis-à-vis du risque
- modèle linéaire en fonction des probabilités
  $U(\alpha P + (1-\alpha) Q) = \alpha U(P) + (1-\alpha) U(Q)$
- *Le théorème se généralise au cas de loi de probas quelconques (à support non nécessairement fini)*

Propriétés du modèle EU

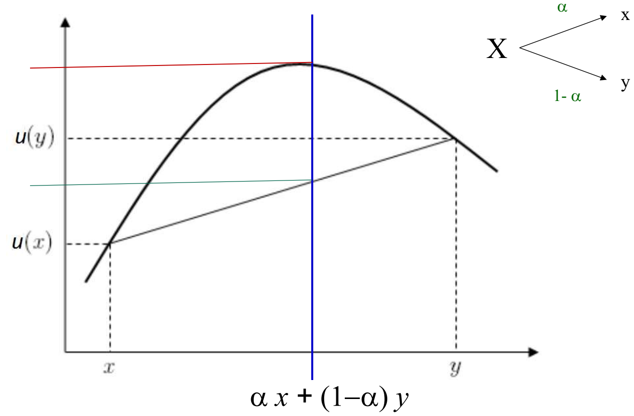
Proposition 1
X DS1 Y ssi pour toute fonction d'utilité non décroisante $EU(X) \geq EU(Y)$

Proposition 2
X DS2 Y ssi pour toute fonction d'utilité non décroisante et concave $EU(X) \geq EU(Y)$

La concavité de la fonction d'utilité u s'interprète donc comme de l'aversion à l'acroissement du risque. La concavité de u s'interprète aussi comme de l'aversion au risque.

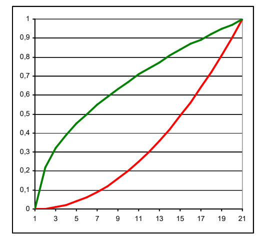
Coefficient d'aversion au risque : (Arrow-Pratt) $\quad -u''(x)/u'(x)$

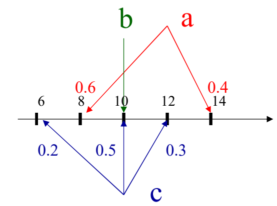
Concavité de la fonction u



Mise en œuvre du modèle

- Exemple





a	b	c
0,292	0,250	0,251
0,714	0,710	0,696

a > c > b

a > b > c

Elicitation de la fonction d'utilité

- Notion d'équivalent certain
- Méthode des loteries 50-50
- Méthode de la probabilité variable
- Exemple

4. Modèles pour la décision dans l'incertain total

Décision dans l'incertain total

Le Problème de décision

Événement

$A \subseteq S$

- ens. d'états : S (si S fini, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$)
- ens. *fini* de conséquences: $X = \{x_1, \dots, x_m\}$
- Actes $= X^S$. Acte $f : S \to X$ caractérisé par $(f(s_1), \dots, f(s_n))$
- Preférence Globale : $\succsim$ on X^S

But : Trouver la meilleure action. $\Rightarrow$ Modèle décisionnel

$$f \succsim g \iff F(f(s_1), \dots, f(s_n), g(s_1), \dots, g(s_n)) \geq 0$$

Exemples de jeux avec un dé

Cette fois on ne connait plus les probas des faces du dé

Exemple : Dé ~~équilibré~~, 2 jeux f et g :

	1	2	3	4	5	6
f	1	0	1	0	1	0
g	1	-1	0	3	-1	0

X	-1	0	1	2	3
P_f	0	$1/2$	$1/2$	0	0
P_g	$1/3$	$1/3$	$1/6$	0	$1/6$

Incertain : on compare des actes

Risque : on compare des lois de proba sur X

Critère de Wald

Définition

- Choisir l'acte dont la pire conséquence est la meilleure :
$$\text{Argmax}_{f \in \mathcal{V}} \min_{s \in \mathcal{S}} u(f(s)).$$
- idée : principe de prudence.

	s_1	s_2	s_3	min
f_1	20	10	-30	-30
f_2	-10	30	10	-10
f_3	10	20	-5	-5

	s_1	s_2	s_3	min
f_1	20	10	-10	-10
f_2	200	300	-11	-11

Critère Hurwicz

Définition

- Choisir l'acte avec le meilleur compromis entre meilleure et pire conséquence :
$$\text{Argmax}_{f \in \mathcal{V}} \left[\alpha \min_{s \in \mathcal{S}} u(f(s)) + (1-\alpha) \max_{s \in \mathcal{S}} u(f(s)) \right],$$
avec $\alpha \in [0, 1]$
- idée : compromis entre prudence et optimisme.

