Skriftlig eksamen
Lineær algebra med anvendelser

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler (notater, bøger, tabeller etc.) er tilladte, undtaget elektroniske hjælpemidler af enhver art (lommeregnere, bærbare computere mm.). Øvrigt elektronisk udstyr må heller ikke medbringes (musikafspillere, mobiltelfoner mm.). Eksaminanderne må ikke kommunikere indbyrdes eller med omverdenen (dvs. brug af mobiltelefon, wifi, internet, e-mail mv. er ikke tilladt).

Svarene på de enkelte spørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til en lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1 (25 point)

I vektorrummet $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ af reelle polynomier af grad $m \leq 2$ betragtes polynomierne

$$b_1(x) = (x+1)^2, \qquad b_2(x) = (x+2)^2, \qquad b_3(x) = (x+3)^2.$$

(a) Vis at $B = (b_1, b_2, b_3)$ er et lineært uafhængigt sæt. Begrund at B udgør en basis for V.

(b) Find koordinatsøjlerne $[2]_B$, $[4x]_B$ og $[x^2]_B$ for vektorerne $v_1 = 2$, $v_2 = 4x$ og $v_3 = x^2$ i V.

(c) Bestem matricen $M(T) = [T]_B$ med hensyn til basen B for den lineære operator T på V, som er givet ved $Tp(x) = 2Dp(x)$, hvorved D betegner differentiation af $p(x)$.

(d) Suppler B til en basis E for $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$. Angiv dernæst matricen $[T]_E$ for $T = 2D$ med hensyn til E.

(e) Angiv to underrum U og W af $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ sådan at $\mathcal{P}_4(\mathbb{R}) = U \oplus W$ og U er invariant ved operatoren $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4(\mathbb{R}))$, mens W ikke er T-invariant.

Opgave 2 (25 point)

Her er der givet to vektorrum U og V med $\dim U = 5$ og $\dim V = 7$. Desuden er der givet $R \in \mathcal{L}(U)$ og $T \in \mathcal{L}(U, V)$ samt $L \in \mathcal{L}(V)$, hvor R er injektiv, T er injektiv og L er surjektiv.

(a) Afgør om TR er injektiv.

(b) Afgør om TR er surjektiv.

(c) Afgør for LT hvilke af følgende egenskaber den har: injektiv, surjektiv, bijektiv.

(d) Bestem $\dim \operatorname{Ran}(LT)$ og $\dim \operatorname{Ran}(TR)$, hvorved f.eks. $\operatorname{Ran}(LT)$ betegner billedrummet for LT.

(e) Antag nu at U og V begge er udstyret med et indre produkt. Bestem da for $S = LTR$ både $\dim \operatorname{Null}(S^*)$ og $\dim \operatorname{Ran}(S^*)$, idet nulrummet for S^* betegnes med $\operatorname{Null}(S^*)$.

Opgave 3 (25 point)

Her betragtes rummet $\mathbb{C}^3$ med det sædvanlige indre produkt, og der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis at A har sit karakteristiske polynomium givet ved $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)$.

(b) Bestem egenværdierne for A, og angiv for hver egenværdi en basis for det tilhørende egenrum.

(c) Begrund at der findes en inverterbar matrix U og en diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, sådan at $A = UDU^{-1}$. Angiv D sådan at $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$, og vælg om muligt U, sådan at den er unitær.

(d) Vis at U kan vælges symmetrisk, og opskriv så faktoriseringen $A = UDU^{-1}$.

(e) Bestem en 3×3-matrix R som opfylder at $R^*R = A$. Vælg om muligt R selvadjungeret.

(vend)

Opgave 4 (25 point)

Der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem de singulære værdier for matricen A.

(b) Opskriv den reducerede SVD-faktorisering af A.

(c) Bestem den fulde SVD-faktorisering af A.

(d) Angiv polar dekompositionen af A, dvs. skriv A på formen $A = QS$, hvorved Q er en unitær matrix, mens S er en positivt semidefinit matrix.

(e) Forklar hvorfor matricen Q ovenfor er ortogonal, og hvorfor S ikke er positivt definit.

`(opgavesæt slut)`