INF280

Algorithmes de texte

Pierre Senellart, Antoine Amarilli

Table des matières

Trouver les occurrences d'une sous-chaîne dans une chaîne

- Algorithme naïf :

```
// s est la chaîne, p le motif
for (int i=0, j; i < s.size() - p.size() + 1; ++i) {
  for (j = 0; j < p.size() && s[i+j] == p[j]; ++j)
    ;

  if (j == p.size())
    printf("Match à la position %d\n", i);
}
```

- En général, similaire à l'**implémentation native** du langage (`strstr`, fortement optimisée
- Complexité $O(|s| \times |p|)$
- Peut-on **mieux faire** ?

Knuth–Morris–Pratt : idée

- Motif p, chaîne s
- Pour chaque préfixe p' de p, maintenir la taille du préfixe maximal de p qui est un suffixe strict de p'
- $p =$“`abcababcabd`”
  `00012123450`
- Tableau constructible en temps linéaire en le motif p

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T													
i													
cnd													

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1											
i													
cnd													

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1											
i			↑										
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0										
i			↑										
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0										
i			↑										
cnd	↑												

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0										
i			↑										
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0										
i				↑									
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0									
i				↑									
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0									
i				↑									
cnd	↑												

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0									
i				↑									
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0									
i					↑								
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0								
i					↑								
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0								
i					↑								
cnd			↑										

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0								
i						↑							
cnd			↑										

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1							
i						↑							
cnd			↑										

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1							
i						↑							
cnd				↑									

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1							
i							↑						
cnd				↑									

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2						
i							↑						
cnd				↑									

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2						
i							↑						
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2						
i							↑						
cnd			↑										

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2						
i								↑					
cnd			↑										

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1					
i								↑					
cnd			↑										

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```c
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1					
i								↑					
cnd				↑									

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1					
i									↑				
cnd				↑									

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2				
i									↑				
cnd				↑									

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```c
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2				
i									↑				
cnd					↑								

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```c
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2				
i										↑			
cnd					↑								

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3			
i										↑			
cnd					↑								

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3			
i										↑			
cnd						↑							

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```c
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3			
i											↑		
cnd						↑							

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```c
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4		
i											↑		
cnd						↑							

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4		
i											↑		
cnd							↑						

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4		
i												↑	
cnd							↑						

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	
i												↑	
cnd							↑						

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	
i												↑	
cnd				↑									

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	
i												↑	
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	
i												↑	
cnd	↑												

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	
i												↑	
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	
i													↑
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	0
i													↑
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	0
i													↑
cnd	↑												

Knuth–Morris–Pratt : calcul du tableau

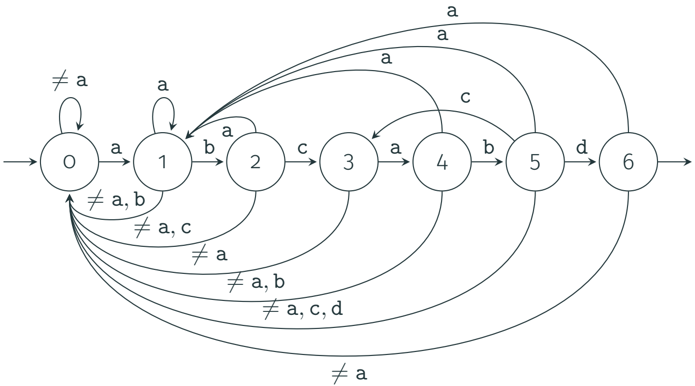
```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1]; int np = strlen(p);
T[0] = -1;
int cnd = 0;
for (int i = 1; i <= np; i++) {
  T[i] = cnd;
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != p[i])
    cnd = T[cnd];
  cnd++;
}
```

	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
p		a	b	c	a	b	a	b	c	a	b	d	
T		-1	0	0	0	1	2	1	2	3	4	5	0
i													↑
cnd		↑											

Knuth–Morris–Pratt : interprétation comme automate

T peut être vu comme l'automate déterministe des mots ayant pour suffixe p. Par exemple, pour $p =$ `abcabd` :

