Prøveeksamen
Lineær algebra med anvendelser

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer, i sammenhæng og uden afbrydelser.

Alle sædvanlige hjælpemidler (notater, bøger, tabeller etc.) er tilladte, undtaget elektroniske hjælpemidler af enhver art (lommeregnere, bærbare computere mm.). Øvrigt elektronisk udstyr må heller ikke medbringes (musikafspillere, mobiltelfoner mm.). Eksaminanderne må ikke kommunikere indbyrdes eller med omverdenen (dvs. brug af mobiltelefon, wifi, internet, e-mail mv. er ikke tilladt).

Svarene på de enkelte spørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til en lærebog, eller ved en kombination af disse.

Med Svar

Svarene er med forbehld for fejl. I visse tilfælde kan der være andre måder at besvare opgaverne på end de angivne. Og i visse tilfælde er kun resultatet angivet, mens udregningen/argumentet er udeladt. I en eksamensbesvarelse skal argumentet/udregningen medtages.

Opgave 1 (25 point)

Her betragtes en lineær afbildning $T\colon V_1 \to V_2$ mellem to komplekse vektorrum med $\dim V_1 = 3$ og $\dim V_2 = 4$. Desuden er der to underrum $U_1 \subseteq V_1$ og $U_2 \subseteq V_2$, begge af dimension 1, sådan at $T(U_1) = U_2$.

(a) Bestem de mulige værdier af $\dim \operatorname{null} T$.

$\dim \operatorname{null} T \in \{0, 1, 2\}$, for dimensionen kan ikke være $3 = \dim V_1$, da $Tu \neq 0$ for visse u.

(b) Bestem de mulige værdier af $\dim \operatorname{ran} T$.

$\dim \operatorname{ran} T = 3 - \dim \operatorname{null} T \in \{1, 2, 3\}$.

(c) Afgør om T altid er injektiv, altid er ikke-injektiv, eller om begge muligheder kan forekomme.

Begge dele kan forekomme; f.eks. er T injektiv netop når nulrummet har dimension 0.

(d) Afgør om T altid er surjektiv, altid er ikke-surjektiv, eller om begge muligheder kan forekomme.

T er aldrig surjektiv, da $\dim \operatorname{ran} T \leq 3 < 4$ viser at $\operatorname{ran} T \subseteq V_2$ er en ægte delmængde.

(e) Definer $S\colon U_1 \to U_2$ ved at $Su = Tu$ for alle $u \in U_1$. Afgør om S altid er injektiv, surjektiv, begge dele eller ingen af delene; eller om flere af mulighederne kan forekomme.

S er begge dele.

Opgave 2 (25 point)

Her betragtes mængden af reelle polynomier $\mathbb{R}[x]$, der er organiseret som et vektorrum over $\mathbb{R}$ på den sædvanlige måde.

(a) Sæt $U = \{p \in \mathbb{R}_1[x] \mid p(2) = 0\}$. Bestem en basis for U og angiv $\dim U$.

$p(x) = x - 2$ udgør en basis for U, som har dimension 1.

(b) Suppler $p(x) = x - 2$ til en basis B for $\mathbb{R}_3[x]$, og angiv koordinatsøjlen $[q]_B$ for $q(x) = 3 + 2x + x^2$.

Basen bestemmes til $B = (x - 2, 1, x^2, x^3)$ og man får at $[q]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) Bestem et underrum $W \subset \mathbb{R}_3[x]$ sådan at $U \oplus W = \mathbb{R}_3[x]$. Angiv $\dim W$.

Via suppleringen fås at $W = \operatorname{span}(1, x,^2, x^3)$, som har dimension 3.

(d) Find matricen $M(T)$ med hensyn til B når $T = 4D + 3I$, hvorved D betegner differentiation og I den identiske afbildning. Afgør om T er injektiv, surjektiv eller bijektiv.

$$M(T) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 3 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determinanten ses ved succesiv udvikling efter sidste række at være $3^4 = 81 \neq 0$, så matricen er inverterbar. Derfor er T selv inverterbar.

