符号化を用いた命題論理式の極大モデルの計算方法と応用

前田 悠士朗

名古屋大学情報学部コンピュータ科学科 情報システム学専攻 番原・宋研究室

番原・宋研究室ゼミ中間発表
2025 年 11 月 28 日

命題論理式のモデル

- 命題論理式の充足可能性判定問題を SAT 問題といい，通常 CNF という形式で記述される．
- CNF の解 (モデル) が持つ良い性質の例として，極大性，極小性があり，それらを満たすモデルを極大モデル，極小モデルと呼ぶ．

- 極大モデル: 命題論理式 Φ のモデル M について，$M \subset M'$ かつ M' も Φ のモデル，という M' が存在しないもの．
- 極小モデル: 命題論理式 Φ のモデル M について，$M'' \subset M$ かつ M'' も Φ のモデル，という M'' が存在しないもの．

- 極大モデル，極小モデルの応用例
  - 多目的最適化ナップサック問題を順序符号化し，極大，極小モデルを列挙することで，パレートフロントを求めることができる．
  - 整数ナップサック問題を多値符号化し，極大モデルを列挙することで，圧縮解を求めることができる．

先行研究

1. [Koshimura+,'09] では，SAT ソルバーを複数回起動し，極小モデルを求める方法が提案された．
2. [足立,'23] では，CNF に以下の変換を施し，SAT ソルバーを 1 回起動し，極小モデルを求める方法が提案された．

$$M(\Phi) = \bigwedge_{p \in Var(\Phi)} p \rightarrow \neg Cl(\Phi, p)$$
$$Cl(\Phi, p) \equiv \bigwedge_{c \in \Phi, p \in c} c \setminus \{p\}$$

- 既存提案 [Koshimura+,'09] では，SAT ソルバーを複数回起動する必要があった．

- 先行研究を基にし，極大モデルを SAT ソルバー 1 回起動で求める方法に注目した．

研究概要

研究目的

効果的な極大モデル，極小モデルの計算方法の実現

- 本発表では，極大モデルに注目するものとする.

研究内容

1. SAT ソルバー 1 回起動で極大モデルが求まる CNF への変換方法を考案
   - ある負リテラルとして含まれる変数について，節中の他の変数で節が満たされている時，その変数を真にするような変換.
2. 変換の正しさの証明
   - 変換前後で CNF の充足可能性は保持されることの証明.
   - 変換後の CNF のモデルの集合が，変換前の CNF の極大モデルの集合と一致することの証明.

提案変換

アイデア

ある変数が負リテラルとして含まれる全ての節において，節中の他の変数で節が満たされている場合，その変数を真にすることで，できるだけ多くの変数を真にする.

- 与えられた CNF を Φ，変換後の CNF を Ω とすると，提案変換は，Φ に以下のような制約 $M(\Phi)$ を追加し，$\Omega = \Phi \wedge M(\Phi)$ とするものである.

$$M(\Phi) = \bigwedge_{p \in Var(\Phi)} Cl(\Phi, \neg p) \rightarrow p$$

$$Cl(\Phi, \neg p) \equiv \bigwedge_{c \in \Phi, \neg p \in c} c \backslash \{\neg p\}$$

提案変換の説明

- 与えられたCNFをΦ，変換後のCNFをΩとすると，提案変換は，Φに以下のような制約$M(\Phi)$を追加し，$\Omega = \Phi \wedge M(\Phi)$とするものである．

$$
\begin{aligned}
M(\Phi) &= \bigwedge_{p \in Var(\Phi)} Cl(\Phi, \neg p) \rightarrow p \\
Cl(\Phi, \neg p) &\equiv \bigwedge_{c \in \Phi, \neg p \in c} c \backslash \{\neg p\}
\end{aligned}
$$

- $Cl(\Phi, \neg p)$は，変数pが負リテラルとして含まれている全ての節から$\neg p$を除いたものの連言である．
- 例：$\Phi = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$の場合，

$$Cl(\Phi, \neg p) =$$

提案変換の説明

- 与えられた CNF を Φ，変換後の CNF を Ω とすると，提案変換は，Φ に以下のような制約 $M(\Phi)$ を追加し，$\Omega = \Phi \wedge M(\Phi)$ とするものである.

$$M(\Phi) \;=\; \bigwedge_{p \in Var(\Phi)} Cl(\Phi, \neg p) \;\rightarrow\; p$$
$$Cl(\Phi, \neg p) \;\equiv\; \bigwedge_{c \in \Phi, \neg p \in c} c \backslash \{\neg p\}$$