	0	1	2	3	4	5	6
p	a	b	c	a	b	d	
T	-1	0	0	0	1	2	0



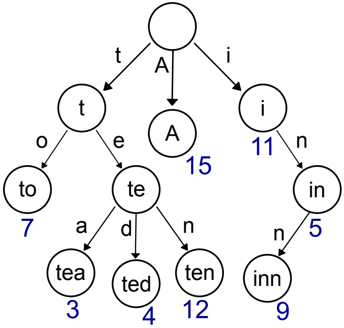
Knuth–Morris–Pratt: recherche

```
char p[MAXN]; int T[MAXN+1];
int np = strlen(p), ns = strlen(s);
[...]        // ici, construire la table T comme précédemment
int cnd = 0;                   // position courante dans le motif p
for (int i = 0; i <= ns; i++) {        // tant qu'on ne lit pas
  while (cnd >= 0 && p[cnd] != s[i]) // le prochain char de p
    cnd = T[cnd];                    // on recule dans p
  cnd++; // maintenant que le prochain char convient, avancer
  if (cnd == np) {
    // on a atteint la fin de p, donc on a trouvé un match
    printf("match at %d\n", i - np + 1);
    // on recule dans p au cas où le prochain match chevauche
    cnd = T[cnd];
  }
}
```

Recherche d'un mot parmi un ensemble de mots

- Dictionnaire D de n mots
- Pour rechercher si un mot est dans cet ensemble :
  - Vecteur (`vector`) ou liste chaînée (`forward_list`) : $O(n)$
  - Arbre binaire équilibré (`set`) : $O(\log n)$
  - Table de hachage (`unordered_set`): $O(1)$
    mais $O(n)$ dans le pire cas (collisions)
  - Trie (ou arbre préfixe) : $O(1)$

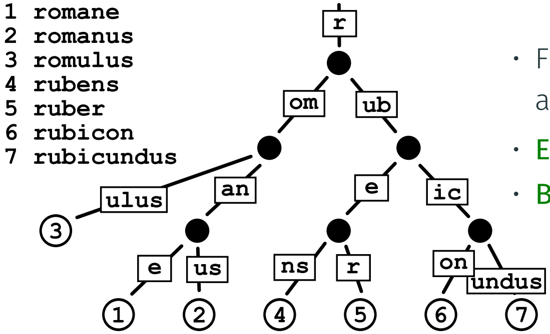
Trie (arbre préfixe)



Trie_example.svg, Domaine public,
Chris-martin, Wikimedia Commons

- Arbre des **préfixes** des mots de D
- Arêtes **étiquetées** par des lettres
- On indique sur chaque nœud l'id dans D du **chemin** qui y mène
- Permet de trouver les **continuations** du mot d'entrée m dans D, i.e., les mots de D dont m est **préfixe**

Arbre radix (trie Patricia)



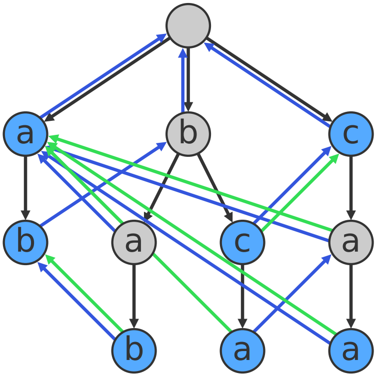
Patricia trie.svg, CC-BY 2.5, Claudio Rocchini, Wikimedia Commons

- Fusionne les enfants uniques avec leur parent
- Espace mémoire réduit
- Branchement :
  - par bit (entiers),
  - par lettre,
  - par groupe de bits (radix : taille du groupe)

Trouver les occurrences d'un ensemble de sous-chaînes dans une chaîne

- Dictionnaire D de taille n contenant des mots de taille k
- Chaîne de taille l
- Applications répétées de Knuth–Morris–Pratt ? $O(n \times (k + l))$
- On peut généraliser Knuth–Morris–Pratt à un trie arbitraire (et non une séquence de caractères) : $O(n \times k + l + m)$ où m est le nombre total d'occurrences (taille du résultat), au plus $n \times l$ mais possiblement plus faible

Aho–Corasick



Dictionnaire : a, ab, bab, bc, bca, c, caa.

