عدم قطعیت و خطا
در اندازه گیری و محاسبات

(همراه با ارائه کدهای برنامه نویسی رایانه ای برای مثالهای حل شده کتاب)

مولفین :

دکتر مهدی علی زاده

مهندس توحید ناصری

مهندس محبوبه مؤمنی

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۹۱۹۴-۰۸-۷

Uncertainty and Error in Measurement and computation

Mehdi Alizadeh

Tohid Naseri

Mahboubeh Momeni

سرشناسه	:	علی‌زاده، مهدی، ۱۳۵۴ -
عنوان و نام پدیدآور	:	عدم قطعیت و خطا در اندازه‌گیری و محاسبات: (همراه با ارائه کدهای برنامه‌نویسی رایانه‌ای برای مثال‌های حل شده) / مولفین :مهدی‌علی‌زاده، توحید ناصری، محبوبه مؤمنی.
مشخصات نشر	:	کرج، قلم گزیده، ۱۳۹۲.
مشخصات ظاهری	:	۱۸۹ص.: مصور (بخش رنگی)، جدول، نمودار.
شابک	:	۸۰۰۰۰ ریال : ۹۷۸-۶۰۰-۹۱۹۴۰-۸-۷
وضعیت فهرست نویسی	:	فیپا
عنوان انگلیسی	:	Uncertainty and error in measurement and computation
یادداشت	:	واژه‌نامه.
موضوع	:	آمار
موضوع	:	اندازه‌گیری
موضوع :	:	احتمالات
شناسه افزوده	:	ناصری، توحید، ۱۳۶۵-
شناسه افزوده	:	مؤمنی، محبوبه، ۱۳۶۴-
رده بندی کنگره	:	HA ۲۹/۵/۸ع۲ف۱۳۹۲
رده بندی دیویی	:	۴۲۲/۰۰۱
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۳۶۹۳۷

عدم قطعیت و خطا در اندازه‌گیری و محاسبات

شمارگان : ۵۰۰ نسخه

شماره شابک : ۹۷۸-۶۰۰-۹۱۹۴۰-۸-۷

مولفین : مهدی علی‌زاده ، توحید ناصری، محبوبه مؤمنی

ویراستار و صفحه آرا : سوسن یوسفی‌نژاد

نوبت چاپ : اول

سال انتشار : زمستان ۱۳۹۲

مرکز پخش : پژوهشگاه مواد و انرژی

قیمت : ۸۰۰۰۰ ریال

فهرست مطالب

صفحه

پیشگفتار

از آنجایی که تعیین مقدار واقعی هرکمیت فیزیکی تقریباً غیرممکن می‌باشد بنابراین محاسبه عدم قطعیت و مقدار خطا در اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی و همچنین انجام محاسبات ریاضی مربوطه از جمله موارد با اهمیت به شمار می‌رود. اصولاً در تحقیقات و پژوهش‌های علمی جهت ارائه نتایج تجربی و آزمایشگاهی در گزارش‌های علمی و فنی، مقالات و یا پایان‌نامه‌های تحصیلی لازم است مقدار عدم قطعیت و خطای کمیت‌های فیزیکی اندازه‌گیری شده بیان شود و اجرای این موضوع از الزامات یک گزارش فنی استاندارد محسوب می‌شود. به طوری که ذکر مقدار عدم قطعیت در کنار کمیت اندازه‌گیری شده حاکی از میزان اعتبار و ارزش مقدار کمیت گزارش شده بوده و به عبارت دیگر سطح کیفی و دقت روش اندازه‌گیری را بیان می‌نماید. لذا در این رابطه به منظور آشنایی دانشجویان علوم پایه و فنی- مهندسی به‌ویژه در مقاطع تحصیلات تکمیلی با اصول، روش‌ها و دستورالعمل‌های نحوه محاسبه وگزارش مقدار عدم قطعیت که یک نیاز اساسی منظور می‌شود کتاب حاضر تألیف و تدوین شده است. همچنین کتاب حاضر می‌تواند برای کلیه محققین، پژوهشگران، کارشناسان و مدیران فنی آزمایشگاه‌ها که با تهیه گزارش‌های علمی و فنی سروکار دارند مفید واقع شود.

کتاب حاضر مشتمل بر چهار فصل می‌باشد که در فصل اول مفهوم عدم قطعیت، انواع آن و نحوه انتشار آن در محاسبات بیان شده است. با توجه به نیاز خواننده نسبت به آگاهی از تحلیل آماری داده‌ها این موضوع به طور خلاصه در فصل دوم کتاب نیز اشاره شده است. در ادامه در فصل سوم کتاب انواع مدل‌های آماری به منظور پیش‌بینی رفتار توزیع داده‌ها در آزمون‌های اندازه‌گیری تکرار شده و کاربرد آنها در تحلیل آماری داده‌ها شرح داده شده است. در فصل آخر کتاب برازش خطی داده‌های اندازه‌گیری بیان شده است. در کلیه فصول کتاب سعی شده است با ارائه و حل مثال‌های متنوع و کاربردی موضوع مورد بحث به طور واضح و کامل بیان گردد. همچنین به منظور آشنایی مخاطبین کتاب با الگوریتم حل عددی مسائل مطروحه در فصول مختلف، کدهای برنامه‌نویسی رایانه‌ای به زبان «متلب» برای برخی از مثال‌های حل شده تهیه و در پیوست کتاب ارائه

مشاهده می‌شود که خطای حداکثری بر روی تابع Q متشکل از حداکثر خطای تابع Q ناشی از هریک از متغیرهای x، y، z و ... است.

۱-۳-۲- خطای محتمل[1]

محتمل‌ترین خطا (خطای استاندارد) بر روی توابع چند متغیره برابر است با جذر مجموع مربعات مقادیر بزرگترین خطای ناشی از هریک از متغیرها، که این موضوع به صورت رابطه زیر قابل ارائه می‌باشد:

$$\Delta Q = \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\Delta x\right)^{۲} + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\Delta y\right)^{۲} + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\Delta z\right)^{۲} + \dots\right)^{۱/۲}$$

مثال ۱-۱۴: محتمل‌ترین مقدار خطای توابع حاصل ضرب و حاصل تقسیم را به دست آورید.

پاسخ:

$$Q = a \cdot b$$

$$\Delta Q = \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\Delta a\right)^{۲} + \left(\frac{\partial Q}{\partial b}\Delta b\right)^{۲}\right)^{۱/۲}$$

بنابراین:

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{f_a^{۲} + f_b^{۲}}$$

ملاحظه می‌شود که:

$$\sqrt{f_a^{۲} + f_b^{۲}} \leq |f_a| + |f_b|$$

یعنی همواره خطای محتمل نسبی (خطای استاندارد) کوچکتر و یا مساوی خطای حداکثر نسبی است.

مثال ۱-۱۵: فرض کنید که اندازه‌گیری طول برای سه نمونه صورت گرفته و مقادیر طول همراه با خطای آنها به صورت زیر گزارش شده است:

[1]- Probability Error

$$L_1 \pm \Delta L_1 = ۲۳/۵ \pm ۰/۱\ cm$$
$$L_2 \pm \Delta L_2 = ۱۷/۸ \pm ۰/۲\ cm$$
$$L_3 \pm \Delta L_3 = ۹۳/۹ \pm ۰/۲\ cm$$

اگر $L = L_1 + ۲L_2 - L_3$ باشد مقدار L را همراه با خطای استاندارد آن گزارش نمایید.

$$\Delta L^{۲} = \left(\frac{\partial L}{\partial L_1}\Delta L_1\right)^{۲} + \left(\frac{\partial L}{\partial L_2}\Delta L_2\right)^{۲} + \left(\frac{\partial L}{\partial L_3}\Delta L_3\right)^{۲}$$

$$= (۱ \times ۰/۱)^{۲} + (۲ \times ۰/۲)^{۲} + (-۱ \times ۰/۲)^{۲} = ۰/۲۱$$

$$\Delta L = \pm ۰/۴۶\ cm$$
$$L = ۲۳/۵ + ۲ \times ۱۷/۸ - ۹۳/۹ = -۳۴/۸\ cm$$

چون مقادیر اولیه با دقتی برابر با یک رقم اعشار اندازه‌گیری شده‌اند، پاسخ نیز باید با یک رقم اعشار گزارش گردد:

$$L \pm \Delta L = -۳۴/۸ \pm ۰/۵\ cm$$

مثال ۱-۱۶: فرض کنید که مقادیر دوگام زمانی و خطاهای مربوط به آنها به صورت $t_1 \pm \Delta t_1 = ۰/۷۴۳ \pm ۰/۰۰۵\ s$ و $t_2 \pm \Delta t_2 = ۰/۳۸۴ \pm ۰/۰۰۵\ s$ است. اگر زمان کل t به صورت $t = ۲t_1 + ۵t_2$ تعریف شود، مقدار t را همراه با عدم قطعیت استاندارد آن گزارش کنید.

$$\Delta t^{۲} = \left(\frac{\partial t}{\partial t_1}\Delta t_1\right)^{۲} + \left(\frac{\partial t}{\partial t_2}\Delta t_2\right)^{۲}$$

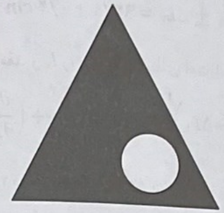
$$= (۲ \times ۰/۰۰۵)^{۲} + (۵ \times ۰/۰۰۵)^{۲}$$

$$\Delta t = ۰/۰۲۷\ S$$

$$t \pm \Delta t = ۳/۴۰۶ \pm ۰/۰۲۷\ S$$

مثال ۱-۱۷: اندازه‌گیری مساحت ناحیه تیره‌رنگ در شکل زیر مد نظر می‌باشد، ارتفاع مثلث h عرض آن w و قطر دایره d است. برای اندازه‌گیری مقادیر h، w و d می‌توان از یک خط‌کش استفاده نمود و باید برای هر کدام خطایی مناسب درنظر گرفت. خطای استاندارد مربوط به

اندازه گیری ناحیه تیره رنگ را به دست آورید. (فرض شود h و w، ۷ سانتیمتر و d ۲/۴ سانتیمتر باشند)



دقت وسیله اندازه گیری، بیانگر میزان عدم قطعیت پارامترهای اندازه گیری شده است یعنی:

$$h \pm \Delta h = ۷/۰ \pm ۰/۱\ cm$$
$$w \pm \Delta w = ۷/۰ \pm ۰/۱\ cm$$
$$d \pm \Delta d = ۲/۴ \pm ۰/۱\ cm$$

$$A = \frac{۱}{۲}hw - \frac{\pi}{۴}d^{۲}$$

$$A = ۱۹/۹۸۲\ cm^{۲}$$

$$\Delta A^{۲} = \left(\frac{\partial A}{\partial h}\Delta h\right)^{۲} + \left(\frac{\partial A}{\partial w}\Delta w\right)^{۲} + \left(\frac{\partial A}{\partial d}\Delta d\right)^{۲}$$

$$= \left(\frac{h}{۲}\Delta h\right)^{۲} + \left(\frac{w}{۲}\Delta w\right)^{۲} + \left(\frac{\pi d}{۲}\Delta d\right)^{۲}$$

$$\Delta A^{۲} = ۰/۳۸۷۱\ cm^{۲}$$

با توجه به این که دیمانسیون مقادیر اولیه ارائه شده در مساله cm است و با ۱ رقم اعشار بیان شده‌اند، و از آنجایی که دیمانسیون سطح $cm^{۲}$ است بنابراین مقادیر مربوط به مساحت و عدم قطعیت آن با دو رقم اعشار گزارش می گردد:

$$\Delta A \cong ۰/۶۲\ cm^{۲}$$
$$A \pm \Delta A = ۱۹/۹۸\ cm^{۲} \pm ۰/۶۲\ cm^{۲}$$

مثال ۱-۱۸: اگر مقاومت سیمی مسی نسبت به دما توسط رابطه زیر قابل محاسبه باشد، محتمل ترین عدم قطعیت را محاسبه نمایید.

$$R = R_{۰}[۱ + \alpha(T - ۲۰)]$$
$$R_{۰} = ۶\,\Omega \pm ۳٪$$
$$\alpha = ۰/۰۰۴\ {}^{۱}/_{{}^{\circ}c} \pm ۱٪$$
$$T = ۳۰ \pm ۱^{\circ}C$$

پاسخ:

$$\Delta R^{۲} = \left(\frac{\partial R}{\partial R_{۰}}\Delta R_{۰}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\Delta \alpha\right)^{۲} + \left(\frac{\partial R}{\partial T}\Delta T\right)^{۲}$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_{۰}} = ۱ + \alpha(T - ۲۰) = ۱ + ۰/۰۰۴(۳۰ - ۲۰) = ۱/۰۴$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = R_{۰}(T - ۲۰) = ۶(۳۰ - ۲۰) = ۶۰$$

$$\frac{\partial R}{\partial T} = R_{۰}\alpha = ۶(۰/۰۰۴) = ۰/۰۲۴$$

$$\frac{\Delta R_{۰}}{R_{۰}} = ۰/۰۳ \ \rightarrow \Delta R_{۰} = ۰/۰۳ \times ۶ = ۰/۱۸\Omega$$

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = ۰/۰۱ \ \rightarrow \Delta \alpha = ۰/۰۱ \times ۰/۰۰۴ = ۴ \times ۱۰^{-۵}\ {}^{۱}/_{{}^{\circ}c}$$

با جایگزینی مقادیر بالا در رابطه اصلی به دست آمده خواهیم داشت:

$$\Delta R^{۲} = (۱/۰۴ \times ۰/۱۸)^{۲} + (۶۰ \times ۴ \times ۱۰^{-۵})^{۲} + (۰/۰۲۴ \times ۱)^{۲}$$

$$\Delta R = ۰/۱۸۹ \cong ۰/۱۹\Omega$$

مثال ۱-۱۹: جسمی به جرم ۵ گرم از ارتفاع Y از سطح زمین، سقوط آزاد می کند، اگر V سرعت اولیه عمودی آن، g شتاب سقوط آزاد و t زمان سقوط آزاد آن باشد:

الف) ارتفاع جسم از سطح زمین را همراه با عدم قطعیت آن گزارش کنید.

$$Y = \frac{۱}{۲}gt^{۲} + Vt$$
$$V = ۲/۴ \pm ۰/۲\ {}^{m}/_{s}$$
$$g = ۹/۸ \pm ۰/۰۱\ {}^{m}/_{s^{۲}}$$
$$t = ۳/۴۵ \pm ۰/۰۵\ s$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial h} = \frac{1}{2}\frac{r_1 r_2 \rho g}{r_2 - r_1}$$

با جایگزینی روابط فوق در رابطه ۱ و تقسیم طرفین رابطه ۱ بـه γ و همچنین تبـدیل Δr_2 بـه Δr_2 -، خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{1}{r_2 - r_1}\left(r_2 \frac{\Delta r_1}{r_1} + r_1 \frac{\Delta r_2}{r_2}\right) + \frac{\Delta h}{h}$$

با جای گذاری مقادیر عددی در رابطه فوق مقدار خطای حداکثری نسبی به دست می آید:

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = 0/18 = 18\%$$

مقدار خطای محتمل نیز به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \left(\left(\frac{1}{r_2 - r_1} r_2 \frac{\Delta r_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_2 - r_1} r_1 \frac{\Delta r_2}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = 0/147 = 14/7\%$$

مثال ۱-۲۲:دانسیته هوا را در یک محفظه تحت فشار بیابید، شرایط به نحـوی اسـت کـه مـی‌توانیـد از قانون گاز کامل استفاده کنید.

$$\rho = \frac{P}{RT}$$

الف) اگر دمای محیط $۲۵^{\circ C}$ و مقدار خطا در اندازه‌گیـری آن $۲^{\circ}c$ باشـد و فشـار داخـل محفظـه بـا خطای نسبی به میزان ۱٪ اندازه‌گیری شود، دانسیته هوا با چه میزان خطایی گزارش خواهد شد؟

ب) فرض کنید دانسیته هوا باید با حداکثر خطایی برابر با ۰/۵٪ گزارش گردد، اگـر مقـدار خطـا در اندازه‌گیری دما $۱^{\circ C}$ باشد، مقدار دقت اندازه گیری فشار حداقل چقدر باید باشد؟

ج) در صورتی که دوباره تصمیم گرفته شود که از قانون گاز ایده‌ال برای تعیین دانسیته گاز استفاده شود. با استفاده از فرمول زیر و اعمال شرایط فیزیکی ذکر شده در قسمت ب، بیشـترین مقـدار قابـل قبول خطا برای اندازه‌گیری فشار را بیابید.

$$P = \rho RT$$

د) پاسخ قسمت ب و ج را مقایسه کنید، کدام‌یک درست است؟چرا؟

پاسخ: الف)

$$\frac{\Delta \rho^2}{\rho^2} = \left(\frac{P}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{R}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial R}\right)^2 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{T}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)^2 \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2$$

ابتدا سه جمله عبارت بالا به صورت جداگانه محاسبه شده است :

$$\frac{P}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} = \frac{P}{\rho RT}$$

$$\frac{R}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial R} = \frac{R}{\rho}\left(\frac{-P}{R^2 T}\right)$$

$$\frac{T}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{T}{\rho}\left(\frac{-P}{RT^2}\right)$$

با جایگزینی ۳ جمله بالا در عبارت مورد نظر خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta \rho^2}{\rho^2} = \left(\frac{P}{\rho RT}\cdot\frac{RT}{P}\right)^2 \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{R}{\rho}\cdot\frac{-P}{R^2 T}\cdot\frac{RT}{P}\right)^2 \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{T}{\rho}\cdot\frac{-P}{RT^2}\cdot\frac{RT}{P}\right)^2 \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2$$

یا:

$$\frac{\Delta \rho^2}{\rho^2} = \frac{\Delta P^2}{P^2} + \frac{\Delta R^2}{R^2} + \frac{\Delta T^2}{T^2}$$

این رابطه بیانگر ارتباط بین خطای نسبی نتیجه آزمایش یعنی دانسیته بـا خطـای نسـبی متغیرهـای اندازه‌گیری شده یعنی فشار، دما و ثابت گاز است.

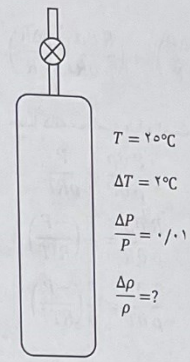
بایستی توجه داشت که مقادیر ثوابت جهانی مانند ثابت گازها، عدد π یـا عـدد آووگـادرو، عمومـاً دارای دقتی بسیار بیشتر از دقت اندازه‌گیری‌ها دراکثر آزمایشات هستند. بنابراین مرسوم است که از

عدم قطعیت چنین مقادیری صرف نظر شده و مقدار آن برابر با صفر در نظر گرفته می شود، پس در ادامه فرض شده است :

$$\Delta R = ۰$$

بنابراین:

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^{۲} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^{۲} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^{۲}$$



$$T = ۲۵ + ۲۷۳ = ۲۹۸\,K$$

$$\Delta T = ۲°C = ۲K$$

$$\frac{\Delta P}{P} = ۰/۰۱$$

با جایگزینی مقادیر بالا در رابطه به دست آمده اصلی خواهیم داشت :

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^{۲} = (۰/۰۱)^{۲} + \left(\frac{۲}{۲۹۸}\right)^{۲}$$
$$= ۱/۴۵ \times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = ۰/۰۱۲ = ۱/۲٪$$

ب)

$$T = ۲۵ + ۲۷۳ = ۲۹۸\,K$$

$$\Delta T = ۱°C = ۱K$$

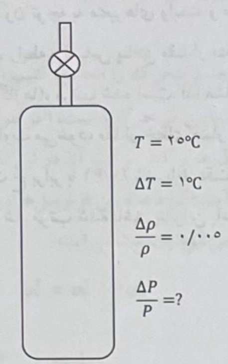
$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = ۰/۰۰۵$$

مانند قسمت الف، با جایگزینی مقادیر بالا در رابطه زیر خواهیم داشت :

$$\left(\frac{\Delta \rho}{\rho}\right)^{۲} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^{۲} + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^{۲}$$

$$(۰/۰۰۵)^{۲} = \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^{۲} + \left(\frac{۱}{۲۹۸}\right)^{۲}$$

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^{۲} = ۱/۳۷ \times ۱۰^{-۵}$$



بنابراین:

$$\frac{\Delta P}{P} = ۰/۰۰۳۷ = ۰/۳۷٪$$

پس خطا در اندازه‌گیری فشار باید کمتر از ۰/۳۷٪ باشد تا اندازه‌گیری دانسیته با مشخصات موردنظر صورت گرفته باشد.

