Sorbonne Université — Année 2017-2018

LRC
Examen de 2nde session

M1 ANDROIDE
M1 DAC

Durée 2h - aucun document autorisé

Le barème n'est donné qu'à titre indicatif

1 Logique classique

Exercice 1 – Logique des prédicats – *6 points*
Considérer les quatre assertions suivantes :

a Les personnes qui ne sont pas aimables n'aiment pas les carottes.

b Les personnes qui aiment les carottes aiment les écrits de Lewis Carroll.

c Les personnes qui n'aiment pas les carottes ne sont pas logiciens.

d Un logicien n'aime pas les écrits de Lewis Caroll

1. Formaliser ces quatre assertions en logique des prédicats du premier ordre.
   Remarque : on fera appel aux prédicats `aimable(x)`, `logicien(x)` et `aime(x, y)`
   Correction :
   a) Les personnes qui ne sont pas aimables n'aiment pas les carottes.
   $\forall x[\neg aimable(x) \rightarrow \neg aime(x, Carottes)]$
   b) Les personnes qui aiment les carottes aiment les écrits de Lewis Carroll.
   $\forall x[aime(x, Carottes) \rightarrow aime(x, EcritsLewisCaroll)]$
   c) Les personnes qui n'aiment pas les carottes ne sont pas logiciens.
   $\forall x[\neg aime(x, Carottes) \rightarrow \neg logicien(x)]$
   d) Un logicien n'aime pas les écrits de Lewis Caroll
   $\exists x[logicien(x) \wedge \neg aime(x, Ecrits\_Lewis\_Caroll)]$

2. Formaliser ces quatre assertions en logique des propositions en faisant appel aux propositions atomiques suivantes : `aimable`, `aime_carottes`, `aime_ecrits_Lewis_Caroll` et `logicien`.
   Remarque : on pourra considérer la négation de l'assertion *d*.
   Correction :
   a) Les personnes qui ne sont pas aimables n'aiment pas les carottes.
   $\neg aimable \rightarrow \neg aime\_carottes$
   b) Les personnes qui aiment les carottes aiment les écrits de Lewis Carroll.
   $aime\_carottes \rightarrow aime\_ecrits\_Lewis\_Caroll$
   c) Les personnes qui n'aiment pas les carottes ne sont pas logiciens.
   $\neg aime\_carottes \rightarrow \neg logicien$
   d) Un logicien n'aime pas les écrits de Lewis Caroll
   $\neg(\neg aime\_Ecrits\_Lewis\_Caroll \rightarrow \neg logicien)$

3. Montrer, à l'aide de la méthode des tableaux, que l'ensemble $S = \{a, b, c, d\}$ n'est pas satisfiable.
   Remarque : voir en annexe les rappels sur la méthode des tableaux sémantiques.
   Correction : En utilisant la formule α $\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ sur d on obtient $\neg aime\_Ecrits\_Lewis\_Caroll$ et $\neg\neg logicien$, ce qui donne, en utilisant la première formule α ($\neg\neg\varphi$), $\neg aime\_Ecrits\_Lewis\_Caroll$ et $logicien$.
   En utilisant la formule β ($\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$) sur c on obtient deux tableaux l'un avec $aime\_carottes$ et l'autre avec $\neg logicien$ (ce qui donne une contradiction).
   En utilisant la formule β ($\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$) dans le premier tableau issu de l'étape précédente, sur b on obtient de nouveau deux tableaux, l'un avec $\neg aime\_carottes$ (qui est contradictoire) et l'autre avec $aime\_ecrits\_Lewis\_Caroll$ (qui est aussi contradictoire).

2 Logiques de description

Exercice 2 – Représentation en logique de description $\mathcal{ALC}$ – *2 points*
Traduire les formules a, b, c et d de l'exercice 1 en $\mathcal{ALC}$ en utilisant les concepts atomiques `Aimable`, `Carotte`, `Ecrit-Lewis-Caroll` et `Logicien`, et le rôle `aime`.
Correction :

a) Les personnes qui ne sont pas aimables n'aiment pas les carottes.
$\neg Aimable \sqsubseteq \neg \forall aime.Carotte$

b) Les personnes qui aiment les carottes aiment les écrits de Lewis Carroll.
$\forall aime.Carotte \sqsubseteq \forall aime.Ecrit - Lewis - Caroll$

c) Les personnes qui n'aiment pas les carottes ne sont pas logiciens.
$\neg \forall aime.Carotte \sqsubseteq \neg Logicien$

d) Un logicien n'aime pas les écrits de Lewis Caroll
$\neg[(Logicien \sqcap \neg \forall aime.Ecrits\_Lewis\_Caroll) \sqsubseteq \bot]$

