Skriftlig eksamen
Lineær algebra med anvendelser

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer. Alle sædvanlige hjælpemidler (notater, bøger, tabeller etc.) er tilladte, undtaget elektroniske hjælpemidler af enhver art (lommeregnere, bærbare computere mm.). Øvrigt elektronisk udstyr må heller ikke medbringes (musikafspillere, mobiltelfoner mm.). Eksaminanderne må ikke kommunikere indbyrdes eller med omverdenen (dvs. brug af mobiltelefon, wifi, internet, e-mail mv. er ikke tilladt).

Svarene på de enkelte spørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til en lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1 (25 point)

I vektorrummet $V = \mathbb{R}_2[x]$ af reelle polynomier af grad $m \leq 2$ betragtes polynomierne

$$b_1(x) = (x-1)^2, \qquad b_2(x) = (x-2)^2, \qquad b_3(x) = (x-3)^2.$$

(a) Opskriv betingelsen for at sættet $B = (b_1, b_2, b_3)$ er lineært afhængigt i $\mathbb{R}_2[x]$. Vis dernæst at B er et lineært uafhængigt sæt.

(b) Vis at B udgør en basis for V. Find dernæst koordinatsøjlen $[v]_B$ med hensyn til B for vektoren $v(x) = x^2 - 1$.

(c) Vis at mængden $U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(3) = 0\}$ udgør et underrum af $\mathbb{R}_2[x]$. Godtgør dernæst at $q(x) = b_1(x) - 4b_2(x)$ tilhører U.

(d) Bestem en basis for U og dimensionen af U.

(e) Undersøg om $\mathbb{R}_2[x] = U \oplus W$ gælder for underrummet $W = \operatorname{span}(x)$.

Opgave 2 (25 point)

Her er der givet to reelle vektorum V og W med $\dim V = 5$ og $\dim W = 3$. Desuden er der givet $R \in \mathcal{L}(V,V)$ og $T \in \mathcal{L}(V,W)$ samt $L \in \mathcal{L}(W,W)$, hvor R er injektiv, T er surjektiv og L er surjektiv.

(a) Afgør om LT er surjektiv.

(b) Afgør om LT er injektiv.

(c) Afgør om TR er injektiv, surjektiv eller bijektiv.

(d) Bestem $\dim \operatorname{null}(LT)$ og $\dim \operatorname{null}(TR)$.

(e) Antag nu at V og W begge er udstyret med et indre produkt. Bestem da for $S = LTR$ både $\dim \operatorname{null}(S^*)$ og $\dim \operatorname{ran}(S^*)$.

Opgave 3 (25 point)

Her betragtes rummet $\mathbb{C}^3$ med det sædvanlige indre produkt, og der er givet matricen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Vis at A har sit karakteristiske polynomium givet ved $p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 6)^2$.

(b) Bestem egenværdierne for A, og angiv for hver egenværdi en basis for det tilhørende egenrum.

(c) Afgør om der findes en inverterbar matrix U og en diagonalmatrix D, sådan at $A = UDU^{-1}$. Begrund svaret, hvis du svarer "nej". Hvis du svarer "ja" skal U og D angives, og om muligt skal U vælges sådan at den er ortogonal.

(d) Afgør om A er en normal matrix.

(e) Er A inverterbar ? Hvis du svarer "ja" skal A^{-1} bestemmes; svarer du "nej" skal dette begrundes.

(vend)

Opgave 4 (25 point)

Der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestem de singulære værdier for matricen A.

(b) Opskriv den reducerede SVD-faktorisering af A.

(c) Bestem den fulde SVD-faktorisering af A.

(d) Lad $C = A^*A$ og $D = AA^*$. Afgør om disse matricer er positivt semidefinitte.

(e) Afgør om matricerne C og D er positivt definitte.

`(opgavesæt slut)`