

AGH

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE**

Technika mikroprocesorowa

Projekt nr 13

Kraków, 2019r.

Dane fizyczne wahadła:

$M = 0.5 \text{ kg}$ - masa wózka

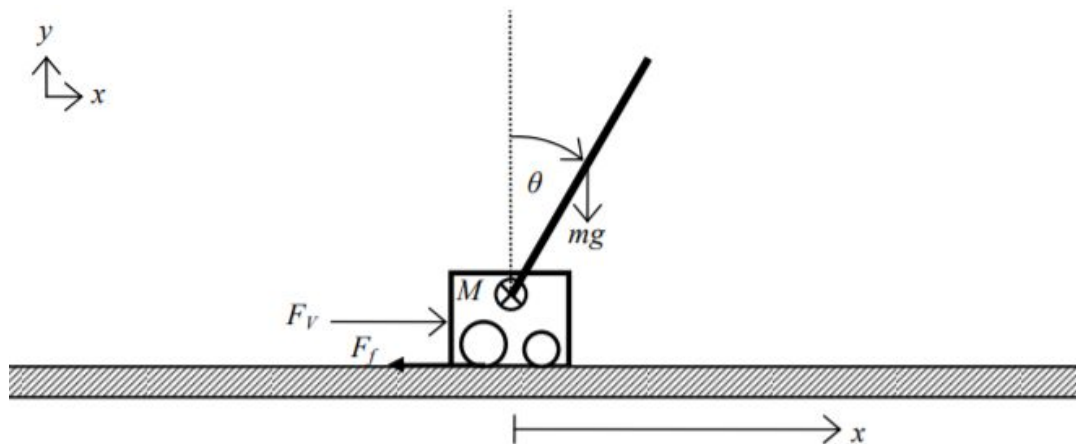
$m = 0.2 \text{ kg}$ - masa wahadła

$L = 0.3 \text{ m}$ - odległość od łącznika z wózkiem do środka ciężkości wahadła

$J = 0.006 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

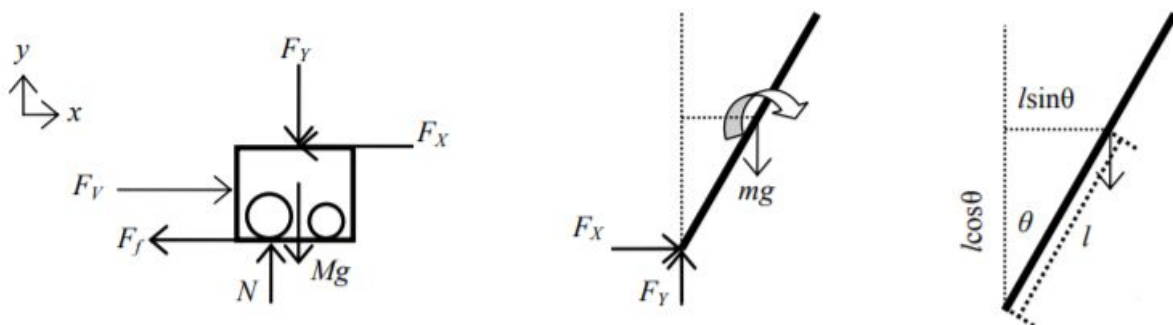
$b = 0.1 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ - współczynnik tarcia między podłożem (szynami) a wózkiem

$g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ - przyspieszenie ziemskie

1. Model matematyczny wahadła:**a. Środek ciężkości układu:**

$$x_0 = x + l \sin \theta$$

$$y_0 = l \cos \theta$$

b. Uwolnienie od więzów:

Równanie dynamiczne dla wózka:

$$M\ddot{x} = F_v - F_f - F_x$$

Siła oporu:

$$F_f = b \frac{dx}{dt} = b\dot{x}$$

Siła reakcji na osi x od wahadła:

$$F_x = m \frac{d^2 x_0}{dt^2}$$

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{d(x + l\sin\theta)}{dt} = \frac{dx}{dt} + l\cos\theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} - l\sin\theta \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + l\cos\theta \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$F_x = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} - l\sin\theta \dot{\theta}^2 + l\cos\theta \ddot{\theta} \right)$$

Równanie dla wózka:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} = F_v + m l \sin\theta \dot{\theta}^2 - m l \cos\theta \ddot{\theta}$$

Siła reakcji na osi y od wahadła:

$$F_y = mg + m(-l\cos\theta \dot{\theta}^2 - l\sin\theta \ddot{\theta})$$

Równanie dla momentu obrotowego:

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - ml\cos\theta \ddot{x}$$

Otrzymany model matematyczny:

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} = F_v + m l \sin\theta \dot{\theta}^2 - m l \cos\theta \ddot{\theta}$$

$$(J + ml^2)\ddot{\theta} = mgl\sin\theta - ml\cos\theta \ddot{x}$$

W celu przeprowadzenia regulacji, należy zlinearyzować model.
Linearyzacja wokół:

$$x = 0 \text{ [m]},$$

$$\theta = 0 \text{ [rad]}$$

Zakładamy, że wychylenie wahadła $\Theta < 20^\circ$

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \approx 0$$

$$J \approx 0$$

Model zlinearyzowany:

$$(M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + b\dot{x} = F_v$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} = g\theta$$

Uzależnienie zmiennych:

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{M}\theta - \frac{b}{M}\dot{x} + \frac{F_v}{M}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{M + m}{Ml}g\theta + \frac{b}{Ml}\dot{x} - \frac{F_v}{Ml}$$

Zmienne stanu:

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = \theta$$

$$x_4 = \dot{\theta} = \dot{x}_3$$

$$u = F_v$$

$$y_1 = x = x_1$$

$$y_2 = \dot{x} = x_2$$

$$y_3 = \theta = x_3$$

$$y_4 = \dot{\theta} = x_4$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{mg}{M}x_3 - \frac{b}{M}x_2 + \frac{u}{M}$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{M+m}{Ml}gx_3 + \frac{b}{Ml}x_2 - \frac{u}{Ml}$$

Macierze stanu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{M} & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{Ml} & \frac{M+m}{Ml}g & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [0]$$

2. Dyskretyzacja modelu:

Dla układów dyskretnych dobrano czas regulacji równy 0.01s, ponieważ wiernie odwzorowuje on charakterystykę układu w dziedzinie ciągłej. Model przekształcono do dziedziny dyskretniej za pomocą polecenia c2d oraz metody zerowego rzędu(ZOH).