3 Logique modale

Exercice 3 – Logique T – *2 points*

On se place dans cet exercice dans le cadre de la logique T. Il s'agit d'une logique *normale* (donc dotée de la nécessitation, du Modus Ponens et de l'axiome K, voir en annexe le rappel des définitions), avec en plus l'axiome T. De façon équivalente, par correspondance, les relations d'accessibilité dans les modèles de Kripke de cette logique sont réflexives, *mais pas nécessairement symétriques et transitives.*

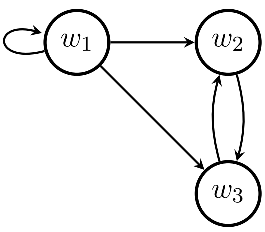
1. Montrez en raisonnant sur la sémantique des mondes de Kripke que dans la logique T la formule $A \to \Diamond A$ est valide
2. Montrez par contre que la même formule n'est pas valide en l'absence de l'axiome T (c'est-à-dire, si la relation d'accessibilité n'est pas nécessairement réflexive).

Correction :

1. Supposons $A \to \Diamond A$ non valide, alors il existe $M, w \not\models A \to \Diamond A$. Donc (i) $M, w \models A$ et (ii) $M, w \not\models \Diamond A$. Par (ii) on a que il n'existe pas w' tq $(w, w') \in R : M, w' \models A$. Or R est réflexive, et avec (i) on a une contradiction.
2. Il suffit d'exhiber un contre-exemple, par ex. tout simplement un monde unique où p est vrai.

Exercice 4 – *3 points*

On définit la structure de Kripke M (sans fonction d'interprétation) suivante :



1. Indiquez si sur cette structure de Kripke les axiomes T, 4, et B sont vérifiés.
2. Avec un langage doté des propositions $\mathcal{P} = \{a, b, c\}$, définissez une fonction d'interprétation afin que les formules suivantes soient (toutes) vraies :
   - $M \models (a \vee b \vee c) \wedge \neg(a \wedge b \wedge c)$
   - $M \models (a \to \Diamond\Diamond\neg a) \wedge (b \to \Box\neg b) \wedge (c \to \Box\neg c)$

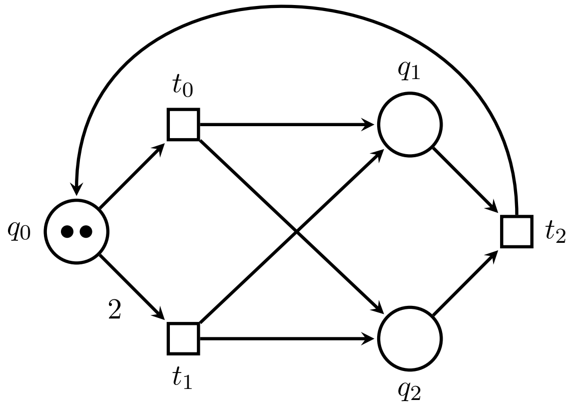
Correction :

1. Il suffit de vérifier que la structure possède les propriétés correspondantes : T (réflexivité) : non, 4 (transitivité) : oui, B (symétrie) : non.
2. w1 : a, w2 : b, w3 : c

4 Réseau de Petri

Exercice 5 – *3 points*

Soit le réseau de Petri suivant :



1. Donner les matrices Pré, Post et d'incidence de ce réseau de Petri.
2. Deux transitions t_i et t_j sont dites en conflit structurel si et seulement si elles ont au moins une place d'entrée en commun. Quelles sont les transitions en conflit structurel ?
3. Est-ce que le réseau est vivant ? quasi-vivant ?
4. Qu'observe-t-on si le marquage initial de q_0 est 1 ?

Correction :

1. La matrice d'incidence est obtenue par $Post - Pre$ - vu en cours
2. t_0 et t_1 sont en conflit structurel
3. le réseau est quasi-vivant
4. Si le marquage initial de q_0 est 1, on ne passera jamais dans t_1 - On perd la quasi-vivacité.

