Besvarelser til Lineær Algebra med Anvendelser
Ordinær Eksamen 2016

Mikkel Findinge
http://Findinge.com/

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Problem 1

I vektorrummet $V = \mathbb{R}_2[x]$ af reelle polynomier af grad $m \leq 2$ betragtes polynomierne

$$b_1(x) = (x-1)^2, \quad b_2(x) = (x-2)^2, \quad b_3(x) = (x-3)^2.$$

a. Opskriv betingelsen for at sættet $B = (b_1, b_2, b_3)$ er lineært afhængigt i $\mathbb{R}_2[x]$. Vis dernæst, at B er et lineært uafhængigt sæt.

Betingelsen er, at man kan skrive en af polynomierne som en linearkombination af de to andre. Dvs. hvis vi kan finde konstanter a_1 og a_2 i $\mathbb{R}$, sådan at

$$b_3(x) = a_1 b_1(x) + a_2 b_2(x).$$

Vi har:

$$b_1(x) = x^2 - 2x + 1, \quad b_2(x) = x^2 - 4x + 4, \quad b_3(x) = x^2 - 6x + 9.$$

Vi kan opstille vektorer, der repræsenterer koefficienterne:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Dermed fås matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi ser altså, at der er pivotindgange i alle søjler, hvorfor polynomierne er lineært uafhængige.

b. Vis, at B udgør en basis for V. Find dernæst koordinatsøjlen $[v]_B$ med hensyn til B for vektoren $v(x) = x^2 - 1$.

Vi viste før, at de 3 polynomier er uafhængige i V, hvorfor de må udgøre en basis for V, da $\dim V = 3$.

Vi kan beskrive $v(x)$ som en vektor med koefficienterne som værdier i indgangene. Vi har:

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^\top.$$

Denne kan vi så sætte i forlængelse af koefficientmatricen, A, fra opgave a. Reduceres denne matrix så til $[I \;\; |[v]_B]$, kan vi aflæse koordinatsøjlen $[v]_B$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 8 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Vi har altså, at

$$[v]_B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}^\top.$$

c. Vis, at mængden $U = \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(3) = 0\}$ udgør et underrum af $\mathbb{R}_2[x]$. Godtgør dernæst, at $q(x) = b_1(x) - 4b_2(x)$ tilhører U.

Mængden U er polynomier af højst anden grad, der alle har 3 som en rod.

c1. U er et underrum.

Vi tjekker, om 0 er et element i U, om to polynomier fra U ved addition giver et polynomium i U, samt om skalarmultiplikation af polynomier i U giver et element i U.

Lad $P(x) = 0$, da er $P(3) = 0$, hvorfor $P(x) = 0 \in U$.

Lad $P(x), Q(x) \in U$ være vilkårlige. Da er:

$$P(3) + Q(3) = 0 + 0 = 0,$$

hvorfor $(P(x) + Q(x)) \in U$.

Lad k være en konstant samt $P(x) \in U$. Da er:

$$k \cdot P(3) = k \cdot 0 = 0.$$

Derfor er $(k \cdot P(x)) \in U$, hvorfor U altså er et underrum.

c2. $q(x) = b_1(x) - 4b_2(x)$ tilhører U.

Vi har:

$$q(3) = b_1(3) - 4b_2(3) = (3-1)^2 - 4(3-2)^2 = 2^2 - 4 \cdot 1^2 = 4 - 4 = 0.$$

Dermed er $q(x) \in U$.

d. Bestem en basis for U og dimensionen af U.

Lad $P(x) = ax^2 + bx + c$ sådan at $P(3) = 0$. Da er

$$P(3) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 9a + 3b + c = 0 \Leftrightarrow c = -9a - 3b.$$

Dermed er

$$P(x) = ax^2 + bx - 9a - 3b = a(x^2 - 9) + b(x - 3).$$

Dette betyder, at alle polynomier af højest orden 2 med 3 som rod kan skrives som en linearkombination af polynomierne $x^2 - 9$ og $x - 3$, hvorfor vi har:

$$U = \operatorname{span}\{x^2 - 9,\ x - 3\}.$$

Dermed er $\dim U = 2$.

e. Undersøg om $\mathbb{R}_2[x] = U \oplus W$ gælder for underrummet $W = \operatorname{span}\{x\}$

Vi skal tjekke om $\{x^2-9,\ x-3,\ x\}$ er uafhængige. Vi får følgende koefficientmatrix, som reduceres:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da der er tre pivotindgange har vi tre uafhængige polynomier, hvorfor $\mathbb{R}_2[x] = U \oplus W$.

