

Wahadło odwrócone

Laboratorium Problemowe

Cezary Maciński, Kinga Talaga, Maciej Wójcik
Automatyka i Robotyka, Inteligentne Systemy Sterowania

Grupa 1a

Kraków, 2020

Spis treści

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 1 | Problematyka | 3 |
| 2 | Pomiary modelu | 4 |
| 2.1 | Pomiary wahadła | 4 |
| 2.2 | Pomiar siły wytwarzanej przez silnik | 5 |
| 3 | Wyznaczenie współczynników tarcia | 6 |
| 3.1 | Eksperyment wahadła | 6 |
| 3.2 | Eksperyment wózka | 9 |
| 3.3 | Podsumowanie identyfikacji | 11 |
| 4 | Model matematyczny | 12 |
| 4.1 | Dynamika wahadła - równania Lagrange'a | 12 |
| 4.2 | Nieliniowe równania stanu | 14 |
| 4.3 | Linearyzacja równań stanu | 15 |
| 5 | Model symulacyjny | 16 |
| 6 | Regulator LQR | 16 |
| 7 | Testowanie na obiekcie rzeczywistym | 17 |
| 7.1 | Przejście przez punkt równowagi | 18 |
| 7.2 | Regulacja w otoczeniu punktu równowagi | 19 |
| 8 | Moduł Swing-Up | 19 |
| 9 | Weryfikacja pierwotnej implementacji | 20 |
| 9.1 | Regulator LQR - modyfikacja wzmocnień | 20 |
| 9.2 | Swing-up - zmiana energii granicznej | 21 |
| 10 | Rezultaty implementacji | 22 |
| 11 | Wnioski | 23 |

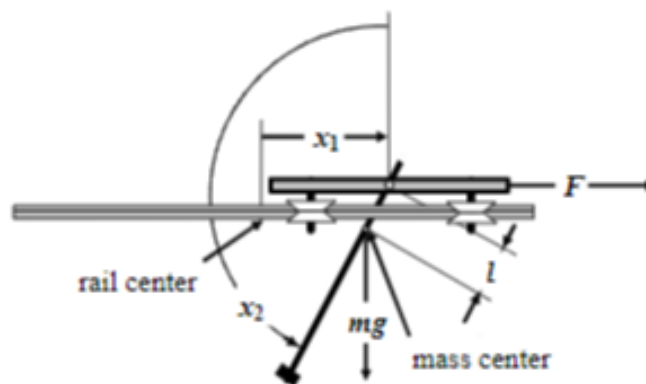
1. Problematyka

Na tegorocznej edycji przedmiotu Laboratorium Problemowe 2, zespół wybrał temat odwróconego wahadła na wózku. Początkowy plan zakładał:

- wykonanie podstawowych pomiarów poszczególnych części modelu,
- wyznaczenie współczynników tarcь występujących w modelu obiektu,
- opracowanie modelu matematycznego,
- wykonanie modelu symulacyjnego,
- zaprojektowanie regulatora LQR,
- dodanie modułu swing-up,
- weryfikacja modelu symulacyjnego z rzeczywistym obiektem,

jednak z czasem przeprowadzania kolejnych eksperymentów, pewne etapy zostały zmodyfikowane, niektóre zostały wyłączone z projektu, a na niektórych zespół skupił większą uwagę niż na pozostałych.

Poniżej przedstawiono schemat układu wraz z rozkładem sił (1.1):



Rysunek 1.1: Schemat układu (źródło: instrukcja dołączona do obiektu)

2. Pomiary modelu

2.1 Pomiary wahadła

Przeprowadzono działania mające na celu uzyskanie wartości wagi oraz długości pręta wahadła i obciążnika zamontowanego na jego końcu. Uznano, że druga para wahadła ma takie same wartości parametrów. Odkręcono pręt od wózka, zdjęto obciążnik i wykonano pomiary, które wykazały następujące wartości:

- długość pręta - 50 cm
- długość odważnika - 1.8 cm
- odległość od końca pręta do środka ciężkości (wyznaczonego eksperymentalnie) - 33.6 cm
- odległość od połowy odważnika do środka ciężkości - 15.5 cm
- odległość od punktu obrotu do środka ciężkości - 25 cm

Eksperyment, za pomocą którego wyznaczono środek ciężkości polegał na zrównoważeniu poziomo położonego pręta na cienkim obiekcie. Przesuwając pręt w obie strony, udało się uzyskać punkt równowagi, co świadczyło że w tym punkcie znajduje się środek ciężkości pręta.

Za punkt obrotu przyjęty został punkt, w którym było przyłożone mocowanie do wózka. Uznano, że domyślnie wybrany punkt będzie odpowiedni.

Sprawdzanie wszystkich odległości miało zapewnić o poprawności wykonanych pomiarów (co jak można zauważyć zostało spełnione (suma odległości od jednego końca do środka odważnika oraz połowa odważnika jest równa sumarycznej długości pręta)

Wykonano również pomiar masy, wyniki są następujące:

- masa pręta - 20 g,
- masa obciążnika - 11 g,
- masa pręta i obciążnika - 31 g.

Tutaj również wykonano sprawdzenie poprawności pomiarów i również dało ono pozytywny wynik.

2.2 Pomiar siły wytwarzanej przez silnik

W celu wyznaczenia siły wytwarzanej przez silnik, zespół zbadał wartość siły dla zadanych wartości wypełnienia PWM. Przedstawione w tabeli wartości zawierają wypełnienie sygnału PWM, napięcie przyłożone do silnika, siłę z jaką działa silnik na wózek.

| Wypełnienie | Napięcie [V] | Siła [F] |
|-------------|--------------|----------|
| 0.1 | 2.4 | 1 |
| 0.15 | 3.6 | 2.2 |
| 0.2 | 4.8 | 3 |
| 0.25 | 6 | 3.5 |
| 0.3 | 7.2 | 4 |
| 0.35 | 8.4 | 4.6 |
| 0.4 | 9.6 | 5.3 |
| 0.45 | 10.8 | 5.7 |
| 0.5 | 12 | 6 |
| 0.55 | 12 | 6 |
| 0.6 | 12 | 6 |
| 0.65 | 12 | 6 |

