Lista 1

1.

Divisibilidad 2

- Sabemos que un número es divisible por 2 si la última cifra de un número N es número par, es decir, que sea $\{0,2,4,6,8\}$

Siendo N de la forma $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_0$,

por lo que si a_0 es par $\rightarrow$ $N \equiv 0 \mod 2$

si a_0 no es par $\rightarrow$ $N \equiv 1 \mod 2$

Divisibilidad 3

- Sabemos que un número es divisible por 3 si la suma de los dígitos de un número N es divisible por 3, ya que:

$$10 \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow 10^k \equiv 1 \mod 3 \quad k \geq 1$$

Tomando N como un número $N = a_n \cdot 10^n + \cdots a_0$

$$\Rightarrow N \equiv a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_0 \mod 3$$

$$\Rightarrow N \equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_0 \mod 3$$

$$\Rightarrow N \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0 \mod 3$$

Divisibilidad 5

- Sabemos que un número es divisible por 5 si su último dígito es un 5 o un 0. Suponiendo un número $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots$

Sabemos que $10 \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow 10^k \equiv 0 \mod 5$ para $k \geq 1$

$$\Rightarrow N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$N \equiv a_n \cdot 0 + a_{n-1} \cdot 0 + \cdots + a_0 \mod 5$$

$$N \equiv a_0 \mod 5$$

- Divisibilidad 11

Un número es divisible por 11 si $N \equiv 0 \mod 11$, si ponemos los términos utilizando base $10 \Rightarrow 10 \equiv -1 \mod 11$, si escalamos para k positivos:

$$10^0 \equiv 1 \mod 11 \qquad 10^1 \equiv -1 \mod 11$$
$$10^2 \equiv 1 \mod 11 \qquad 10^3 \equiv -1 \mod 11$$

Por tanto, las potencias pares tendrán residuo 1, mientras que las impares tendrán -1.

$$N \equiv a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_0 \mod 11$$
$$N \equiv a_n \cdot (-1)^n + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + \cdots + a_0 \mod 11$$
$$N \equiv (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n \cdot a_n) \mod 11$$

Por tanto, un número es divisible por 11 si la suma alterna de sus dígitos es divisible por 11

- Divisibilidad 13

Utilizando $40 \equiv 1 \mod 13$, tenemos que rescribir un número N en términos de 40, ya que como sabemos que $40 \equiv 1 \mod 13$, por lo cual dividiremos N en bloques de dos dígitos comenzando por el final, si N tiene un número impar de dígitos, el primer bloque puede ser de un dígito.

Por lo que ahora en vez de trabajar con potencias de 10, vamos a agrupar los números de N en bloques de 2 en 2.

$$40 \equiv 1 \mod 13$$
$$40^k \equiv 1^k \mod 13 \Rightarrow 40^k \equiv 1 \mod 13$$

Ej: $74289 \Rightarrow N = 74 \cdot 100 + 28 \cdot 1 + 9$

$\rightarrow$ Como sabemos que $100 = 40 \cdot 2 + 20$ y $40 \equiv 1 \mod 13$

$\Rightarrow 100 \equiv 1 \mod 13$

$$\Rightarrow N = 74 \cdot 1 + 28 \cdot 1 + 9 \mod 13$$
$$N = 111 \mod 13$$

$\rightarrow$ Calculamos $111 : 13 = 8$ con $r.7 \Rightarrow 111 \equiv 7 \mod 13$

$\therefore$ no es divisible por 13

2. Como x es un generador, podemos escribir todos los elementos de G

$$x^k \text{ siendo } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Con los elementos $y_1 = x^{n_1}$, $y_2 = x^{n_2}$ queremos encontrar un m tal que $y_1^m = y_2$, por lo que despejando:

$$(x^{n_1})^m = x^{n_2}$$

$$x^{n_1 m} = x^{n_2}$$

Como sabemos que x es un generador, podemos cancelar dichas potencias y ponerlas módulo n.

$$n_1 \cdot m \equiv n_2 \mod n \Rightarrow m \equiv n_2 \cdot n_1^{-1} \mod n$$

Para hallar solución sabemos que m existirá si n_1 tiene inverso, para ello si n y n_1 son coprimos $\gcd(n, n_1) | n_2$, se podría obtener solución utilizando el Algoritmo Extendido de Euclides.