- $Cl(\Phi, \neg p)$ は，変数 p が負リテラルとして含まれている全ての節から $\neg p$ を除いたものの連言である.
- 例：$\Phi \;=\; (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ の場合，

$$Cl(\Phi, \neg p) \;= q \;\wedge$$

提案変換の説明

- 与えられた CNF を Φ，変換後の CNF を Ω とすると，提案変換は，Φ に以下のような制約 $M(\Phi)$ を追加し，$\Omega = \Phi \land M(\Phi)$ とするものである.

$$M(\Phi) = \bigwedge_{p \in Var(\Phi)} Cl(\Phi, \neg p) \rightarrow p$$
$$Cl(\Phi, \neg p) \equiv \bigwedge_{c \in \Phi, \neg p \in c} c \backslash \{\neg p\}$$

- $Cl(\Phi, \neg p)$ は，変数 p が負リテラルとして含まれている全ての節から $\neg p$ を除いたものの連言である.
- 例：$\Phi = (p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$ の場合，

$$Cl(\Phi, \neg p) = q \land (\neg q \lor r)$$

提案変換の説明

- 与えられた CNF を Φ，変換後の CNF を Ω とすると，提案変換は，Φ に以下のような制約 $M(\Phi)$ を追加し，$\Omega = \Phi \wedge M(\Phi)$ とするものである．

$$
\begin{aligned}
M(\Phi) &= \bigwedge_{p \in Var(\Phi)} Cl(\Phi, \neg p) \rightarrow p \\
Cl(\Phi, \neg p) &\equiv \bigwedge_{c \in \Phi, \neg p \in c} c \backslash \{\neg p\}
\end{aligned}
$$

- $M(\Phi)$ は，全ての変数 p において，$Cl(\Phi, \neg p)$ 満たされれば，p を真とするという制約の連言である．
- 例：$\Phi = (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$ の場合，

$$
\begin{aligned}
Cl(\Phi, \neg p) &= q \wedge (\neg q \vee r) \\
M(\Phi) &= (q \wedge (\neg q \vee r)) \rightarrow p \text{ より，} \\
(q, r) &= (1, 1) \text{ の時，} p \text{ は真になるという制約が追加される．}
\end{aligned}
$$

提案変換の説明(例)

- 例えば変換前の CNF を以下の Φ とすると，提案変換で追加する制約 $M(\Phi)$ は以下のようになる．

元の CNFΦ

$$\neg a \vee b \vee \neg c$$
$$\neg b \vee \neg c$$
$$\neg c \vee d$$

追加する節集合 $M(\Phi)$

- Φ のモデルは

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) \;=\; & (0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,0,0),\\ & (0,1,0,1),(1,0,0,1),(1,1,0,1)\end{aligned}$$

提案変換の説明 (例)

- 例えば変換前の CNF を以下の Φ とすると，提案変換で追加する制約 $M(\Phi)$ は以下のようになる．

元の CNFΦ

$$\neg a \vee b \vee \neg c$$
$$\neg b \vee \neg c$$
$$\neg c \vee d$$

追加する節集合 $M(\Phi)$

$$(b \vee \neg c) \rightarrow a$$

- 変数 a は一つの節に負リテラルとしてのみ含まれている．
- $(b \vee \neg c)$ を満たすのは，$(b, c) = (0, 0), (1, 0), (1, 1)$ であり，この時 $a = 1$ でなければならない．
- Φ のモデルのうち，追加された制約で以下のモデルが制限される．

$$(a, b, c, d) = \cancel{(0, 0, 0, 0)}, \cancel{(0, 0, 0, 1)}, \cancel{(0, 1, 0, 0)}, (1, 0, 0, 0),$$
$$\cancel{(0, 1, 0, 1)}, (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1)$$

提案変換の説明 (例)

- 例えば変換前の CNF を以下の Φ とすると，提案変換で追加する制約 $M(\Phi)$ は以下のようになる．

元の CNFΦ

$$\neg a \vee b \vee \neg c$$
$$\neg b \vee \neg c$$
$$\neg c \vee d$$

追加する節集合 $M(\Phi)$

$$(b \vee \neg c) \to a$$
$$\neg c \to b$$

- 変数 b は一つの節に正リテラルとして，一つの節に負リテラルとして含まれている．
- $\neg c$ を満たすのは，$c = 0$ であり，この時 $b = 1$ でなければならない．
- Φ のモデルのうち，追加された制約で以下のモデルが制限される．

$$(a, b, c, d) = \cancel{(0, 0, 0, 0)}, \cancel{(0, 0, 0, 1)}, (0, 1, 0, 0), \cancel{(1, 0, 0, 0)}, (0, 1, 0, 1), \cancel{(1, 0, 0, 1)}, (1, 1, 0, 1)$$