- Construire un **trie** du dictionnaire (liens en noir, mots sur fond bleu)
- Ajouter des **pointeurs** (en bleu) vers le plus grand suffixe strict dans le trie
- Ajouter des **raccourcis** (en vert) pour les mots du dictionnaire
- Exemple : **abccab** donne :
  - **a** (parcours normal),
  - **ab** (parcours normal),
  - **bc** (suivi du pointeur bleu) puis **c** (clôture par le pointeur vert),
  - **c** (suivi du pointeur bleu),
  - **ca** (parcours normal) puis **a** (clôture par le pointeur vert),
  - **ab** (suivi du pointeur bleu)

Aho-Corasick : Construction du trie

```
int nw;                        // nombre de mots du dictionnaire
char w[MAXW][MAXL];          // contenu des mots du dictionnaire
int trie[MAXW*MAXL+2][ALPHA];// trie des mots du dictionnaire
int fs;                        // prochain index libre dans trie
int endw[MAXW*MAXL+2];// mot qui se finit à cet index de trie

// insérer le mot numéro i de contenu s dans le trie
// en partant du nœud d'index n dans le trie
void insert_trie(int i, char *s, int n) {
  unsigned char x = s[0];
  if (!x) { endw[n] = i; return; }      // fin du mot atteinte
  if (!trie[n][x])  // si pas d'arête étiquetée x depuis n...
    trie[n][x] = fs++;    // ... on crée un nouveau nœud cible
  return insert_trie(i, s+1, trie[n][x]);
}
```

Aho-Corasick : Début du code

```
void aho_corasick() {
  // l'index 0 dans le trie indique les nœuds inexistants
  // la racine du trie est 1
  // donc initialement le prochain index libre est 2
  fs = 2;
  // les mots sont numérotés à partir de 1
  // 0 dans endw indique qu'aucun mot ne se termine
  for (int i = 1; i <= nw; i++)
    insert_trie(i, w[i], 1); // insère chaque mot dans le trie

  [...]     // ici, on calcule les pointeurs et les raccourcis
}
```

Aho-Corasick : Calcul des pointeurs et raccourcis (1/2)

```
int pointer[MAXW*MAXL+2]; // pointeurs (en bleu), cf T de KMP
int shortcut[MAXW*MAXL+2];             // raccourcis (en vert)
queue<int> q;
q.push(1);          // explorer en BFS depuis la racine du trie
while (!q.empty()) {
  int n = q.front();
  q.pop();
  for (unsigned char x = 0; x < ALPHA; x++) {
    int n2 = trie[n][x];
    if (!n2)
      continue;     // pas d'arête pour cette lettre depuis n
    [...]            // on traite n2, cf prochain transparent
    q.push(n2);                       // continuer le BFS avec n2
  }
}
```

Aho-Corasick : Calcul des pointeurs et raccourcis (2/2)

```
// nœud n2 de parent n avec étiquette x, i.e., n -x-> n2
// == calcul du pointeur ==
int p = pointer[n];                  // p est le pointeur de n
while (p && !trie[p][x])  // tant que p n'a pas d'arête x...
  p = pointer[p];         // ... on recule p via le pointeur
if (!p)                 // si p = 0, on est sorti du trie...
  pointer[n2] = 1;      // ... donc on met pointeur = racine
else                                // sinon le pointeur est...
  pointer[n2] = trie[p][x];         // ... le x-successeur de p

// == calcul du raccourci ==
if (endw[pointer[n2]])              // si un mot finit en n2...
  shortcut[n2] = pointer[n2];       // ... raccourci = pointeur
else                // sinon le raccourci est celui du pointeur
  shortcut[n2] = shortcut[pointer[n2]];
```