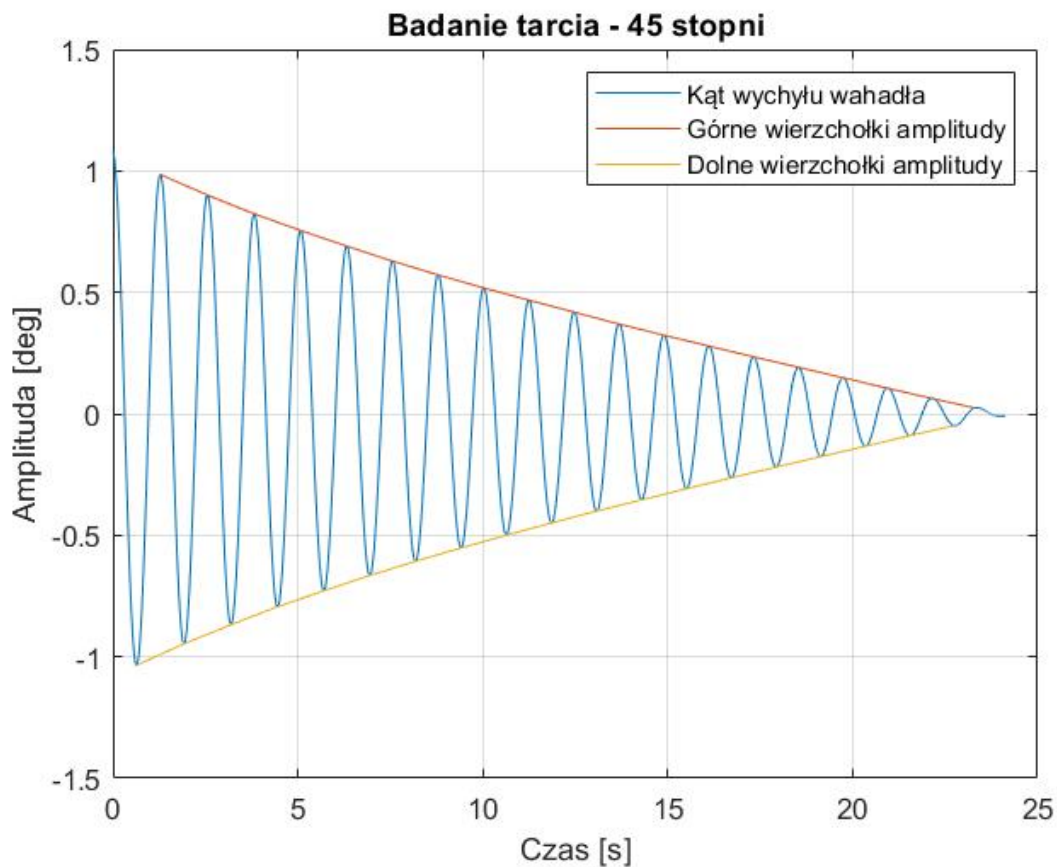
Można zauważyć w powyższej tabeli pewną nieprawidłowość. Mianowicie dla wypełnienia większego bądź równego 0.5, wartość napięcia ani siły się nie zmienia. Jest to spowodowane ograniczeniem obiektu (zabezpieczeniem), który nie przyjmie większego napięcia niż 12 V, tym samym nie uzyska siły większej niż dla 12 V (tj. 6 N).

3. Wyznaczenie współczynników tarcia

Podczas laboratorium wykonano eksperymenty pozwalające wyznaczyć zarówno tarcie wiskotyczne (dynamiczne), jak i tarcie statyczne.

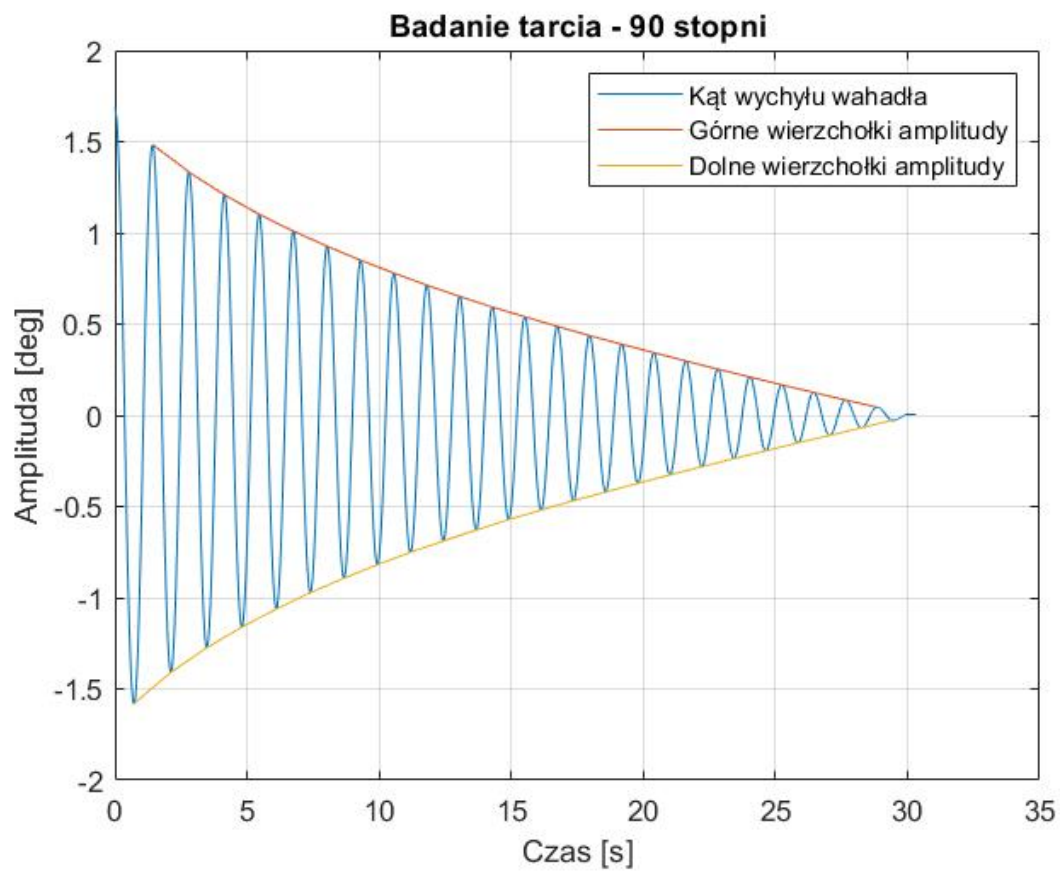
3.1 Eksperyment wahadła

Dla wahadła wykonano cztery wariacje eksperymentu polegającego na ruchu swobodnym wahadła (3.1-3.4). Każda z wariacji różniła się zadaniem początkowym wychyleniem. Jednak z racji niskich wartości tarć, zdecydowano się je pominąć, tym samym upraszczając model. Zespół wraz z prowadzącym podjął decyzję, że wpływ tarcia nie będzie znaczący dla systemu sterowania.