5 Automates temporisés

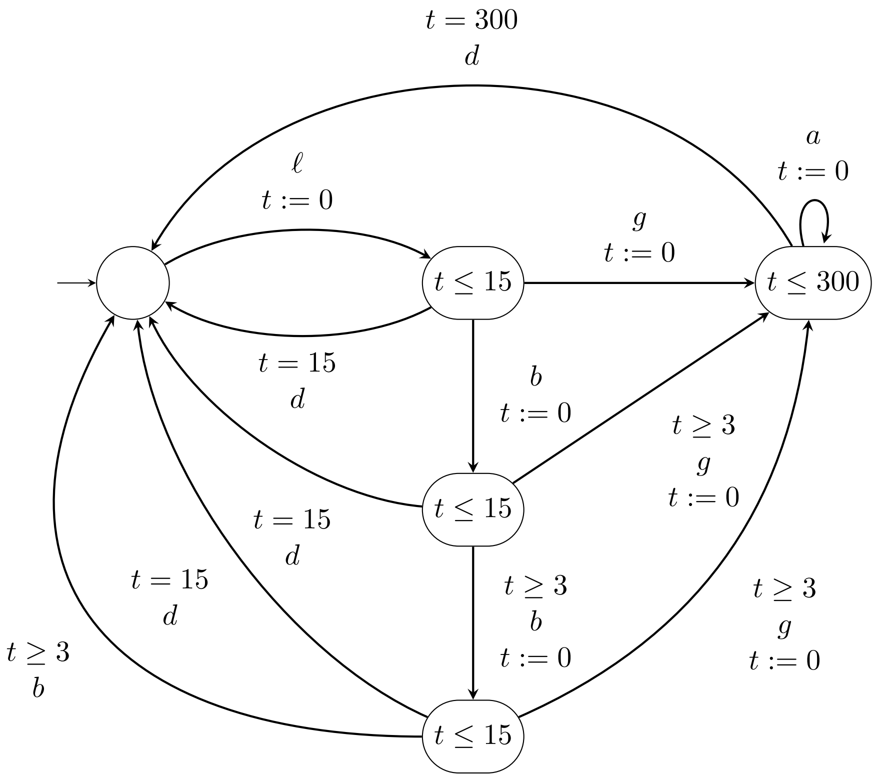
Exercice 6 – *4 points*

1. Modéliser par un automate temporisé le système d'e-mail suivant :
   - Lorsqu'un utilisateur rentre son nom d'utilisateur (*login*), il dispose de 15 secondes pour rentrer son mot de passe.
   - En cas d'échec, le système interdit une nouvelle tentative de mot de passe avant 3 secondes.
   - Au bout de trois échecs, le système redemande son *login* à l'utilisateur.
   - Une fois authentifié, l'utilisateur peut écrire, lire des e-mails, ou se déconnecter.
   - Au bout de 5 minutes d'inactivité, l'utilisateur est automatiquement déconnecté.

   Le système utilise une seule horloge t, modélisant les secondes (1 unité de temps = $1s$).

   On prendra les conventions de nom suivantes :
   - ℓ pour ≪ login ≫ : l'utilisateur entre son nom d'utilisateur.
   - g pour ≪ good ≫ : l'utilisateur entre un mot de passe correct.
   - b pour ≪ bad ≫ : l'utilisateur entre un mot de passe erroné (*LoginFailed* aurait pu être utilisé ici).
   - a pour ≪ action ≫ : l'utilisateur lit ou écrit des emails.
   - d pour ≪ disconnect ≫ : l'utilisateur se déconnecte volontairement ou est déconnecté par inactivité prolongée.
2. Donner 2 (exécutions) mots de votre automate qui correspondent (1) à une connexion réussie et (2) à un échec de connexion.

Correction :



$t = 300$
d
ℓ
$t := 0$
a
$t := 0$
g
$t := 0$
$t \leq 15$
$t \leq 300$
$t = 15$
d
b
$t := 0$
$t \geq 3$
g
$t := 0$
$t \leq 15$
$t = 15$
d
$t \geq 3$
b
$t := 0$
$t = 15$
d
$t \geq 3$
g
$t := 0$
$t \geq 3$
b
$t \leq 15$

6 Annexes

6.1 Méthode des tableaux sémantiques

La méthode des tableaux sémantiques permet d'établir si un ensemble de fomules logiques est valide, satisfiable ou insatisfiable.

6.1.1 Composantes

La méthode des tableaux est basée sur des règles syntaxiques de décomposition, qui distinguent deux types de formules, nommés α et β.