ب) آزمایشگری به اندازه گیری دانسیته شی دیگری به شکل کره به همان روش پرداخته است. عدم قطعیت جرم باز هم ۳ درصد است و قطر کره d با دقت ۴ درصد اندازه گیری می گردد. حجم کره از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$V = \frac{۴\pi}{۳}\left(\frac{d}{۲}\right)^{۳}$$

خطای نسبی دانسیته در این مورد چقدر است؟

ج) علت تفاوت میزان خطا در مورد الف و ب چیست؟

۱-۷) دوره تناوب حرکت هارمونیک یک آونگ توسط رابطه زیر به دست می آید:

$$T = \frac{۲\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{۲m}\right)^{۲}}}$$

$$k \pm \Delta k = ۰/۱۱ \pm ۰/۰۱\,\frac{N}{m}$$

$$m \pm \Delta m = ۰/۵۰۰ \pm ۰/۰۰۵\,kg$$

$$b \pm \Delta b = ۰/۰۶۲ \pm ۰/۰۰۸\,kg/s$$

مقدار T را همراه با عدم قطعیت آن گزارش نمایید. همچنین عدم قطعیت نسبی T را به دست آورید.

۱-۸) می‌خواهیم مساحت سطح خارجی یک سیلندر را طبق فرمول زیر به دست آوریم:

$$A = \frac{\pi D^{۲}}{۲} + \pi Dh$$

D قطر سیلندر و h ارتفاع ان است و مقادیر آنها به صورت زیر گزارش شده است:

$$D \pm \Delta D = ۰/۶۵۱ \pm ۰/۰۰۵\,cm$$
$$h \pm \Delta h = ۱/۳۲۵ \pm ۰/۰۰۵\,cm$$

مقدار A را همراه با عدم قطعیت آن گزارش نمایید.

۱-۹) یک ذره باردار حول یک میدان مغناطیسی و به موازات آن حرکت می کند. D وتر بین دو نقطه به فاصله $۲l$ روی مسیر دایروی ذره است. انرژی ذره بر حسب الکترون ولت، V است، اگر H بر حسب گاوس و l و d برحسب سانتی‌متر باشند. V از فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$V = \frac{H^{۲}l^{۴}}{۴۵/۴۳d^{۲}}$$

اگر H، l و d با خطای استاندارد ۱ درصد اندازه گیری شوند، دقت اندازه گیری V را به دست آورید.

۱-۱۰) مقدار متوسط حجم یک بلوک آهنی که ۸ مرتبه اندازه گیری شده است برابر $۲۶/۵۲\ cm^{۳}$ و مقدار واریانس آن $۰/۰۲۵\ cm^{۶}$ است، همچنین مقدار متوسط حجم یک بلوک آلمینیومی که ۱۵ مرتبه اندازه گیری شده است برابر $۸/۷۲cm^{۳}$ و واریانس اندازه گیری‌های مربوط به آن برابر $۰/۰۵۸cm^{۶}$ به دست آمده است. اگر دانسیته آهن $۷/۸۸gr/cm^{۳}$ و دانسیته آلمینیوم $۲/۷۰\ gr/cm^{۳}$ باشد:

الف) دقت اندازه گیری جرم کل دو بلوک را محاسبه کنید.

ب) مقدار عدم قطعیت اندازه گیری را برای مقدار متوسط جرم کل دو بلوک، محاسبه نمایید.

۱-۱۱) در توابع زیر مقدار تابع Z و خطای استاندارد مربوط به آن را محاسبه کنید:

$$۱)\ Z = A\ln B^{۳}$$
$$A = ۱۰۰/۰۰ \pm ۰/۰۵,\quad B = ۱۰/۰ \pm ۱/۰$$

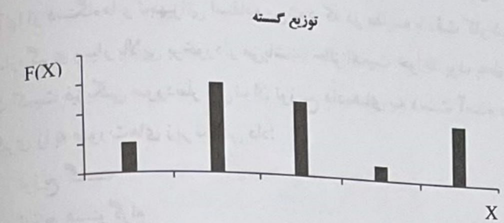
$$۲)\ Z = \frac{A^{۲}}{B}$$
$$A = ۲۰/۰۰ \pm ۰/۰۲,\quad B = ۱۰/۰ \pm ۱/۰$$

$$۳)\ Z = A\ln(B^{۳})\tan C$$
$$A = ۱۰۰/۰۰ \pm ۰/۰۵\quad ,B = ۱۰/۰ \pm ۱/۰\quad ,C = ۲۰^{\circ} \pm ۱^{\circ}$$

$$۴)\ Z = \frac{A^{۲}}{B}\sqrt{C}$$
$$A = ۲۰/۰۰ \pm ۰/۰۲\quad ,B = ۱۰/۰ \pm ۱/۰\quad ,C = ۴/۰۰ \pm ۰/۰۱$$

اگر تعداد کل دفعات اندازه‌گیری n باشد:

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i$$



شکل ۲-۱: نمودار توزیع گسسته.

فراوانی نسبی هر داده به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$F(x_i) = \frac{n_i}{n}$$

بنابراین:

$$F(x_1) = \frac{n_1}{n}, F(x_2) = \frac{n_2}{n}, \ldots, F(x_m) = \frac{n_m}{n},$$

$$\sum_{i=1}^{m} F(x_i) = F(x_1) + F(x_2) + \cdots + F(x_m)$$

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{i=1}^{m} F(x_i) = 1$$

مقدار میانگین کمیت اندازه‌گیری شده در این نوع توزیع، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{x} = x_1 F(x_1) + x_2 F(x_2) + \cdots + x_m F(x_m)$$

$$= x_1\left(\frac{n_1}{n}\right) + x_2\left(\frac{n_2}{n}\right) + \cdots + x_m\left(\frac{n_m}{n}\right)$$

بنابراین:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i F(x_i)$$

به عبارت دیگر:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}$$

۲-۲-۲- توزیع هیستوگرام[1]

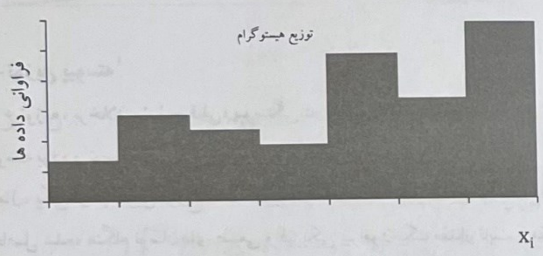
همانطور که در شکل ۲-۲ مشاهده می‌گردد، در این نوع توزیع، بر خلاف توزیع قبلی به جای این که فراوانی داده‌ها برای اعداد مشخص ترسیم گردد، فراوانی داده‌ها بر روی بازه‌های مشخص تعریف و ترسیم می‌گردند:

$$x_0 \le x \le x_1 \rightarrow F(x_1)(x_1 - x_0) = \frac{n_1}{n}$$

$$x_1 \le x \le x_2 \rightarrow F(x_2)(x_2 - x_1) = \frac{n_2}{n}$$

$$\vdots$$

$$x_{m-1} \le x \le x_m \rightarrow F(x_m)(x_m - x_{m-1}) = \frac{n_m}{n}$$



شکل ۲-۲: نمودار توزیع هیستوگرام.

[1]- Histogram distribution

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = (x_1 - x_0)Fx_1 + (x_2 - x_1)Fx_2 + \dots + (x_m - x_{m-1})Fx_m = 1$$

مقدار میانگین کمیت اندازه‌گیری شده در این نوع توزیع، به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

۲-۳- شاخص پراکندگی داده‌ها

برای تحلیل داده‌های اندازه‌گیری شده، باید بتوان شاخصی را که نشان دهنده نحوه پراکندگی داده‌ها اطراف مقدار میانگین آن داده‌ها باشد، تعریف کرد.

برای این منظور ابتدا ساده‌ترین تعریف یعنی انحراف از مقدار میانگین داده‌ها برای هر کدام از انواع توزیع‌های ذکر شده تحلیل می‌شود. انحراف از مقدار میانگین برای هر داده اندازه‌گیری شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_i - \bar{x}$$

بنابراین میزان متوسط انحراف از مقدار میانگین برای کل داده‌های اندازه‌گیری شده با توزیع گسسته به صورت زیر است:

$$\overline{x_i - \bar{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \bar{x} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})F(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i F(x_i) - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} F(x_i)$$

از آنجایی که:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i F(x_i) = \bar{x}$$

$$\bar{x}\sum_{i=1}^{n} F(x_i) = 1$$

بنابراین:

$$\overline{x_i - \bar{x}} = 0$$

همچنین میزان متوسط انحراف از مقدار میانگین برای کل داده‌های اندازه‌گیری شده با توزیع گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\overline{x_i - \bar{x}} = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \bar{x})f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty}\bar{x} f(x)dx$$

از آنجایی که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \bar{x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\bar{x} f(x)dx = \bar{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \bar{x}$$

بنابراین:

$$\overline{x_i - \bar{x}} = 0$$

علت صفر شدن میزان متوسط انحراف از مقدار میانگین برای کل داده‌های اندازه‌گیری شده در توزیع‌های ذکر شده، خنثی شدن مقادیر انحراف مثبت توسط مقادیر انحراف منفی است، بنابراین برای تعیین یک معیار عددی برای پراکندگی، باید علامت‌های منفی را قبل از متوسط‌گیری حذف کرد، با مربع کردن یک عدد منفی، علامت آن مثبت می‌شود و به این ترتیب معیاری به نام واریانس[1] برمبنای متوسط‌گیری از مربع مقادیر انحراف‌ها از مقدار میانگین به دست می‌آید.

در نظریه احتمالات و آمار، واریانس نوعی سنجش پراکندگی است و در واقع عددی است که نشان‌دهنده نحوه پراکندگی داده‌ها اطراف مقدار میانگین آنها می‌باشد. میانگین داده‌ها مقدار میانگین توزیع را نشان می‌دهد، در حالی که واریانس مقیاسی است که نشان می‌دهد که داده‌ها حول میانگین چگونه پخش شده‌اند. واریانس کمتر بدین معنا است که انتظار می‌رود اگر نمونه‌ای از توزیع مزبور انتخاب شود مقدار آن به میانگین نزدیک‌تر باشد، یکای واریانس یک کمیت مربع یکای آن کمیت می‌باشد.

واریانس به صورت میانگین مربع مقادیر انحراف داده ها[2] از مقدار میانگین تعریف می‌شود:

[1]- Variance
[2]- Mean square deviation

۲-۴-۳- تابع $z = \log x$

الف) مقدار میانگین

$$z_i = \log x_i$$
$$z_۱ = \log x_۱$$

$$= \log(x_۱ - \bar{x} + \bar{x})$$

$$= \log \bar{x}\left(۱ + \frac{x_۱ - \bar{x}}{\bar{x}}\right)$$

$$= \log \bar{x} + \log\left(۱ + \frac{x_۱ - \bar{x}}{\bar{x}}\right)$$

مطابق بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$\log(۱ + \varepsilon) \approx \varepsilon \quad if \quad \varepsilon \ll ۱$$

بنابراین:

$$z_۱ = \log \bar{x} + \frac{x_۱ - \bar{x}}{\bar{x}}$$

از طرفی:

$$n\bar{z} = z_۱ + z_۲ + \cdots + z_n$$

بنابراین با توجه به دو رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$n\bar{z} = n \log \bar{x} + \sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}}\right)$$

با توجه به اینکه انحراف داده‌ها از مقدار میانگین مقادیری مثبت و منفی بوده و مجموع آنها صفر می گردد داریم:

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i - \bar{x} = ۰$$

در نتیجه:

$$\bar{z} = \log \bar{x}$$

ب) محاسبه واریانس و انحراف معیار

$$\sigma_z^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(z_i - \bar{z})^۲$$

از آنجایی که:

$$z_۱ - \bar{z} = \log \bar{x} + \frac{x_۱ - \bar{x}}{\bar{x}} - \log \bar{x}$$

$$z_۱ - \bar{z} = \frac{x_۱ - \bar{x}}{\bar{x}}$$

$$\vdots$$

$$z_n - \bar{z} = \frac{x_n - \bar{x}}{\bar{x}}$$

بنابراین:

$$\sigma_z^۲ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\bar{x}}\right)^۲$$

$$= \frac{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^۲}{\bar{x}^۲}$$

در نتیجه:

$$\sigma_z^۲ = \frac{\sigma_x^۲}{\bar{x}^۲}$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x}{\bar{x}}$$

۲-۴-۴- تابع $z = f(x)$

$$z_i = f(x_i)$$
$$= f(\bar{x} + \Delta x_i)$$

بر اساس بسط تیلور می‌توان نوشت:

$$f(\bar{x} + \Delta x_i) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{۱}{۲}f''(\bar{x})\Delta {x_i}^۲ + \cdots + \frac{۱}{n!}f^n(\bar{x})\Delta {x_i}^n$$

که $\Delta x_i = x_i - \bar{x}$ مقدار خطا یا انحراف ماکزیمم نامیده می‌شود و $f'(\bar{x}) = \frac{df(x)}{dx}\Big|_{x=\bar{x}}$ است.

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}+\Delta x_i)}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2} f''(\bar{x})\Delta x_i^2 + \cdots$$

از آنجایی که $\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = 0$ است، جمله‌های زوج از جمله دوم به بعد، برابر با صفر می‌شوند، از طرفی چون:

$$f(\bar{x}) \gg f''(\bar{x})\Delta x_i^2$$

پس از جمله‌های فرد از جمله سوم به بعد، صرف نظر می‌شود، بنابراین:

$$\bar{z} = \frac{nf(\bar{x})}{n} + 0 + 0 + \cdots$$

در نتیجه:

$$\bar{z} = f(\bar{x})$$

ب) محاسبه واریانس و انحراف معیار

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x_i + \frac{1}{2}f''(\bar{x})\Delta x_i^2 + \cdots - f(\bar{x})\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(f'(\bar{x})\right)^2\Delta x_i^2 + f'(\bar{x})f''(\bar{x})\Delta x_i^3 + \frac{1}{4}\left(f''(\bar{x})\right)^2\Delta x_i^4 + \cdots$$

طبق مباحث مطرح شده قبلی، اگر فقط دو جمله اول بسط در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2\left(\left(f'(\bar{x})\right)^2 + f'(\bar{x})f''(\bar{x})\Delta x_i\right)$$

می‌توان از جملات دارای Δx_i با توان بیش از ۲ صرف نظر کرد:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\left(f'(\bar{x})\right)^2$$

بنابراین:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2\left(f'(\bar{x})\right)^2$$

در نتیجه:

$$\sigma_z = \sigma_x f'(\bar{x})$$
$$S_z = S_x f'(\bar{x})$$

در واقع در این دو رابطه، از تعدادی از جملات صرف نظر شده است و روابط اصلی به صورت ذیل بوده است:

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2\left(\left(f'(\bar{x})\right)^2 + f'(\bar{x})f''(\bar{x})\Delta x_i + \ldots\right)$$

$$S_z^2 = S_x^2\left(\left(f'(\bar{x})\right)^2 + f'(\bar{x})f''(\bar{x})\Delta x_i + \ldots\right)$$

۲-۴-۵- تابع $z = f(x, y, \cdots)$

$$\bar{z} = f(\bar{x},\bar{y},\ldots)$$

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\cdots$$

در نتیجه:

$$\sigma_z^2 = f_x^2(\bar{x})\sigma_x^2 + f_y^2(\bar{y})\sigma_y^2+\cdots$$

$$S_z^2 = f_x^2(\bar{x})S_x^2 + f_y^2(\bar{y})S_y^2+\cdots$$

مثال۲-۱: قطر یک دایره ۳/۰±۰/۱cm گزارش شده است مقدار محیط دایره را همراه با عدم قطعیت آن گزارش کنید.

براساس روابط ریاضی که جهت محاسبه واریانس و انحراف معیار توابع چند متغیره ارائه شد، می‌توان نوشت:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\sigma_{x_1}^2 + \frac{1}{n^2}\sigma_{x_2}^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}\sigma_{x_n}^2$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}S_{x_1}^2 + \frac{1}{n^2}S_{x_2}^2 + \cdots + \frac{1}{n^2}S_{x_n}^2$$

از طرفی از آنجایی که برای هر یک از متغیرها با یک مجموعه داده یکسان مواجه هستیم می‌توان نوشت :

$$\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2 = \cdots = \sigma_{x_n}^2$$
$$S_{x_1}^2 = S_{x_2}^2 = \cdots = S_{x_n}^2$$

بنابراین:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma_x^2$$

$$S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\cdot nS_x^2$$

در نتیجه:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

(عموماً به جای $S_{\bar{x}}$ به معنای انحراف معیار مقدار میانگین، از نماد S_m استفاده می‌شود.)

در یک توزیع پیوسته نرمال که در شکل ۲-۴ مشاهده می‌شود، عدم قطعیت برای کمیت مورد اندازه‌گیری x به صورت زیر تعریف می‌گردد و احتمال مرتبط با هر بازه به صورت زیر بیان می‌گردد: (برای تعریف بازه عدم قطعیت، اگر تعداد دفعات اندازه‌گیری کمتر از ۲۰ مرتبه باشد از S و اگر بیش از ۲۰ مرتبه باشد از σ استفاده می‌گردد.)

۱) به احتمال ۶۸٪ کمیت اندازه‌گیری شده موردنظر در این محدوده قرار می‌گیرد:

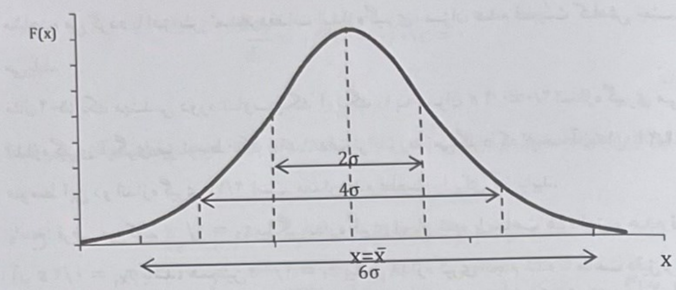
$$\bar{x} - S_{\bar{x}} < x < \bar{x} + S_{\bar{x}}$$
$$\bar{x} - \sigma_{\bar{x}} < x < \bar{x} + \sigma_{\bar{x}}$$

۲) به احتمال ۹۵٪ کمیت اندازه‌گیری شده موردنظر در این محدوده قرار می‌گیرد:

$$\bar{x} - 2S_{\bar{x}} < x < \bar{x} + 2S_{\bar{x}}$$
$$\bar{x} - 2\sigma_{\bar{x}} < x < \bar{x} + 2\sigma_{\bar{x}}$$

۳) به احتمال ۹۹/۷٪ کمیت اندازه‌گیری شده موردنظر در این محدوده قرار می‌گیرد:

$$\bar{x} - 3S_{\bar{x}} < x < \bar{x} + 3S_{\bar{x}}$$
$$\bar{x} - 3\sigma_{\bar{x}} < x < \bar{x} + 3\sigma_{\bar{x}}$$



شکل ۲-۴: نمودار توزیع نرمال و محدوده های عدم قطعیت.