提案変換の説明 (例)

- 例えば変換前の CNF を以下の Φ とすると，提案変換で追加する制約 $M(\Phi)$ は以下のようになる．

元の CNFΦ

$$\neg a \vee b \vee \neg c$$
$$\neg b \vee \neg c$$
$$\neg c \vee d$$

追加する節集合 $M(\Phi)$

$$(b \vee \neg c) \to a$$
$$\neg c \to b$$
$$((\neg a \vee b) \wedge \neg b \wedge d) \to c$$

- 変数 c は複数の節に負リテラルとして含まれている．
- $((\neg a \vee b) \wedge \neg b \wedge d)$ を満たすのは，$(a, b, d) = (0, 0, 1)$ であり，この時 $c = 1$ でなければならない．
- Φ のモデルのうち，追加された制約で以下のモデルが制限される．

$$(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0), \cancel{(0, 0, 0, 1)}, (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 1)$$

提案変換の説明(例)

- 例えば変換前の CNF を以下の Φ とすると，提案変換で追加する制約 $M(\Phi)$ は以下のようになる．

元の CNFΦ

$$\neg a \vee b \vee \neg c$$
$$\neg b \vee \neg c$$
$$\neg c \vee d$$

追加する節集合 $M(\Phi)$

$$(b \vee \neg c) \rightarrow a$$
$$\neg c \rightarrow b$$
$$((\neg a \vee b) \wedge \neg b \wedge d) \rightarrow c$$
$$\top \rightarrow d \quad (\equiv d)$$

- 変数 d は正リテラルとしてのみ含まれている．
- $(\top \rightarrow d) \equiv d$ より，必ず $d = 1$ でなければならない．
- Φ のモデルのうち，追加された制約で以下のモデルが制限される．

$$(a,b,c,d) = \cancel{(0,0,0,0)}, (0,0,0,1), \cancel{(0,1,0,0)}, \cancel{(1,0,0,0)},$$
$$(0,1,0,1), (1,0,0,1), (1,1,0,1)$$

提案変換の説明 (例)

- 例えば変換前の CNF を以下の Φ とすると，提案変換で追加する制約 $M(\Phi)$ は以下のようになる．

元の CNFΦ

$$\neg a \vee b \vee \neg c$$
$$\neg b \vee \neg c$$
$$\neg c \vee d$$

追加する節集合 $M(\Phi)$

$$(b \vee \neg c) \rightarrow a$$
$$\neg c \rightarrow b$$
$$((\neg a \vee b) \wedge \neg b \wedge d) \rightarrow c$$
$$\top \rightarrow d \quad (\equiv d)$$

- Φ のモデルは

$$\begin{aligned}(a, b, c, d) \;=\; & (0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0), (1,0,0,0), \\ & (0,1,0,1), (1,0,0,1), (1,1,0,1)\end{aligned}$$

- $\Omega \;=\; \Phi \wedge M(\Phi)$ のモデルは

$$(a, b, c, d) \;=\; (1,1,0,1)$$

まとめ

提案変換の方法について詳しく説明した

1. 効率的に極大モデルが求まる CNF への変換方法を考案
2. 変換の正しさの証明
   - 変換前後で CNF の充足可能性は保持されることの証明
   - 変換後の CNF のモデルの集合が，変換前の CNF の極大モデルの集合と一致することの証明

今後の課題

- 極大モデルを求める従来の手法との性能の比較を行う．
- 本研究で示した他にも，提案変換によって極小モデル，極大モデルが見つかる有用な応用問題が存在するかを探す．

References I

[1] Miyuki Koshimura, Hidetomo Nabeshima, Hiroshi Fujita, and Ryuzo Hasegawa.
Minimal model generation with respect to an atom set.
FTP, 9:49–59, 2009.

[2] 足立 啓一.
リテラルの充足に対する制約に基づく命題論理式の充足可能性を保つ変換に関する研究.
神戸大学 修士論文, 2023.