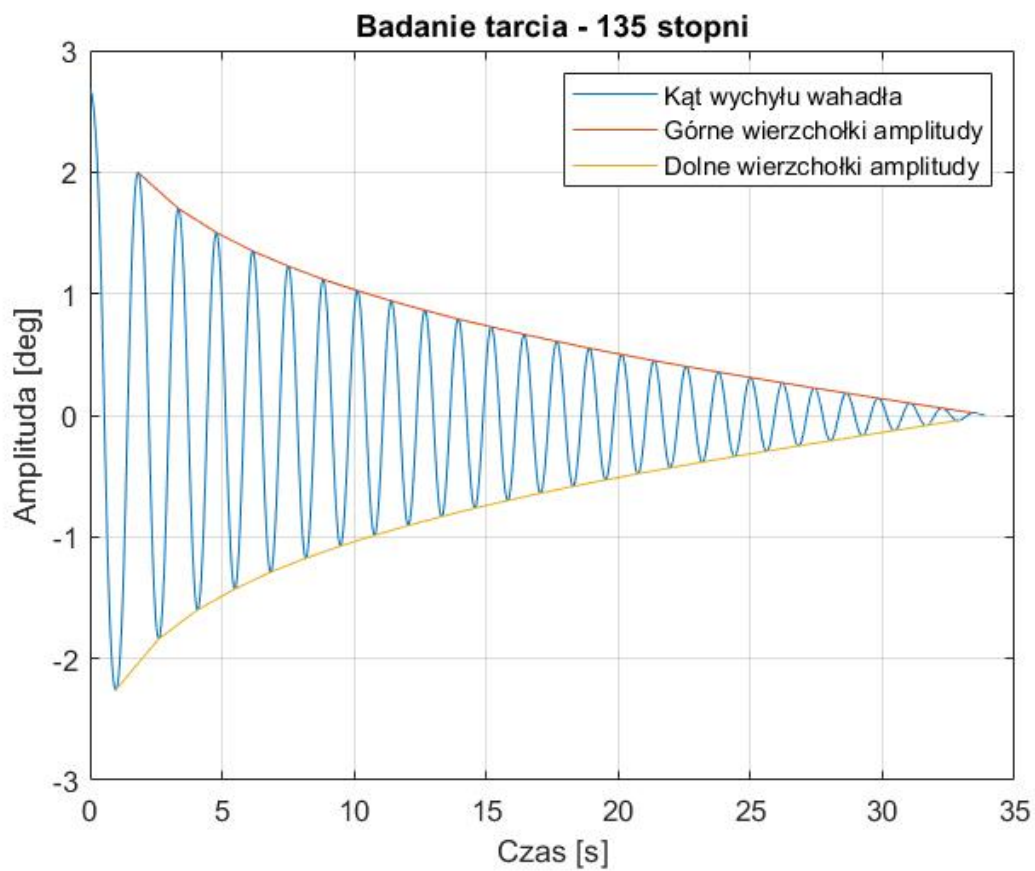
Rysunek 3.1: Wykres wychylenia wahadła w czasie dla kąta początkowego - 45 °C

Obliczony okres drgań wynosi 1.223 s.



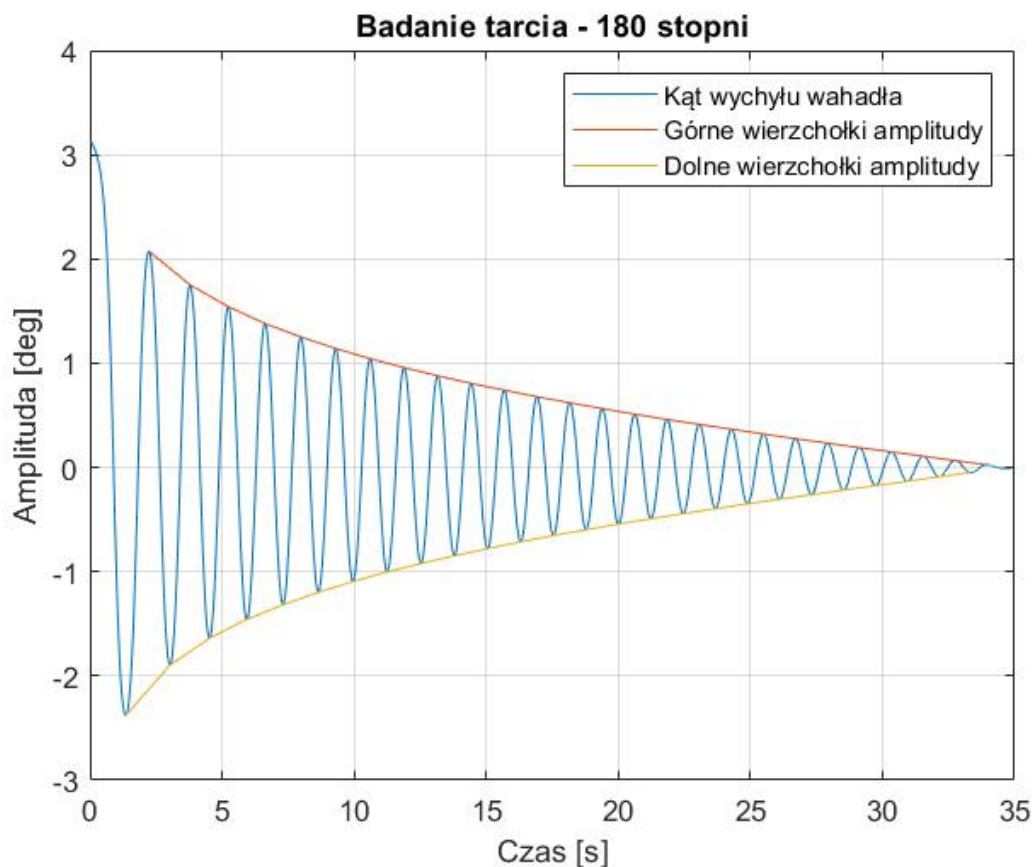
Rysunek 3.2: Wykres wychylenia wahadła w czasie dla kąta początkowego - 90 °C

Obliczony okres drgań wynosi 1.246 s.



Rysunek 3.3: Wykres wychylenia wahadła w czasie dla kąta początkowego - 135°C

Obliczony okres drgań wynosi 1.263 s.



Rysunek 3.4: Wykres wychylenia wahadła w czasie dla kąta początkowego - 180 °C

Obliczony okres drgań wynosi 1.267 s.

Uśredniając uzyskane okresy drgań własnych uzyskano wartość równą 1.25 s.