مثال ۲-۴: اگر در مثال قبل اندازه‌گیری عرض و طول مستطیل ۲۵ بار انجام شده باشد و $\sigma_x = 0/05\ m$ و $\sigma_y = 0/05\ m$ اعلام شده باشد، عدم قطعیت محیط مستطیل را بیابید.

پاسخ:

$$\bar{P} = 2\bar{x} + 2\bar{y}$$

$$\sigma_{\bar{P}}^2 = \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}}\right)^2 \sigma_{\bar{x}}^2 + \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{y}}\right)^2 \sigma_{\bar{y}}^2$$

$$\sigma_{\bar{P}}^2 = 4\sigma_{\bar{x}}^2 + 4\sigma_{\bar{y}}^2$$

از طرفی:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

اگر تعداد دفعات اندازه‌گیری یک کمیت عددی بین اعداد موجود در جدول باشد، از روش درون‌یابی استفاده می‌شود.

مثال۲-۹: داده‌های اندازه‌گیری شده در یک آزمایش به صورت زیر گزارش شده اند، با استفاده از معیار شوآن داده‌های پرت را حذف کنید.

i	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
x_i	۵/۳۰	۵/۷۳	۶/۷۷	۵/۲۶	۴/۳۳	۵/۴۵	۶/۰۹	۵/۶۴	۵/۸۱	۵/۷۵

پاسخ:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n}$$

$$= \frac{۵۶/۱۳}{۱۰} = ۵/۶۱۳$$

$$S = \left(\frac{۱}{n-۱}\sum_{i=۱}^{n}(x_i - \bar{x})^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$= \left(\frac{۳/۵۳۳}{۹}\right)^{\frac{۱}{۲}} \cong ۰/۶۳$$

$$S_n = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{۰/۶۳}{\sqrt{۱۰}} = ۰/۲۰$$

i	x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^{۲}$	$\lvert d_i \rvert / S$	$((x_i - \bar{x}^{new})^{۲})$
۱	۵/۳۰	−۰/۳۱۳	۰/۰۹۷۹۷	۰/۴۹۹	۰/۲۰۷۹۴
۲	۵/۷۳	۰/۱۱۷	۰/۰۱۳۶۹	۰/۱۸۷	۰/۰۰۰۶۷۶
۳	۶/۷۷	۱/۱۵۷	۱/۳۳۸۶	۱/۸۴۵	۱/۰۲۸۱۹
۴	۵/۲۶	−۰/۳۵۳	۰/۱۲۴۶۱	۰/۵۶۳	۰/۲۴۶۰۲
۵	۴/۳۳	−۱/۲۸۳	۱/۶۴۶۰۹	۲/۰۴۶	---
۶	۵/۴۵	−۰/۱۶۳	۰/۰۲۶۵۷	۰/۲۶۰	۰/۹۳۶۴
۷	۶/۰۹	۰/۴۷۷	۰/۲۲۷۵۳	۰/۷۶۱	۰/۱۱۱۵۶

i	x_i	$d_i = x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^{۲}$	$\lvert d_i \rvert / S$	$((x_i - \bar{x}^{new})^{۲})$
۸	۵/۶۴	۰/۰۲۷	۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۴۳	۰/۰۱۳۴۶
۹	۵/۸۱	۰/۱۹۷	۰/۰۳۸۸۱	۰/۳۱۴	۰/۰۰۲۹۲
۱۰	۵/۷۵	۰/۱۳۷	۰/۰۱۸۷۷	۰/۲۱۹	۰/۰۰۰۰۳۶

بر طبق جدول معیار شوآن داده پنجم داده پرت محسوب شده و قابل حذف است. حالا به منظور بررسی اثر حذف شدن داده پرت (داده پنجم) از مجموعه داده‌ها انحراف معیار داده‌ها مجدداً محاسبه می گردد.

پیش از حذف داده پنجم:

$$\bar{x} \pm S_m = ۵/۶۱ \pm ۰/۲۰$$

پس از حذف داده پنجم:

$$\bar{x}^{new} = \frac{۵۱/۵}{۹} \cong ۵/۷۶$$

$$S^{new} \cong ۰/۴۶۲$$

$$S_n^{new} = \frac{۰/۴۶۲}{۹} \cong ۰/۱۶$$

بنابراین:

$$\bar{x}^{new} \pm S_n^{new} = ۵/۷۶ \pm ۰/۱۶$$

در نتیجه مشاهده می گردد که با حذف یک داده پرت از اندازه گیری‌ها، خطای اندازه گیری حدود ۲۰٪ کاهش یافته است.

۱) به احتمال ۶۸٪ کمیت اندازه گیری شده موردنظر در این محدوده قرار می گیرد:

$$\bar{x} - S_{\bar{x}} < x < \bar{x} + S_{\bar{x}}$$
$$۵/۶ < x < ۵/۹۲$$

۲) به احتمال ۹۵٪ کمیت اندازه گیری شده موردنظر در این محدوده قرار می گیرد:

$$\bar{x} - ۲S_{\bar{x}} < x < \bar{x} + ۲S_{\bar{x}}$$
$$۵/۴۴ < x < ۶/۰۸$$

۳-۲-۲-مدل پواسون

این مدل حالت خاصی از مدل دوجمله‌ای است، در مواردی که مقدار p بسیار ناچیز و مقدار n بسیار زیاد است می‌توان از پیش‌بینی‌های این مدل بهره گرفت. این مدل نسبت به مدل توزیع دوجمله‌ای به واقعیت نزدیک‌تر است. اساساً در مواردی‌که p خیلی کوچک باشد یعنی احتمال رخداد حادثه‌ای خیلی کم باشد و از طرفی اگر n به قدری زیاد باشد که مقدار $\bar{x} = np$ ناچیز نشود، آنگاه می‌توان نشان داد که بسط $(p+q)^n$ به سری زیر نزدیک می‌شود:

$$(p+q)^n = e^{-np}\left(۱+\frac{np}{۱}+\frac{(np)^۲}{۱\times ۲}+\dots+\frac{(np)^n}{n!}\right)$$

که در رابطه فوق p بیانگر احتمال وقوع یک کمیت است.

در این توزیع، احتمال رخداد کمیتی در مرحله xام از بین n مرتبه آزمایش برابر است با:

$$P(x) = e^{-np}.\frac{(np)^x}{x!}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} P(x_i) = ۱$$

به کمک روابطی که قبلا در رابطه با توزیع دوجمله‌ای برای محاسبه مقدار میانگین و انحراف معیار به‌دست آمد می‌توان نوشت:

$$\bar{x} = np$$
$$\sigma^۲ = npq$$

از طرف دیگر با توجه به تعریف توزیع پواسون، p مقداری بسیار کوچک است، از آنجایی‌که $p+q=۱$ است، پس q مقداری نزدیک به ۱ است، بنابراین:

$$\sigma^۲ \cong np = \bar{x}$$

پس:

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}}$$

در فصل قبل اثبات شد که بین $\sigma_{\bar{x}}$ و σ_x رابطه زیر برقرار است:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

بنابراین رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}}$$

بنابراین در توزیع پواسون، احتمال رخداد کمیتی در مرحله xام از بین n مرتبه آزمایش برابر است با:

$$P(x) = e^{-\bar{x}}.\frac{(\bar{x})^x}{x!}$$

به این ترتیب ملاحظه می‌شود که در توزیع پواسون تنها با داشتن $\bar{x}$ می‌توان جملات این توزیع را نوشت.

مثال ۳-۴: نتیجه اندازه‌گیری تعداد ذرات غبار در یک نمونه کوچک از هوا به صورت زیر به‌دست آمده است:

تعداد ذرات در غبار	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
فراوانی مطلق	۲۳	۵۶	۸۸	۹۵	۷۳	۴۰	۱۷	۵	۳

آیا توزیع داده‌های گزارش شده در جدول فوق از مدل پواسون تبعیت می‌کند؟

پاسخ:

$$\sum_{i=۰}^{۹} n_i = ۴۰۰$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=۰}^{۹} n_i x_i}{\sum_{i=۰}^{۹} n_i} = ۲/۹۲۵$$

با داشتن $\bar{x}$ می‌توان جملات توزیع پواسون را نوشت:

$$P(x) = e^{-۲/۹۲۵}.\frac{(۲/۹۲۵)^x}{x!}$$

بنابراین:

$$P(x=۰) = e^{-۲/۹۲۵}$$

مجموع اعداد	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
$P_i(x)$	$\frac{۱}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۶}{۳۶}$	$\frac{۵}{۳۶}$	$\frac{۴}{۳۶}$	$\frac{۳}{۳۶}$	$\frac{۲}{۳۶}$	$\frac{۱}{۳۶}$
$P_i(x).\sum n_i$	۸/۳۳	۱۶/۶۷	۲۵	۳۳/۳۳	۴۱/۶۷	۵۰	۴۱/۶۷	۳۳/۳۳	۲۵	۱۶/۶۷	۸/۳۳
$(x_i - x_i^m)^۲$	۵/۴۳	۵۸/۸۳	۴	۷/۱۳	۷/۱۱	۴۹	۱۱/۱۱	۳۲/۵	۱	۲۱/۷۸	۵/۴۳
$\frac{(x_i - x_i^m)^۲}{x_i^m}$	۰/۶۲۵	۳/۵۳	۰/۱۶	۰/۲۱۴	۰/۱۷۴	۰/۹۸	۰/۲۶۶	۰/۹۶۹	۰/۰۴	۱/۳۰۶	۰/۶۵

با استفاده از جدول $\chi^۲$ مشاهده می گردد که در ردیف F=۱۰ مقدار $\chi^۲ = ۸/۰۳۴$ بین دو مقدار دیگر قرار دارد، پس به کمک روش درون‌یابی خطی می توان نوشت:

$$(P_۱, \chi_۱^۲) = (۵۰٪, ۹/۳۴)$$

$$(P_۲, \chi_۲^۲) = (۷۵٪, ۶/۴۷)$$

$$\frac{\chi_۲^۲ - \chi_۱^۲}{P_۲ - P_۱} = \frac{۸/۰۳۴ - \chi_۱^۲}{P - P_۱}$$

بنابراین:

$$P = ۶۲/۶٪$$

این به این مفهوم است که توزیع داده‌های اندازه گیری شده با احتمال ۶۲/۶٪ از یک توزیع دوجمله‌ای تبعیت می کند.

مثال ۳-۷: یک سکه ۲۰ مرتبه پرتاب شده است، در بین این پرتاب‌ها ۱۶ مرتبه حالت شیر و ۴ مرتبه حالت خط اتفاق افتاده است. توزیع داده‌های رویداد مفروض با چه مقدار احتمالی می توانند از جملات یک مدل دوجمله‌ای تبعیت کند؟

پاسخ:

	شیر	خط
فراوانی مطلق کمیت مشاهده شده	۱۶	۴
فراوانی مطلق از طریق مدل دوجمله‌ای	$۲۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰$	$۲۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰$

$$\chi^۲ = ۳/۲$$
$$F = ۲ - ۱ = ۱$$

بر اساس جدول $\chi^۲$ احتمال مربوطه در حدود ۸٪ به‌دست می آید.

البته بایستی به این نکته همواره دقت داشت که احتمال مرتبط با کمیت $\chi^۲$ به‌دست آمده، معمولاً عددی بین ۱۰٪ تا ۹۰٪ می‌باشد، در غیر این‌صورت باید در مورد نحوه اندازه گیری داده‌ها و یا نامناسب بودن مدل مفروض تردید داشت.

مثال ۳-۸ جدول زیر تعداد تصادفات اتومبیل را در یک دوره زمانی نشان می‌دهد. داده‌ها را با توزیع پواسون مقایسه کنید.

تعداد تصادفات	۰	۱	۲	۳	۴
تعداد روز	۲۱	۱۸	۷	۳	۱

پاسخ: طبق توزیع پواسون:

$$P(x) = e^{-\bar{x}}.\frac{(\bar{x})^x}{x!}$$

$\bar{x}$ از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\bar{x} = \sum_{i=۱}^{n} x_i F(x_i) = ۰/۹$$

به کمک جمله عمومی مدل پواسون می‌توان نوشت:

$$P(x = ۰) = e^{-۰/۹}\frac{(۰/۹)^۰}{۰!} = ۰/۴۰۶۶$$

$$P(x = ۱) = e^{-۰/۹}\frac{(۰/۹)^۱}{۱!} = ۰/۳۶۵۹$$

$$P(x = ۲) = e^{-۰/۹}\frac{(۰/۹)^۲}{۲!} = ۰/۱۶۴۷$$

$$P(x = ۳) = e^{-۰/۹}\frac{(۰/۹)^۳}{۳!} = ۰/۰۴۹۴$$

$$P(x = ۴) = e^{-۰/۹}\frac{(۰/۹)^۴}{۴!} = ۰/۰۱۱۱$$

$$P(۵) = \frac{۵!}{۰!\,۵!}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰} = \frac{۱}{۳۲}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقادیر به‌دست آمده به کمک روابط فوق نسبی بوده و جهت ادامه عملیات محاسباتی لازم است به مقادیر مطلق تبدیل شوند:

$$\sum n_i = ۳۲۰$$

تعداد گلوله سفید	۵	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد جعبه	۱۸	۵۶	۱۱۰	۸۸	۴۰	۸
تعداد نسبی جعبه‌ها - مدل	۱/۳۲	۵/۳۲	۱۰/۳۲	۱۰/۳۲	۵/۳۲	۱/۳۲
تعداد جعبه- مدل	۱۰	۵۰	۱۰۰	۱۰۰	۵۰	۱۰

باستفاده ازجدول بالا می‌توان مقدار $\chi^۲$ را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$\chi^۲ = \sum_{i=۱}^{N}\frac{(x_i - x_i^m)^۲}{x_i^m} = ۱۱/۹۶$$

$$F = ۶ - ۱ = ۵$$

با استفاده از اطلاعات جدول $\chi^۲$ مشاهده می گردد که در ردیف F=۵ مقدار $\chi^۲ = ۱۱/۹۶$ بین دو مقدار دیگر قرار دارد، دراین رابطه می‌توان به صورت زیرعمل نمود:

$$(P_۱, \chi_۱^۲) = (۵٪, ۱۱/۱)$$

$$(P_۲, \chi_۲^۲) = (۲/۵٪, ۱۲/۸)$$

$$\frac{\chi_۲^۲ - \chi_۱^۲}{P_۲ - P_۱} = \frac{۱۱/۹۶ - \chi_۱^۲}{P - P_۱}$$

بنابراین: $P = ۳/۷۳٪$

تمرین‌های فصل سوم

۳-۱) بااستفاده از توزیع دوجمله‌ای اثبات کنید که:

$$\sigma^۲ = npq$$

راهنمایی: از تعریف زیر استفاده نمایید:

$$\sigma^۲ = \sum x_i^۲ p(x) - \bar{x}^۲$$

۳-۲) با استفاده ازجدول دوجمله‌ای، احتمال را در هریک از موارد زیر بیابید:

الف) ۴ بار موفقیت در ۱۳ بارآزمون وقتی p=۰/۳است.

ب) ۸ بار شکست در ۱۳ بار آزمون وقتی p=۰/۷است.

ج) ۸ بار موفقیت در ۱۳ بارآزمون وقتی p=۰/۳است.

توضیح دهیدکه چرا جواب قسمت ب وج یکسان شده است.

۳-۳) با استفاده ازتوزیع پواسون اثبات کنید:

$$\sigma^۲ = \bar{x}$$

۳-۴) فرض کنیدکه $\bar{x}$ یک عدد صحیح است. برای توزیع پواسون اثبات کنیدکه:

$$p(\bar{x}) = p(\bar{x} - ۱)$$

۳-۵) بین یک توزیع دوجمله‌ای با n=۱۰ و p=۰/۵ و یک توزیع گوسی (نرمال) با $\bar{x}$ = ۵/۰ و σ=۱/۵۸ یک آزمون $\chi^۲$ انجام دهید.

۳-۶) اگرمقدارکمیت $\bar{x}$ برابر۱۰/۲۳و۰/۱۲ = σ داده شده باشند، احتمال آنکه مقدار دقیق x بین مقادیر زیر قرار گیرد چقدر است؟

الف) ۱۰/۱۱و۱۰/۳۵

ب) ۱۰/۱۱و۱۰/۴۷

ج) ۱۰/۱۱و۱۰/۳۱

د) ۱۰/۰۰و۱۰/۵۰

راهنمایی: باتغییرمتغیر $t = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}$ و محاسبه مقدار تابع خطا $erf(z) = \frac{۲}{\sqrt{\pi}}\int_۰^z e^{-z^۲}\,dz$

که $y_i^{th} = a + bx_i$ معادله خط برازش داده شده است.

فرض می‌شود که σ_i مقداری ثابت باشد، یعنی:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$$

۱- حل به روش معمول

$$\sum (y_i - a - bx_i)^2 = min$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sum(y_i - a - bx_i)^2)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial(\sum(y_i - a - bx_i)^2)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} -2\sum (y_i - a - bx_i)^2 = 0 \\ -2\sum x_i(y_i - a - bx_i)^2 = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که یک دستگاه معادلات با دومعادله و دومجهول ایجاد شده‌است که با حل آن ضرایب بدست می‌آید. از معادله اول رابطه زیر حاصل می گردد:

$$\sum y_i = Na + b\sum x_i$$

بنابراین a عرض از مبدا خط به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a = \frac{\sum y_i - b\sum x_i}{N} \, (*)$$

از معادله دوم نیز رابطه زیر حاصل می گردد:

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2$$

با جایگزینی رابطه (*) در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\sum x_i y_i = \frac{\sum y_i - b\sum x_i}{N}\sum x_i + b\sum x_i^2$$

بنابراین:

$$b = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

۲- حل به روش ماتریسی

$$\begin{cases} \sum y_i = Na + b\sum x_i \\ \sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 \end{cases}$$

یکی از روش‌های متداول برای حل دستگاه معادلات، روش ماتریسی کرامر می‌باشد. در این روش با جایگزینی ماتریس جملات مجهول در ماتریس ضرایب و سپس محاسبه دترمینان مربوطه وتقسیم آن بر دترمینان ضرایب مقدار مربوط به هر ضریب محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

اگر $\Delta = N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$ فرض شود آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

که $y_i^{th} = a + bx_i$ معادله خط برازش داده شده است.