3. Warunki początkowe:

Jako warunki początkowe przyjęto:

- Wychylenie pręta $\Theta = \pi/10$ rad
- Położenie wózka $x = 0$ m

Obiekt jest reprezentowany w przestrzeni stanu, gdyż pozwala to na zadanie warunków początkowych.

4. Regulator PID dyskretny - regulator referencyjny:

Nastawy regulatora PID dobrano za pomocą narzędzi wbudowanych w program Matlab - Auto-Tune. Wartości nastaw:

a. Regulator wychylenia wahadła - regulator PID:

- $K = -46.8558412524277$
- $I = 2.71021165385829$
- $D = 0.0890699619507767$

$$P \left(1 + I \cdot T_s \frac{1}{z-1} + D \cdot \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z} \right)$$

Struktura regulatora PID dyskretnego

Wzmocnienie regulatora jest ujemne, gdyż siła musi zadziałać w stronę wychylenia wahadła.

b. Regulator położenia wózka - regulator PD:

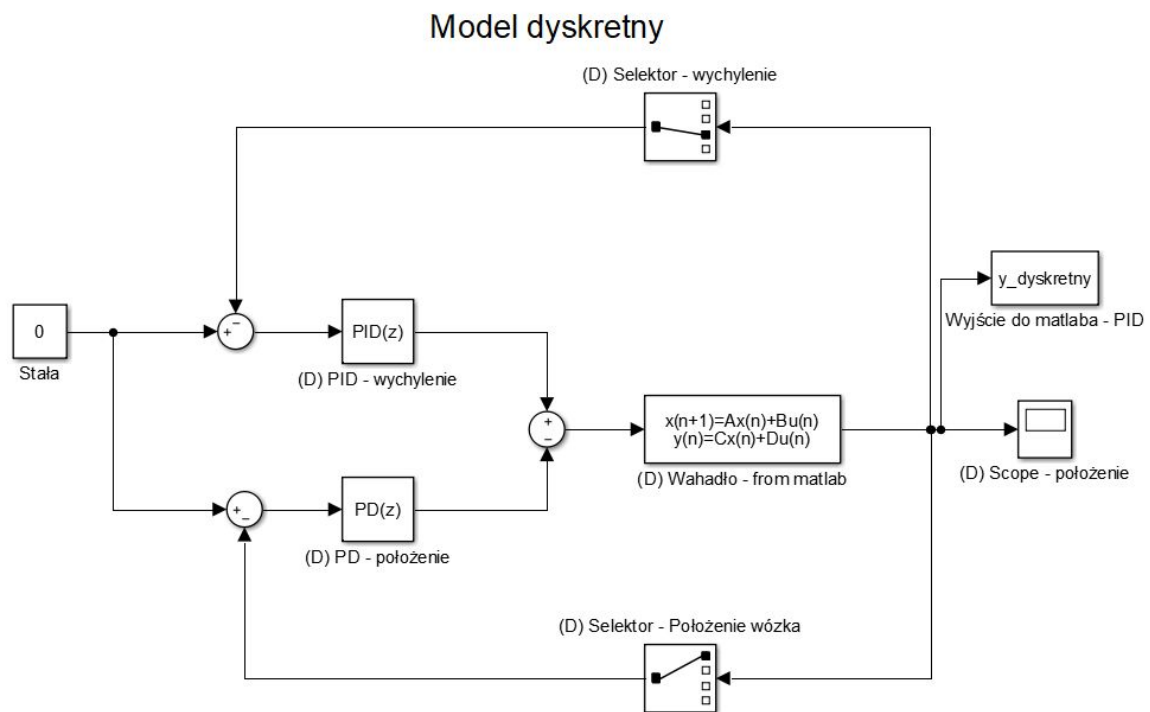
- $K = 12.6642993740103$
- $D = 0.005$

$$P \left(1 + D \cdot \frac{1}{T_s} \frac{z-1}{z} \right)$$