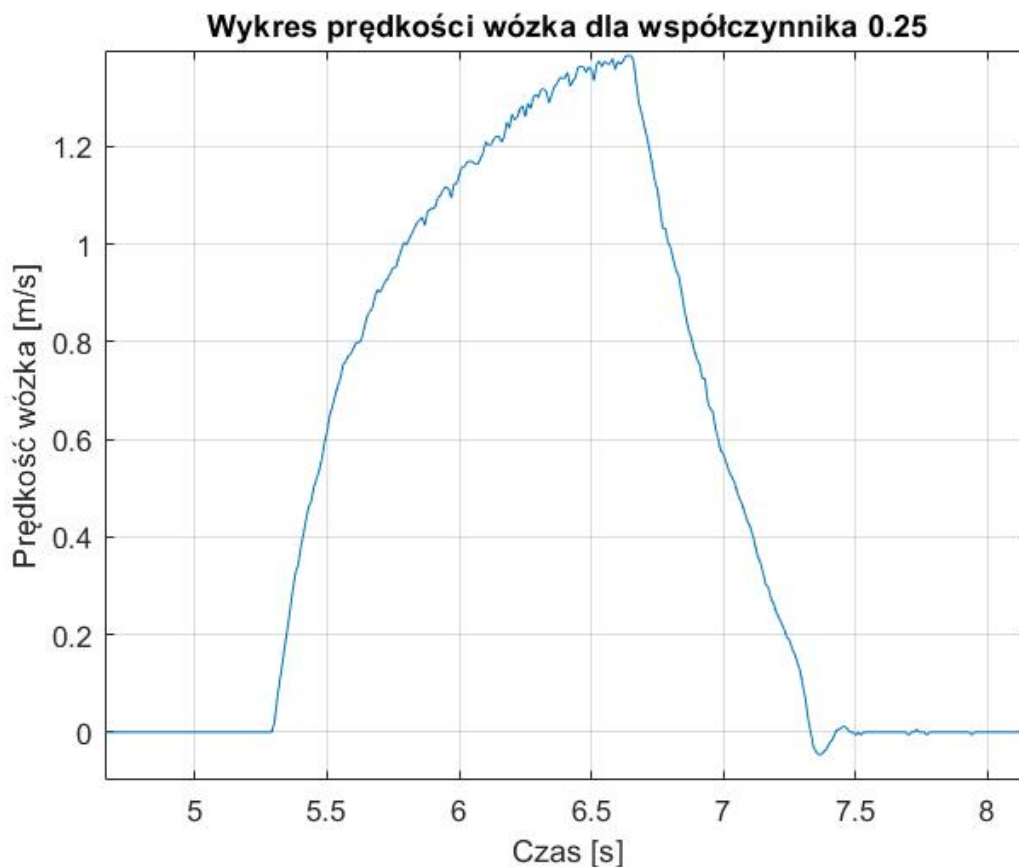
3.2 Eksperyment wózka

Dla wózka przeprowadzono podobny eksperyment (z ruchem swobodnym). Zapisano dane dla współczynników wypełnienia -0.15, 0.15 oraz 0.25, jednak z racji później zauważonych sporych szumów w sygnale prędkości wózka, zdecydowano się wykorzystać wyłącznie pomiary z przyjętego współczynnika 0.25. Przedstawione zostały na rys. 3.5, 3.6.



Rysunek 3.5: Wykres prędkości wózka i sterowania układu dla współczynnika wypełnienia PWM = 0.25

By lepiej zobrazować kształt oraz przebieg wykresu, został on przedstawiony w powiększeniu na rys. 3.6



Rysunek 3.6: Wykres prędkości wózka w powiększeniu dla współczynnika wypełnienia PWM = 0.25

Zarówno jak przy współczynnikach tarcia dla wahadła, również tutaj zdecydowano się uznać tarcia za pomijalnie małe.

3.3 Podsumowanie identyfikacji

Po przeprowadzeniu identyfikacji parametrów obiektu możliwe było wyznaczenie momentu bezwładności prętów wahadła oraz współczynników tarcia układu - zarówno wózka, jak i wahadła. W podstawowym modelu matematycznym postanowiono nie uwzględniać tarcia - regulator LQR opracowany na podstawie uproszczonego modelu również powinien być w stanie wysterować układ rzeczywisty.

4. Model matematyczny

Model układu został przedstawiony na rysunku 1.1. Na tym etapie prac, tarcie wahadła oraz wózka zostało pominięte.

Wartości wykorzystywane w trakcie obliczeń:

M = masa wózka [kg],

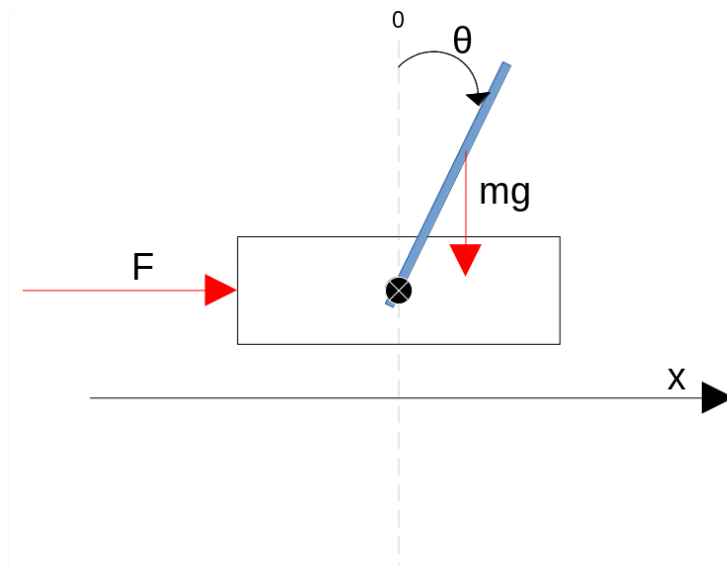
m = masa wahadła [kg],

L = odległość środka masy wahadła od punktu obrotu [m],

g = przyspieszenie grawitacyjne [$\frac{kg*m}{s^2}$].

4.1 Dynamika wahadła - równania Lagrange'a

Do wyznaczenia modelu matematycznego wahadła wykorzystano równania Lagrange'a. Schemat układu wraz z kierunkami zmiennych przedstawiono na rysunku 4.1.



Rysunek 4.1: Schemat układu wahadła odwróconego

Jako zmienne uogólnione q_1, q_2 przyjęto odpowiednio położenie x i wychylenie wahadła θ . Siły uogólnione działające dla poszczególnych zmiennych wynoszą odpowiednio:

$$Q_1 = F$$

$$Q_2 = 0$$

Gdzie F - siła działająca na wózek.

