Prøveeksamen
Lineær algebra med anvendelser

Opgavesæt til besvarelse på 4 timer, i sammenhæng og uden afbrydelser.

Alle sædvanlige hjælpemidler (notater, bøger, tabeller etc.) er tilladte, undtaget elektroniske hjælpemidler af enhver art (lommeregnere, bærbare computere mm.). Øvrigt elektronisk udstyr må heller ikke medbringes (musikafspillere, mobiltelfoner mm.). Eksaminanderne må ikke kommunikere indbyrdes eller med omverdenen (dvs. brug af mobiltelefon, wifi, internet, e-mail mv. er ikke tilladt).

Svarene på de enkelte spørgsmål skal begrundes, enten med en udregning, et matematisk argument, en henvisning til en lærebog, eller ved en kombination af disse.

Opgave 1 (25 point)

Her betragtes en lineær afbildning $T\colon V_1 \to V_2$ mellem to komplekse vektorrum med $\dim V_1 = 3$ og $\dim V_2 = 4$. Desuden er der to underrum $U_1 \subseteq V_1$ og $U_2 \subseteq V_2$, begge af dimension 1, sådan at $T(U_1) = U_2$.

(a) Bestem de mulige værdier af $\dim \operatorname{null} T$.

(b) Bestem de mulige værdier af $\dim \operatorname{ran} T$.

(c) Afgør om T altid er injektiv, altid er ikke-injektiv, eller om begge muligheder kan forekomme.

(d) Afgør om T altid er surjektiv, altid er ikke-surjektiv, eller om begge muligheder kan forekomme.

(e) Definer $S\colon U_1 \to U_2$ ved at $Su = Tu$ for alle $u \in U_1$. Afgør om S altid er injektiv, surjektiv, begge dele eller ingen af delene; eller om flere af mulighederne kan forekomme.

Opgave 2 (25 point)

Her betragtes mængden af reelle polynomier $\mathbb{R}[x]$, der er organiseret som et vektorrum over $\mathbb{R}$ på den sædvanlige måde.

(a) Sæt $U = \{p \in \mathbb{R}_1[x] \mid p(2) = 0\}$. Bestem en basis for U og angiv $\dim U$.

(b) Suppler $p(x) = x - 2$ til en basis B for $\mathbb{R}_3[x]$, og angiv koordinatsøjlen $[q]_B$ for $q(x) = 3 + 2x + x^2$.

(c) Bestem et underrum $W \subset \mathbb{R}_3[x]$ sådan at $U \oplus W = \mathbb{R}_3[x]$. Angiv $\dim W$.

(d) Find matricen $M(T)$ med hensyn til B når $T = 4D + 3I$, hvorved D betegner differentiation og I den identiske afbildning. Afgør om T er injektiv, surjektiv eller bijektiv.

(e) Lad L betegne mængden af reelle tal λ som opfylder at $S = 4D - \lambda I$ har $V = \operatorname{span}(1, x^2, x^3)$ som et underrum invariant ved S. Bestem L.

Opgave 3 (25 point)

Her betragtes $\mathbb{C}^3$ med det sædvanlige indre produkt, og der er givet en matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,5 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\mathrm{i} & \mathrm{i}\,2-2 \\ 0 & \mathrm{i}\,2-2 & 1+\mathrm{i}\,4 \end{pmatrix}.$$

(a) Afgør hvilke af følgende egenskaber A har: Selvadjungeret, normal, ortogonal, unitær.

(b) Vis at A har sit karakteristiske polynomium givet ved $p(\lambda) = (\mathrm{i}\,5 - \lambda)(\lambda^2 - (5 + \mathrm{i}\,5)\lambda + \mathrm{i}\,25)$, og bestem egenværdierne for A.

(c) Bestem for hver egenværdi for A en basis for det tilhørende egenrum. Basisvektorerne ønskes angivet med reelle indgange.

(d) Afgør om A er ortogonalt diagonaliserbar. Hvis du svarer "nej" skal svaret begrundes; hvis "ja" skal en unitær matrix U og en diagonalmatrix D angives, sådan at $A = UDU^*$.

(e) Undersøg om matricerne U og D fra spørgsmål (d) kan vælges sådan at $U = U^{-1}$. I så fald ønskes A faktoriseret som $A = UDU$.

(vend)

Opgave 4 (25 point)

(a) Bestem LU-faktoriseringen af

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Undersøg om A har en LDU-faktorisering med

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hvis du svarer "nej", skal dette begrundes; hvis "ja" skal en sådan faktorisering angives.

(c) Undersøg om A er positivt definit.

(d) Bestem Cholesky-faktoriseringen af A.

(e) Udfør QR-faktorisering af A.

`(opgavesæt slut)`