Skriftlig reeksamen
Lineær algebra med anvendelser

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler (notater, bøger, tabeller etc.) er tilladte, undtaget elektroniske hjælpemidler af enhver art (lommeregnere, bærbare computere mm.). Øvrigt elektronisk udstyr må heller ikke medbringes (musikafspillere, mobiltelfoner mm.). Eksaminanderne må ikke kommunikere indbyrdes eller med omverdenen (dvs. brug af mobiltelefon, wifi, internet, e-mail mv. er ikke tilladt).

Svarene på de enkelte spørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til en lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1 (25 point)

Lad $V = \mathbb{C}^3$ være udstyret med den kanoniske basis og det sædvanlige indre produkt. Der er givet tre vektorer i V,

$$u_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

(a) Afgør om sættet (u_1, u_2, u_3) er lineært afhængigt i V.

(b) Bestem en ortonormal basis for $U = \operatorname{span}(u_1, u_2, u_3)$, og angiv $\dim U$.

(c) Find en ortonormal basis for $U^\perp$, og angiv $\dim U^\perp$.

(d) Bestem matricen $M(P)$ med hensyn til den kanoniske basis for den ortogonale projektion P på $U^\perp$.

(e) Find den vektor w i U, som er tættest på $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

Opgave 2 (25 point)

I vektorrummet $V = \mathbb{R}_2[x]$ af reelle polynomier af grad $m \leq 2$ betragtes polynomierne

$$b_1(x) = (x-1)^2, \qquad b_2(x) = x^2, \qquad b_3(x) = (x+2)^2.$$

(a) Vis at $B = (b_1, b_2, b_3)$ er et lineært uafhængigt sæt. Begrund at B udgør en basis for V.

(b) Find koordinatsøjlerne $[1]_B$, $[x]_B$ og $[x^2]_B$ for vektorerne $v_1 = 1$, $v_2 = x$ og $v_3 = x^2$ i V.

(c) Bestem matricen $M(T) = [T]_B$ med hensyn til basen B for den lineære operator T på V, som er givet ved $Tp(x) = 12Dp(x)$, hvorved D betegner differentiation af $p(x)$.

(d) Suppler B til en basis E for $\mathbb{R}_4[x]$. Angiv dernæst matricen $[T]_E$ for $T = 12D$ med hensyn til E.

(e) Vis at $U = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \mid \exists c_3, c_4 \in \mathbb{R} \colon p(x) = c_3x^3 + c_4x^4\}$ er et underrum. Afgør om U er invariant ved den lineære afbildning $T \colon \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$.

Opgave 3 (25 point)

Her betragtes $\mathbb{C}^3$ med det sædvanlige indre produkt, og der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2\,\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Vis at der for den adjungerede gælder at $A^* = -A$.

(b) Vis at A har sit karakteristiske polynomium givet ved $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 4)$.

(c) Bestem egenværdierne for A, og angiv for hver egenværdi en basis for det tilhørende egenrum.

(d) Afgør om A er ortogonalt diagonaliserbar. Hvis du svarer "nej" skal svaret begrundes; hvis "ja" skal en unitær matrix U og en diagonalmatrix D angives, sådan at $A = UDU^*$.

(e) Afgør om $\|Az\| = \|A^*z\|$ gælder for enhver vektor $z = (z_1, z_2, z_3)$ i $\mathbb{C}^3$.

(vend)

Opgave 4 (25 point)

(a) Bestem LDU-faktoriseringen af

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 10 & 19 \end{pmatrix}.$$

(b) Undersøg om A er positivt definit.

(c) Afgør om A har en Cholesky-faktorisering. Hvis du svarer "nej" skal dette begrundes; hvis "ja" skal Cholesky-faktoriseringen af A udføres.

(d) Udfør QR-faktorisering af matricen $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Vis at søjlerne for Q udgør en ortonormal basis for billedrummet $\operatorname{ran}(T)$ for den lineære afbildning $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ givet ved $T(v) = Bv$ for $v \in \mathbb{R}^3$.

(opgavesæt slut)