Skriftlig reeksamen
Lineær algebra med anvendelser

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler (notater, bøger, tabeller etc.) er tilladte, undtaget elektroniske hjælpemidler af enhver art (lommeregnere, bærbare computere mm.). Øvrigt elektronisk udstyr må heller ikke medbringes (musikafspillere, mobiltelfoner mm.). Eksaminanderne må ikke kommunikere indbyrdes eller med omverdenen (dvs. brug af mobiltelefon, wifi, internet, e-mail mv. er ikke tilladt).

Svarene på de enkelte spørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til en lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1 (25 point)

I vektorrummet $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ af reelle polynomier af grad $m \leq 2$ betragtes polynomierne

$$b_1(x) = x^2, \qquad b_2(x) = (x-1)^2, \qquad b_3(x) = (x-2)^2.$$

(a) Vis at $B = (b_1, b_2, b_3)$ er et lineært uafhængigt sæt, og begrund at B er en basis for V.

(b) Find koordinatsøjlen $[q]_B$ med hensyn til B for vektoren $q(x) = x^2 - 4$.

(c) Vis at mængden $U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(2) = 0\}$ udgør et underrum af V. Godtgør dernæst at $q(x)$ fra punkt (b) tilhører U.

(d) Bestem en basis for U og dimensionen af U.

(e) Undersøg om $V = U \oplus W$ gælder for underrummet $W = \operatorname{span}(x^2)$.

Opgave 2 (25 point)

To vektorrum U og V med indre produkt er givet så $\dim U = 6$ og $\dim V = 3$. Desuden er der givet lineære afbildninger $R \in \mathcal{L}(U)$ og $T \in \mathcal{L}(U, V)$ samt $K \in \mathcal{L}(V)$, hvor R er injektiv, T er surjektiv og K er surjektiv. Her betegnes billedrummet for f.eks. T med $\operatorname{Ran}(T)$.

(a) Afgør om TR er injektiv.

(b) Afgør om TR er surjektiv.

(c) Afgør for KT hvilke af følgende egenskaber den har: injektiv, surjektiv, bijektiv.

(d) Bestem for $S = KTR$ både $\dim \operatorname{Ran}(S)$ og $\dim \operatorname{Ran}(S^*)$.

(e) Bevis at SS^* er inverterbar.

Opgave 3 (25 point)

Her betragtes $\mathbb{C}^3$ med det sædvanlige indre produkt, og der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & -3\,\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(a) Vis at A har sit karakteristiske polynomium givet ved $p(\lambda) = -\lambda(\lambda + 3\,\mathrm{i})(\lambda - 2\,\mathrm{i})$.

(b) Bestem egenværdierne for A, og angiv for hver egenværdi λ det tilhørende egenrum $E(\lambda, A)$.

(c) Begrund at A er ortogonalt diagonaliserbar. Angiv en unitær matrix U og en diagonalmatrix D, sådan at $A = UDU^*$.

(d) Skriv faktoriseringen $A = UDU^*$ op, og vælg om muligt U så den er ortogonal og symmetrisk.

(e) Bestem en matrix R sådan at $R^2 = A$ (*vink:* $\mathrm{i} = (e^{\mathrm{i}\,\pi/4})^2$). Forklar hvorfor R ikke kan vælges selvadjungeret.

(vend)

Opgave 4 (25 point)

Der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem de singulære værdier for matricen A.

(b) Opskriv den reducerede SVD-faktorisering af A.

(c) Bestem den fulde SVD-faktorisering af A.

(d) Angiv polar dekompositionen af A, dvs. skriv A på formen $A = QS$, hvorved Q er en unitær matrix, mens S er en positivt semidefinit matrix.

(e) Afgør om matricen Q ovenfor er ortogonal, og hvorvidt S er positivt definit.

`(opgavesæt slut)`