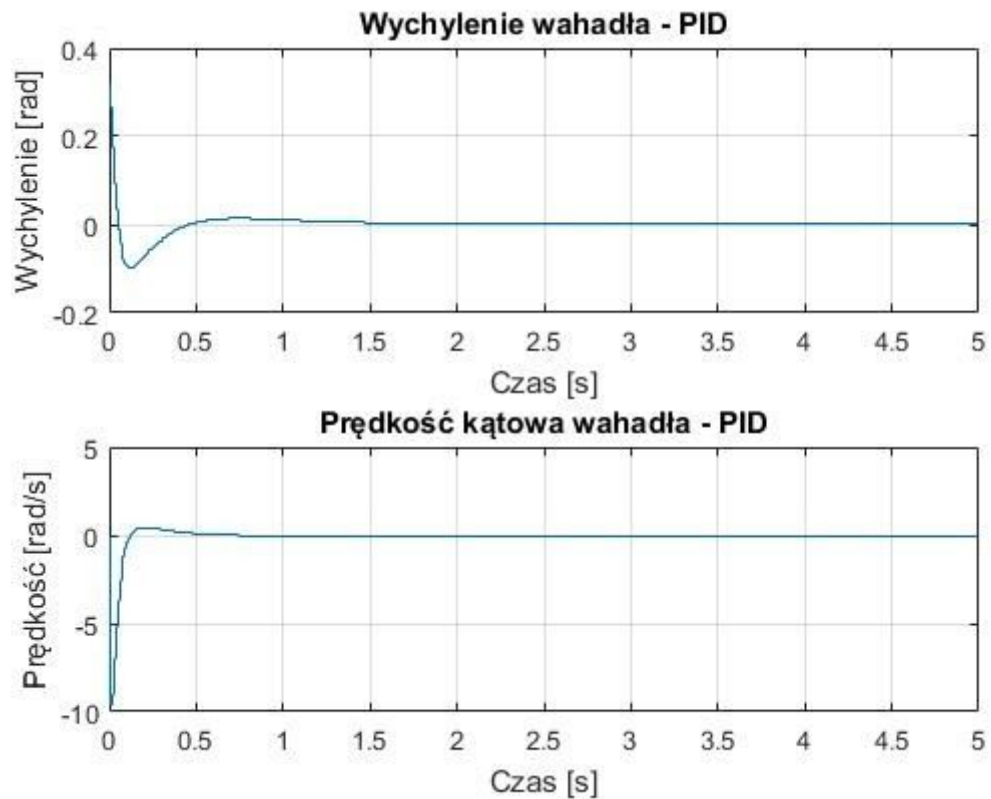
Struktura regulatora PD

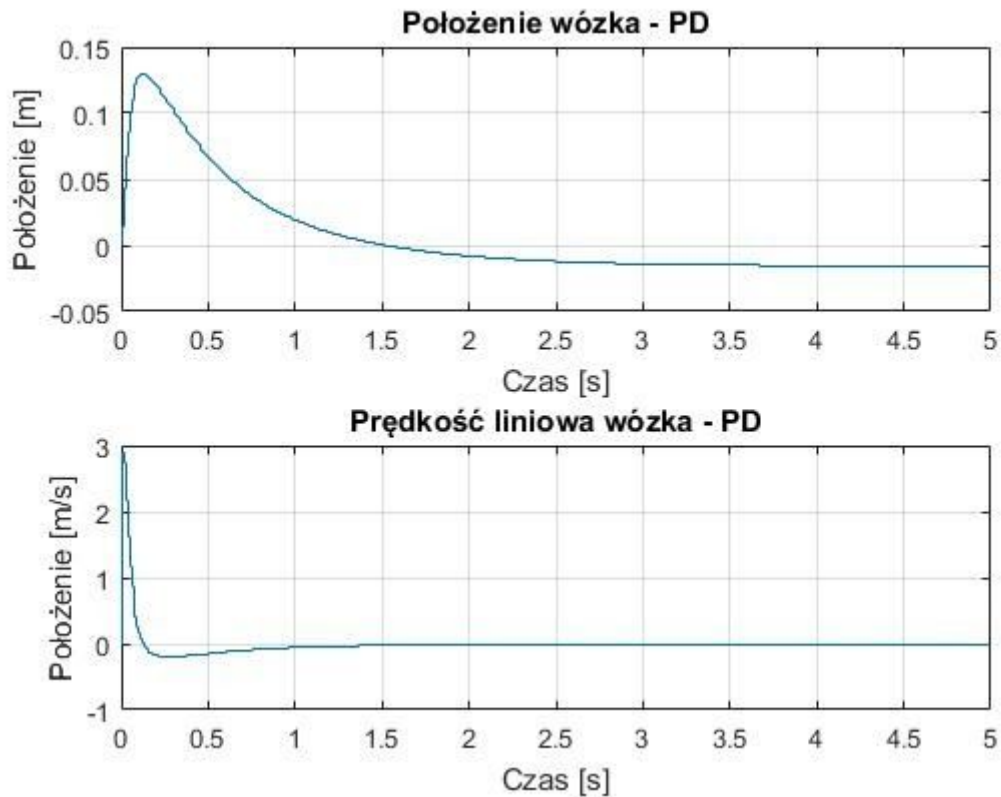
Do regulacji położenia zastosowano regulator PD, co wynika z całkującego charakteru modelu.

Schemat regulatora:



Wykres regulacji:





5. Regulator LQR:

Macierze Q i R:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_n \end{bmatrix} \quad R = \rho \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_n \end{bmatrix}$$

Współczynniki q oraz r dobieramy według następującego wzoru:

- $q_1 = 100$, ponieważ $100 \cdot 0,1^2 = 1$, gdzie 0,1 to błąd regulacji położenia wózka równy 0,1 m = 10 cm
- $q_2 = 3600$, ponieważ $3600 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^2 = 1$, gdzie $\frac{1}{60}$ to błąd regulacji wychylenia wahadła wynoszący $\frac{1}{60}$ radiana.

Kod w Matlabie tworzący macierz wzmocnień K:

```
Q = diag([100 0 3600 0]);
```

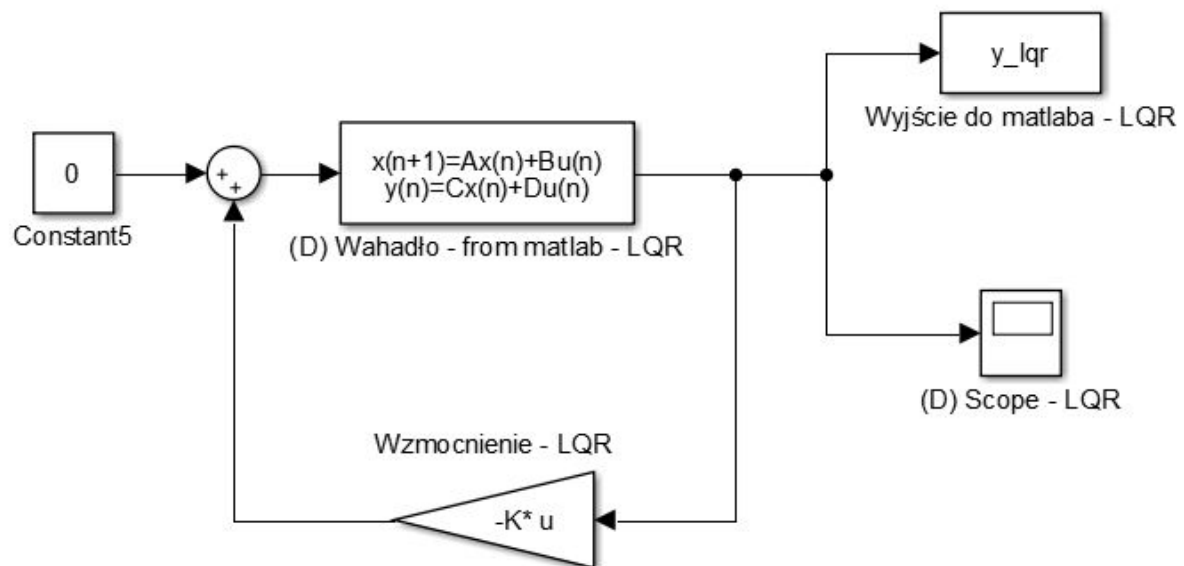
```
R = 1;
```

```
K = dlqr(A,B,Q,R);
```