فرض می‌شود که σ_i مقداری ثابت باشد، یعنی:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4$$

۱- حل به روش معمول

$$\sum (y_i - a - bx_i)^2 = min$$

بنابراین:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\sum(y_i - a - bx_i)^2)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial(\sum(y_i - a - bx_i)^2)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} -2\sum (y_i - a - bx_i)^2 = 0 \\ -2\sum x_i(y_i - a - bx_i)^2 = 0 \end{cases}$$

ملاحظه می‌شود که یک دستگاه معادلات با دومعادله و دومجهول ایجاد شده‌است که با حل آن ضرایب بدست می‌آید. از معادله اول رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\sum y_i = Na + b\sum x_i$$

بنابراین a عرض از مبدا خط به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$a = \frac{\sum y_i - b\sum x_i}{N} \quad (*)$$

از معادله دوم نیز رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2$$

با جایگزینی رابطه (*) در رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\sum x_i y_i = \frac{\sum y_i - b\sum x_i}{N}\sum x_i + b\sum x_i^2$$

بنابراین:

$$b = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

۲- حل به روش ماتریسی

$$\begin{cases} \sum y_i = Na + b\sum x_i \\ \sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2 \end{cases}$$

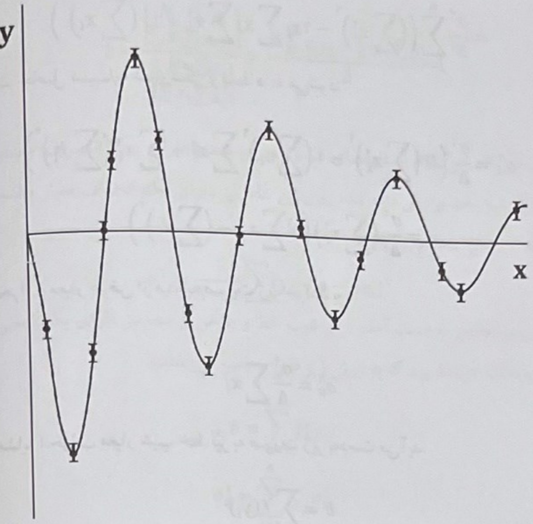
یکی از روش‌های متداول برای حل دستگاه معادلات، روش ماتریسی کرامر می‌باشد. در این روش با جایگزینی ماتریس جملات مجهول در ماتریس ضرایب و سپس محاسبه دترمینان مربوطه وتقسیم آن بر دترمینان ضرایب مقدار مربوط به هر ضریب محاسبه می‌شود.

$$\begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} N & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

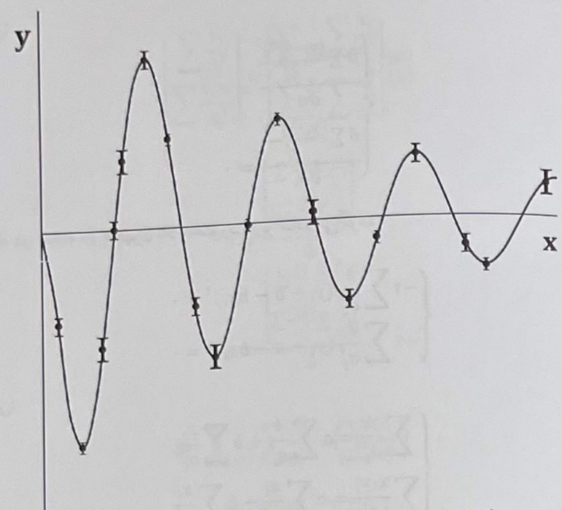
اگر $\Delta = N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$ فرض شود آن‌گاه خواهیم داشت:

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$



شکل ۴-۱: برازش یک تابع بر روی نقاطی با انحراف معیارهای برابر.

برای تعیین طول هر میله، اگربرای مثال احتمال ۵۰ درصد برای حضور داده در آن محدوده در نظر گرفته شود، انحراف معیار آن داده در مقدار ۰/۶۷ ضرب می گردد، عدد حاصل طول میله را در هر طرف داده نشان می‌دهد، یعنی طول کل میله دو برابر این مقدار خواهد بود، و اگر احتمال ۶۸ درصد در تعیین طول میله‌ها لحاظ گردد، انحراف معیار هر داده، طول میله در هر سمت را نشان می‌دهد،یعنی طول کل میله دو برابر انحراف معیار آن داده خواهد بود. اگر مقدار انحراف معیار هر داده متفاوت از دیگر داده‌ها باشد، طول میله‌های هر داده متفاوت از بقیه خواهد بود، و اگر انحراف معیار داده‌های اندازه گیری شده برابر باشد، طول میله‌های مرتبط با هر داده یکسان خواهد بود. در شکل۴-۱، σ_i برای هر داده مقداری ثابت و در شکل ۴-۲ مقداری متغیر است.



شکل ۴-۲: برازش یک تابع بر روی نقاطی با انحراف معیارهای متفاوت.

ب) اگر σ_i مقداری متغیر باشد.

۱- حل به روش معمول

$$\begin{cases} x_i \to y_i \to \sigma_i \\ x_{i+1} \to y_{i+1} \to \sigma_{i+1} \end{cases}, \sigma_i \neq \sigma_{i+1}$$

فرض می گردد که $y_i^{th} = a + bx_i$ معادله خط برازش داده شده است. بنابراین برای محاسبه ضرایب به روش کمترین مربعات لازم است عبارت زیر حداقل گردد:

$$\sum \frac{\left(y_i - y_i^{th}\right)^2}{\sigma_i^2} = min.$$

ج) P را وقتی $V=۱۰۰/۰\ in^۳$ است، حساب کنید.

$V(in^۳)$	۵۴/۳	۶۱/۸	۷۲/۴	۸۸/۷	۱۱۸/۶	۱۹۴/۰
$P(lb/in^۲)$	۶۲/۲	۴۹/۵	۳۷/۶	۲۸/۴	۱۹/۲	۱۰/۱

این سوال را ابتدا در حالتی که σ_i مقداری ثابت باشد، حل نموده سپس در حالتی که σ_i متغیر باشد، حل نمایید.

پاسخ:

۱- در صورتی که σ_i مقداری ثابت باشد: $\sigma_i = \sigma$

الف) از آنجایی که $PV^\gamma = C$ است، بنابراین:

$$logP + \gamma\, logV = logC$$

اگر $logV = x$ و $logP = y$ قرار داده شود، معادله بالا به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$y + \gamma x = logC$$

یا:

$$y = a + bx$$

به‌طوری که، $a = logC$ و $b = -\gamma$ است.

دستگاه دو معادله دو مجهول زیر مرتبط با معادله درجه اول فوق می‌باشد:

$$\begin{cases} \sum y_i = Na + b\sum x_i \\ \sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^۲ \end{cases}$$

مقادیر a و b را می‌توان از طریق روابط زیر محاسبه نمود:

$$a = \frac{\sum x_i^۲ \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

$$b = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = N\sum x_i^۲ - \left(\sum x_i\right)^۲$$

برای سادگی انجام محاسبات لازم است برخی مقادیر در جدولی که در ادامه آمده است، محاسبه گردد:

بنابراین به‌دست خواهد آمد:

$$a = ۴/۲۰, \qquad b = -۱/۴۰$$

به این ترتیب معادله خط به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$y = ۴/۲۰ - ۱/۴۰x$$

$log V = x$	$log P = y$	$x_i^۲$	$x_i y_i$
۱/۷۳۴۸	۱/۷۸۶۸	۳/۰۰۹۵	۳/۰۹۹۷
۱/۷۹۱۰	۱/۶۹۴۶	۳/۲۰۷۷	۳/۰۳۵۰
۱/۸۵۹۷	۱/۵۷۵۲	۳/۴۵۸۵	۲/۹۲۹۴
۱/۹۴۷۹	۱/۴۵۳۳	۳/۷۹۴۳	۲/۸۳۰۹
۲/۰۷۴۱	۱/۲۸۳۳	۴/۳۰۱۹	۲/۶۶۱۷
۲/۲۸۷۸	۱/۰۰۴۳	۵/۲۳۴۰	۲/۲۹۷۶
$\sum x_i = ۱۱/۶۹۵۳$	$\sum y_i = ۸/۷۹۷۵$	$\sum x_i^۲ = ۲۳/۰۰۶۱$	$\sum x_i y_i = ۱۶/۸۵۴۴$

ب) از آنجایی که $a = logC$ و $b = -\gamma$ است، بنابراین:

$$C = ۱/۶۰ \times ۱۰^۴, \qquad \gamma = ۱/۴۰$$

ج) لذافرم معادله اولیه به صورت زیر در خواهد آمد:

$$PV^{۱/۴۰} = ۱۶۰۰۰$$

د) اگر $V = ۱۰۰$ باشد:

$$P(۱۰۰)^{۱/۴۰} = ۱۶۰۰۰$$

بنابراین:

$$P = ۲۴/۸\ {}^{lb}/_{in^۲}$$

۲- اگر σ_i مقداری ثابت نباشد.

الف) همان‌طور که در قسمت ۱ توضیح داده شد می‌توان معادله $PV^\gamma = C$ را به صورت زیر نیز نوشت:

$$y = a + bx$$

به‌طوری که، $x = l\,n V$ و $y = l\,n P$ قرار داده‌شود و $a = l\,nC$ و $b = -\gamma$ باشد.

دستگاه دو معادله دو مجهول مرتبط با معادله درجه اول فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^۲} = a \sum \frac{۱}{\sigma_i^۲} + b \sum \frac{x_i}{\sigma_i^۲} \\ \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^۲} = a \sum \frac{x_i}{\sigma_i^۲} + b \sum \frac{x_i^۲}{\sigma_i^۲} \end{cases}$$

$y = l\,n P$ است، بنابراین:

$$\sigma_{y_i} = \left(\frac{\partial y}{\partial P}\right) \sigma_{P_i}$$

به‌این ترتیب، طبق مدل پواسون خواهیم داشت:

$$\sigma_{y_i} = \frac{۱}{P_i} \times \sqrt{P_i} = \frac{۱}{\sqrt{P_i}}$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{\sigma_i^۲} = P_i$$

مقادیر a و b را می‌توان از طریق روابط زیر محاسبه نمود:

$$a = \frac{\sum x_i^۲ \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{\Delta}$$

$$b = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

$$\Delta = N \sum x_i^۲ - \left(\sum x_i\right)^۲$$

به این ترتیب، مقادیر زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\Delta = ۴۵۲۸/۹۱, \qquad a = ۹/۸۶۷, \qquad b = -۱/۴۴۷$$

و بنابراین معادله خط به صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$y = ۹/۸۶۷ - ۱/۴۴۷x$$

$\frac{x_i y_i}{\sigma_i^۲}$	$\frac{x_i^۲}{\sigma_i^۲}$	$\frac{x_i}{\sigma_i^۲}$	$\frac{y_i}{\sigma_i^۲}$	$\frac{۱}{\sigma_i^۲} = P_i$	$l\,n P_i = y_i$	$l\,n V_i = x_i$
۱۰۰۵/۵۹۷	۹۷۶/۲۶۵	۲۴۴/۴۳۳	۲۵۱/۷۷۷	۶۱/۲	۴/۱۱۴	۳/۹۹۴
۷۹۶/۵۴۶	۸۴۱/۸۶۵	۲۰۴/۱۳۸	۱۹۳/۱۴۹	۴۹/۵	۳/۹۰۲	۴/۱۲۴
۵۸۳/۹۵۸	۶۸۹/۴۱۵	۱۶۱/۰۰۳	۱۳۶/۳۷۵	۳۷/۶	۳/۶۲۷	۴/۲۸۲
۴۲۶/۱۹۲	۵۷۱/۲۷۲	۱۲۷/۳۷۴	۹۵/۰۲۶	۲۸/۴	۳/۳۴۶	۴/۴۸۵
۲۷۰/۹۷۱	۴۳۷/۹۵۴	۹۱/۶۹۹	۵۶/۷۳۶	۱۹/۲	۲/۹۵۵	۴/۷۷۶
۱۲۳/۰۱۳	۲۸۰/۲۹۴	۵۳/۲۰۷	۲۳/۳۵۱	۱۰/۱	۲/۳۱۲	۵/۲۶۸
$\sum x_i y_i = ۳/۷۹۷۴ \times ۱۰^۳$	$\sum x_i^۲ = ۳/۲۰۶۵ \times ۱۰^۳$	$\sum \frac{x_i}{\sigma_i^۲} = ۸۸۱/۸۹۰۳$	$\sum \frac{y_i}{\sigma_i^۲} = ۷۵۶/۴۳۷۱$	$\sum \frac{۱}{\sigma_i^۲} = ۲۰۶$	$\sum y_i = ۸/۷۹۷۵$	$\sum x_i = ۱۱/۶۹۵۳$

ب) از آنجایی که $a = l\,o g C$ و $b = -\gamma$ است، پس:

$$C = ۱/۹۳۱۲ \times ۱۰^۴, \qquad \gamma = ۱/۴۴۷۴$$

ج) لذا فرم کلی معادله اولیه به صورت زیر در خواهد آمد:

$$PV^{۱/۴۴۷۴} = ۱/۹۳۱۲ \times ۱۰^۴$$

د) اگر $V = ۱۰۰$ باشد:

$$P(۱۰۰)^{۱/۴۴۷۴} = ۱/۹۳۱۲ \times ۱۰^۴$$

بنابراین:

$$P = ۲۴/۶۰۲۴ \; {}^{l\,b}\!/_{in^۲}$$

ه) از آنجایی که روابط مربوط به محاسبه عدم قطعیت ضرایب a و b به صورت زیر است:

$$\sigma_a^۲ = \frac{۱}{\Delta} \sum \frac{x_i^۲}{\sigma_i^۲}$$

$$\sigma_b^۲ = \frac{۱}{\Delta} \sum \frac{۱}{\sigma_i^۲}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma_a^۲ = ۰/۸۳۹۲, \qquad \sigma_b^۲ = ۰/۰۴۵۵$$

از روش کرامر ضرایب a، b و c به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$a=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i^2y_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^4}{\sigma_i^2}\end{vmatrix}$$

$$b=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\sum\frac{1}{\sigma_i^2} & \sum\frac{y_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2y_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^4}{\sigma_i^2}\end{vmatrix}$$

$$a=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\sum\frac{1}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2y_i}{\sigma_i^2}\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sum\frac{1}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^4}{\sigma_i^2}\end{vmatrix}$$

انحراف معیار استاندارد این منحنی برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{1}{N-n-1}\sum(y_i-a-bx_i-cx_i^2)^2$$

که در این حالت n برابر با ۲ است.

حال برای تعمیم این روش به یک چندجمله‌ای درجه n می‌توان به صورت زیر عمل نمود:

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\dots+mx^n$$

به طریق مشابه با تشکیل عبارت χ^2 برای معادله درجه n موردنظر و سپس گرفتن مشتقات جزیی نسبت به هر یک از ضرایب مجهولات معادله و قراردادن عبارات حاصله برابر با صفر، نهایتاً یک دستگاه از معادلات شامل $n+1$ معادله و $n+1$ مجهول تشکیل می‌گردد، عبارت ماتریسی زیر معادل این دستگاه معادلات برای یک چند جمله‌ای درجه n است:

$$\begin{bmatrix}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i^2y_i}{\sigma_i^2}\\ \vdots\\ \sum\frac{x_i^ny_i}{\sigma_i^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\frac{1}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \dots & \sum\frac{x_i^n}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \dots & \sum\frac{x_i^{n+1}}{\sigma_i^2}\\ \sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^4}{\sigma_i^2} & \dots & \sum\frac{x_i^{n+2}}{\sigma_i^2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum\frac{x_i^n}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^{n+1}}{\sigma_i^2} & \sum\frac{x_i^{n+2}}{\sigma_i^2} & \dots & \sum\frac{x_i^{2n}}{\sigma_i^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\\ \vdots\\ d\end{bmatrix}$$

مثال ۴-۳: جمعیت یک کشور در سال‌های ۱۸۸۰ تا ۱۹۸۰ در فواصل زمانی ۱۰ ساله در جدول زیر آورده شده است:

سال	۱۸۸۰	۱۸۹۰	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰
جمعیت	۵۰/۲	۶۲/۹	۷۶/۰	۹۲/۰	۱۰۵/۷	۱۲۲/۸	۱۳۱/۷	۱۵۱/۱	۱۷۹/۳	۲۰۳/۳	۲۲۶/۵

الف) یک معادله درجه ۲ را بر روی این داده ها منطبق کنید.

ب) جمعیت حاصل از مدل ارائه شده را با مقادیر واقعی مقایسه نمایید.

ج) جمعیت را در سالهای ۱۹۹۰ و ۲۰۰۰ تخمین بزنید.

د) جمعیت واقعی در سال ۱۸۷۰، ۳۹/۸ میلیون نفر است، جمعیت را در این سال، از طریق مدلی که ارائه کرده‌اید به‌دست آورده و با مقدار واقعی مقایسه کنید.

پاسخ: اگر x بیانگر سال و y بیانگر جمعیت در هرسال باشد، چند جمله‌ای درجه دومی که قرار است بر روی این داده‌ها منطبق گردد، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=a+bx+cx^2$$

که مقادیر a، b و c را می‌توان از طریق روابط ارائه شده در این بخش و یا حل دستگاه سه معادله سه مجهول زیر به‌دست آورد:

$$\begin{cases} \sum y_i = Na + b\sum x_i + c\sum x_i^۲ \\ \sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^۲ + c\sum x_i^۳ \\ \sum x_i^۲ y_i = a\sum x_i^۲ + b\sum x_i^۳ + c\sum x_i^۴ \end{cases}$$

جهت ساده شدن محاسبات، برای سال ۱۹۳۰، x برابر با ۰ در نظر گرفته می‌شود، بنابراین سال‌های ۱۹۴۰، ۱۹۵۰، ۱۹۶۰، ۱۹۷۰ و ۱۹۸۰ به صورت $x = ۱,۲,۳,۴,۵$ و به همین ترتیب، سال‌های ۱۹۲۰، ۱۹۱۰، ۱۹۰۰، ۱۸۹۰ و ۱۸۸۰ به صورت $x = -۱, -۲, -۳, -۴, -۵$ نمایش داده می‌شود، با این انتخاب صورت گرفته شده، $\sum x_i = ۰$ و $\sum x_i^۳ = ۰$ شده و معادلات موجود ساده‌تر خواهند گردید.