Ogólna postać równania Lagrange'a (4.1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta L}{\delta q_i} = Q_i \quad (4.1)$$

Po oznaczeniu zmiennych uogólnionych i wyliczeniu wartości sił uogólnionych, przystąpiono do wyznaczenia energii układu. W celu poprawnego określenia energii kinetycznej, należy rozważyć składowe wektora prędkości pręta wahadła (4.2 - 4.3), gdyż w tym przypadku porusza się on ruchem płaskim:

$$v_x = \dot{x} + L\dot{\theta} \cos \theta \quad (4.2)$$

$$v_y = L\dot{\theta} \sin \theta \quad (4.3)$$

Kwadrat całkowitej prędkości pręta wahadła przedstawiony jest w równaniu (4.4):

$$v_c^2 = v_x^2 + v_y^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta} \cos \theta + L^2\dot{\theta}^2 \quad (4.4)$$

Ostatecznie, energia kinetyczna układu (4.5) wynosi:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta} \cos \theta + L^2\dot{\theta}^2 \right) + J\dot{\theta}^2 \quad (4.5)$$

W układzie jedynie pręt zmienia swoją energię potencjalną (wózek porusza się tylko w poziomie), stąd energia potencjalna (4.6) wynosi:

$$U = mgL \cos \theta \quad (4.6)$$

Wykorzystując (4.5) i (4.6), Lagrangian (4.7) wynosi:

$$L = E - U = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m \left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta} \cos \theta + L^2\dot{\theta}^2 \right) + J\dot{\theta}^2 + mgL \cos \theta \quad (4.7)$$

Obliczanie równania Lagrange'a dla położenia x :

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + mL\dot{\theta} \cos \theta \quad (4.8)$$

$$\frac{\delta L}{\delta x} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) = (M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} \cos \theta - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} \right) - \frac{\delta L}{\delta x} = (M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} \cos \theta - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (4.11)$$

Obliczanie równania Lagrange'a dla wychylenia wahadła θ :

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} = mL\dot{x} \cos \theta + mL^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} \quad (4.12)$$

$$\frac{\delta L}{\delta \theta} = -mL\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + mgL \sin \theta \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) = mL\ddot{x} \cos \theta - mL\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + (J + mL^2)\ddot{\theta} \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} = mL\ddot{x} \cos \theta - mL\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta + (J + mL^2)\ddot{\theta} + mL\dot{x}\dot{\theta} \sin \theta - mgL \sin \theta = 0 \quad (4.15)$$

Ostatecznie, równanie Lagrange'a dla wychylenia θ przyjmuje postać (4.16):

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} + mL\ddot{x} \cos \theta - mgL \sin \theta \quad (4.16)$$

Równania (4.11) i (4.16) to równania dynamiki Newtona układu wahadła odwróconego. Na podstawie równań (4.11) i (4.16) wyznaczono przyspieszenia liniowe (4.17) i kątowe (4.18) układu:

$$\ddot{x} = \frac{F(J + mL^2) - mL \sin \theta (J\dot{\theta}^2 + g \cos \theta) + m^2 L^3 \dot{\theta}^2 \sin \theta}{J(M + m) + m^2 L^2 + mML^2 + m^2 L^2 \cos^2 \theta} \quad (4.17)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{mLF \cos \theta + m^2 L^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - (M + m)mgL \sin \theta}{J(M + m) + m^2 L^2 + mML^2 + m^2 L^2 \cos^2 \theta} \quad (4.18)$$

4.2 Nieliniowe równania stanu

Wzory przyspieszeń służą do wyprowadzenia nieliniowych równań stanu. Przyjęto następujący wektor stanu (4.19):

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T \quad (4.19)$$

Z wykorzystaniem równań (4.17), (4.18) i (4.19) wyprowadzono nieliniowe równania stanu, opisujące zależności pomiędzy wahadłem a wózkiem.

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.20)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-F(J + mL^2) - mL \sin x_3 (Jx_4^2 + g \cos x_3) + m^2 L^3 x_4^2 \sin x_3}{J(M + m) + m^2 L^2 + mML^2 + m^2 L^2 \cos^2 x_3} \quad (4.21)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{mLF \cos x_3 + m^2 L^2 x_4^2 \sin x_3 \cos x_3 - (M + m)mgL \sin x_3}{J(M + m) + m^2 L^2 + mML^2 + m^2 L^2 \cos^2 x_3} \quad (4.23)$$

Na podstawie doświadczeń z podrozdziału 2.2, siła F wyrażona jest następującym wzorem:

$$F = -0.5 * u - 0.3 \quad (4.24)$$

Gdzie u to napięcie sterujące z zakresu $\pm 12V$.

Po podstawieniu (4.24) do równań stanu, uzyskano następujące równania:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.25)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{(0.5 * u + 0.3)(J + mL^2) - mL \sin x_3 (Jx_4^2 + g \cos x_3) + m^2 L^3 x_4^2 \sin x_3}{J(M + m) + m^2 L^2 + mML^2 + m^2 L^2 \cos^2 x_3} \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (4.27)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{-mL(0.5 * u + 0.3) \cos x_3 + m^2 L^2 x_4^2 \sin x_3 \cos x_3 - (M + m)mgL \sin x_3}{J(M + m) + m^2 L^2 + mML^2 + m^2 L^2 \cos^2 x_3} \quad (4.28)$$

4.3 Linearyzacja równań stanu

Linearyzację układu przeprowadzono wokół punktu równowagi $\theta = 0$. Wskutek tego założenia, możliwe jest przybliżenie wartości funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \theta \approx \theta$$

$$\cos \theta \approx 1$$

$$\sin 2\theta \approx 2\theta$$

Zlinearyzowane równania dynamiki układu (4.29 - 4.30)

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta} = F \quad (4.29)$$

$$(J + mL^2)\ddot{\theta} + mL\ddot{x} - mgL\theta = 0 \quad (4.30)$$

Po linearyzacji, uzyskano następujące równania stanu:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.31)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-m^2 g L^2 x_3 + (J + mL^2) * (0.5 * u + 0.3)}{J(M + m) + mML^2} \quad (4.32)$$

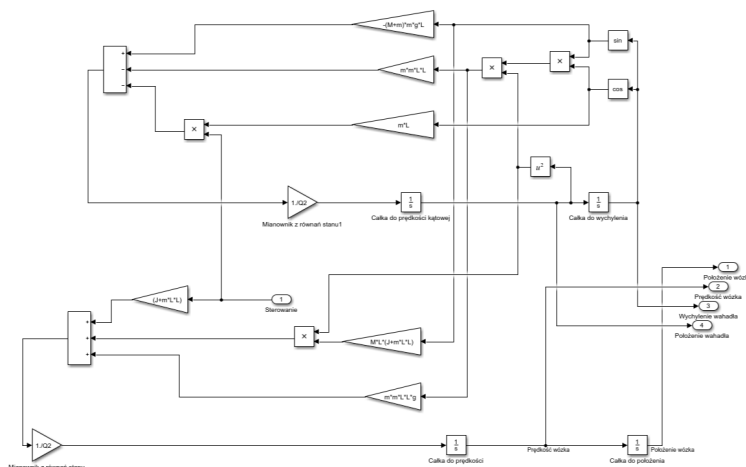
$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (4.33)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{(M + m)mgLx_3 + mL * (0.5 * u + 0.3)}{J(M + m) + mML^2} \quad (4.34)$$

Zlinearyzowane równania stanu zostały wykorzystane do utworzenia modelu symulacyjnego wahadła odwróconego.