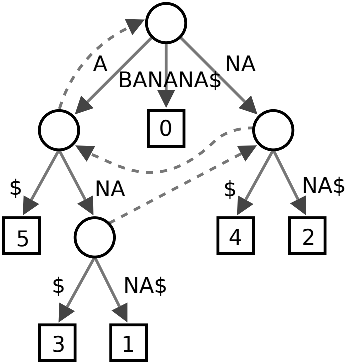
Aho-Corasick : Utilisation

```
int pos = 1;                                    // position courante dans le trie
char s[MAXS]; int ns = strlen(s);                            // chaîne à parcourir

for (int i = 0; i < ns; i++) {
    unsigned char x = s[i];                              // x = nouveau caractère lu
    while (pos && !trie[pos][x])     // tant que pas d'arête x depuis p...
        pos = pointer[pos];           // ... on recule pos suivant pointeur
    pos = trie[pos][x];             // maintenant on essaie d'avancer par x
    if (!pos)                                      // si on est sorti du trie...
        pos = 1;                                   // ... on revient à la racine

    int posb = pos; // on va énumérer les matches possibles depuis pos...
    do {                                                  // fin de mot possible en i
        if (endw[posb])     // on a vraiment une fin de mot à posb (en i):
            printf("match of %s at %d\n",                                  // afficher
                w[endw[posb]], i - strlen(endw[posb]) + 1);    // le match
        posb = shortcut[posb];                         // suivre le raccourci de posb
    } while (endw[posb]);              // ... tant que des mots se terminent
}
```

Arbre des suffixes



Suffix tree BANANA.svg, Domaine public, Maciej Jaros and Nils Grimsmo, Wikimedia Commons

- Trie Patricia des **suffixes** d'un mot (ici, BANANA, suivi d'un délimiteur \$)
- Constructible en $O(n^2)$ de droite à gauche
- Constructible en $O(n)$ de gauche à droite, comme les pointeurs d'Aho–Corasick
- Permet d'**indexer** une chaîne pour rechercher des sous-chaînes
- Nombreuses **autres applications** : p. ex., plus longue sous-chaîne commune

Table des matières

Expressions rationnelles

- Langage permettant de décrire des motifs à rechercher dans une chaîne de caractères
- Par exemple : `(a|b)*#(a|b)*(#(a|b|#)*)?`
- Généralise la recherche de sous-chaînes, de mots d'un dictionnaire, de préfixes, de suffixes, etc.
- Processeurs d'expressions rationnelles dans la bibliothèque standard de C++ 2011 (`std::regex`)

Automates

- Expression rationnelle vers automate fini nondéterministe :
  - algorithme de Thompson : temps linéaire, transitions spontanées
  - algorithme de Glushkov : temps quadratique, moins d'états
- Reconnaître si une chaîne de longueur n est acceptée par un automate nondéterministe à m états est en $O(n \times m)$
- Un automate nondéterministe à m états peut être transformé en automate déterministe à $O(2^m)$ états en temps $O(2^m)$
- Reconnaître si une chaîne de longueur n est acceptée par un automate déterministe à m états est en $O(n)$

Expressions rationnelles et expressions rationnelles

- Les “expressions rationnelles” de C++ incluent des **extensions** :
    - **Références arrières** (indiquer qu’une sous-chaîne se répète)
    - Opérateur `*` **glouton** et `*?` **réticent**
- Du coup, les implémentations des expressions rationnelles n’utilisent pas des automates, mais du **backtracking**
- Souvent **beaucoup moins efficaces** ! Exponentiel en la taille de l’expression rationnelle dans les cas pathologiques

Table des matières

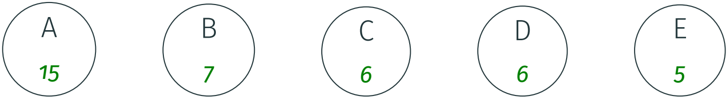
Algorithme de Huffman : Objectif

- Ensemble de **symboles** s_i avec un **poids** w_i (e.g., probabilité)
- On veut choisir un **code** C_i (mot sur $\{0, 1\}$) pour chaque mot
- **Code préfixe** : aucun mot code n'est préfixe d'un autre
- Minimiser le **poids moyen** : $\sum_i |C_i| \times w_i$
  - $\rightarrow$ **Intuition :** un mot **lourd** (fréquent), doit avoir un code **bref**