سال	x	y	$x^۲$	$x^۳$	$x^۴$	xy	$x^۲y$
۱۸۸۰	-۵	۵۰/۲	۲۵	-۱۲۵	۶۲۵	-۲۵۱/۰	۱۲۵۵/۰
۱۸۹۰	-۴	۶۲/۹	۱۶	-۶۴	۲۵۶	-۲۵۱/۶	۱۰۰۶/۴
۱۹۰۰	-۳	۷۶/۰	۹	-۲۷	۸۱	-۲۲۸/۰	۶۸۴/۰
۱۹۱۰	-۲	۹۲/۰	۴	-۸	۱۶	-۱۸۴/۰	۳۶۸/۰
۱۹۲۰	-۱	۱۰۵/۷	۱	-۱	۱	-۱۰۵/۷	۱۰۵/۷
۱۹۳۰	۰	۱۲۲/۸	۰	۰	۰	۰/۰	۰/۰
۱۹۴۰	۱	۱۳۱/۷	۱	۱	۱	۱۳۱/۷	۱۳۱/۷
۱۹۵۰	۲	۱۵۱/۱	۴	۸	۱۶	۳۰۲/۲	۶۰۴/۴
۱۹۶۰	۳	۱۷۹/۳	۹	۲۷	۸۱	۵۳۷/۹	۱۶۱۳/۷
۱۹۷۰	۴	۲۰۳/۳	۱۶	۶۴	۲۵۶	۸۱۳/۲	۳۲۵۲/۸
۱۹۸۰	۵	۲۲۶/۵	۲۵	۱۲۵	۶۲۵	۱۱۳۲/۵	۵۶۶۲/۵
	$\sum x_i = ۰$	$\sum y_i = ۱۴۰۱/۵$	$\sum x_i^۲ = ۱۱۰$	$\sum x_i^۳ = ۰$	$\sum x_i^۴ = ۱۹۵۸$	$\sum x_i y_i = ۱۸۹۷/۲$	$\sum x_i^۲ y_i = ۱۴۶۸۴/۲$

بنابراین:

$$۱۱a + ۱۱۰c = ۱۴۰۱/۵$$
$$۱۱b = ۱۸۹۷/۲$$
$$۱۱۰a + ۱۹۵۸c = ۱۴۶۸۴/۲$$

از معادله دوم خواهیم داشت:

$$b = ۱۷/۲۵$$

از معادله اول:

$$a = ۱۱۹/۶۱$$

و از معادله سوم:

$$c = ۰/۷۸۰۰$$

بنابراین معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$y = ۱۱۹/۶۱ + ۱۷/۲۵x + ۰/۷۸۰۰x^۲$$

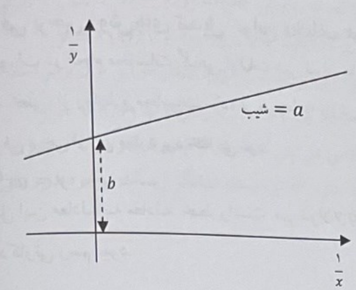
که در این معادله $x = ۰$ بیانگر اول جولای ۱۹۳۰ بوده و هر x بیانگر ۱۰ سال است.

ب) در جدول زیر مقادیر جمعیت پیش‌بینی شونده توسط معادله برازش داده شده به‌دست آمده است، در مقایسه با جمعیت واقعی نشان داده شده، مشاهده می‌گردد که توافق خوبی بین این نتایج وجود دارد.

x	سال	جمعیت واقعی	جمعیت پیش‌بینی شده
-۵	۱۸۸۰	۵۰/۲	۵۲/۹
-۴	۱۸۹۰	۶۲/۹	۶۳/۱
-۳	۱۹۰۰	۷۶/۰	۷۴/۹
-۲	۱۹۱۰	۹۲/۰	۸۸/۲
-۱	۱۹۲۰	۱۰۵/۷	۱۰۳/۱
۰	۱۹۳۰	۱۲۲/۸	۱۱۹/۰۶
۱	۱۹۴۰	۱۳۱/۷	۱۳۷/۶
۲	۱۹۵۰	۱۵۱/۱	۱۵۷/۲
۳	۱۹۶۰	۱۷۹/۳	۱۷۸/۴
۴	۱۹۷۰	۲۰۳/۳	۲۰۱/۱
۵	۱۹۸۰	۲۲۶/۵	۲۲۵/۴

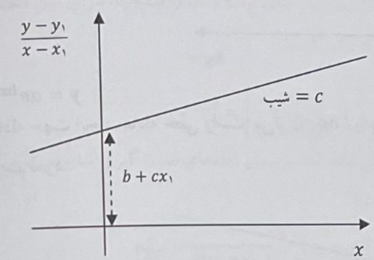
$y = \frac{x}{a+bx}$ -۳

برای تبدیل این نوع معادله به معادله خطی مستقیم می‌توان $\frac{1}{y}$ را بر حسب $\frac{1}{x}$ در دستگاه مختصات دکارتی رسم نمود.



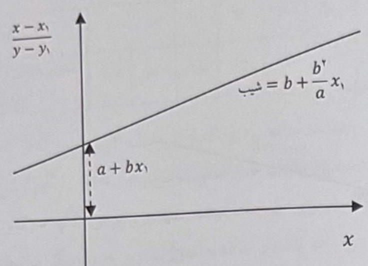
$y = a + bx + cx^2$ -۴

جهت ایجاد معادله خطی راست می‌توان $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ را بر حسب x در دستگاه مختصات دکارتی مطابق شکل زیر رسم نمود.



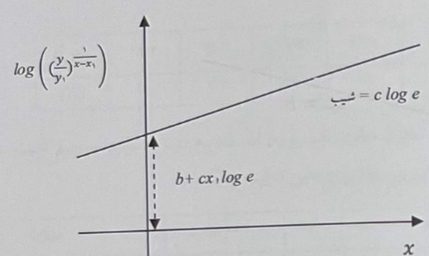
$y = \frac{x}{a+bx} + c$ -۵

برای تبدیل این نوع معادله به معادله خطی مستقیم می‌توان $\frac{x-x_1}{y-y_1}$ را بر حسب x در دستگاه مختصات دکارتی رسم نمود.



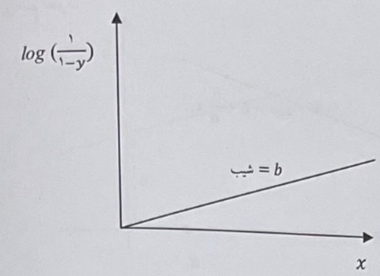
$y = ae^{bx+cx^2}$ -۶

جهت ایجاد معادله خطی مستقیم می‌توان $log\left(\left(\frac{y}{y_1}\right)^{\frac{1}{x-x_1}}\right)$ را بر حسب x در دستگاه مختصات دکارتی مطابق شکل زیر رسم نمود.



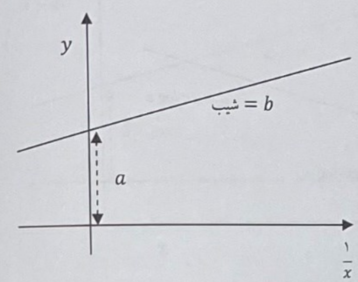
۷- $y = 1 - e^{-bx}$

جهت ایجاد معادله خطی مستقیم می‌توان $log\,\frac{1}{1-y}$ را بر حسب x در دستگاه مختصات دکارتی رسم نمود.



۸- $y = a + \frac{b}{x}$

در این نوع معادله‌ها برای سهولت می‌توان y را بر حسب $\frac{1}{x}$ در دستگاه مختصات دکارتی رسم نمود، ملاحظه می‌شود که معادله یک خط راست حاصل می‌شود.



تمرین‌های فصل چهارم

۴-۱) تغییرات مربوط به مقدار فعالیت یک منبع رادیواکتیو در فواصل زمانی ۱۵ ثانیه اندازه‌گیری شده است. مقدار غلظت کلی ماده (N) در هر کدام از فواصل زمانی مطابق جدول زیر می‌باشد:

زمان (s)	۱	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۳۵
مقدار غلظت کلی ماده (cts)	۱۰۶	۸۰	۹۸	۷۵	۷۴	۷۳	۴۹	۳۸	۳۷	۲۲

در صورتی که نحوه تغییرات غلظت ماده رادیواکتیو از رابطه آرنیوسی $N(t) = N.e^{(-t/\tau)}$ تبعیت نماید، مقدار عددی τ و همچنین مقدار عدم قطعیت مربوط به آن را گزارش کنید. مقدار σ_{N_i} مربوط به هر یک از اندازه‌گیری‌های صورت گرفته را متغیر و برابر $\sqrt{N_i}$ در نظر بگیرید.

۴-۲) دوره تناوب T و طول l برای یک پاندول ساده به صورت زیر به یکدیگر مرتبطند:

$$T = 2\pi\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

چه تابعی از T و l را می‌توان رسم کرد، به نحوی که رابطه‌ای خطی را نشان دهد همچنین مقدار g را محاسبه نمایید.

مقادیر زیر در یک آزمایش به‌دست آمده است:

$l(cm)$	۲۵/۲	۳۵/۲	۴۹/۶	۵۶/۰	۶۳/۲	۷۲/۴
$T(s)$	۱/۰	۱/۲	۱/۴	۱/۵	۱/۶	۱/۷

۴-۳) یک دستگاه دارای یک مخزن حاوی هیدروژن است، به دلیل شرایط حجم ثابت، در هر دمایی میزان فشار هیدروژن بر روی مقادیری معین تنظیم می گردد:

دما $(^{\circ}C)$	۱۰/۰	۱۵/۰	۲۰/۰	۲۵/۰	۳۰/۰	۳۵/۰	۴۰/۰	۴۵/۰	۵۰/۰
فشار $(mmHg)$	۷۹/۲	۸۰/۷	۸۲/۰	۸۳/۵	۸۴/۶	۸۶/۳	۸۷/۷	۸۹/۲	۹۰/۴

اگر فشار بر حسب دما رابطه‌ای خطی نشان دهد، شیب این خط و مقدار واریانس شیب خط را بیابید.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \rightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به ماتریس بالا مثلثی}} [A'|B']=\left[\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1\\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n\end{array}\right]$$

مراحل تبدیل به ماتریس بالا مثلثی:

مرحله اول- حذف ضرایب متغیر x_1 از سطرهای دوم تا nام ماتریس،

$$\text{سطر دوم} = \frac{-a_{21}}{a_{11}} \times \text{سطر اول} + \text{سطر دوم}$$

$$\text{سطر سوم} = \frac{-a_{31}}{a_{11}} \times \text{سطر اول} + \text{سطر سوم}$$

$$\text{سطر چهارم} = \frac{-a_{41}}{a_{11}} \times \text{سطر اول} + \text{سطر چهارم}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\text{سطر } n\text{ام} = \frac{-a_{n1}}{a_{11}} \times \text{سطر اول} + \text{سطر } n\text{ام}$$

به این ترتیب ضرایب متغیر x_1 از سطرهای دوم تا nام ماتریس حذف می شود. عبارت‌های فوق را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\text{سطر } i\text{ام} = \frac{-a_{i1}}{a_{11}} \times \text{سطر اول} + \text{سطر } i\text{ام} \quad , \quad i=2,3,4,\ldots,n$$

مرحله دوم- حذف ضرایب متغیر x_2 از سطرهای سوم تا nام ماتریس،

$$\text{سطر سوم} = \frac{-a_{32}}{a_{22}} \times \text{سطر دوم} + \text{سطر سوم}$$

$$\text{سطر چهارم} = \frac{-a_{42}}{a_{22}} \times \text{سطر دوم} + \text{سطر چهارم}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\text{سطر } n\text{ام} = \frac{-a_{n2}}{a_{22}} \times \text{سطر دوم} + \text{سطر } n\text{ام}$$

به این ترتیب ضرایب متغیر x_2 نیز از سطرهای سوم تا nام ماتریس حذف می‌شوند. عبارت‌های فوق را نیز می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\text{سطر } i\text{ام} = \frac{-a_{i2}}{a_{22}} \times \text{سطر دوم} + \text{سطر } i\text{ام} \quad , \quad i=3,4,\ldots,n$$

مراحل فوق را تا مرحله $(n-1)$ ادامه می‌دهیم، و در پایان ماتریس بالا مثلثی حاصل می‌شود. در این مرحله دستگاه به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1\\ \quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2\\ \qquad a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3\\ \qquad\qquad \vdots\\ \qquad\qquad a'_{nn}x_n = b'_n\end{cases}$$

که این دستگاه از سطر آخر به سطر اول به راحتی قابل حل است.

دستگاه زیر را به روش حذفی گوسی حل می کنیم:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6\\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -2\\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 19\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3 & -2\\ 2 & 2 & -4 & 1\\ 3 & 3 & -2 & 4\end{bmatrix} X=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} B=\begin{bmatrix} -2\\ 6\\ -2\\ 19\end{bmatrix}$$

$$[A|B]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3 & -2 & 6\\ 2 & 2 & -4 & 1 & -2\\ 3 & 3 & -2 & 4 & 19\end{array}\right]$$

روش گوس- سایدل:

روش گوس- سایدل، اصلاح شده روش ژاکوبی است، به طوری که برای رسیدن به دقت یکسان به تعداد تکرار کمتری نیاز است. در این روش برخلاف روش ژاکوبی، پس از آن‌که مقدار $x_۱$ محاسبه شد، بلافاصله از این مقدار در محاسبه $x_۲$ استفاده می‌شود، و به همین ترتیب پس از آن‌که مقدار $x_۲$ محاسبه شد، بلافاصله از مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ جدید در محاسبه $x_۳$ استفاده می‌شود.

می‌خواهیم با استفاده از روش گوس- سایدل مثال قبلی را حل کنیم. جواب‌ها را تا ۳ رقم اعشار به دست می‌آوریم و مراحل را آنقدر ادامه می‌دهیم تا جواب‌های دو مرحله عیناً برابر با یکدیگر شوند.

$$\begin{cases} ۵x_۱ - ۲x_۲ + ۳x_۳ = -۱ \\ -۳x_۱ + ۹x_۲ + x_۳ = ۲ \\ ۲x_۱ - ۱x_۲ - ۷x_۳ = ۳ \end{cases}$$

حل:

$$x_۱ = \frac{۱}{۵}(-۱ + ۲(۰) - ۳(۰)) \to x_۱ = -۰/۲۰۰$$

برای محاسبه مقدار $x_۲$ به جای $x_۱$ دیگر صفر قرار نمی‌دهیم، بلکه مقدار جدید آن، یعنی ۰/۲۰۰- را قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم:

$$x_۲ = \frac{۱}{۹}(۲ + ۳(-۰/۲۰۰) - ۰) \to x_۲ \approx ۰/۱۵۶$$

به طور مشابه برای محاسبه مقدار $x_۳$ به جای $x_۱$ و $x_۲$ دیگر صفر قرار نمی‌دهیم، بلکه مقدار جدید آنها را قرار می‌دهیم، در نتیجه داریم:

$$x_۳ = \frac{۱}{-۷}(۳ - ۲(-۰/۲۰۰) + ۰/۱۵۶) \to x_۳ \approx -۰/۵۰۸$$

در مرحله بعد داریم:

$$x_۱ = \frac{۱}{۵}(-۱ + ۲(۰/۱۵۶) - ۳(-۰/۵۰۸)) \to x_۱ = ۰/۱۶۷$$

$$x_۲ = \frac{۱}{۹}(۲ + ۳(۰/۱۶۷) + ۰/۵۰۸) \to x_۲ \approx ۰/۳۳۴$$

$$x_۳ = \frac{۱}{-۷}(۳ - ۲(۰/۱۶۷) + ۰/۳۳۴) \to x_۳ \approx -۰/۴۲۹$$

مشاهده می‌شود که جواب‌ها در دو تکرار اول برابر با یکدیگر نیستند، لذا مراحل را ادامه می‌دهیم، در جدول زیر نتایج تکرارها مشاهده می‌شود:

n(تکرار)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$x_۱$	۰/۰۰۰	-۰/۲۰۰	۰/۱۶۷	۰/۱۹۱	۰/۱۸۶	۰/۱۸۶
$x_۲$	۰/۰۰۰	۰/۱۵۶	۰/۳۳۴	۰/۳۳۳	۰/۳۳۱	۰/۳۳۱
$x_۳$	۰/۰۰۰	-۰/۵۰۸	-۰/۴۲۹	-۰/۴۲۲	-۰/۴۲۳	-۰/۴۲۳

قابل ذکر است که تنها با ۵ تکرار در روش گوس- سایدل به دقتی رسیدیم که در روش ژاکوبی با ۷ تکرار به آن رسیدیم.

همان‌طور که مشاهده شد، هر دو روش ژاکوبی و گوس- سایدل در این مثال همگرا بودند. اما ممکن است این دو روش در حل بعضی از دستگاه‌های معادلات خطی همگرا نباشند. به عنوان مثال:

$$\begin{cases} ۱x_۱ - ۵x_۲ = -۴ \\ ۷x_۱ - x_۲ = ۶ \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۱}(-۴ + ۵x_۲) \\ x_۲ = \frac{۱}{-۱}(۶ - ۷x_۱) \end{cases}$$

با در نظر گرفتن جواب اولیه $(x_۱, x_۲) = (۰, ۰)$ داریم:

$$\begin{cases} x_۱ = \frac{۱}{۱}(-۴ + ۵(۰)) \to x_۱ = -۴ \\ x_۲ = \frac{۱}{-۱}(۶ - ۷(۰)) \to x_۱ = -۶ \end{cases}$$

با تکرار این روش داریم:

n(تکرار)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$x_۱$	۰	-۴	-۳۴	-۱۷۴	-۱۲۴۴	-۶۱۲۴	-۴۲۸۷۴
$x_۲$	۰	-۶	-۳۴	-۲۴۴	-۱۲۴۴	-۸۵۷۴	-۴۲۸۷۴

P/F	۰/۹۵۵	۰/۹۹	۰/۹۷۵	۰/۹۵	۰/۹	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵
۲۹	۱۳/۱۲۱	۱۴/۲۵۶	۱۶/۰۴۷	۱۷/۷۰۸	۱۹/۷۶۸	۳۹/۰۸۷	۴۲/۵۵۷	۴۵/۷۲۲	۴۹/۵۸۸	۵۲/۳۳۶
۳۰	۱۳/۷۸۷	۱۴/۹۳۵	۱۶/۷۹۱	۱۸/۴۹۳	۲۰/۵۹۹	۴۰/۲۵۶	۴۳/۷۷۳	۴۶/۹۷۹	۵۰/۸۹۲	۵۳/۶۷۲
۴۰	۲۰/۷۰۷	۲۲/۱۶۴	۲۴/۴۳۳	۲۶/۵۰۹	۲۹/۵۱	۵۱/۸۰۵	۵۵/۷۵۸	۵۹/۳۴۲	۶۳/۶۹۱	۶۶/۷۶۶
۵۰	۲۷/۹۹۱	۲۹/۷۰۷	۳۲/۳۵۷	۳۴/۷۶۴	۳۷/۶۸۹	۶۳/۱۶۹	۶۷/۵۰۵	۷۱/۴۲	۷۶/۱۵۴	۷۹/۴۹
۶۰	۳۵/۵۳۴	۳۷/۴۸۵	۴۰/۴۸۲	۴۳/۱۸۸	۴۶/۴۵۹	۷۴/۳۹۷	۷۹/۰۸۲	۸۳/۲۹۸	۸۸/۳۷۹	۹۱/۹۵۲
۷۰	۴۳/۲۷۵	۴۵/۴۴۲	۴۸/۷۵۸	۵۱/۷۳۹	۵۵/۳۲۹	۸۵/۵۲۷	۹۰/۵۳۱	۹۵/۰۲۳	۱۹۹/۴۲۵	۱۰۴/۲۱۵
۸۰	۵۱/۱۹۲	۵۳/۵۴	۵۷/۱۵۳	۶۰/۳۹۱	۶۴/۲۷۸	۹۶/۵۷۸	۱۰۱/۸۷۹	۱۰۶/۶۲۹	۱۱۲/۳۲۹	۱۱۶/۳۲۱
۹۰	۵۹/۱۹۶	۶۱/۷۵۴	۶۵/۶۴۷	۶۹/۱۲۶	۷۳/۲۹۱	۱۰۷/۵۶۵	۱۱۳/۱۴۵	۱۱۸/۱۳۶	۱۲۴/۱۱۶	۱۲۸/۲۹۴
۱۰۰	۶۷/۳۲۸	۷۰/۰۶۵	۷۴/۲۲۲	۷۷/۹۲۹	۸۲/۳۵۲	۱۱۸/۴۹۸	۱۲۴/۳۴۲	۱۲۹/۵۶۱	۱۳۵/۸۰۷	۱۴۰/۱۶۹