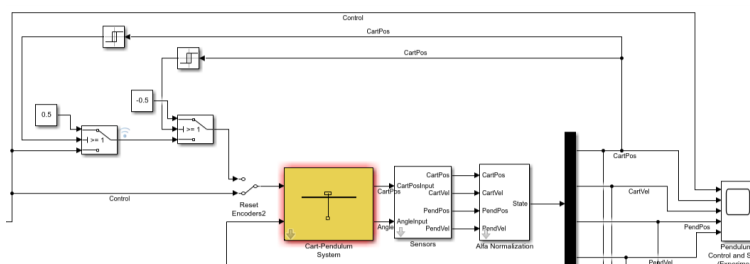
5. Model symulacyjny

Na podstawie modelu matematycznego został utworzony model symulacyjny w Simulinku (5.1).



Rysunek 5.1: Model symulacyjny wahadła odwróconego

Został on dołączony do istniejącej aplikacji sterującej wózkiem. Dodatkowo została dodana histereza w zależności od położenia wózka. Rozwiązanie to pozwoli uniknąć sytuacji, w której wózek uderza w krawędź szyny. Na podstawie sygnału położenia wózka (rys. 5.2) sprawdzane są warunki ze stałymi wartościami granicznymi, po przekroczeniu których wózek przez chwilę porusza się z maksymalną prędkością w przeciwnym kierunku, żeby zapobiec zderzeniu wózka z krawędzią szyny.



Rysunek 5.2: Fragment schematu symulacji z wyszczególnionym modulem histerezy

6. Regulator LQR

Równanie regulatora (6.1) będzie wykorzystane jako sterowanie w układzie.

$$u(t) = -Kx(t) \quad (6.1)$$

Równaniem decydującym o wartościach macierzy K było równanie 6.2, z którego otrzymano zależność 6.4

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (6.2)$$

$$y = Cx(t) + Du(t) \quad (6.3)$$

$$\dot{x} = Ax(t) + BKx(t) \quad (6.4)$$

$$\dot{x} = (A + BK)x(t) \quad (6.5)$$

Na podstawie zadanych wartości uchybu oraz wartości sterowania uzyskano macierze obserwatora (6.6) i regulatora (6.7). Wykorzystując macierze A, B, Q i R obliczono macierz wzmacnień K (6.8).

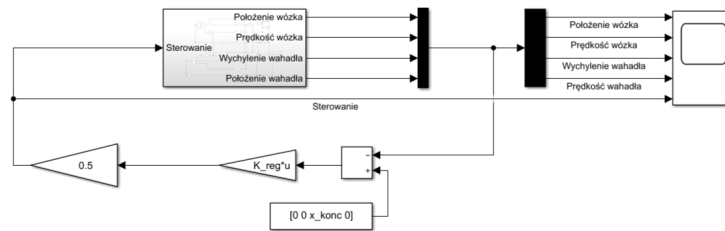
$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$R = 1 \quad (6.7)$$

$$K = \begin{bmatrix} 10.00 & 16.50 & 98.07 & 25.86 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

$$(6.9)$$

Zaimplementowany regulator został dodany do modelu symulacyjnego oraz przedstawiony na rys. 6.1



Rysunek 6.1: Model symulacyjny wahadła odwróconego z regulatorem LQR

7. Testowanie na obiekcie rzeczywistym

W trakcie testowania obliczonego regulatora na obiekcie rzeczywistym, ujawnione zostały problemy związane z błędnym przyjęciem zwrotu kąta θ - w obiekcie rzeczywistym θ

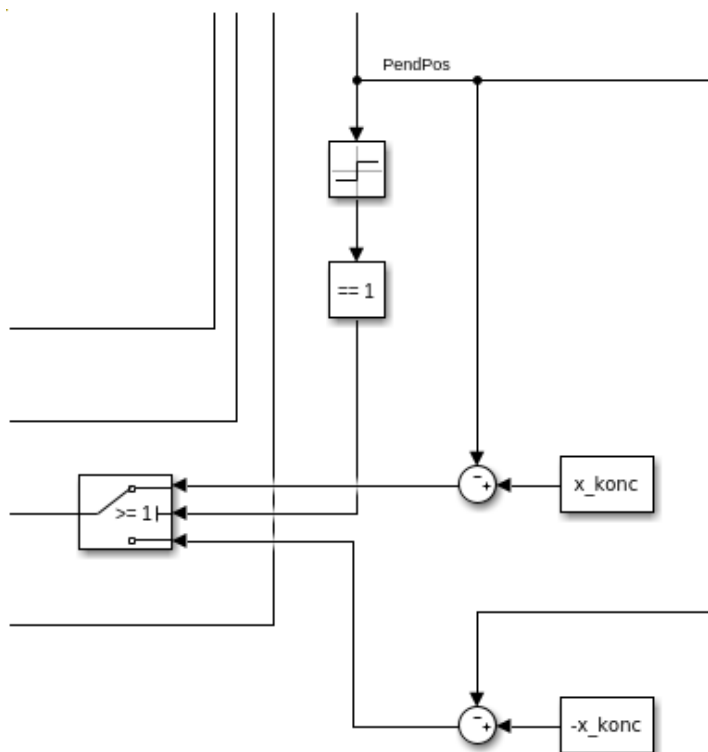
ma zwrot zgodnie z ruchem wskazówek zegara, w obiekcie modelowanym - przeciwnie do wskazówek zegara. W celu poprawy implementacji, wymagana jest korekcja znaku kąta - jest to realizowalne na jeden z dwóch sposobów:

- odwrócenie znaku wyjściowej wartości kąta z obiektu,
- zmiana kierunku kąta θ w modelu matematycznym.

Sposób rozwiązania napotkanego problemu zostanie dobrany w ciągu najbliższych zajęć. Ponadto, wymagane jest opracowanie mechanizmu swing-up, w celu doprowadzenia wahadła do punktu zbliżonego do punktu równowagi, gdyż tylko w jego otoczeniu realizowana jest regulacja.

7.1 Przejście przez punkt równowagi

W trakcie przejścia wahadła przez punkt równowagi, odczyt wartości kąta enkodera zmienia znak na przeciwny - wynika to z zasady działania enkodera inkrementalnego. W celu poprawnego działania regulatora, wymagane jest obsłużenie tej sytuacji. W trakcie laboratorium postanowiono przetestować rozwiązanie oparte na analizie znaku kąta i obliczania uchybu w zależności od kierunku wychylecia wahadła. Implementacja została przedstawiona na rysunku 7.1.