	s_1	s_2	s_3	s_4	Hurwicz
f_1	200	0	0	-10	$\alpha \times (-10) + (1-\alpha) \times 200$
f_2	200	200	200	-11	$\alpha \times (-11) + (1-\alpha) \times 200$

Min Max Regret

Définition

- Choisir l'acte dont on regrettera le moins la conséquence :

$$\mathrm{Argmin}_{f\in\mathcal{V}} \max_{s\in\mathcal{S}} R(f,s),$$

avec $R(f,s) = \max_{g\in\mathcal{V}} u(g(s)) - u(f(s))$.

	s_1	s_2	s_3
f_1	20	10	-30
f_2	-10	30	10
f_3	10	20	-5

	s_1	s_2	s_3	max
R_1	0	20	40	40
R_2	30	0	0	30
R_3	10	10	15	15

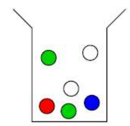
Critère de Laplace

Définition

- Choisir l'acte ayant la conséquence moyenne la plus élevée :

$$\mathrm{Argmax}_{f\in\mathcal{V}} \sum_{s\in\mathcal{S}} \frac{1}{|\mathcal{S}|} u(f(s)).$$

- idée : les événements sont équiprobables.



	R	V	B	$\sum$
f_1	100	0	0	$33,3$
f_2	0	99	99	$66,0$

	R	$\neg R$	$\sum$
f_1	100	0	$50,0$
f_2	0	99	$49,5$

Critère EU

Expected Utility (Sav 54)

$$f \succsim g \iff U(f) \geq U(g) \quad \text{where} \quad U(f) = \sum_{s\in S} p(s).u(f(s))$$

Axiomes de Savage P1-P5

P1 $(X^S, \succsim)$ préordre complet ($\succsim$ compl. refl. trans.)

P2 "*Sure-thing principle*"

$$\forall A \subseteq S, \forall f,g,h,h' \in X^S, \quad (fAh \succsim gAh \iff fAh' \succsim gAh')$$

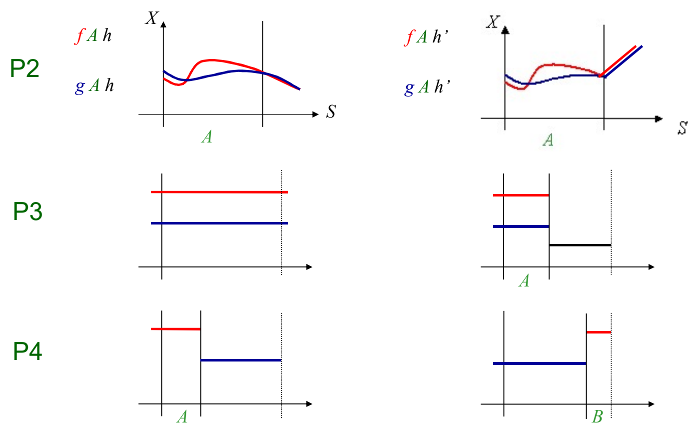
P3 $\forall A \subseteq S$, A not null, $(f_x \succsim f_y)_A \iff x \succsim_P y$.

P4 $\forall A, B \in S, \forall x,y,x',y' \in X$ such that $x \succ_P y$ et $x' \succ_P y'$, $f_x A f_y \succsim f_x B f_y \iff f_{x'} A f_{y'} \succsim f_{x'} B f_{y'}$.

P5 X contains at least two elements x, y such that $f_x \succ f_y$.

P6 $\forall f,g \in X^S : f \succ g, \ \forall x \in X, \exists$ partition $S = \bigcup_{i=1}^n S_i$ such that $\forall i = 1,\ldots,n, \ xS_i f \succ g$ et $f \succ xS_i g$.

Principe de la construction



Principe de la chose sûre

P2 "*Sure-thing principle*"

$$\forall A \subseteq S, \forall f,g,h,h' \in X^S, \quad (fAh \succsim gAh \iff fAh' \succsim gAh')$$

	0,1	0,3	0,4	0,2	
	s1	**s2**	**s3**	**s4**	**EU**
a	30	50	60	20	46
b	40	30	60	20	41
c	30	50	20	90	44
d	40	30	20	90	39

f	**30**	**50**	50	50
g	**40**	**30**	50	50
h	50	50	**60**	**20**
h'	50	50	**20**	**90**

Théorème de Savage 54

Si les préférences de l'agent vérifient les axiomes
P1, P2, P3, P4, P5, P6

alors elles sont représentables par le modèle EU

$$U(f) = \sum_{s \in S} p(s).u(f(s))$$

Conséquences de P2-P3 & P4

P2, P3
Projection de la préférence
sur l'espace des conséquences

P4
Projection de la préférence
sur l'espace des événements