پیوست شماره ۵

کدMATLAB برخی از مثال‌ها و تمرین‌ها

مثال ۱-۲۱

```
>> % r1: small radius.
>> % r2: larg radius.
>> % rho: density.
>> % g: gravity acceleration
>> % h: height.
>> % deltar1: uncertainty of small radius.
>> % deltar2: uncertainty of larg radius.
>> % deltah: uncertainty of height.
>> % gamma: surface tension.
>> % gammar1: partial derivative of gamma to r1.
>> % gammar2: partial derivative of gamma to r2.
>> % gammah: partial derivative of gamma to h.
>> % ResultMax = deltaGammaMax/Gamma.
>> % ResultProb = deltaGammaProb/Gamma.
>> % Calculation of gamma:
>> syms r1 r2 rho g h deltar1 deltar2 deltah gamma gammar1 gammar2 gammah
ResultMax ResultProb
>> gamma = (r1 * r2 * rho * g * h)/(2*(r2 -r1))
gamma =
    -(g*h*r1*r2*rho)/(2*r1 - 2*r2)
>> % Calculation of partial derivative:
>> gammar1 = diff(gamma,r1)
gammar1 =
    (2*g*h*r1*r2*rho)/(2*r1 - 2*r2)^2 - (g*h*r2*rho)/(2*r1 - 2*r2)
>> gammar2 = diff(gamma,r2)
gammar2 =
    -(g*h*r1*rho)/(2*r1 - 2*r2) - (2*g*h*r1*r2*rho)/(2*r1 - 2*r2)^2
>> gammah = diff(gamma,h)
gammah =
    -(g*r1*r2*rho)/(2*r1 - 2*r2)
>> % Simplify of partial derivative value:
>> gammar1 = simplify(gammar1)
gammar1 =
    (g*h*r2^2*rho)/(2*(r1 - r2)^2)
>> gammar2 = simplify(gammar2)
gammar2 =
    -(g*h*r1^2*rho)/(2*(r1 - r2)^2)
```

```
>> gammah = simplify(gammah)
gammah =
    -(g*r1*r2*rho)/(2*(r1 - r2))
>> % Calculation of maximum uncertainty:
>>  ResultMax  =  (gammar1*deltar1/gamma)  +  (gammar2*deltar2/gamma)  +
(gammah*deltah/gamma)
ResultMax =
    (deltah*(2*r1 - 2*r2))/(2*h*(r1 - r2)) - (deltar1*r2*(2*r1 - 2*r2))/(2*r1*(r1 -
r2)^2) + (deltar2*r1*(2*r1 - 2*r2))/(2*r2*(r1 - r2)^2)
>> % Simplify of maximum uncertainty:
>> ResultMax = simplify(ResultMax)
ResultMax =
    -(-    deltah*r1^2*r2    -    deltar2*h*r1^2    +    deltah*r1*r2^2    +
deltar1*h*r2^2)/(h*r1*r2*(r1 - r2))
>> %Calculation of probable uncertainty:
>> ResultProb = sqrt((gammar1*deltar1/gamma)^2 + (gammar2*deltar2/gamma)^2 +
(gammah*deltah/gamma)^2)
ResultProb =
    ((deltah^2*(2*r1 - 2*r2)^2)/(4*h^2*(r1 - r2)^2) + (deltar1^2*r2^2*(2*r1 -
2*r2)^2)/(4*r1^2*(r1 - r2)^4) + (deltar2^2*r1^2*(2*r1 - 2*r2)^2)/(4*r2^2*(r1 -
r2)^4))^(1/2)
>> % Simplify of probable uncertainty:
>> ResultProb = simplify(ResultProb)
ResultProb =
    ((deltah^2*r1^4*r2^2 - 2*deltah^2*r1^3*r2^3 + deltah^2*r1^2*r2^4 +
deltar1^2*h^2*r2^4 + deltar2^2*h^2*r1^4)/(h^2*r1^2*r2^2*(r1 - r2)^2))^(1/2)
>> %Variable substitution to calculate final maximum uncertainty:
>> %To maximize of the phrase, we must use -0.005 for deltar2 value:
>> subs(ResultMax,{r1, r2, h, deltar1, deltar2, deltah},{0.07, 0.14, 1.06, 0.005, -
0.005, 0.005})
ans =
   0.1833
>> %Variable substitution to calculate final probable uncertainty:
subs(ResultProb,{r1, r2, h, deltar1, deltar2, deltah},{0.07, 0.14, 1.06, 0.005, -0.005,
0.005})
ans =
   0.1473
```

تمرین ۱-۱

```
>> %Part A:
>> %r: radius
>> %d: diameter
```



```
>> %h: height
>> %m: mass
>> %v: volume
>> %rho: density
>> %diff_rho_m: Partial derivatives of density to mass
>> %diff_rho_h: Partial derivatives of density to height
>> %diff_rho_d: Partial derivatives of density to diameter
>> %delta_m: variation of mass
>> %delta_h: variation of height
>> %delta_d: variation of diameter
>> %delta2rho: square of variation of rho
>> %deltarho: variation of rho
>> %a: surface
>> %diff_a_d: Partial derivatives of surface to diameter
>> %diff_a_h: Partial derivatives of surface to height
>> %delta2a: square of variation of surface
>> %delta_a: variation of surface
>> %symbolic parameters:
>> syms r d h m;
>> v = pi * r^2 * h;
>> r = d/2;
>> %volume of cylinder:
>> v = pi * d^2 * h / 4
v =
   (pi*d^2*h)/4
>> %density function:
>> rho = m / v
rho =
   (4*m)/(pi*d^2*h)
>> %Partial derivatives of density:
>> diff_rho_m = diff(rho,m)
diff_rho_m =
   4/(pi*d^2*h)
>> diff_rho_h = diff(rho,h)
diff_rho_h =
   -(4*m)/(pi*d^2*h^2)
>> diff_rho_d = diff(rho,d)
diff_rho_d =
   -(8*m)/(pi*d^3*h)
>> %variation of independant parameters:
>> delta_m = 0.05 *m
delta_m =
   m/20
```

```
>> delta_h = 0.06 *h
delta_h =
        (3*h)/50
>> delta_d = 0.06 *d
delta_d =
        (3*d)/50
>> %square of variation of rho calculation:
>> delta2rho = (diff_rho_m * delta_m)^2 + (diff_rho_h * delta_h)^2 + (diff_rho_d *
delta_d)^2
delta2rho =
(41*m^2)/(125*pi^2*d^4*h^2)
>> deltarho = eval((6.403 * m) / (11.18 * pi * d^2 * h))
deltarho =
(6403*m)/(11180*pi*d^2*h)
>> %final result of Part A:
>> deltarho_to_rho = eval(deltarho/rho)
deltarho_to_rho =
        0.1432
>> %Part B:
>> %sphere volume:
>> v = (4*pi*r^3)/3
v =
        (pi*d^3)/6
>> %Calculation of sphere density:
>> rho = m / v
rho =
        (6*m)/(pi*d^3)
>> %Calculation of density partial derivatives:
>> diff_rho_m = diff(rho,m)
diff_rho_m =
        6/(pi*d^3)
>> diff_rho_d = diff(rho,d)
diff_rho_d =
        -(18*m)/(pi*d^4)
>> %square of variation of rho calculation:
>> delta2rho = (diff_rho_m * delta_m)^2 + (diff_rho_d * delta_d)^2
delta2rho =
(3141*m^2)/(2500*pi^2*d^6)
>> %variation of rho:
>> deltarho = (1.12 * m) / (pi * d^3)
deltarho =
        (28*m)/(25*pi*d^3)
>> % Final result of part B:
```



```
>> deltarho_to_rho = eval(deltarho/rho)
deltarho_to_rho =
    0.1867
>> %Part C:
>> %Surface function:
>> a = 2 * pi * r * h + pi * r^2
a =
    (pi*d^2)/4 + pi*h*d
>> %Partial derivatives of surface function:
>> diff_a_d = diff(a,d)
diff_a_d =
    (pi*d)/2 + pi*h
>> diff_a_h = diff(a,h)
diff_a_h =
    pi*d
>> %square of variation of surface calculation:
>> delta2a = (diff_a_d * delta_d)^2 + (diff_a_h * delta_h)^2
delta2a =
    (9*d^2*((pi*d)/2 + pi*h)^2)/2500 + (9*pi^2*d^2*h^2)/2500
>> delta2a = simplify(delta2a)
delta2a =
    (9*pi^2*d^2*(d^2 + 4*d*h + 8*h^2))/10000
>> %variation of surface:
>> delta_a = (3*pi*d*(d^2 + 4*d*h + 8*h^2)^0.5)/100
delta_a =
    (3*pi*d*(d^2 + 4*d*h + 8*h^2)^(1/2))/100
>> %Final result of Part C:
>> delta_a_to_a = delta_a / a
delta_a_to_a =
    (3*pi*d*(d^2 + 4*d*h + 8*h^2)^(1/2))/(100*((pi*d^2)/4 + pi*h*d))
>> delta_a_to_a = simplify (delta_a_to_a)
delta_a_to_a =
    (3*(d^2 + 4*d*h + 8*h^2)^(1/2))/(25*(d + 4*h))
>> %Part D:
>> %Inner surface function:
>> a = pi * (d - 0.1 * d)^2
a =
    (81*pi*d^2)/100
>> %Partial derivatives of inner surface:
>> diff_a_d = diff(a,d)
diff_a_d =
    (81*pi*d)/50
>> %square of variation of inner surface calculation:
```

```
>> delta2a = (diff_a_d * delta_d)^2
delta2a =
        (59049*pi^2*d^4)/6250000
>> delta_a = 0.0972 * pi * d^2
delta_a =
        (243*pi*d^2)/2500
>> %Final result of Part D:
>> delta_a_to_a = eval(delta_a / a)
delta_a_to_a =
   0.1200
```

تمرین ۱-۱۰

```
>>% Part A:
>>% v_fe: volume of Fe
>>% v_al: volume of Al
>>% rho_fe: density of Fe
>>% rho_al: density of Al
>>% m_fe: mass of Fe
>>% m_al: mass of Al
>>% m_total: total mass
>>% n_fe: number of Fe bulk experiments
>>% n_al: number of Al bulk experiments
>>% s2_v: second power of standard deviation of volume
>>% n: number of experiments
>>% sigma2_v: volume variance
>>% s2_v_fe: second power of standard deviation of Fe volume
>>% s2_v_al: second power of standard deviation of Al volume
>>% d_mtotal_to_FeVolume: Partial derivative of total mass to Fe volume
>>% d_mtotal_to_AlVolume: Partial derivative of total mass to Al volume
>>% s2_mtotal: second power of standard deviation of total mass function
>>% s2_mtotal_value: value of second power of standard deviation of total mass
>>% s_mtotal_value: standard deviation value of total mass
>>% definition of symbolic parameters:
>> syms v_fe v_al rho_fe rho_al m_fe m_al m_total n_fe n_al s2_v n sigma2_v
s2_v_fe s2_v_al d_mtotal_to_FeVolume d_mtotal_to_AlVolume s2_mtotal;
>>% mass relation with volume and density:
>> m_fe = v_fe * rho_fe;
>> m_al = v_al * rho_al;
>> m_total = m_fe + m_al
m_total =
        rho_al*v_al + rho_fe*v_fe
>> sigma2_v_fe = 0.025;
```



```
>> sigma2_v_al = 0.058;
>> n_fe = 8;
>> n_al = 15;
>>% To compute satandard deviation, S parameter used in place of sigma,
Because of n<20.
>>% calculation second power of standard deviation of volume
>> s2_v = (n /(n -1)) * sigma2_v;
>> s2_v_fe = subs(s2_v, {n, sigma2_v}, {n_fe, sigma2_v_fe})
s2_v_fe =
   0.0286
>>  s2_v_al = subs(s2_v, {n, sigma2_v}, {n_al, sigma2_v_al})
s2_v_al =
   0.0621
>>% To compute satandard deviation of total mass, d(totalmass/volume) of Al and
Fe are needed, so:
>> d_mtotal_to_FeVolume = diff(m_total, v_fe)
d_mtotal_to_FeVolume =
    rho_fe
>> d_mtotal_to_AlVolume = diff(m_total, v_al)
d_mtotal_to_AlVolume =
    rho_al
>>% calculation second power of standard deviation of total mass
>> s2_mtotal = d_mtotal_to_FeVolume^2 * s2_v_fe + d_mtotal_to_AlVolume^2
* s2_v_al
s2_mtotal =
    rho_fe^2/35 + (87*rho_al^2)/1400
>>% Substitution density value to calculate the second power of standard
deviation of total mass
>> s2_mtotal_value = subs(s2_mtotal , {rho_fe, rho_al}, {7.88,2.7})
s2_mtotal_value =
   2.2271
>> s_mtotal_value = sqrt (s2_mtotal_value)
s_mtotal_value =
1.4924
>>% Part B
>>% Mass is a function of (V_fe , V_al) parametes so Massbar = function(Vbar_fe
, Vbar_al)
>>% vbar_fe: Average volume of Fe
>>% vbar_al: Average volume of Al
>>% mbar_total: Average of total mass
>>% s2_vbar: second power of standard deviation of volume average
>>% s2_vbar_fe: second power of standard deviation of Fe Average volume
>>% s2_vbar_al: second power of standard deviation of Al Average volume
```

```
>>% s2_mbartotal: second power of standard deviation of average total mass function
>>% s2_vi: second power of standard deviation of each element volume
>> syms vbar_fe vbar_al mbar_total s2_vbar s2_vbar_fe s2_vbar_al s2_mbartotal s2_vi;
>>% Calculation of total mass average value:
>> mbar_total = rho_fe * vbar_fe + rho_al * vbar_al;
>> mbar_total_value = subs(mbar_total, {rho_fe, vbar_fe, rho_al, vbar_al}, {7.88, 26.52, 2.70, 8.72})
mbar_total_value =
    232.5216
>>% To compute satandard deviation of vbar:
>> s2_vbar = s2_vi/n;
>> s2_vbar_fe = subs(s2_vbar,{s2_vi, n},{s2_v_fe, n_fe})
s2_vbar_fe =
  0.0036
>> s2_vbar_al = subs(s2_vbar,{s2_vi, n},{s2_v_al, n_al})
s2_vbar_al =
  0.0041
>>     s2_mbartotal     =     d_mtotal_to_FeVolume^2     *     s2_vbar_fe     + d_mtotal_to_AlVolume^2 * s2_vbar_al
s2_mbartotal =
      rho_fe^2/280 + (29*rho_al^2)/7000
>>% Substitution density value to calculate the second power of standard deviation of total mass
>> s2_mbartotal_value = subs(s2_mbartotal , {rho_fe, rho_al}, {7.88,2.7})
s2_mbartotal_value =
  0.2520
>> s_mbartotal_value = sqrt(s2_mbartotal_value)
s_mbartotal_value =
  0.5020
```

مثال ۲-۲

```
>>% x: width of rectangle.
>>% y: length of rectangle.
>>% sigma_x: Standard deviation of rectangle width.
>>% sigma_y: Standard deviation of rectangle length.
>>% p_value: rectangle perimeter value.
>>% sigma_p_x: partial derivative of perimeter to width.
>>% sigma_p_y: partial derivative of perimeter to length.
>>% sigma2_p: rectangle perimeter variance
```



```
>>% sigma_p_value: Standard Deviation of rectangle perimeter.
>> syms x y sigma_x sigma_y;
>>% perimeter function definition:
>> p = 2*x + 2*y
p =
   2*x + 2*y
>> % perimeter value calculation:
>> p_value = subs(p,{x,y},{50.11,75.21})
p_value =
   250.6400
>>% perimeter partial derivative calculation:
>> sigma_p_x = diff(p,x)
sigma_p_x =
   2
>> sigma_p_y = diff(p,y)
sigma_p_y =
   2
>> % calculation of perimeter variance:
>> sigma2_p = sigma_p_x^2 * sigma_x^2 + sigma_p_y^2 * sigma_y^2
sigma2_p =
   4*sigma_x^2 + 4*sigma_y^2
>>% Calculation of Standard Deviation of rectangle perimeter:
>> sigma_p_value = sqrt(subs(sigma2_p,{sigma_x, sigma_y},{0.05, 0.08}))
sigma_p_value =
  0.1887
```

مثال ۲-۷

```
>>% m: mass
>>% v: volume
>>% sigma_m: Standard deviation of mass
>>% sigma_v: Standard deviation of volume
>>% rho: density function
>>% rho_value: value of density
>>% sigma_rho_m: partial derivative of density to mass
>>% sigma_rho_v: partial derivative of density to volume
>>% sigma_m_value: value of Standard Deviation of mass
>>% sigma_v_value: value of Standard Deviation of volume
>>% sigma2_rho: density variance
>>% sigma_rho_value_base: Standard Deviation of density in part A.
>>% sigma_rho_value_of_masschange: Standard Deviation of density in part B with change in mass computation accuracy.
```

```
>>% sigma_rho_value_of_volchange: Standard Deviation of density in part B  with change in volume computation accuracy.
>> syms m v rho sigma_m sigma_v
>>% density function definition
>> rho = m/v
rho =
m/v
>>% density value calculation
>> rho_value = subs(rho,{m, v},{674.0, 261.0})
rho_value =
   2.5824
>>% Density partial derivative calculation
>> sigma_rho_m = diff(rho,m)
sigma_rho_m =
      1/v
>> sigma_rho_v = diff(rho,v)
sigma_rho_v =
      -m/v^2
>> sigma_m_value = 1;
>> sigma_v_value = 0.1;
>>% calculation of density variance.
>> sigma2_rho = sigma_rho_m^2 * sigma_m^2 + sigma_rho_v^2 * sigma_v^2
sigma2_rho =
        sigma_m^2/v^2 + (m^2*sigma_v^2)/v^4
>> sigma2_rho = subs(sigma2_rho,{m, v},{674, 261})
sigma2_rho =
        sigma_m^2/68121 + (454276*sigma_v^2)/4640470641
>>% Calculation of Standard Deviation of density in part A:
>>        sigma_rho_value_base          =          sqrt(subs(sigma2_rho,{sigma_m, sigma_v},{sigma_m_value, sigma_v_value}))
sigma_rho_value_base =
   0.0040
>>% if mass computation accuracy become two times greater, sigma_m will be half, so sigma_m_value = 0.5
>> sigma_m_value = .5;
>>      sigma_rho_value_of_masschange      =      sqrt(subs(sigma2_rho,{sigma_m, sigma_v},{sigma_m_value, sigma_v_value}))
>>% Calculation of Standard Deviation of density in part B with change in mass computation accuracy
sigma_rho_value_of_masschange =
   0.0022
>>% if mass computation accuracy become two times greater, sigma_m will be half, so sigma_v_value = 0.05
```



```
>> sigma_m_value = 1;
>> sigma_v_value = 0.05;
>>% Calculation of Standard Deviation of density in part B  with change in volume computation accuracy.
>>      sigma_rho_value_of_volchange      =      sqrt(subs(sigma2_rho,{sigma_m, sigma_v},{sigma_m_value, sigma_v_value}))
sigma_rho_value_of_volchange =
   0.0039
>>% 0.0022 < 0.0039 so mass computation accuracy affected density accuracy more than volume computation accuracy.
```