Problem 2

Her er der givet to reelle vektorrum V og W med $\dim V = 5$ og $\dim W = 3$. Desuden er der givet $R \in \mathcal{L}(V, V)$ og $T \in \mathcal{L}(V, W)$ samt $L \in \mathcal{L}(W, W)$, hvor R er injektiv, T er surjektiv og L er surjektiv.

Vi konkluderer først på nogle af de ting, vi ved. En lineær transformation er injektiv, hvis alle søjler er pivotsøjler. Ligeledes er en lineær transformation surjektiv, hvis alle rækker har pivot.

Da $R\colon V \to V$ er injektiv, da er denne også surjektiv. Ligeledes da $L\colon W \to W$ er surjektiv, da må denne være injektiv. Dermed er både R og L bijektive. Vi ved desuden, at T er surjektiv. Problemet er, at denne går fra et rum af dimension 5 til 3, hvorfor denne ikke kan være injektiv.

a. Afgør om LT er surjektiv.

Både L og T er surjektive, da er også LT surjektiv.

b. Afgør om LT er injektiv.

Nej. Da T ikke er injektiv, findes en vektor $\mathbf{v} \in V$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, sådan at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Vi har da, at

$$LT(\mathbf{v}) = L(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

hvorfor LT ikke kan være injektiv.

c. Afgør om TR er injektiv, surjektiv eller bijektiv.

Da både T og R er surjektive er TR surjektiv. Da R også er injektiv, er det kun nulvektoren, der bliver afbiledet til nulvektoren. Men dette er ligegyldigt, eftersom R mapper til hele V, så findes en vektor $\mathbf{v} \in V$, hvor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, sådan at $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, da T ikke er injektiv. Derfor kan TR heller ikke være injektiv, og dermed heller ikke være bijektiv. TR er altså kun surjektiv.

d. Bestem $\dim \operatorname{Null}(LT)$ og $\dim \operatorname{Null}(TR)$.

Da T er en afbildning fra V to W. Det vil sige, at standardmatricen for T er en 3×5-matrix. Ligeledes er L en afbildning fra W til W, hvorfor denne har en 3×3-standardmatrix. Afbildningen LT er altså en $(3 \times 3) \times (3 \times 5) = (3 \times 5)$-matrix. Da denne er surjektiv har denne pivot i alle rækker. Dermed er rank af LT lig med 3. Dvs. $\dim \operatorname{Null}(LT) = 5 - 3 = 2$.

Da R er en afbildning fra V til V er den tilhørende standardmatrix en 5×5-matrix. Dermed har afbildningen TR en standardmatrix af størrelsen $(3 \times 5) \times (5 \times 5) = (3 \times 5)$. Da TR er surjektiv har denne rank 3. Dermed er $\dim \operatorname{Null}(TR) = 5 - 3 = 2$.

e. Antag nu, at V og W begge er udstyret med et indre produkt. Bestem da for $S = LTR$ både $\dim \mathrm{Null}(S^*)$ og $\dim \mathbf{rank}(S^*)$.

Da vi arbejder med reelle vektorrum, betragter vi blot den transponerede og ikke den konjugerede transponerede, dvs. $S^* = S^\top$. Vi har altså:

$$S = LTR \Leftrightarrow S^\top = (LTR)^\top = R^\top T^\top L^\top.$$

Både L og R er bijektive, derfor er deres transponerede ligeledes dette. Der gælder dog, at $T^\top$ er injektiv i stedet for surjektiv. $T^\top L^\top$ er har en tilhørende 5×3-standardmatrix, som er injektiv. Dette er også gældende for $R^\top T^\top L^\top$, hvorfor $\dim \mathrm{rank}(S^*) = 3$. Men dette betyder, at $\dim \mathrm{Null}(S^*) = 0$.

Problem 3

Her betragtes rummet $\mathbb{C}^3$ med det sædvanelige indre produkt, og der er givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a. Vis, at A har sit karakteristiske polynomium givet ved $p(\lambda) = -\lambda(\lambda-6)^2$.