補助スライド

SATとCNF

SAT(充足可能判定問題)

- 与えられた命題論理式を充足する値割り当てが存在するかどうかを判定する問題．
- 命題論理式を充足する割り当てが存在するとき，充足可能 (SAT) であるといい，存在しないとき充足不能 (UNSAT) であるという．
- 一般的には CNF(連言標準形) で記述する．

CNF

- **CNF** は，節の論理積 (連言) である．
- 節 (clause) は，リテラルの論理和 (選言) である．
- リテラル (literal) は，命題変数，もしくはその否定である．

例

A, B, C を命題変数としたとき，
$(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C)$

先行研究の詳細

SAT ソルバーの複数回起動による極小モデルを求める方法 [1]

1. CNF のモデルを一つ求める．
2. そのモデルで偽となる変数について，その変数が偽であるという単位節を CNF に追加し，それ以外の変数についてそれらの変数のいずれかが偽となるという制約を CNF に追加する．
3. 2 で生成した CNF が UNSAT であれば，1 で求めたモデルを極小モデルとして出力する．SAT であれば，2 の操作を繰り返す．

SAT ソルバーの 1 回起動による極小モデルを求める方法 [2]

- 与えられた CNF を Φ，変換後の CNF を Ω とすると，提案変換は，Φ に以下のような制約 $M(\Phi)$ を追加し，$\Omega = \Phi \wedge M(\Phi)$ とするものである．

$$
\begin{aligned}
M(\Phi) &= \bigwedge_{p \in Var(\Phi)} p \to \neg Cl(\Phi, p) \\
Cl(\Phi, p) &\equiv \bigwedge_{c \in \Phi, p \in c} c \backslash \{p\}
\end{aligned}
$$

提案変換が有効に働く問題の例

CNF の例

$$\left(\bigwedge_i C_i^+\right) \wedge \left(\bigwedge_i C_j^-\right)$$

- ここで，C_i^+ は正リテラルのみを含む節で，C_j^- は負リテラルのみを含む節である．

応用例

- 整数ナップサック問題を符号化した CNF
  - 順序符号化し，提案方法で極大モデルを列挙することで，多重ナップサック問題のパレートフロントが求まる．
  - 多値符号化し，提案方法で極大モデルを列挙することで，圧縮解を求めることができる

命題 1 の証明

ある CNFΦ は変数 x を負リテラルとして含む節の集合 $(\neg x \vee C_1) \wedge \ldots \wedge (\neg x \vee C_m)$ と，それ以外の節の集合 A に分けて以下のように表現できる．

$$\Phi = (\neg x \vee C_1) \wedge \ldots \wedge (\neg x \vee C_m) \wedge A$$

ただし，$C_1 \ldots C_m$ は，変数 x を負リテラルとして含む各節から $\neg x$ を除いたものである．このとき，本研究の変換は，変数 x について以下のよう制約を追加する，というのを全ての変数について行うものである．

$$m(\Phi, \neg x) = (C_1 \wedge \ldots \wedge C_m) \to x$$

ここで，$\Phi \wedge m(\Phi, \neg x)$ が Φ の充足可能性を保持していることを証明する．まず， Φ は以下のように変形できる．

$$\Phi = (\neg x \vee (C_1 \wedge \ldots \wedge C_m)) \wedge A$$

さらに，$C = (C_1 \wedge \ldots \wedge C_m)$ とおくと，以下のようになる．

$$\Phi = (\neg x \vee C) \wedge A$$
$$m(\Phi, \neg x) = C \to x = x \vee \neg C$$

命題1の証明（続き）

したがって，$(\neg x \vee C) \wedge A \wedge (x \vee \neg C)$ が，$(\neg x \vee C) \wedge A$ の充足可能性を保持していることを確認すればよい．

- $(\neg x \vee C) \wedge A$ が充足不能なとき
  $(\neg x \vee C) \wedge A \wedge (x \vee \neg C)$ は充足不能である．
- $(\neg x \vee C) \wedge A$ が充足可能なとき
  - C が充足可能なとき
    C, A は x を負リテラルとして含まないので，x を真としても C, A は充足可能である. したがって，$(\neg x \vee C) \wedge A \wedge (x \vee \neg C)$ は充足可能である.
  - C が充足不能なとき
    x, C がともに偽であるため，$(\neg x \vee C) \wedge A \wedge (x \vee \neg C)$ は充足可能である.