(e) Lad L betegne mængden af reelle tal λ som opfylder at $S = 4D - \lambda I$ har $V = \operatorname{span}(1, x^2, x^3)$ som et underrum invariant ved S. Bestem L.

Først kan man supplere til basen $(1, x^2, x^3, x)$. Dernæst fås matricen mht. denne basis til at være

$$M(S) = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -\lambda & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Uanset værdien af λ er denne ikke en øvre trekantsmatrix, så af Proposition 7.5.2 ses at der er et underrum, der ikke er invariant ved S. Mere præcist viser matricen at $\operatorname{span}(1, x^2)$ ikke er invariant; a fortiori gælder det samme om V. Konklusionen er derfor at $L = \emptyset$.

Opgave 3 (25 point)

Her betragtes $\mathbb{C}^3$ med det sædvanlige indre produkt, og der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,5 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\mathrm{i} & \mathrm{i}\,2-2 \\ 0 & \mathrm{i}\,2-2 & 1+\mathrm{i}\,4 \end{pmatrix}.$$

(a) Afgør hvilke af følgende egenskaber A har: Selvadjungeret, normal, ortogonal, unitær.

Hverken selvadjungeret, ortogonal eller unitær. Derimod er den normal ifælge spektralsætningen, idet det vises under (d) nedenfor, at den er ortogonalt diagonaliserbar.

(b) Vis at A har sit karakteristiske polynomium givet ved $p(\lambda) = (\mathrm{i}\,5 - \lambda)(\lambda^2 - (5 + \mathrm{i}\,5)\lambda + \mathrm{i}\,25)$, og bestem egenværdierne for A.

En klassisk udregning af $\det(A - \lambda I)$ viser at polynomiet har denne form. Egenværdierne ses haraf at være $\mathrm{i}\,5$ og $5 + \mathrm{i}\,5$ (dobbelt rod).

(c) Bestem for hver egenværdi for A en basis for det tilhørende egenrum. Basisvektorerne ønskes angivet med reelle indgange.

Man finder at $(0, 2, -1)$ hhv. $((0, 1, 2), (1, 0, 0))$ er de respektive baser, og at alle indgange er valgt reelle.

(d) Afgør om A er ortogonalt diagonaliserbar. Hvis du svarer “nej” skal svaret begrundes; hvis “ja” skal en unitær matrix U og en diagonalmatrix D angives, sådan at $A = UDU^*$.

Da basisvektorerne er ortogonale indbyrdes, så udgør de efter normering en o.n.b. for $\mathbb{C}^3$ bestående af egenvektorer for A—-denne matrix er altså ortogonalt diagonaliserbar. U og D angives under (e) nedenfor.

(e) Undersøg om matricerne U og D fra spørgsmål (d) kan vælges sådan at $U = U^{-1}$. I så fald ønskes A faktoriseret som $A = UDU$.

Svaret er bekræftende, og man ser at

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}\,5 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\mathrm{i} & \mathrm{i}\,2-2 \\ 0 & \mathrm{i}\,2-2 & 1+\mathrm{i}\,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(vend)

Opgave 4 (25 point)

(a) Bestem LU-faktoriseringen af

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Undersøg om A har en LDU-faktorisering med

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis du svarer "nej", skal dette begrundes; hvis "ja" skal en sådan faktorisering angives.

Svaret er afkræftende, da entydigheden af LDU-faktoriseringen viser at 2 skal stå på plads 2,2.

(c) Undersøg om A er positivt definit.

De øvre venstre principale underdeterminanter viser sig at være 1, 2 og 2, så da $A^* = A$, så giver en sætning at A er positivt definit.

(d) Bestem Cholesky-faktoriseringen af A.

Først udføres LDU-faktorisering, og man finder dernæst at $A = R^*R$ gælder for '

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bemærk at fuldstændig besvarelse indebærer at man faktisk skriver faktoriseringen $A = R^*R$ ud i detaljer.

(e) Udfør QR-faktorisering af A.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{5}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

`(opgavesæt slut)`