Formule α	α_1	α_2
$\neg\neg\varphi$	φ	φ
$\varphi_1 \wedge \varphi_2$	φ_1	φ_2
$\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	φ_1	$\neg\varphi_2$
$\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\varphi_2 \rightarrow \varphi_1$

Formule β	β_1	β_2
$\varphi_1 \vee \varphi_2$	φ_1	φ_2
$\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$	$\neg\varphi_1$	$\neg\varphi_2$
$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$	$\neg\varphi_1$	φ_2
$\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$	$\neg(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$

6.1.2 Satisfiabilité

La recherche d'un modèle pour un ensemble de formules $\mathcal{F}$ par la méthode des tableaux peut être représentée de différentes façons, nous utilisons ici une forme arborescente.

- Initialisation : créer un nœud racine, étiqueté par l'ensemble $\mathcal{F}$ et marqué comme non traité
- Décomposition itérative : choisir un nœud non traité et le marquer comme traité
  - si l'étiquette du nœud contient deux littéraux complémentaires, marquer le nœud comme fermé
  - sinon, si toutes les formules associées au nœud sont des variables propositionnelles, marquer le nœud comme ouvert
  - sinon, choisir une formule F de l'étiquette du nœud
    - si elle est de type α
      - créer un sous-nœud marqué comme non traité
      - lui associer l'étiquette $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ où α_1 et α_2 sont les formules obtenues par réécriture de F
    - sinon (si elle est de type β)
      - créer deux sous-nœuds marqués comme non traités
      - leur associer respectivement les étiquettes $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_1\}$ et $\mathcal{F} \setminus \{F\} \cup \{\beta_2\}$ où β_1 et β_2 sont les formules obtenues par réécriture de F

Si l'arbre contient une feuille ouverte, alors $\mathcal{F}$ est satisfiable.
Si toutes les feuilles de l'arbre sont fermées, alors $\mathcal{F}$ est insatisfiable.

6.2 Logique de description $\mathcal{ALC}$

6.2.1 Alphabet

- Concepts atomiques : A, B, C, ...
- Rôles atomiques : R, S, U, V, ...
- Symboles : $\{\sqcup, \sqcap, \exists, \forall, \neg, \top, \bot, .\}$
- Instances de concepts : a, b, ...

6.2.2 Grammaire

$$
\begin{aligned}
\text{concept} ::= \quad & \langle\text{concept atomique}\rangle \\
& \mid \top \\
& \mid \bot \\
& \mid \neg\langle\text{concept}\rangle \\
& \mid \langle\text{concept}\rangle \sqcap \langle\text{concept}\rangle \\
& \mid \langle\text{concept}\rangle \sqcup \langle\text{concept}\rangle \\
& \mid \exists\ \langle\text{rôle}\rangle.\langle\text{concept}\rangle \\
& \mid \forall\ \langle\text{rôle}\rangle.\langle\text{concept}\rangle
\end{aligned}
$$

6.3 Logique modale

Système normal K

Si on ne fait aucune hypothèse particulière sur les propriétés des modèles de Kripke considérés, on est en présence d'un système normal de logique modale. On a alors :

- Nécessitation : si $M \models \phi$, alors $M \models \Box\phi$
- Modus Ponens : si $M \models \phi$ et $M \models \phi \to \varphi$, alors $M \models \varphi$
- Axiome K : $\Box(\phi \to \varphi) \to (\Box\phi \to \Box\varphi)$

Correspondance

L'axiome K ne demande aucune hypothèse particulière sur les cadres de modèles de Kripke considérés (d'où son nom). Mais on peut établir en général des équivalences entre les propriétés des cadres et certains schémas d'axiomes (qui ne sont pas valides dans un système normal) :

Nom	**Axiome**	**Propriété**	
T	$\Box\phi \to \phi$	réflexivité :	$\forall w : (w, w) \in R$
D	$\Box\phi \to \Diamond\phi$	sérialité :	$\forall w, \exists w' : (w, w') \in R$
4	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	transitivité :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w', w'') \in R$, alors $(w, w'') \in R$
5	$\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$	euclidienne :	$\forall w, w', w''$: si $(w, w') \in R$ et $(w, w'') \in R$, alors $(w', w'') \in R$
B	$\phi \to \Box\Diamond\phi$	symétrie :	$\forall w, w'$: si $(w, w') \in R$ alors $(w', w) \in R$

La logique modale S5 peut être caractérisée par K avec en plus $T, 4$ et B (relations réflexives, symétriques, et transitives).