Vi betragter $\det(A - \lambda I)$. Vi har ved brug af rækkeoperationer i forhold til determinanten samt kofaktormetoden:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 12-2\lambda & -1+(5-\lambda)^2 \\ 0 & 6-\lambda & 12-2\lambda \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} 0 & 2(6-\lambda) & \lambda^2-10\lambda+24 \\ 0 & 6-\lambda & 2(6-\lambda) \\ -1 & 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{3+1}\cdot(-1)\det \begin{bmatrix} 2(6-\lambda) & \lambda^2-10\lambda+24 \\ 6-\lambda & 2(6-\lambda) \end{bmatrix} \\
&= -\left((2(6-\lambda))^2 - (6-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+24)\right) \\
&= -(6-\lambda)(4(6-\lambda) - (\lambda^2-10\lambda+24)) \\
&= (\lambda-6)(24-4\lambda-\lambda^2+10\lambda-24) \\
&= (\lambda-6)(-\lambda^2+6\lambda) \\
&= (\lambda-6)(-\lambda)(\lambda-6) \\
&= -\lambda(\lambda-6)^2
\end{aligned}$$

b. Bestem egenværdierne for A, og angiv for hver egenværdi en basis for det tilhørende egenrum.

Egenværdierne er de lambda, der løser $\det(A-\lambda I) = 0$, hvilket let aflæses af det karakteristiske polynomium til at være 0 og 6, hvoraf 6 har multiplicitet 2.

c. Afgør om der findes en inverterbar matrix U og en diagonalmatrix D, sådan at $A = UDU^{-1}$. Begrund svaret, hvis du svarer "nej". Hvis du svarer "ja", skal U og D angives, og om muligt skal U vælges sådan, at den er ortogonal.

A er diagonaliserbar, hvis og kun hvis egenrummet har samme dimension, som den tilhørende egenværdi har multiplicitet. Da alle egenrum har mindst 1 dimension, så skal vi blot tjekke, om der i egenrummet for egenværdien 6 kan findes 2 lineært uafhængige vektorer. Vi reducerer altså $A - 6I$:

$$\begin{bmatrix} 5-6 & 2 & -1 \\ 2 & 2-6 & 2 \\ -1 & 2 & 5-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har altså to frie variable, hvorfor A er diagonaliserbar. Vi har nemlig, at

$$x_1 = 2x_2 - x_3, \qquad x_2 \text{ Fri}, \qquad x_3 \text{ Fri},$$

hvorfor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

hvilket præcist er to lineært uafhængige vektorer. Altså stemmer dimensionerne af egenrummene overens med multipliciteten af egenværdierne, hvorfor A er diagonaliserbar.

D er en diagonalmatrix med egenværdier, og U er en matrix med de tilhørende egenvektorer som søjler (i samme rækkefølge). Vi skal altså først finde en egenvektor til egenværdien 0:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har, at x_3 er den frie variabel med $x_1 = x_3$ og $x_2 = -2x_3$, hvorfor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi kan nu opstille en matrix U, men vi skal opstille denne som en ortogonal matrix. Egenvektorer på tværs af egenrum er ortogonale, men det er de nødvendigvis ikke i de indbyrdes egenrum. Vi skal altså benytte Gram Schmidt på vores basis for egenrummet til egenværdien 6. Lad $v_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ og $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Så er $u_1 = v_1$ og:

$$u_2 = v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{\|u_1\|^2} u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \left(\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Da der skal justeres for længden om lidt, betragter vi blot u_2 uden den konstante faktor 1/5 i første omgang. Nu er alle de valgte egenvektorer indbyrdes ortogonale:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For at U bliver en ortogonalmatrix skal denne dog have søjler, der, udover at være indbyrdes ortogonale, alle har længde 1. Vi skal altså dividere hver vektor med den respektive længde.

$$\frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vores matricer U og D bliver altså:

$$U = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{6} & -1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{6} & 2 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 5 & \sqrt{5} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Afgør om A er en normal matrix.

En normalmatrix opfylder, at

$$A^*A = AA^*,$$

og da A er reel, så er $A^* = A^\top$. Men A er symmetrisk, hvorfor A også er normal.

e. Er A inverterbar? Hvis du svarer "ja"skal A^{-1} bestemmes; svarer du "nej"skal dette begrundes.

Nej, da 0 er en egenværdi, hvilket betyder, at determinanten af A er 0, hvorfor der ikke eksisterer en invers matrix.