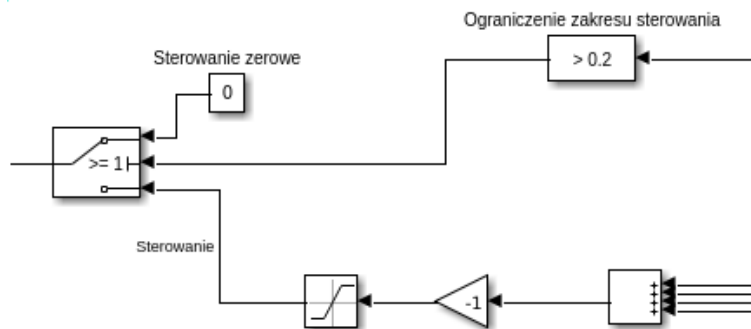


Rysunek 7.1: Obsługa zmiany znaku kąta wychylecia wahadła

Tak obsługana zmiana znaku kąta wychylenia pozwala na poprawną regulację wahadła odwróconego w okolicy punktu równowagi.

7.2 Regulacja w otoczeniu punktu równowagi

Z racji, iż regulator LQR został zaprojektowany do pracy w otoczeniu punktu równowagi, wymagane jest wyłączenie sterowania wahadłem poza otoczeniem tego punktu - jeśli wahadło jest wychylone o więcej niż 0.2 radiana, sygnał sterujący przyjmuje wartość 0. Implementacja rozwiązania została przedstawiona na rysunku 7.2.



Rysunek 7.2: Ograniczenie sterowania do otoczenia punktu równowagi

8. Moduł Swing-Up

Proces doprowadzenia wahadła do położenia, w którym możliwa jest jego regulacja, jest realizowany poprzez sterowanie *bang-bang*, czyli podawanie maksymalnego sygnału sterującego ze znakiem przeciwnym do wychylenia dotąd, aż możliwa będzie regulacja wahadła.

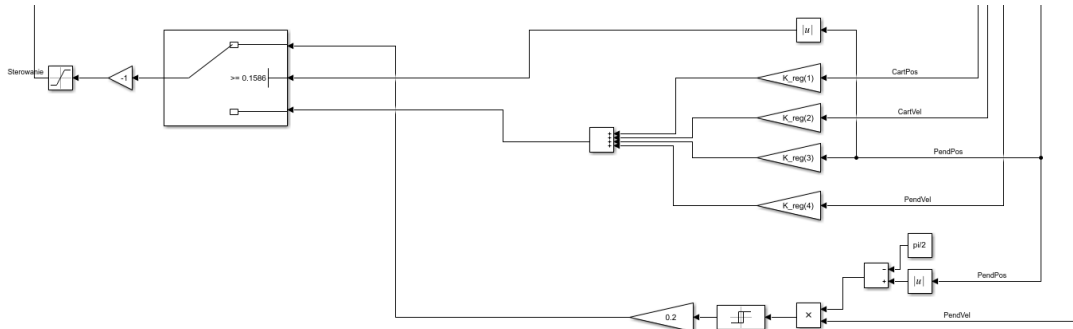
Warunek dopuszczalności regulacji wynika z energii układu - energia całkowita wahadła odwróconego musi być nie mniejsza niż energia dla skrajnej pozycji, dla której możliwe jest doprowadzenie wahadła do pionu. Pozycja skrajna została wyznaczona drogą symulacji modelu i wynosi $\theta_{max} = 0.2$ radiana, przy zerowych prędkościach wózka i wahadła.

Z racji, iż możliwa jest regulacja wahadła przy odchyleniu 0 0.2 radiana od pozycji początkowej i zerowych prędkościach, energia całkowita układu jest równa jego energii potencjalnej:

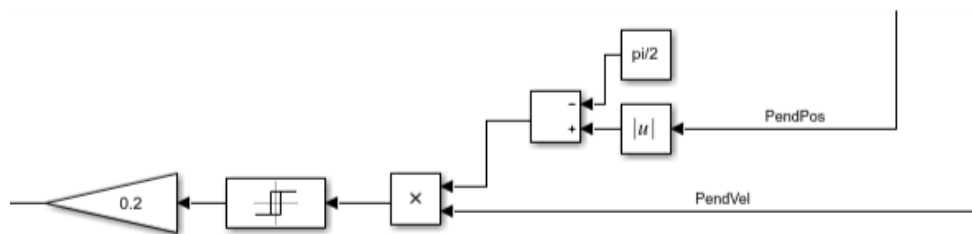
$$E_c = U = mgL \cos \theta = mgL \cos 0.2 = 0.1586 J$$

Energia minimalna układu wynosi 0.1586 dżula. Układ regulacji zaczyna pracę tylko wtedy, gdy energia układu jest mniejsza niż obliczona.

Sprężenie zwrotne systemu zostało przedstawione na rys. 8.1. Składa się ono z uprzednio przedstawionego regulatora LQR oraz dodanego modułu swing-up przedstawionego na rys. 8.2. Fragment modelu odpowiedzialny za regularyzację (7.2) został zastąpiony blokiem warunkowym, w którym porównuje się sygnał do minimalnej energii układu pozwala na przełączenie pomiędzy modułem swing-up niezbędnym do wyniesienia układu do punktu, w którym może być regulowany przez LQR, a samym regulatorem gdy punkt ten zostanie osiągnięty.



Rysunek 8.1: Sprężenie zwrotne układu



Rysunek 8.2: Moduł swing-up

9. Weryfikacja pierwotnej implementacji

W ramach laboratorium przetestowano dotychczasowe rozwiązania - wartość energii dla modułu swing-up, działanie regulatora LQR, układ bezpieczeństwa (programowy wyłącznik krańcowy). Nie wszystkie mechanizmy spełniały swoją funkcję, lecz wymagane były prace związane z poprawą jakości działania.

9.1 Regulator LQR - modyfikacja wzmocnień

Podczas testowania działania regulatora, sygnał sterujący zaczął osiągać skrajne wartości, przypominając sterowanie typu *bang-bang*. Aby zminimalizować ten efekt, postanowiono

wiono ograniczyć wartości wzmocnień macierzy K tak, by sygnał sterujący osiągał mniejsze wartości.

