TP 2 TSIA 202

1) Les x_i sont réels et on a $|\bar{x}|^2 = |x|^2$.

Donc $I_n\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \frac{1}{2\pi n} \left|\sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} e^{i\lambda k'}\right|^2$ avec $\lambda = \frac{2\pi k}{n}$

$$= \frac{1}{2\pi n} \left|\sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} e^{+2i\pi \frac{k}{n} k'}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \left|\sum_{k'=0}^{n-1} \overline{x_{k'}} e^{-2i\pi \frac{k}{n} k'}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \left|\sum_{k'=0}^{n-1} x_{k'} e^{-2i\pi \frac{k}{n} k'}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi n} |DFT(x,n)(k)|^2$$

3) $\frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{\gamma}_n(l) e^{-il\lambda_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda l} I_n(\lambda) d\lambda \, e^{-il\lambda_0}$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda l} \frac{1}{2\pi n} \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq k' \leq n-1}} x_k \overline{x_{k'}} e^{i\lambda k} e^{-i\lambda k'} e^{-il\lambda_0} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{2\pi n} \sum_{0 \leq k, k', l \leq n-1} x_k \overline{x_{k'}} e^{-il\lambda_0} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i\lambda(l+k-k')} d\lambda}_{2\pi \mathbb{1}_{\{l = k'-k\}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \sum_{0 \leq k, k' \leq n-1} x_k \overline{x_{k'}} e^{-i\lambda_0 (k'-k)}$$

$$= I_n(\lambda_0)$$

4) La question 3) montre que $\hat{\gamma}_n(k)$ est $L^?$

Avec $m = n$ on a $I_n\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = \frac{1}{2\pi} DFT(\hat{\gamma}_n, n)(k)$

Donc $\hat{\gamma}_n(k) = 2\pi\, IDFT\left(I_n\left(\frac{2\pi k}{n}\right), n\right)$

$\cancel{= \frac{1}{n} IDFT}$

$= \frac{1}{n} IDFT\left(|DFT(X, n)|^2, n\right)(k)$

où $\hat{m} = n$