مثال ۲-۸

```
>>% r1: resistance number one.
>>% r2: resistance number two.
>>% rt: total resistance.
>>% sigma_r1: Standard deviation of resistance number one.
>>% sigma_r2: Standard deviation of resistance number two.
>>% sigma_rt_to_r1: Partial derivative of total resistance to resistance number one.
>>% sigma_rt_to_r2: Partial derivative of total resistance to resistance number two.
>> syms r1 r2 sigma_r1 sigma_r2;
>>% total resistance function definition:
>> rt = r1*r2/(r1+r2)
rt =
     (r1*r2)/(r1 + r2)
>>% total resistance value calculation:
>> rt_value = subs(rt,{r1,r2},{100,20})
rt_value =
     16.6667
>>% total resistance partial derivative calculation:
>> sigma_rt_to_r1 = diff(rt,r1)
sigma_rt_to_r1 =
     r2/(r1 + r2) - (r1*r2)/(r1 + r2)^2
>> sigma_rt_to_r1 = simplify(sigma_rt_to_r1)
sigma_rt_to_r1 =
     r2^2/(r1 + r2)^2
>> sigma_rt_to_r2 = diff(rt,r2)
sigma_rt_to_r2 =
     r1/(r1 + r2) - (r1*r2)/(r1 + r2)^2
>> sigma_rt_to_r2 = simplify(sigma_rt_to_r2)
sigma_rt_to_r2 =
```

```
      r1^2/(r1 + r2)^2
>> % calculation of total resistance variance:
>> sigma2_rt = sigma_rt_to_r1^2 * sigma_r1^2 + sigma_rt_to_r2^2 * sigma_r2^2
sigma2_rt =
      (r1^4*sigma_r2^2)/(r1 + r2)^4 + (r2^4*sigma_r1^2)/(r1 + r2)^4
>> sigma2_rt = simplify(sigma2_rt)
sigma2_rt =
      (r1^4*sigma_r2^2 + r2^4*sigma_r1^2)/(r1 + r2)^4
>>% Calculation of Standard Deviation of total resistance:
>> sigma_rt_value = sqrt(subs(sigma2_rt,{r1, r2, sigma_r1, sigma_r2},{100, 20, 10,
1}))
sigma_rt_value =
  0.7479
>>% Part B: changing in resistance number one accuracy:
>> sigma_rt_value = sqrt(subs(sigma2_rt,{r1, r2, sigma_r1, sigma_r2},{100, 20, 1,
1}))
sigma_rt_value =
  0.6950
```

مثال ۲-۹

```
>> % xi: input values.
>> % xbar: average of input values.
>> % totalcount: count of input values.
>> % di: difference between input values and their average.
>> % d2i: square of di value.
>> % s: Standard Deviation.
>> % test: di/s
>> % chauvenet: Chauvenet's Criterion for Rejecting a Reading; Ratio of Maximum
Acceptable
>> % Deviation to Standard Deviation, |(DeltaXmax/sx)|
>> % chauvenet_count: count of chauvenet values.
>> % chauvenet_ref : Chauvenet's Criterion for input count.
>> % dinew: difference betwin input values and their average after omitting of
rejecting value.
>> % xbarnew: average of input values after omitting of rejecting value.
>> % snew: Standard Deviation after omitting of rejecting value.
>> % Inserting input values:
>> xi = [5.30 5.73 6.77 5.26 4.33 5.45 6.09 5.64 5.81 5.75]
xi =
    5.30    5.73    6.77    5.26    4.33    5.45    6.09    5.64
5.81    5.75
>> chauvenet = [3 4 5 6 7 8 9 10 15 20 25 50 100 300 500 1000 ;
```



```
1.38 1.54 1.65 1.73 1.80 1.87 1.91 1.96 2.13 2.24 2.33 2.57 2.81 3.14 3.29 3.48]
chauvenet =
 Columns 1 through 8
    3.00    4.00    5.00    6.00    7.00    8.00    9.00
10.00
    1.38    1.54    1.65    1.73    1.80    1.87    1.91
1.96
 Columns 9 through 16
    15.00    20.00    25.00    50.00    100.00    300.00    500.00
1000.00
    2.13    2.24    2.33    2.57    2.81    3.14    3.29
3.48
>> xbar = mean(xi)
xbar =
    5.61
>> totalcount = length(xi)
totalcount =
    10.00
>> di = xi-xbar
di =
    -0.31    0.12    1.16    -0.35    -1.28    -0.16    0.48
0.03    0.20    0.14
>> d2i = di.^2
d2i =
    0.10    0.01    1.34    0.12    1.65    0.03    0.23
0.00    0.04    0.02
>> s = sqrt(sum(d2i)/(totalcount -1))
s =
    0.63
>> test = abs(di)/s
test =
    0.50    0.19    1.85    0.56    2.05    0.26    0.76
0.04    0.31    0.22
>> chauvenet_count = length(chauvenet)
chauvenet_count =
    16.00
>> for i = 1:chauvenet_count
     if chauvenet(1,i)==totalcount
       chauvenet_ref = chauvenet(2,i);
       break
     end
   end
>> chauvenet_ref
```

```
chauvenet_ref =
    1.96
>> for i=1:totalcount
    if test(i) >= chauvenet_ref
      reject_id = i;
      break
    end
  end
>> reject_id
reject_id =
    5.00
>> for i=1:totalcount
      if i < reject_id
        xinew(i) = xi(i);
      elseif i >reject_id
        xinew(i-1) = xi(i);
      end
    end
>> xinew
xinew =
    5.30    5.73    6.77    5.26    5.45    6.09    5.64    5.81
5.75
>> xbarnew = mean(xinew)
xbarnew =
    5.76
>> totalcount = totalcount -1
totalcount =
    9.00
>>  dinew = xinew - xbarnew
>> dinew
dinew =
    -0.46    -0.03    1.01    -0.50    -0.31    0.33    -0.12    0.05
-0.01
>> d2inew = dinew.^2
d2inew =
    0.21    0.00    1.03    0.25    0.09    0.11    0.01    0.00
0.00
>> snew = sqrt(sum(d2inew)/(totalcount -1))
snew =
0.46
```


مثال ۳-۲

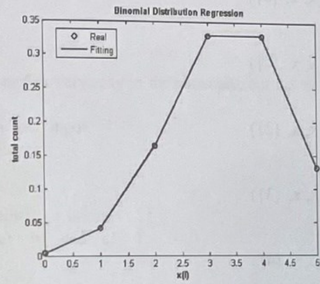
```
>> %xi: input values
>> %ni: Absolute values
>> %count: count of inputs
>> %sum_ni: sum of absolute values
>> %pi: relative values
>> %p: p in binomial distribution
>> %q: q in binomial distribution
>> %n: n in binomial distribution
>> %x: x in binomial distribution
>> %Binomial_x: binomial distribution function
>> %p_power_n: p^n
>> %q_power_n: q^n
>> %ptoq_power_n: (p/q)^n
>> %prime_factor: An array that its cell has filled by prime factors of (p/q)^n
>> %count_factor: cell count of prime factors array
>> %prime: A matrix that has filled by prime factors and their power.
>> %sw: A switch shows prime factor has repeated or not.
>> %p0, p1, p2, p3, p4, p5: binomial distribution function value when x={0,1,2,3,4,5}
>> %Final_Answer: A array return binomial distribution function values
>> %difi: An array shows differences between relative values and binomial distribution function values
>> %input values:
>> xi = 0:1:5
xi =
   0   1   2   3   4   5
>>  ni = [1 10 40 80 80 32]
ni =
   1   10   40   80   80   32
>> count = length(xi)
count =
   6
>> sum_ni = sum(ni)
sum_ni =
  243
>> %Calculating relative values:
>> pi = ni./sum_ni
pi =
    0.0041   0.0412   0.1646   0.3292   0.3292   0.1317
>> p_power_n = pi(count)
```

```
p_power_n =
   0.1317
>> q_power_n = pi(1)
q_power_n =
   0.0041
>> ptoq_power_n = p_power_n / q_power_n
ptoq_power_n =
   32
>> %Finding prime factors of (p/q)^n :
>> prime_factor = factor(ptoq_power_n)
prime_factor =
   2   2   2   2   2
>> count_factor = length(prime_factor)
count_factor =
   5
>> sw=1;
>> j=1;
>> prime(1,j) = prime_factor(1);
>> prime(2,j) = 1;
>> prime
prime =
   2
   1
>> %Finding that n=5 is very easy in this example, but we can use following code to fill
  %prime array for each input.
>> for i=2:count_factor
     for k=1:j
       sw =0;
       if prime_factor(i) == prime(1 , k)
         prime(2 , k) = prime(2 , k) + 1;
         sw = 1;
         break
       end
     end
     if sw == 0
       j = j+1;
       prime(1,j) = prime_factor(i);
       prime(2,j) = 1;
     end
   end
>> prime
prime =
```



```
   2
   5
>> %Calculating coefficients of binomial distribution function:
>> n = prime(2,1)
n =
   5
>> p = nthroot(p_power_n, n)
p =
   0.6667
>> q = 1 - p
q =
   0.3333
>> syms x
>> %Binomial distribution function definition:
>> Binomial_x = (factorial(n)*p^x*q^(n-x))/(factorial(n-x)*factorial(x))
Binomial_x =
  (120*(1/3)^(5 - x)*(2/3)^x)/(factorial(5 - x)*factorial(x))
>> %We can calculate binomial distribution function individually or with a for loop:
>> p0 = subs(Binomial_x, x, {0})
p0 =
   0.0041
>> p1 = subs(Binomial_x, x, {1})
p1 =
   0.0412
>> p2 = subs(Binomial_x, x, {2})
p2 =
   0.1646
>> p3 = subs(Binomial_x, x, {3})
p3 =
   0.3292
>> p4 = subs(Binomial_x, x, {4})
p4 =
   0.3292
>> p5 = subs(Binomial_x, x, {5})
p5 =
   0.1317
>> p0 + p1 + p2 + p3 + p4 +p5
ans =
   1.0000
>> for i=1:count
     Final_Answer(i) = subs(Binomial_x, x, {i-1});
   end
```

```
>> Final_Answer
Final_Answer =
  0.0041   0.0412   0.1646   0.3292   0.3292   0.1317
>> sum(Final_Answer)
ans =
  1.0000
>> %Calculation of differences between relative values and binomial distribution function values
>> difi = pi - Final_Answer
difi =
  1.0e-15 *
  0.0017   0.0139   0.0278   0.1110   0.0555   0.0555
>> plot(xi, pi, 'o', xi, Final_Answer, 'LineWidth',2);
>> title('Binomial Distribution Regression', 'FontWeight', 'bold');
>> ylabel('total count', 'FontWeight', 'bold');
>> xlabel('x(i)', 'FontWeight', 'bold');
>> legend('Real','Fitting');
```



مثال ۴-۲

```
>> %gamma and c: constants of thermodynamics equaion.
>> %v: volume input values.
>> %p: pressure input values
>> %x: An array that each cells filled by log(volume input values)
>> %y: An array that each cells filled by log(pressure input values)
>> %x_2: An array that each cells filled by second power of log(volume) values.
>> %x_y: An array that each cells filled by multiple of log(volume) and log(pressure)
>> %sum_x: Summation of log(volume) values.
```



```
>> %sum_y: Summation of log(pressure) values.
>> %sum_x_y: Summation of multiple of log(volume) and log(pressure)
>> %sum_x_2: Summation of second power of log(volume) values.
>> %n: count of input values.
>> %A,B: coefficients of equation
>> %Answer: Answer of equation
>> %gamma_value: Answer of equation that shows gamma canstant value.
>> %c_value: Answer of equation that shows c canstant value.
>> %pressure_result: pressure value when volume is 100.
>> %x_new: log(volume) values for comparing input values with values from fitting equation.
>> %y_new: log(pressure) values for comparing input values with values from fitting equation.
>> %Part A: Constant Sigma:
>> syms pressure volume c gamma;
>> %thermodynamics equation definition:
>> pressure = c / volume^gamma
pressure =
   c/volume^gamma
>> %input values:
>> v = [54.3 61.8 72.4 88.7 118.6 194]
v =
  54.3000   61.8000   72.4000   88.7000   118.6000   194.0000
>> p = [61.2 49.5 37.6 28.4 19.2 10.1]
p =
  61.2000   49.5000   37.6000   28.4000   19.2000   10.1000
>> x = log10(v)
x =
  1.7348   1.7910   1.8597   1.9479   2.0741   2.2878
>> y = log10(p)
y =
  1.7868   1.6946   1.5752   1.4533   1.2833   1.0043
>> x_2 = x.^2
x_2 =
  3.0095   3.2076   3.4586   3.7944   4.3018   5.2340
>> x_y = x.*y
x_y =
  3.0997   3.0350   2.9294   2.8310   2.6617   2.2977
>> sum_x = sum(x)
sum_x =
  11.6953
>> sum_y = sum(y)
sum_y =
```

```
 8.7975
>> sum_x_y = sum(x_y)
sum_x_y =
 16.8544
>> sum_x_2 = sum(x_2)
sum_x_2 =
 23.0061
>> n = length(x)
n =
 6
>> %setting coefficients of equation in matrix A and B:
>> A = [sum_x n; sum_x_2 sum_x]
A =
 11.6953   6.0000
 23.0061  11.6953
>> B = [sum_y ; sum_x_y]
B =
 8.7975
 16.8544
>> %Solution of equation:
>> Answer = A \ B
Answer =
 -1.4042
 4.2034
>> %y = ax + b
>> %a = -gamma
>> %b = -log(c)
>> %finding of equation constants:
>> gamma_value = -Answer(1,1)
gamma_value =
 1.4042
>> c_value = 10^Answer(2,1)
c_value =
 1.5972e+04
>> pressure_result = subs(pressure, {volume, c, gamma}, {100, c_value, gamma_value})
pressure_result =
 24.8282
>> %comparing the equation results with input values:
>> x_new = 1.7:0.1:2.3
x_new =
 1.7000  1.8000  1.9000  2.0000  2.1000  2.2000  2.3000
>> y_new = polyval(Answer, x_new)
```



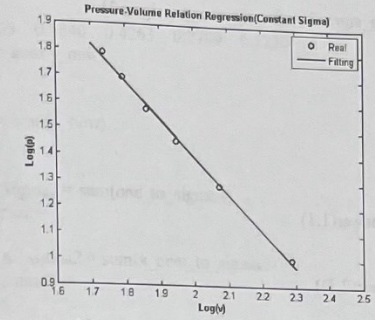
```
y_new =
 1.8162  1.6758  1.5354  1.3949  1.2545  1.1141  0.9737
>> plot(x, y, 'o', x_new, y_new, 'LineWidth',2);
>> xlabel('Log(v)', 'FontWeight', 'bold');
>> ylabel('Log(p)', 'FontWeight', 'bold');
>> legend('Real','Fitting');
>> title('Pressure-Volume Relation Regression(Constant Sigma)', 'FontWeight', 'bold');
>> %Part B: Various Sigma:
>> %one_to_sigma2: 1/sigma2 = pressure
>> %x_new: ln(volume) values
>> %y_new: ln(pressure) values
>> %x_new_to_sigma2: ln(volume)/sigma2
>> %y_new_to_sigma2: ln(pressure)/sigma2
>> %x2_new_to_sigma2: second power of ln(volume) / sigma2
>> %xy_new_to_sigma2: (multiple of ln(volume) and ln(pressure)) / sigma2
>> %sum_y_new: Summation of ln(pressure) values
>> %sum_x_new: Summation of ln(volume) values
>> %sum_one_to_sigma2: Summation of (1/sigma2) values.
>> %sum_x_new_to_sigma2: Summation of [ln(volume)/sigma2] values
>> %sum_x2_new_to_sigma2: Summation of [second power of ln(volume)/sigma2] values
>> %sum_y_new_to_sigma2: Summation of [ln(pressure)/sigma2] values
>> %sum_xy_new_to_sigma2: Summation of [(multiple of ln(volume) and ln(pressure))/sigma2] values
>> %delta = [Summation of (1/sigma2) * (Summation of ln(volume)^2 / sigma2)] - (Summation of ln(volume)/ sigma2)^2
>> %dif_b_to_c: partial derivative of b to c
>> %dif_a_to_gamma: partial derivative of a to gamma
>> %By attention of Poisson relation:
>> one_to_sigma2 = p
one_to_sigma2 =
 61.2000  49.5000  37.6000  28.4000  19.2000  10.1000
>> x_new = log(v)
x_new =
 3.9945  4.1239  4.2822  4.4853  4.7758  5.2679
>> y_new = log(p)
y_new =
 4.1141  3.9020  3.6270  3.3464  2.9549  2.3125
>> y_new_to_sigma2 = y_new.*p
y_new_to_sigma2 =
 251.7858  193.1476  136.3754  95.0375  56.7343  23.3566
>> x_new_to_sigma2 = x_new.*p
```

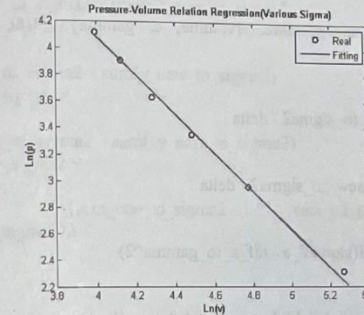
```
x_new_to_sigma2 =
  244.4649  204.1332  161.0110  127.3814  91.6945  53.2054
>> x2_new_to_sigma2 = p.*x_new.^2
x2_new_to_sigma2 =
  976.5209  841.8257  689.4821  571.3386  437.9107  280.2783
>> xy_new_to_sigma2 = x_new.*y_new.*p
xy_new_to_sigma2 =
  1.0e+03 *
  1.0058   0.7965   0.5840   0.4263   0.2709   0.1230
>> sum_y_new = sum(y_new)
sum_y_new =
  20.2570
>> sum_x_new = sum(x_new)
sum_x_new =
  26.9295
>> sum_one_to_sigma2 = sum(one_to_sigma2)
sum_one_to_sigma2 =
  206
>> sum_x_new_to_sigma2 = sum(x_new_to_sigma2)
sum_x_new_to_sigma2 =
  881.8903
>> sum_x2_new_to_sigma2 = sum(x2_new_to_sigma2)
sum_x2_new_to_sigma2 =
  3.7974e+03
>> sum_y_new_to_sigma2 = sum(y_new_to_sigma2)
sum_y_new_to_sigma2 =
  756.4371
>> sum_xy_new_to_sigma2 = sum(xy_new_to_sigma2)
sum_xy_new_to_sigma2 =
  3.2065e+03
>> delta = (sum_one_to_sigma2 * sum_x2_new_to_sigma2) -
sum_x_new_to_sigma2^2
delta =
  4.5249e+03
>> %y = ax + b
>> syms a b;
>> b = log(c);
>> a = -gamma;
>> dif_b_to_c = diff(b,c)
dif_b_to_c =
1/c
>> dif_a_to_gamma = diff(a,gamma)
dif_a_to_gamma =
```



```
-1
>> A = [sum_x_new_to_sigma2 sum_one_to_sigma2; sum_x2_new_to_sigma2
sum_x_new_to_sigma2]
A =
  1.0e+03 *
  0.8819   0.2060
  3.7974   0.8819
>> B = [sum_y_new_to_sigma2 ; sum_xy_new_to_sigma2]
B =
  1.0e+03 *
  0.7564
  3.2065
>> Answer = A \ B
Answer =
  -1.4474
  9.8685
>> gamma_value = -Answer(1,1)
gamma_value =
  1.4474
>> c_value = exp(Answer(2,1))
c_value =
  1.9312e+04
>> pressure_result = subs(pressure, {volume, c, gamma}, {100, c_value,
gamma_value})
pressure_result =
  24.6024
>> sigma2_a = sum_one_to_sigma2 / delta
sigma2_a =
  0.0455
>> sigma2_b = sum_x2_new_to_sigma2 / delta
sigma2_b =
  0.8392
>> sigma2_gamma = eval(sigma2_a / dif_a_to_gamma^2)
sigma2_gamma =
  0.0455
>> sigma2_c = subs((sigma2_b / dif_b_to_c^2), {c},{c_value})
sigma2_c =
    3.1299e+08
>> x_compare = 3.99:.26:5.29
x_compare =
  3.9900   4.2500   4.5100   4.7700   5.0300   5.2900
>> y_compare = polyval(Answer, x_compare)
y_compare =
```

```
4.0933   3.7169   3.3406   2.9643   2.5879   2.2116
>> plot(x_new, y_new, 'o', x_compare, y_compare, 'LineWidth',2);
>> xlabel('Ln(v)', 'FontWeight', 'bold');
>> ylabel('Ln(p)', 'FontWeight', 'bold');
>> legend('Real','Fitting');
>> title('Pressure-Volume Relation Regression(Various Sigma)', 'FontWeight', 'bold');
```