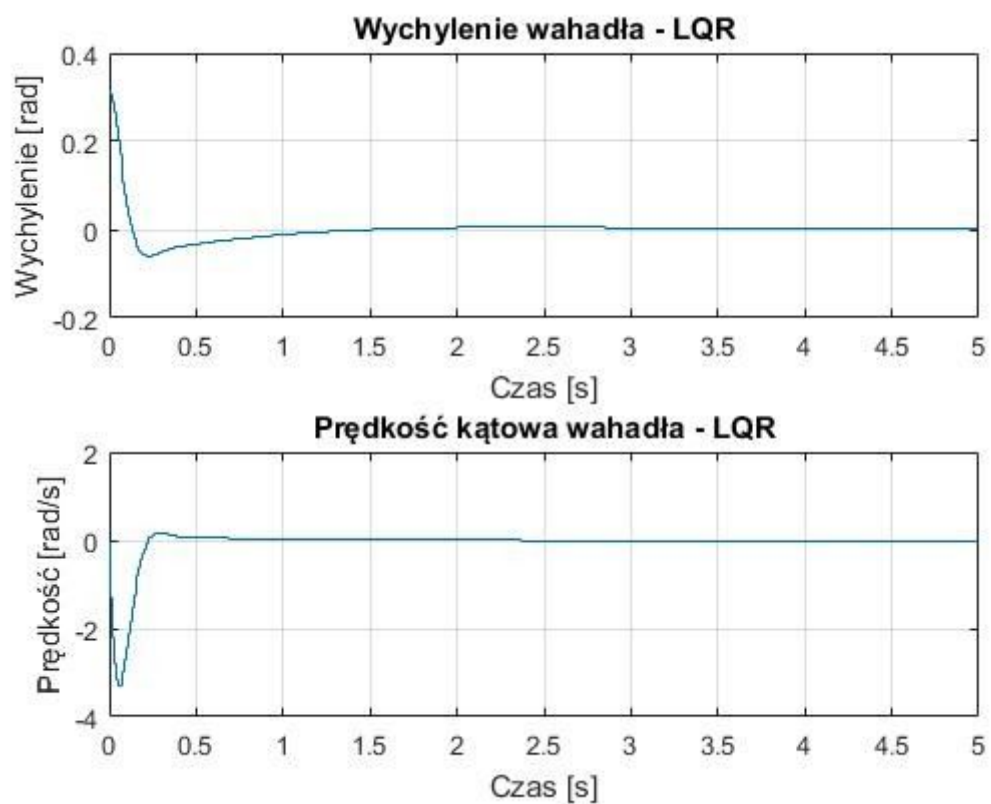
Wartości wzmocnień: $K = [-8,5393 \quad -10,4923 \quad -68,8792 \quad -7,5323]$

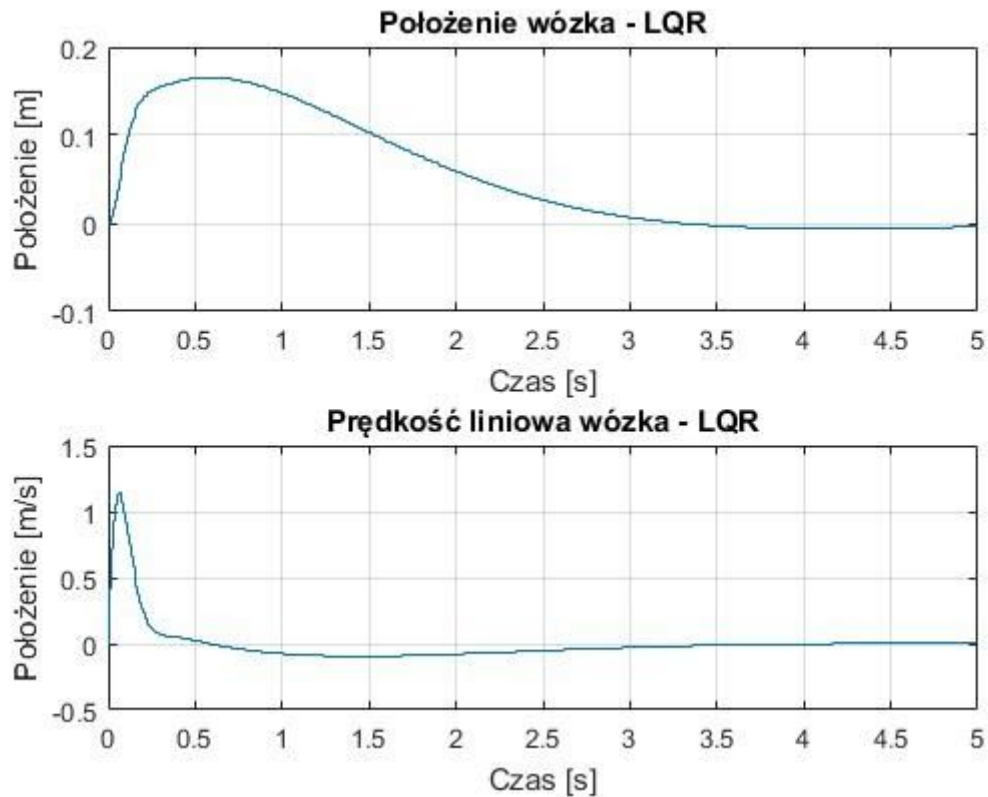
Schemat regulatora:

Model dyskretny - regulator LQR



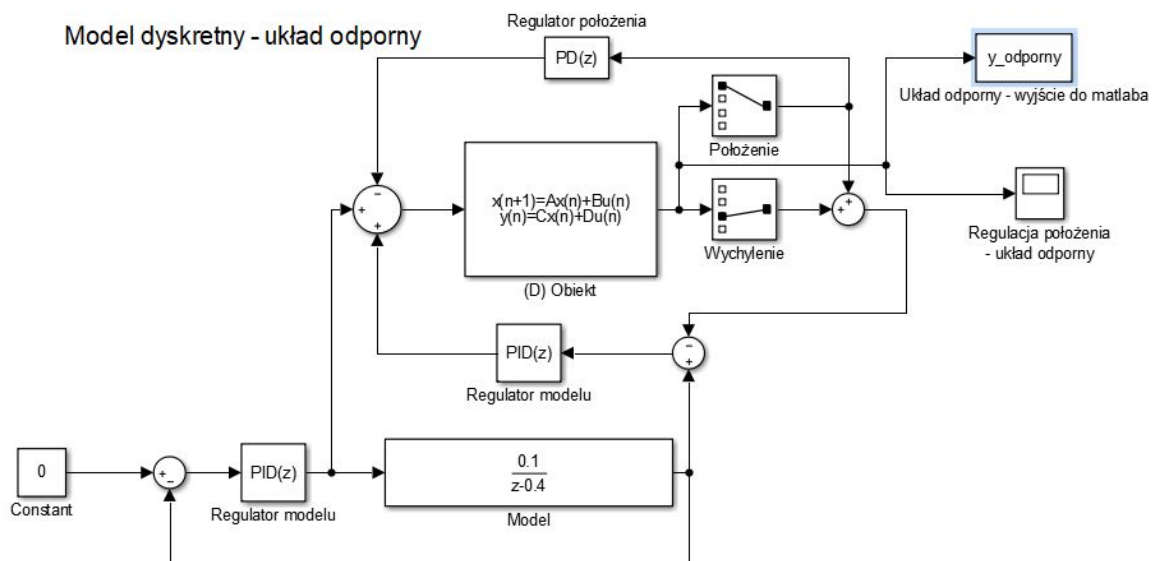
Wykresy regulatora:





6. Regulator odporny:

Schemat regulatora:



Model obiektu dobrany metodą prób i błędów, po uprzednim przejściu ze zmiennych stanu na transmitancję (polecenie tf w Matlabie).

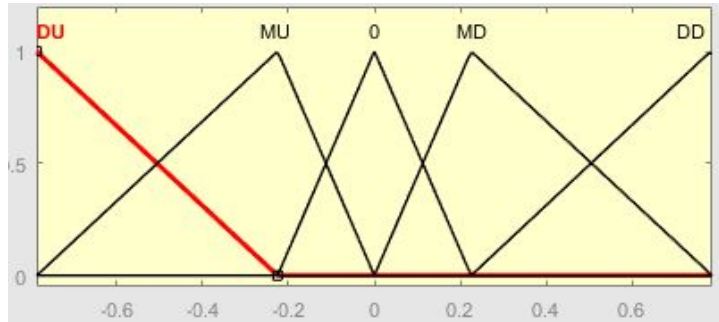
Wykresy:



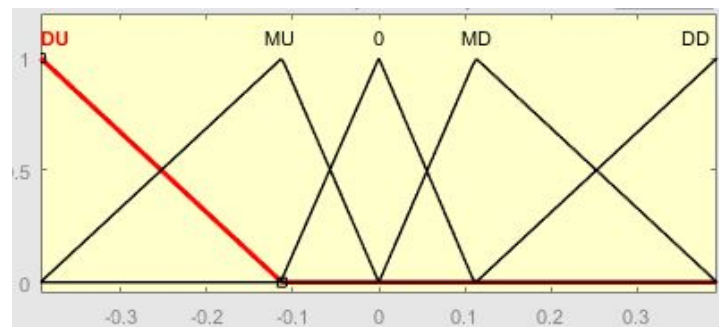
7. Regulator rozmyty:

Regulator wychylenia - zmienne, wyjście oraz płaszczyzna:

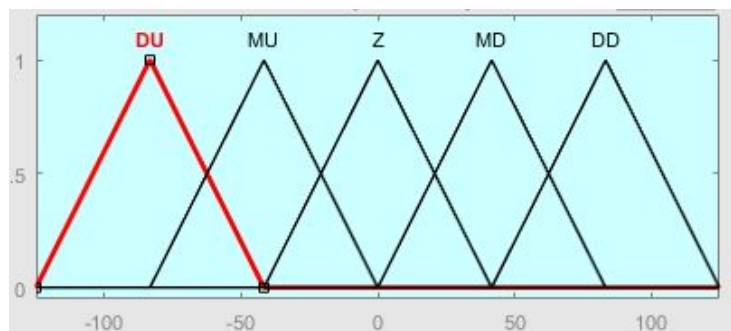
- Wychylenie:



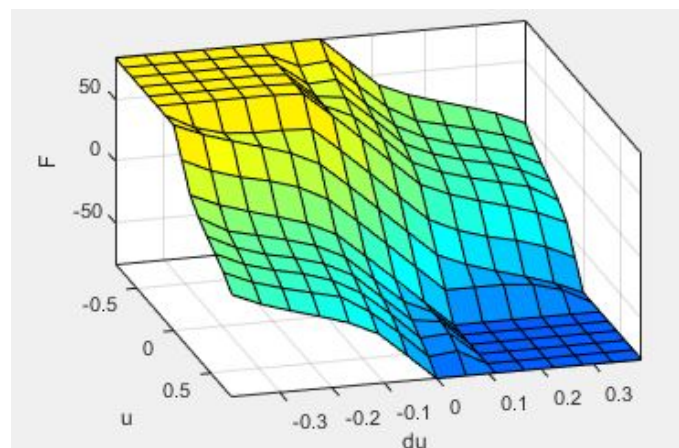
- Prędkość kątowa:



- Wyjście - siła:



- Płaszczyzna:

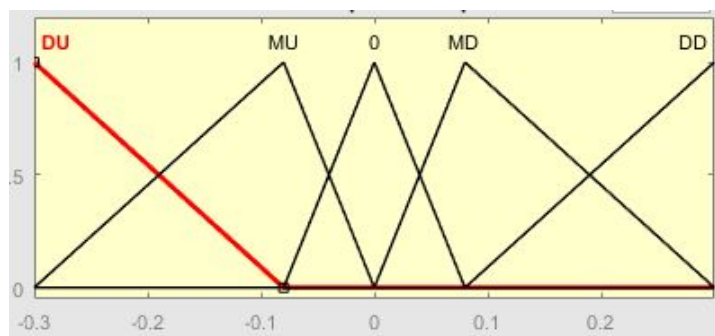


- Zbiór reguł (rules):

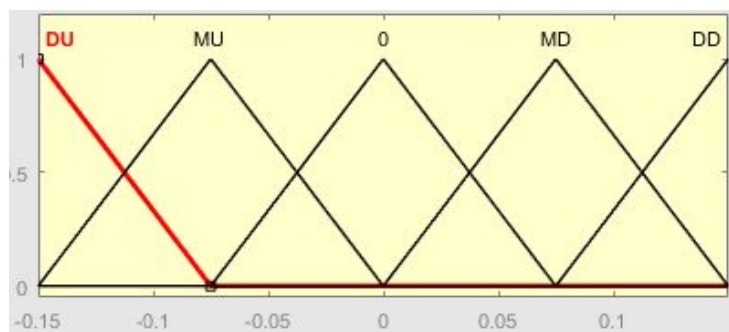
1. If (u is DU) and (du is DU) then (F is DD) (1)
2. If (u is DU) and (du is MU) then (F is DD) (1)
3. If (u is DU) and (du is 0) then (F is DD) (1)
4. If (u is DU) and (du is MD) then (F is MD) (1)
5. If (u is DU) and (du is DD) then (F is Z) (1)
6. If (u is MU) and (du is DU) then (F is DD) (1)
7. If (u is MU) and (du is MU) then (F is DD) (1)
8. If (u is MU) and (du is 0) then (F is MD) (1)
9. If (u is MU) and (du is MD) then (F is Z) (1)
10. If (u is MU) and (du is DD) then (F is MU) (1)
11. If (u is 0) and (du is DU) then (F is DD) (1)
12. If (u is 0) and (du is MU) then (F is MD) (1)
13. If (u is 0) and (du is 0) then (F is Z) (1)
14. If (u is 0) and (du is MD) then (F is MU) (1)
15. If (u is 0) and (du is DD) then (F is DU) (1)
16. If (u is MD) and (du is DU) then (F is MD) (1)
17. If (u is MD) and (du is MU) then (F is Z) (1)
18. If (u is MD) and (du is 0) then (F is MU) (1)
19. If (u is MD) and (du is MD) then (F is DU) (1)
20. If (u is MD) and (du is DD) then (F is DU) (1)
21. If (u is DD) and (du is DU) then (F is Z) (1)
22. If (u is DD) and (du is MU) then (F is MU) (1)
23. If (u is DD) and (du is 0) then (F is DU) (1)
24. If (u is DD) and (du is MD) then (F is DU) (1)
25. If (u is DD) and (du is DD) then (F is DU) (1)

Regulator położenia - zmienne, wyjście oraz płaszczyzna:

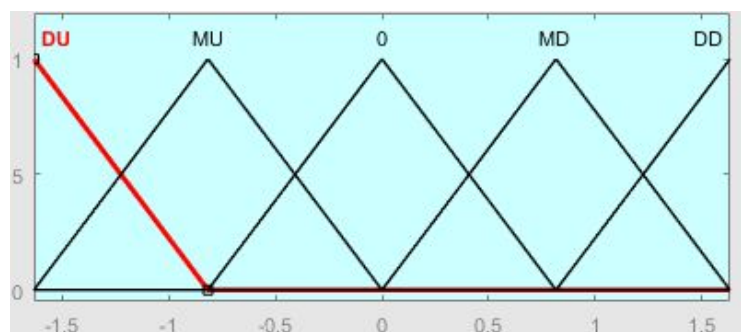
- Położenie:



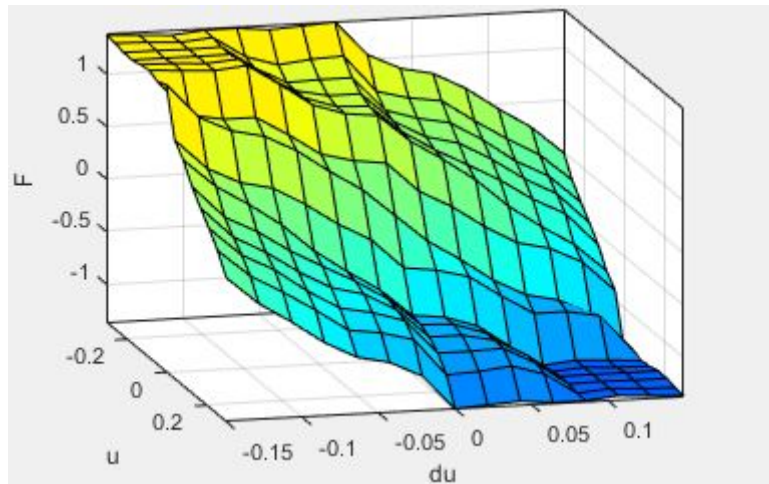
- Prędkość liniowa wózka:



- Wyjście - siła:



- Płaszczyzna:



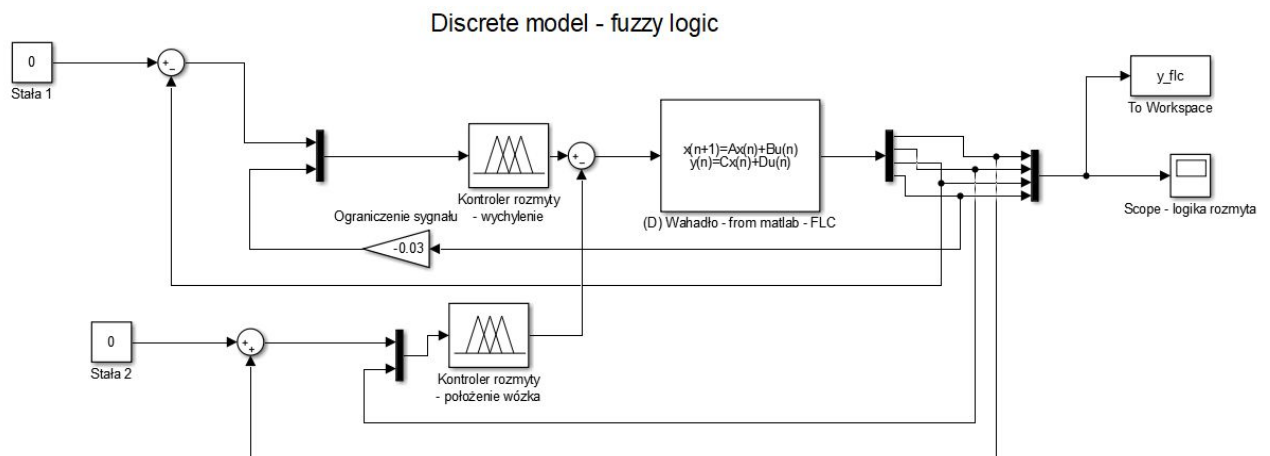
- Zbiór reguł (rules):

```

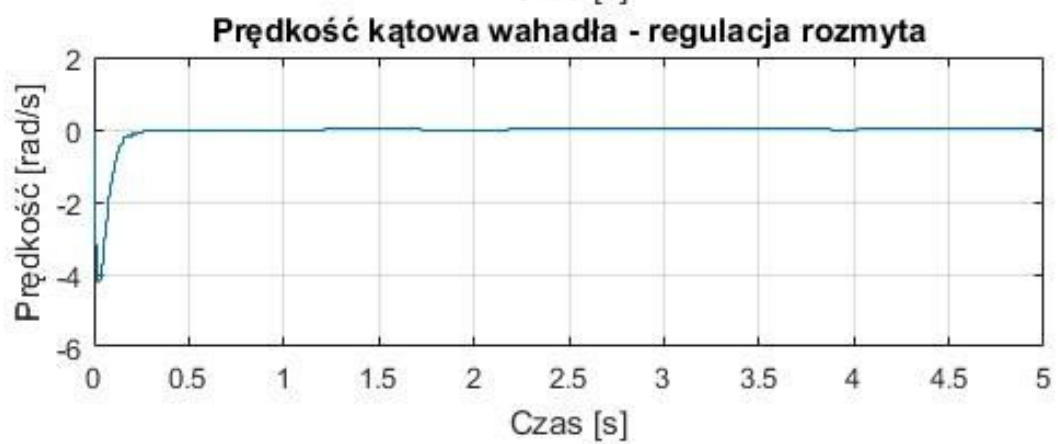
1. If (u is DU) and (du is DU) then (F is DD) (1)
2. If (u is DU) and (du is MU) then (F is DD) (1)
3. If (u is DU) and (du is 0) then (F is DD) (1)
4. If (u is DU) and (du is MD) then (F is MD) (1)
5. If (u is DU) and (du is DD) then (F is 0) (1)
6. If (u is MU) and (du is DU) then (F is DD) (1)
7. If (u is MU) and (du is MU) then (F is DD) (1)
8. If (u is MU) and (du is 0) then (F is MD) (1)
9. If (u is MU) and (du is MD) then (F is 0) (1)
10. If (u is MU) and (du is DD) then (F is MU) (1)
11. If (u is MD) and (du is DU) then (F is MD) (1)
12. If (u is MD) and (du is MU) then (F is 0) (1)
13. If (u is MD) and (du is 0) then (F is MU) (1)
14. If (u is MD) and (du is MD) then (F is DU) (1)
15. If (u is MD) and (du is DD) then (F is DU) (1)
16. If (u is 0) and (du is DU) then (F is DD) (1)
17. If (u is 0) and (du is MU) then (F is MD) (1)
18. If (u is 0) and (du is 0) then (F is 0) (1)
19. If (u is 0) and (du is MD) then (F is MU) (1)
20. If (u is 0) and (du is DD) then (F is DU) (1)
21. If (u is DD) and (du is DD) then (F is DU) (1)
22. If (u is DD) and (du is MD) then (F is DU) (1)
23. If (u is DD) and (du is 0) then (F is DU) (1)
24. If (u is DD) and (du is MU) then (F is MU) (1)
25. If (u is DD) and (du is DU) then (F is 0) (1)

```

Schemat regulatora:

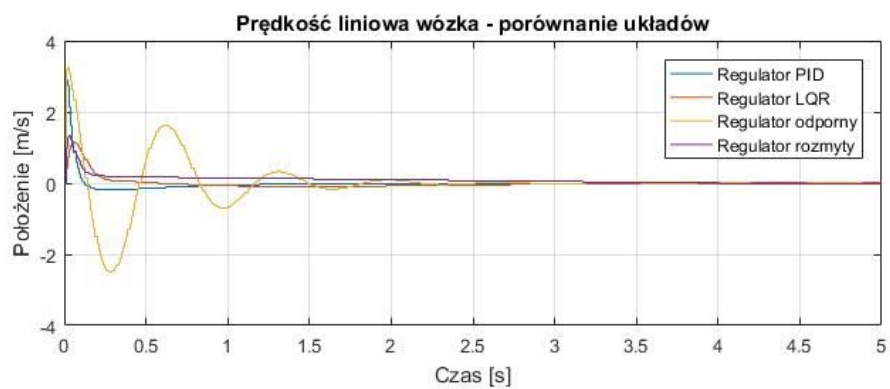
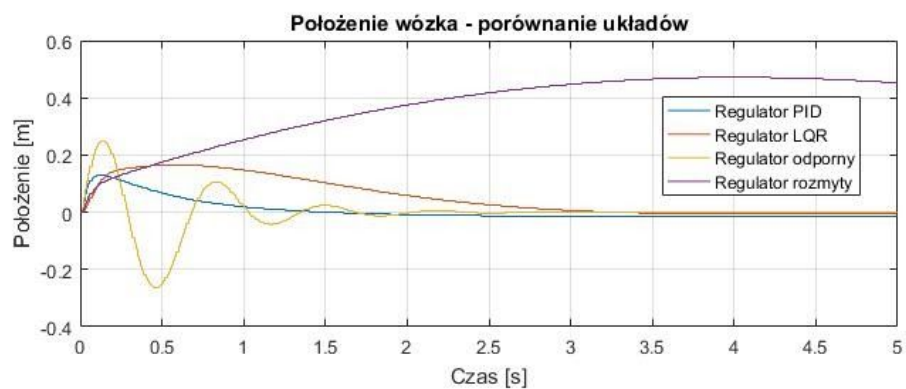
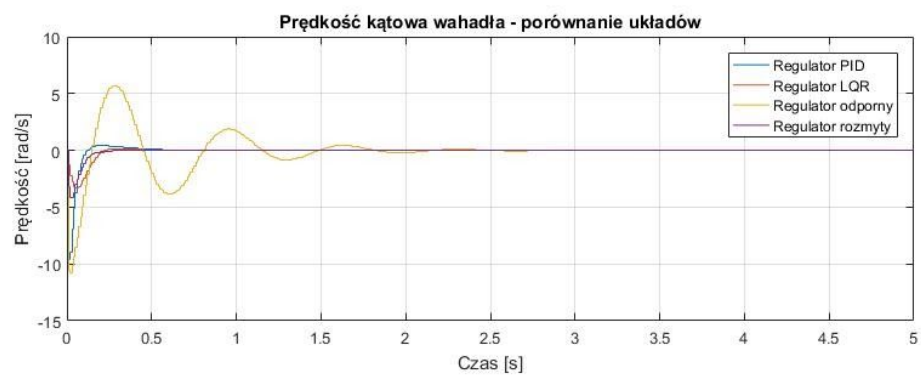
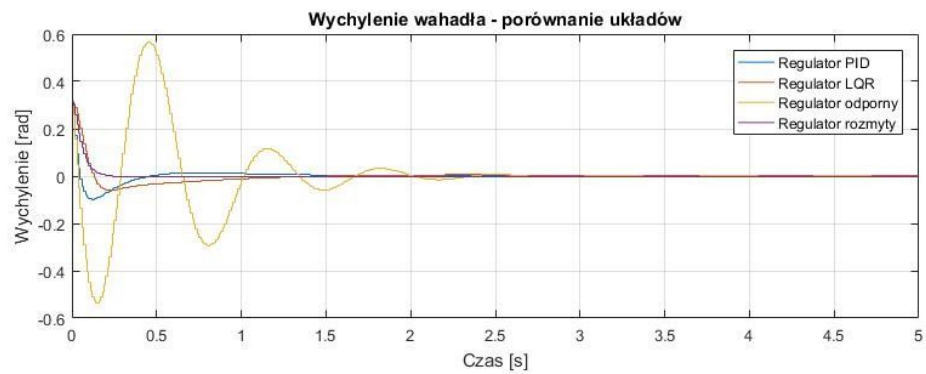


Wykresy regulatora:



8. Wnioski:

Wykresy zbiorcze:



Wnioski:

Regulator PID szybko reguluje zarówno wychylenie wahadła, jak i położenie wózka. W przypadku wózka pojawia się niewielki uchyb ustalony - około 1 centymetr. Wartości wychylenia i położenia oraz odpowiednich im prędkości są możliwe do uzyskania w rzeczywistości.

Regulator LQR działa łagodniej od regulatora PID, uzyskując niewiele dłuższy czas regulacji. W przypadku wychylenia wahadła, regulator LQR lepiej realizuje swoją funkcję od regulatora referencyjnego, gdyż uzyskujemy mniejsze przeregulowanie kosztem znikomego przyrostu czasu regulacji. Regulacja położenia wózka wydłuża się o około dwie sekundy, ponadto pojawia się przeregulowanie większe niż w regulatorze referencyjnym.

Regulator odporny reguluje wahadło gorzej niż regulator referencyjny, gdyż pojawiają się oscylacje zarówno przy regulacji wychylenia, jak i położenia. Ponadto, czas regulacji znacznie wydłuża się - o około 2 sekundy. Jednakże, regulator ten jest w większym stopniu odporny na zakłócenia, co jest jego dużą zaletą.

Regulator rozmyty stwarza duże problemy podczas jednoczesnej regulacji wychylenia i położenia - podczas, gdy regulacja wychylenia wahadła jest najszybszą spośród wszystkich, to regulator położenia wózka działa najwolniej i ustala położenie wózka po około 30 sekundach. Żaden z regulatorów rozmytych nie wykazuje przeregulowania.

Regulatorem najlepiej spełniającym swoje zadanie jest regulator LQR, gdyż reguluje układ łagodnie, bez "pików" w charakterystykach, robiąc to jednocześnie szybko. Wszystkie regulatory możliwe są do implementacji na sterownikach PLC, gdyż są realizowalne w dziedzinie dyskretniej.

Regulator rozmyty będzie optymalny do regulacji wahadła po zmianie reguł odpowiadających za regulację położenia wózka. Po wielu próbach, w projekcie umieszczono wersję, która najlepiej realizowała zadanie. Nastawy regulatora dobierano, analizując przebieg charakterystyki dla regulatora PID.