Por lo que si $\gcd(n, n_1) = 1 \Rightarrow$ siempre existirá un inverso multiplicativo n_1^{-1} que resuelva la ecuación $m \equiv n_2 \cdot n_1^{-1} \mod n$

3. Para determinar los enteros de x, descompondremos el módulo en sus factores primos y utilizaremos el T. Chino del Resto

i) $4x \equiv 3 \mod 385$ $\quad 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 4x \equiv 3 \mod 5 \\ 4x \equiv 3 \mod 7 \\ 4x \equiv 3 \mod 11 \end{cases}$$

- $4x \equiv 3 \mod 5 \Rightarrow x \equiv 3 \cdot 4^{-1} \mod 5$

  $\Rightarrow x \equiv 3 \cdot 4 \mod 5 \Rightarrow x \equiv 2 \mod 5$

Como $16 \equiv 1 \mod 5$ $\Rightarrow$ el inv. de 4 en mod 5 es 4

- $4x \equiv 3 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 3 \cdot 4^{-1} \mod 7$

  $x \equiv 3 \cdot 2 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 6 \mod 7$

Como $4 \cdot 2 \equiv 1 \mod 7$ $\Rightarrow$ el inv. de 4 en mod 7 es 2

- $4x \equiv 3 \mod 11 \Rightarrow x \equiv 3 \cdot 4^{-1} \mod 11$

  $x \equiv 3 \cdot 3 \mod 11 \Rightarrow x \equiv 9 \mod 11$

Como $4 \cdot 3 \equiv 1 \mod 11$ $\quad 4^{-1} = 3$

Aplicando el Teorema chino de los restos:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 5 \\ x \equiv 6 \mod 7 \\ x \equiv 9 \mod 11 \end{cases}$$

Tomamos 2 ecuaciones como $x \equiv 2 \mod 5$ y $x \equiv 6 \mod 7$ y las expresamos como

$x \equiv 2 \mod 5 = X = 5 \cdot K + 2$ -> Sostituimos X en el 2° Ec.

$$5K + 2 \equiv 6 \mod 7$$

$$5K \equiv 4 \mod 7 \qquad \text{Como } 5 \cdot 3 \equiv 1 \mod 7$$

$$K \equiv 4 \cdot 5^{-1} \mod 7 \qquad 5^{-1} = 3$$

$$K \equiv 4 \cdot 3 \mod 7$$

$$K \equiv 5 \mod 7$$

Por lo tanto $K = 7 \cdot m + 5$; sostituimos en $* = 5K + 2$ y obtenemos

$$x = 5(7m + 5) + 2 \Rightarrow x = 35m + 25 + 2 \Rightarrow x = 35m + 27$$

Expresándolo de forma modular: $x \equiv 27 \mod 35$

Por último utilizamos esta ecuación y la última para obtener la sig. relación

$$x \equiv 27 \mod 35 \rightarrow X = 35K + 27$$

$$x \equiv 9 \mod 11 \rightarrow x = 11m + 9$$

∴ sostituimos: $35K + 27 \equiv 9 \mod 11$

$$K \equiv -18 \cdot 35^{-1} \mod 11 \qquad \text{Como } 35 \equiv 2 \mod 11$$

$$K \equiv 4 \cdot 35^{-1} \mod 11$$

$$K \equiv 4 \cdot 2^{-1} \mod 11 \qquad \text{Como } 2 \cdot 6 \equiv 1 \mod 11$$

$$K \equiv 4 \cdot 6 \mod 11$$

$$K \equiv 2 \mod 11 \rightarrow K = 11m + 2$$

∴ Sostituimos nuevamente.

$$X = 35(11m + 2) + 27$$

$$x = 385m + 70 + 27 \Rightarrow X = 385m + 97$$

$$\hookrightarrow x \equiv 97 \mod 385$$

Por tanto, concluimos que los enteros x que satisfacen la congruencia $4x \equiv 3 \mod 385$ son $x \equiv 97 \mod 385$