Algorithme de Huffman : Principe

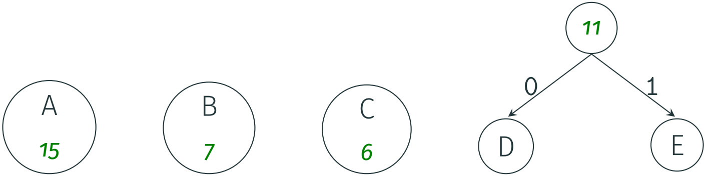
- Représenter un code préfixe comme un arbre de décision
- Symboles a, b, c, d, e

Algorithme de Huffman : Exemple



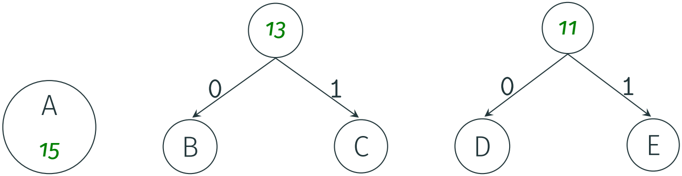
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HuffmanCodeAlg.png

Algorithme de Huffman : Exemple



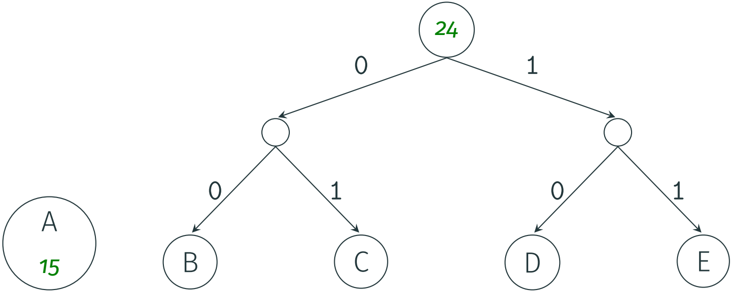
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HuffmanCodeAlg.png

Algorithme de Huffman : Exemple



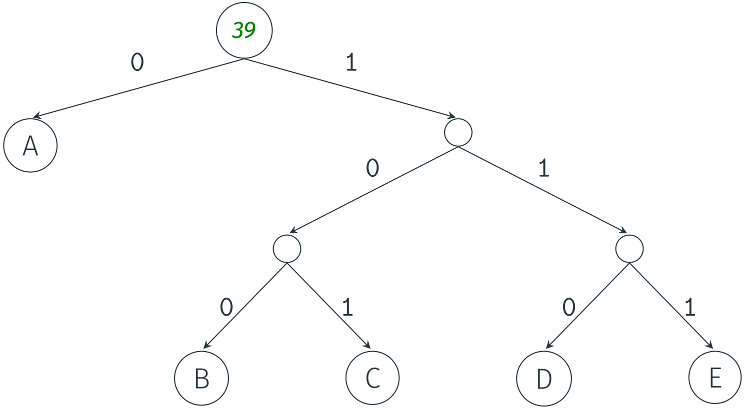
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HuffmanCodeAlg.png

Algorithme de Huffman : Exemple



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HuffmanCodeAlg.png

Algorithme de Huffman : Exemple



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HuffmanCodeAlg.png

Table des matières

En résumé

- Déterminer si **une chaîne est dans un ensemble de chaînes** :
  → table de hachage
- Trouver les **chaînes du dictionnaire dont une chaîne est préfixe** :
  → trie, arbre radix
- Recherche d'une **petite sous-chaîne dans une chaîne** :
  → implémentation native du langage de programmation
- Recherche d'une **longue sous-chaîne dans une longue chaîne** :
  → Knuth–Morris–Pratt (ou Boyer–Moore, non traité)
- Recherche d'un **dictionnaire de sous-chaînes dans une chaîne** :
  → Aho–Corasick (indexe les sous-chaînes)
  → arbre des suffixes (indexe la chaîne)
- Recherche d'un **motif complexe dans une chaîne** :
  → expression rationnelle ou automate compilé à partir du motif