以上より，$m(\Phi, x)$ は Φ の充足可能性を保持しており，これは Φ 中のすべての変数について同様に成り立つため，提案変換を施した.
CNF$\Omega = \Phi \wedge M(\Phi)$ は変換前の CNFΦ の充足可能性を保持する.

命題 2 の証明

命題 1 の証明と同様に $C_1 \ldots C_m$ を，変数 x を負リテラルとして含む各節から $\neg x$ を除いたものとしたとき，負リテラルに注目した提案変換は，変数 x について以下のような制約を追加するものであった．

$$(C_1 \wedge \ldots \wedge C_m) \rightarrow x$$

これは，$C_1 \ldots C_m$ が充足されるとき x は真である，ということである．これはすべての変数に導入され，一般的には以下のようになる．

$$(C_1^1 \wedge \ldots \wedge C_1^{m_1}) \rightarrow x_1$$

$$\ldots$$

$$(C_n^1 \wedge \ldots \wedge C_n^{m_n}) \rightarrow x_n$$

命題 2 の証明（続き）

ここで，元の制約 $(C_i^1 \vee \neg x_i) \wedge \ldots \wedge (C_i^{m_i} \vee \neg x_i)$ を考えると，

$$x_i \rightarrow (C_i^1 \wedge \ldots \wedge C_i^{m_i})$$

これは，x_i が真であるとき，$(C_i^1 \wedge \ldots \wedge C_i^{m_i})$ が充足される，ということである. これも全ての変数で成り立ち，

$$x_1 \rightarrow (C_1^1 \wedge \ldots \wedge C_1^{m_1})$$
$$\ldots$$
$$x_n \rightarrow (C_n^1 \wedge \ldots \wedge C_n^{m_n})$$

というようになる. 以上より，$C_i = C_1^1 \wedge \ldots \wedge C_i^{m_i}$ とおくと，

$$C_1 \leftrightarrow x_1$$
$$\ldots$$
$$C_n \leftrightarrow x_n$$

これは，CNF のうち，x_i を含む節集合が，x_i に，真を割り当てたと仮定しても充足される時，x_i は真である，ということを意味する.

循環があると極大モデルが求まらない理由

ある極大モデルでもともと真が割り当てられていたある変数の集合 $s_1, s_2, \ldots, s_k$ において，変数 x_i についての C_i と同様に s_i についての S_i を定義すると，$s_1, s_2, \ldots, s_k$ を同時に偽にし，かつ $S_1, S_2, \ldots, S_k$ を同時に真にするような割り当てが存在すれば，極大モデルでないモデルが出現することになる．ここで，ループが存在するとは，ループする変数のパス

$$
\begin{array}{c}
s_{(1,1)} \\
\downarrow \\
s_{(2,1)}, s_{(2,2)}, \ldots, s_{(2,t_2)} \\
\downarrow \\
\cdots \\
\downarrow \\
s_{(l,1)}, s_{(l,2)}, \ldots, s_{(l,t_1)} \\
\downarrow \\
s_{(1,1)}
\end{array}
$$

が存在するということである．

循環があると極大モデルが求まらない理由 (続き)

ただし，これらの変数は同じ変数を含む可能性があり，$s_1, s_2, \ldots, s_k$ のいずれかに一致するものとする．極大でないモデルを生み出すために，$s_{(i,1)}, s_{(i,2)}, \ldots, s_{(i,t_i)}$ を偽にする操作を行ったとき，$S_{(i,1)}, S_{(i,2)}, \ldots, S_{(i,t_i)}$ のそれぞれの中で真とする節の中に正リテラルとして現れる変数の集合をさらに偽にする操作が行われる．先述したループする変数のパスが存在すれば，その変数の集合が $\{s_{(i-1,1)}, s_{(i-1,2)}, \ldots, s_{(i-1,t_i)}\}$ と一致する．その場合，$s_{(1,1)}$ から変数を偽にする操作を始めると，ループする変数のパス上を伝播して $s_{(1,1)}$ 自身へと循環することになり，その場合のみ合 $s_1, s_2, \ldots, s_k$ を同時に偽にできる．したがって，ループが存在しなければ極大モデルでないモデルを作り出すことができないということになる．以上より，CNFΦ に負リテラルに注目した提案変換 CNFΩ に極大モデルでないモデルが現れるには Φ にループが必要であり，Φ がループを含んでいなければ，Ω のモデルは Φ の極大モデルと一致すると言える．