O $x = 97 + 385K$; siendo K un entero //

ii) $128x \equiv 10 \mod 17$

Para este caso, operamos de la misma forma que el anterior caso, pero antes simplificaremos 128 donde $128 \% 17 = 9 \Rightarrow$

$$128x \equiv 10 \mod 17 \iff 9x \equiv 10 \mod 17 \Rightarrow x \equiv 10 \cdot 9^{-1} \mod 17$$

para encontrar el 9^{-1}, $\gcd(9, 17) = 1$, es decir que son coprimos. Como se satisface podemos usar el Algoritmo Extendido de Euclides que tenemos programado en las prácticas y obtenemos que el inverso modular de 9 módulo 17 es 2 ya que $9 \cdot 2 \equiv 1 \mod 17$ (esta filosofía es la necesaria a seguir, pero realmente podemos hacerla de cabeza como en el apartado i))

$$x \equiv 10 \cdot 2 \mod 17 \Rightarrow x \equiv 3 \mod 17$$

por tanto $128x \equiv 10 \mod 17 = x \equiv 3 \mod 17$ donde los enteros de x vienen definidos como $x = 3 + 17k$ siendo k entero.

iii) $2047 \equiv 3 \mod 1024$. Operamos de igual manera

$$2047 \% 1024 = 1023 \Rightarrow 1023 \equiv 3 \mod 1024$$

$$x \equiv 3 - 1023 \mod 1024$$

$$x \equiv -1020 \mod 1024$$ → lo expresamos en base a el módulo.

$$x \equiv 4 \mod 1024$$

Por tanto los números x enteros que se satisfacen son $x \equiv 4 \mod 1024$ o $x = 4 + 1024k$ siendo k un entero.

4.

$$\begin{cases} 3x \equiv 1 \bmod 4 \\ 2x \equiv 3 \bmod 25 \end{cases}$$

Para resolverlo, utilizaremos el Teorema Chino de los restos, pero antes, resolveremos la primera congruencia y simplificaremos la segunda

• $3x \equiv 1 \bmod 4 \Rightarrow x \equiv 1 \cdot 3^{-1} \bmod 4$ Como $3 \cdot 3 \equiv 1 \bmod 4$, $3^{-1} = 3$

$x \equiv 1 \cdot 3 \bmod 4$

$x \equiv 3 \bmod 4$

• $2x \equiv 3 \bmod 25 \rightarrow$ Simplificamos 25 en factores primos $\Rightarrow 25 = 5 \cdot 5$
(Aunque en este caso como es sencillo, vamos a continuar como lo haríamos normalmente.)

$x \equiv 3 \cdot 2^{-1} \bmod 25$ Como $2 \cdot 13 \equiv 1 \bmod 25$, $2^{-1} = 13$

$x \equiv 3 \cdot 13 \bmod 25$

$x \equiv 39 \bmod 25$

$x \equiv 14 \bmod 25$

→ Recopilamos las congruencias resultantes en un sistema de Ecuaciones.

$$\begin{cases} x \equiv 3 \bmod 4 \rightarrow x = 4m + 1 \\ x \equiv 14 \bmod 25 \rightarrow x = 25k + 14 \end{cases}$$

→ Sustituimos en la 1° congruencia

$25k + 14 \equiv 3 \bmod 4 \Rightarrow 25k \equiv -11 \bmod 4$

$25k \equiv 1 \bmod 4$ Como $25 \cdot 1 \equiv 1 \bmod 4$, $25^{-1} = 1$

$k \equiv 1 \cdot 25^{-1} \bmod 4$

$k \equiv 1 \cdot 1 \bmod 4$

$k \equiv 1 \bmod 4$

Utilizamos $k = 4m + 1$ y sustituimos en la 2° congruencia

$$x = 25 \cdot (4m + 1) + 14 \Rightarrow x = 100m + 25 + 14 \Rightarrow x = 100m + 39$$

$$\therefore \quad x \equiv 39 \bmod 100$$

Por consiguiente, podemos concluir que los dos últimos dígitos son 39. //

5.

Para calcular las siguientes potencias, podemos utilizar el Teorema de Fermat (si p es primo y a no es divisible por p) o también podemos utilizar la exponenciación modular (binaria)

El Teorema de Fermat nos dá una solucion con relativa simplicidad pero no podemos calcular dicho resultado sin la presencia de un ordenador (que no sea a mano), es por ello que utilizaremos la exponenciación modular vista en clase.

i) $31^{96} \pmod{359}$

Primero tenemos que calcular 96 en base 2 $\Rightarrow 96 = 2^5 + 2^6$

$$31^{96} \bmod 359$$

$$31^{(2^5+2^6)} \bmod 359$$

$$31^{(2^5+2^6)} = 31^0 (31^{2^1})^0 + (31^{2^2})^0 + (31^{2^3})^0 + (31^{2^4})^0 + (31^{2^5})^1 + (31^{2^6})^1$$

importante ↳ $\underline{0}$ $31^0 \equiv 1 \bmod 359$

$\underline{1}$ $31^2 \equiv 243 \bmod 359$

$1 \cdot 243^0 \equiv 31 \bmod 359$ → Es 1 por la iteración 0.