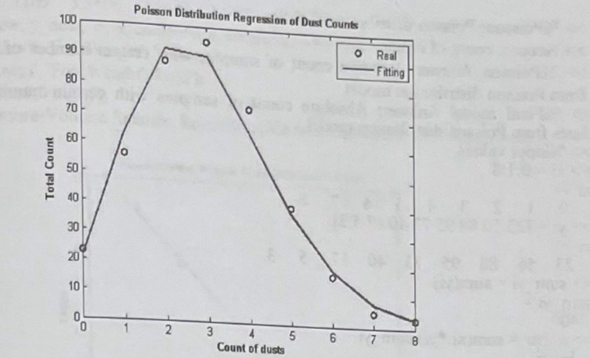


مثال ۳-۴

```
>> %xi: count of dusts
>> %yi: count of samples with certain number of dusts
>> %sum_yi: summation of count of samples
>> %x_bar: Average of xi for Poisson Distribution
```



```
>> %Poisson: Poisson distribution function
>> %count: count of inputs
>> %Poisson_Answer: Relative count of samples with certain number of dusts
from Poisson distribution model
>> %Final_model_Answer: Absolute count of samples with certain number of
dusts from Poisson distribution model
>> %input values:
>> xi = 0:1:8
xi =
   0   1   2   3   4   5   6   7   8
>> yi = [23 56 88 95 73 40 17 5 3]
yi =
   23   56   88   95   73   40   17   5   3
>> sum_yi = sum(yi)
sum_yi =
   400
>> x_bar = sum(xi.*yi)/sum_yi
x_bar =
   2.9250
>> syms x;
>> Poisson = exp(-x_bar) * x_bar^x / factorial(x)
Poisson =
(7733897168035965*(117/40)^x)/(1441151880758558 72*factorial(x))
>> count = length(xi)
count =
   9
>>  for i=1:count
    Poisson_Answer(i) = subs(Poisson, x, {i-1});
   end
>> Poisson_Answer
Poisson_Answer =
   0.0537   0.1570   0.2296   0.2238   0.1637   0.0957   0.0467   0.0195
0.0071
>> Final_model_Answer = round(Poisson_Answer.*sum_yi)
Final_model_Answer =
   21   63   92   90   65   38   19   8   3
>> plot(xi, yi, 'o', xi, Final_model_Answer, 'LineWidth',2);
>> xlabel('Count of dusts', 'FontWeight', 'bold');
>> ylabel('Total Count', 'FontWeight', 'bold');
>> legend('Real','Fitting');
>> title('Poisson Distribution Regression of Dust Counts', 'FontWeight', 'bold');
```



مثال ۳-۸

```
>> %xi: count of accidents
>> %ni: count of days with certain accidents
>> %sum_ni: sum of days
>> %count: count of inputs
>> %fx: Relative count of days
>> %x_bar: count of accidents average
>> %Poisson: Poisson distribution function
>> %Poisson_Answer: An array that its cells filled by poisson distribution values
>> %Final_model_Answer: An array that its cells filled by final answers of poisson
distribution
>> %f: degree of freedom
>> %Compatibility: Compatibility of input values and model values
>> %input values:
>> xi = 0:1:4
xi =
    0   1   2   3   4
>> ni = [21 18 7 3 1]
ni =
   21   18   7   3   1
>>  sum_ni = sum(ni)
sum_ni =
   50
>> count = length(xi)
count =
   5
```



```
>>  fx = ni./sum_ni
fx =
   0.4200   0.3600   0.1400   0.0600   0.0200
>> x_bar = 0;
>> for i=1:count
     x_bar = x_bar + xi(i) * fx(i);
   end
>> x_bar
x_bar =
   0.9000
>> %Poisson distribution function definition:
>> syms x;
>> Poisson = exp(-x_bar) * x_bar^x / factorial(x)
Poisson =
   (3662053936215823*(9/10)^x)/(9007199254740992*factorial(x))
>> for i=1:count
     Poisson_Answer(i) = subs(Poisson, x, {i-1});
   end
>> Poisson_Answer
Poisson_Answer =
   0.4066   0.3659   0.1647   0.0494   0.0111
>> sum(Poisson_Answer)
ans =
   0.9977
>>  Final_model_Answer = round(Poisson_Answer.*sum_ni)
Final_model_Answer =
   20   18   8   2   1
>> chi_square = 0;
>> for i=1:count
     chi_square          =          chi_square          +          (ni(i)          -
Final_model_Answer(i))^2/Final_model_Answer(i);
   end
>> chi_square
chi_square =
   0.6750
>> f = count - 1
f =
   4
>> chi_square_1 = 0.484;
>> chi_square_2 = 0.711;
>> p_1 = 97.5;
>> p_2 = 95;
```

```
>> Compatibility = (p_2 - p_1)* (chi_square - chi_square_1)/(chi_square_2 - chi_square_1) + p_1
Compatibility =
  95.3965
```

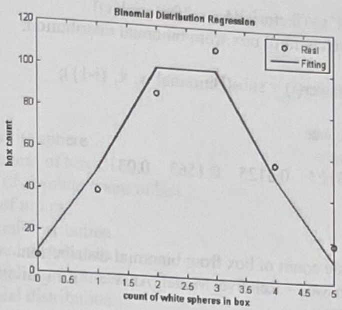
مثال ۳-۹

```
>> %xi: count of white sphere
>> %ni: Absolute count of box
>> %sum_ni: sum of absolute count of box
>> %count: count of inputs
>> %p: p in binomial distribution
>> %q: q in binomial distribution
>> %n: n in binomial distribution
>> %x: x in binomial distribution
>> %Binomial_x: binomial distribution function
>> %Relative_Model_Answer: An array that its cell has filled by relative count of box from binomial distribution
>> %Absolute_Model_Answer: An array that its cell has filled by absolute count of box from binomial distribution
>> %f: degree of freedom
>> %Compatibility: Compatibility of input values and model values
>> %input values:
>> xi = 0:1:5
xi =
   0   1   2   3   4   5
>> ni = [8 40 88 110   56 18]
ni =
   8   40   88   110   56   18
>> count = length(xi)
count =
   6
>> %coefficients of binomial distribution function:
>> n = count - 1
n =
   5
>> p = 0.5;
>> q = 1 - p
q =
   0.5000
>> syms x;
>> %Binomial distribution function definition:
```



```
>> Binomial_x = (factorial(n)*p^x*q^(n-x))/(factorial(n-x)*factorial(x))
Binomial_x =
(120*(1/2)^(5 - x)*(1/2)^x)/(factorial(5 - x)*factorial(x))
>> %Calculation relative count of box from binomial distribution:
>> for i=1:count
     Relative_Model_Answer(i) = subs(Binomial_x, x, {i-1});
   end
>> Relative_Model_Answer
Relative_Model_Answer =
   0.0313   0.1563   0.3125   0.3125   0.1563   0.0313
>> sum_ni = sum(ni)
sum_ni =
   320
>> %Calculation absolute count of box from binomial distribution:
>> Absolute_Model_Answer = Relative_Model_Answer.*sum_ni
Absolute_Model_Answer =
   10   50   100   100   50   10
>> chi_square = 0;
>> for i=1:count
       chi_square = chi_square + (ni(i) - Absolute_Model_Answer(i))^2/Absolute_Model_Answer(i);
   end
>> chi_square
chi_square =
   11.9600
>> f = count - 1
f =
   5
>> %Look up chi square and p values from refrence table according to degree of freedom:
>> chi_square_1 = 11.1;
>> chi_square_2 = 12.8;
>> p_1 = 5;
>> p_2 = 2.5;
>> %Calculation final answer by intrapolate method
>> Compatibility = (p_2 - p_1)* (chi_square - chi_square_1)/(chi_square_2 - chi_square_1) + p_1
Compatibility =
   3.7353
>> plot(xi, ni, 'o', xi, Absolute_Model_Answer, 'LineWidth',2);
>> title('Binomial Distribution Regression', 'FontWeight', 'bold');
>> ylabel('box count', 'FontWeight', 'bold');
>> xlabel('count of white spheres in box', 'FontWeight', 'bold');
```

```
>> legend('Real','Fitting');
```



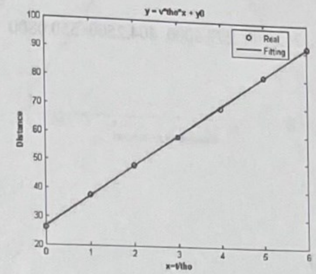
مثال ۴-۱

```
>> %y = v*t + y0
>> %x = t / tho
>> %y = v*tho*x + y0
>> %a = v*tho
>> %b = y0
>> %xi: timestep counter values
>> %yi: distance values
>> %xi2: second power of timestep counter values
>> %xi_yi: multiple result of xi and yi
>> %sum_xi: summation of timestep counter values
>> %sum_yi: summation of distance values
>> %sum_xi2: summation of second power of timestep counter values
>> %sum_xiyi: summation of multiple result of xi and yi
>> %n: count of input values
>> %A,B: coefficients of equations
>> %Answer: answer of equations
>> %y_model: distance values from model
>> syms y a b x;
>> y = a*x + b
y =
        b + a*x
>> xi = 0:1:6
```



```
xi =
    0    1    2    3    4    5    6
>> yi = [26.23 37.72 48.32 58.96 69.40 80.85 91.68]
yi =
   26.2300   37.7200   48.3200   58.9600   69.4000   80.8500   91.6800
>> xi2 = xi.^2
xi2 =
    0    1    4    9   16   25   36
>> xi_yi = xi.*yi
xi_yi =
    0  37.7200  96.6400  176.8800  277.6000  404.2500  550.0800
>> sum_xi = sum(xi)
sum_xi =
    21
>> sum_xi2 = sum(xi2)
sum_xi2 =
    91
>> sum_yi = sum(yi)
sum_yi =
   413.1600
>> sum_xiyi = sum(xi_yi)
sum_xiyi =
   1.5432e+03
>> n = length(xi)
n =
     7
>> A = [sum_xi n; sum_xi2 sum_xi]
A =
    21    7
    91   21
>> B = [sum_yi; sum_xiyi]
B =
  1.0e+03 *
    0.4132
    1.5432
>> Answer = A \ B
Answer =
   10.8461
   26.4846
>> y = subs(y, {a, b}, {Answer(1,1), Answer(2,1)})
y =
    (30369*x)/2800 + 74157/2800
>> y_model = subs(y, {x}, {xi})
```

```
y_model =
  26.4846  37.3307  48.1768  59.0229  69.8689  80.7150  91.5611
>> plot(xi, yi, 'o', xi, y_model, 'LineWidth',2);
>> xlabel('x=t/tho', 'FontWeight', 'bold');
>> ylabel('Distance', 'FontWeight', 'bold');
>> legend('Real','Fitting');
>> title('y = v*tho*x + y0', 'FontWeight', 'bold');
```



مثال ۴-۳

```
>> %x: year
>> %y: population
>> %x_new: converted year values for simple calculation
>> %x_new_2: second power of converted year values
>> %x_new_3: third power of converted year values
>> %x_new_4: fourth power of converted year values
>> %xy: multiple result of year and population
>> %x2y: multiple result of second power of converted year and population
>> %sum_x_new: sum of converted year values
>> %sum_x_new_2: sum of second power of converted year values
>> %sum_x_new_3: sum of third power of converted year values
>> %sum_x_new_4: sum of fourth power of converted year values
>> %sum_y: sum of population values
>> %sum_xy: sum of multiple result of year and population
>> %sum_x2y: sum of multiple result of second power of converted year and
population
>> %A,B: coefficients of equations
>> %Answer: Answer of equations
>> %Fit_Values: Population fitted values
```

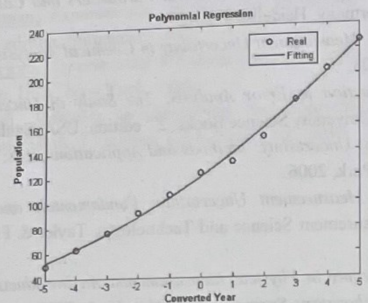


```
>> %check_year: An array shows years of 1990 2000 1870.
>> %new_year: An array shows converted years of 1990 2000 1870.
>> %Fit_Population: An array shows population values from model for converted
years of 1990 2000 1870.
>> %input values:
>> x = 1880:10:1980
x =
    1880  1900   1910   1920   1930   1940   1950   1960   1970
   1980
>> y = [50.2 62.9 76.0 92.0 105.7 122.8 131.7 151.1 179.3 203.3 226.5];
>> %calculation of converted year values and their powers:
>> x_new = (x-1930)/10
x_new =
  -5  -4  -3  -2  -1   0   1   2   3   4   5
>> x_new_2 = x_new.^2
x_new_2 =
  25  16   9   4   1   0   1   4   9  16  25
>> x_new_3 = x_new.^3
x_new_3 =
  -125  -64  -27  -8  -1   0   1   8  27  64  125
>> x_new_4 = x_new.^4
x_new_4 =
  625  256  81  16   1   0   1  16  81  256  625
>> %Calculation of multiple of year and population
>> xy = x_new.*y
xy =
  1.0e+03 *
  -0.2510  -0.2516  -0.2280  -0.1840  -0.1057       0  0.1317  0.3022  0.5379
0.8132   1.1325
>> x2y = x_new_2.*y
x2y =
  1.0e+03 *
  1.2550  1.0064  0.6840  0.3680  0.1057       0  0.1317  0.6044  1.6137
3.2528  5.6625
>> %Sum of expressions calculation:
 >> sum_x_new = sum(x_new)
sum_x_new =
   0
>> sum_x_new_2 = sum(x_new_2)
sum_x_new_2 =
   110
>> sum_x_new_3 = sum(x_new_3)
sum_x_new_3 =
```

```
  0
>> sum_x_new_4 = sum(x_new_4)
sum_x_new_4 =
   1958
>> sum_y = sum(y)
sum_y =
  1.4015e+03
>> sum_xy = sum(xy)
sum_xy =
  1.8972e+03
>> sum_x2y = sum(x2y)
sum_x2y =
  1.4684e+04
>> %coefficients of equations determination:
>> n = length(x)
n =
  11
>> A = [sum_x_new_2 sum_x_new n; sum_x_new_3 sum_x_new_2 sum_x_new;
sum_x_new_4 sum_x_new_3 sum_x_new_2]
A =
     110       0      11
       0     110       0
    1958       0     110
>> B = [sum_y; sum_xy; sum_x2y]
B =
  1.0e+04 *
            0.1402
            0.1897
            1.4684
>> Answer = A \ B
Answer =
  0.7800
  17.2473
  119.6096
>> %determination of fitted values:
>> Fit_Values = polyval(Answer, x_new)
Fit_Values =
  Columns 1 through 11
   52.8731   63.1004   74.8877   88.2350  103.1423  119.6096  137.6369  157.2242
178.3715  201.0788  225.3461
>> plot(x_new, y, 'o', x_new, Fit_Values, 'LineWidth',2);
>> title('Polynomial Regression', 'FontWeight', 'bold');
>> ylabel('Population', 'FontWeight', 'bold');
>> xlabel('Converted Year', 'FontWeight', 'bold');
>> legend('Real','Fitting')
>> check_year = [1990 2000 1870];
>> new_year = (check_year-1930)/10
```



```
new_year =
   6    7   -6
>> Fit_Population = polyval(Answer, new_year)
Fit_Population =
  251.1715  278.5582  44.2042
```



منابع و مآخذ

1. R. Willink, *Measurement Uncertainty and Probability*, Cambridge University Press, USA, New York, 2013.
2. S. V. Gupta, *Measurement Uncertainties: Physical Parameters and Calibration of Instruments*, Springer, Germany, Heidelberg, 2012.
3. P. D. Bièvre , H. Günzler, *Measurement Uncertainty in Chemical Analysis*, Springer, Germany, Heidelberg, 2003.
4. J. R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, University Science Books, 2nd edition, USA, Saulalito, 1996.
5. R. H. Dieck, *Measurement Uncertainty: Methods and Applications*, ISA; 4th edition, USA, Research Triangle Park, 2006.
6. I. Lira, *Evaluating the Measurement Uncertainty: Fundamentals and Practical Guidance* (Series in Measurement Science and Technology), Taylor & Francis, UK, Bristol, 2002.
7. P. Fornasini, *The Uncertainty in Physical Measurements: An Introduction to Data Analysis in the Physics Laboratory*, Springer, USA, New York, 2008.
8. S. Rabinovich, *Measurement Errors and Uncertainties: Theory and Practice*, Springer, 3rd edition, USA, New York, 2005.
9. M. Grabe, *Measurement Uncertainties in Science and Technology*, Springer, Germany, Heidelberg, 2005.
10. M. Peralta, *Propagation of Errors: How to Mathematically Predict Measurement Errors*, Createspace Independent Publishing Platform, USA, New York, 2012.
11. P. F. Dunn, *Measurement and Data Analysis for Engineering and Science*, CRC Press, 2nd edition, USA, Boca Raton, 2010.
12. R. Malaric, *Instrumentation and Measurement in Electrical Engineering*, Brown Walker Press, USA, Boca Raton, 2011.
13. M. A. Bean, *Probability: The Science of Uncertainty*, American Mathematical Society, USA, Pacific Grove, 2009.
14. H. W. Coleman, W. Glenn Steele, *Experimentation, Validation, and Uncertainty Analysis for Engineers*, Wiley,3rd edition, USA, Hoboken, 2009.
15. J. P. Buonaccorsi, *Measurement Error: Models, Methods, and Applications* (Chapman & Hall/CRC Interdisciplinary Statistics), Chapman and Hall/CRC, USA, Boca Raton, 2010.
16. W.A. Fuller, *Measurement Error Models* (Wiley Series in Probability and Statistics), Wiley-Interscience, USA, Montclair, 2006.

17. I. Hughes, T. Hase, *Measurements and their Uncertainties: A practical guide to modern error analysis*, Oxford University Press, USA, New York, 2010.
18. P. Bevington, D. K. Robinson, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 3rd edition, UK, Gloucester, 2002.
19. J. P. Holman, *Experimental Methods for Engineers*, McGraw-Hill Chemistry series, 4th edition, Singapore, 1987.
20. N. C. Barford, *Experimental Measurements: Precision, Error and Truth*, Wiley, 2nd edition, USA, New York, 1985.
21. W. Navidi, *Statistics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill Science/ Engineering/Math, 3rd edition, USA, New York, 2010.