W celu usprawnienia regulatora zostały wprowadzone następujące zmiany:

- Macierz Q (6.6) przyjęła następującą postać: $Q = \begin{bmatrix} 10000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 360 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$
- Macierz R (6.7): $R = 100$
- czego wynikiem była zmiana wartości macierzy K: $K = \begin{bmatrix} 10.00 & 9.11 & 50.98 & 12.70 \end{bmatrix}$

Mimo poprawienia wartości macierzy obserwatora oraz macierzy regulacji, obliczona macierz wzmocnień nadal potrzebowała przemnożenia przez odpowiednie wagi (ze względu na charakterystykę regulatora, było to niemożliwe do osiągnięcia poprzez same zmiany elementów macierzy). Sygnał prędkości wózka został dodatkowo przemnożony przez 0.2, natomiast prędkość wahadła przez 0.1. Sygnały położenia (wózka i wahadła) nie wymagały dodatkowego przemnożenia. Ostatecznie po tym zabiegu macierz K prezentuje się następująco:

$$K = \begin{bmatrix} 10.00 & 1.82 & 50.98 & 1.27 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

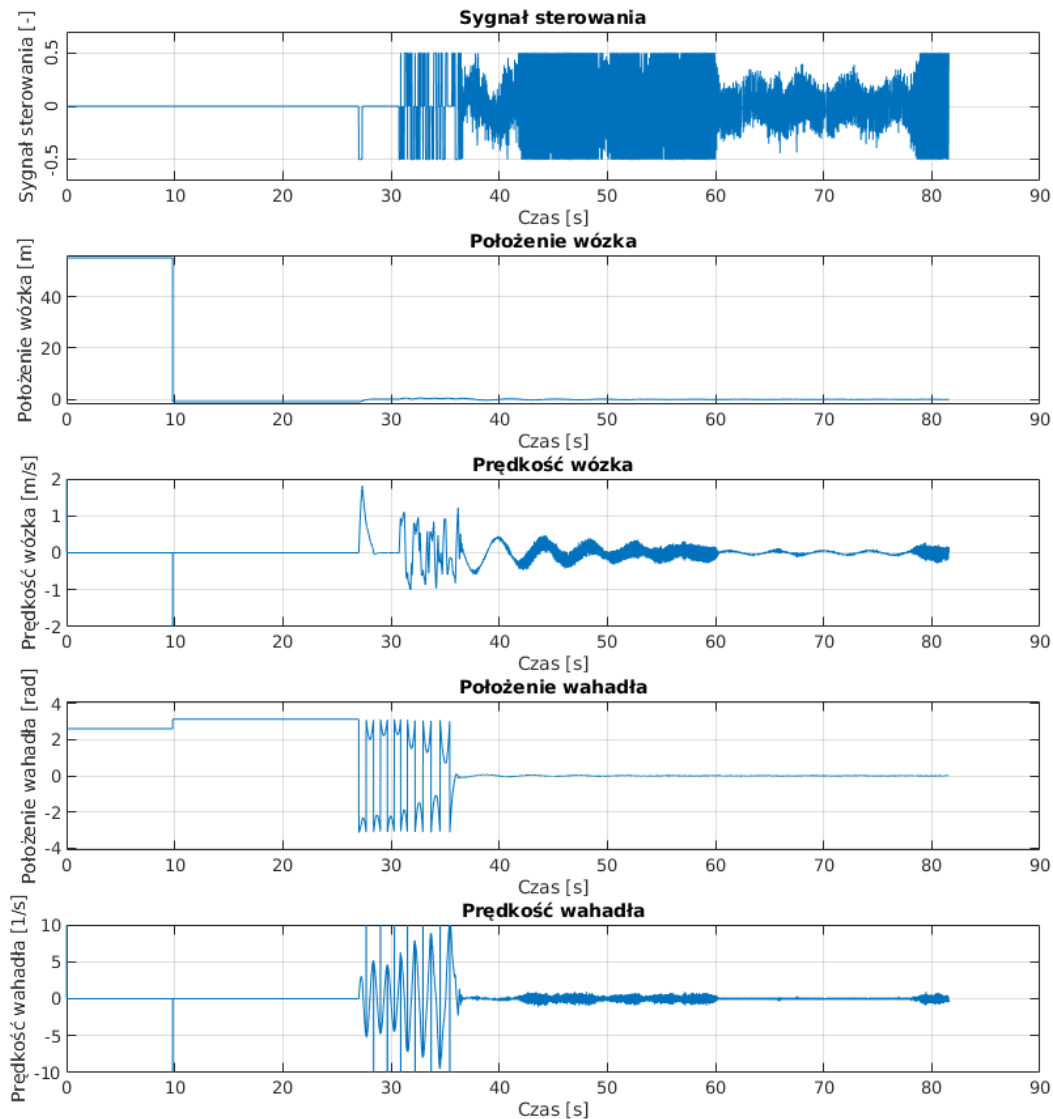
9.2 Swing-up - zmiana energii granicznej

W trakcie testowania działania mechanizmu rozchwiania wahadła, pojawiły się problemy związane z doprowadzeniem wahadła do pozycji regulacji - oznaczało to, że wyznaczona matematycznie wartość energii jest zbyt niska, by regulator doprowadził wahadło do górnego punktu równowagi. Prawdopodobnie miało to związek z siłami tarcia, z których zdecydowano się zrezygnować uzyskując prostszy model matematyczny. Działania te wymagały doświadczalnego zwiększenia progu energii, dla której układ przełączał się z modułu swing-up na moduł regulatora LQR.

Eksperymentalnie wyznaczona wartość progu wynosi 0.43. Po zmianie modelu w programie Simulink i uruchomieniu go dla rzeczywistego obiektu, nastąpiła poprawa działania mechanizmu swing-up - wahadło osiąga kąt w zakresie regulacji w czasie do ok. 10 sekund.

10. Rezultaty implementacji

Poniżej przedstawiono rezultaty implementacji w postaci wykresów przebiegu: sterowania, pozycji wózka, prędkości wózka, pozycji wahadła, prędkości wahadła oraz energii całkowitej wahadła (rys. 10.1).



Rysunek 10.1: Działanie układu z regulatorem LQR

Widoczne są problemy związane z estymacją prędkości na podstawie odczytów z enkoderów - z racji kwantyzacji wartości, pojawiają się progi, w których następuje duża

zmiana wartości sygnału, a co za tym idzie, silna reakcja regulatora. Sposoby poprawy jakości sterowania opisane zostały we wnioskach po wykonaniu projektu.

11. Wnioski

Uzyskany rezultat jest zadowalający, jednak przy większym nakładzie czasu można by się pokusić o płynniejsze sterowanie, ponieważ obecna implementacja bardzo nadwyręża strukturę modelu oraz generuje niepotrzebne straty w energii. Proponowane rozwiązanie do usprawnienia projektu obejmuje zastosowanie obserwatora stanu, dzięki któremu zostałaby uzyskana predykcja kolejnego kroku. Użycie obserwatora umożliwiłoby zaimplementowanie zmiennego sterowania w zależności od obecnej energii układu i położenia wahadła.

Ponadto, zalecane jest opracowanie dokładniejszego modelu wraz z zamodelowaniem tarcia w układzie - pozwala to na zaprojektowanie regulatora o lepszej jakości, gdyż w takiej sytuacji model matematyczny układu lepiej odwzorowuje rzeczywiste wahadło odwrócone, co skutkuje dokładniejszym sterowaniem, pozbawionym tak dużych drgań, jak ma to miejsce dla obecnego układu.