$\underline{2}$ $243^2 \equiv 173 \bmod 359$

$1 \cdot 173^0 \equiv 31 \bmod 359$

$\underline{3}$ $173^2 \equiv 132 \bmod 359$

$1 \cdot 132^0 \equiv 31 \bmod 359$

$\underline{4}$ $132 \equiv 192 \bmod 359$

$1 \cdot 192^0 \equiv 31 \bmod 359$

$\underline{5}$ $192^2 \equiv 246 \bmod 359$

$1 \cdot 246^1 \equiv 246 \bmod 359$

$\underline{6}$ $246^2 \equiv 204 \bmod 359$

$246 \cdot 204^1 \equiv 283 \bmod 359$ //

ii) $27^{33} \bmod 157$ → Procedemos de igual forma

$33 = 100001_2 \to 33 = 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$

$$27^{(1+2^5)} = \underset{1}{\left(27^1\right)^1} + \underset{2}{\left(27^{2^1}\right)^0} + \underset{3}{\left(27^{2^2}\right)^0} + \underset{4}{\left(27^{2^3}\right)^0} + \underset{5}{\left(27^{2^4}\right)^0} + \underset{6}{\left(27^{2^5}\right)^1}$$

$\underline{1}$ $27^1 \equiv 27 \bmod 157$

$\underline{2}$ $27^2 \equiv 101 \bmod 157$

$27 \cdot 101^0 \equiv 27 \bmod 157$

$\underline{3}$ $101 \equiv 153 \bmod 157$

$27 \cdot 153^0 \equiv 27 \bmod 157$

$\underline{4}$ $153^2 \equiv 16 \bmod 157$

$27 \cdot 16^0 \equiv 27 \bmod 157$

$\underline{5}$ $16^2 \equiv 99 \bmod 157$ →

$27 \cdot 99^0 \equiv 27 \bmod 157$

$\underline{6}$ $99^2 \equiv 67 \bmod 157$

$27 \cdot 67 \equiv 82 \bmod 157$ //

iii) $40^{65} \bmod 199$ → Mismo procedimiento

$65 = 1000001_2 \to 65 = 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$

$$40^{(1+2^6)} = \underset{1}{\left(40^1\right)^1} + \underset{2}{\left(40^{2^1}\right)^0} + \underset{3}{\left(40^{2^2}\right)^0} + \underset{4}{\left(40^{2^3}\right)^0} + \underset{5}{\left(40^{2^4}\right)^0} + \underset{6}{\left(40^{2^5}\right)^0} + \underset{7}{\left(40^{2^6}\right)^1}$$

$\underline{1}$ $40 \equiv 40 \bmod 199$

$\underline{2}$ $40^2 \equiv 8 \bmod 199$

$40 \cdot 8^0 \equiv 40 \bmod 199$

$\underline{3}$ $8^2 \equiv 64 \bmod 199$

$40 \cdot 64^0 \equiv 40 \bmod 199$

$\underline{4}$ $64^2 \equiv 116 \bmod 199$

$40 \cdot 116^0 \equiv 40 \bmod 199$

$\underline{5}$ $116^2 \equiv 123 \bmod 199$

$40 \cdot 123^0 \equiv 40 \bmod 199$

$\underline{6}$ $123^2 \equiv 5 \bmod 199$

$40 \cdot 5^0 \equiv 40 \bmod 199$

$\underline{7}$ $5^2 \equiv 25 \bmod 199$

$40 \cdot 25^1 \equiv 5 \bmod 199$ //

6 Antes de nada, para comprobar que los sistemas tienen solución, deberemos de comprobar que los módulos de las ecuaciones dadas sean coprimos es decir $gcd(n_1, n_2, n_3) = 1$; ya que si no se satisface, no podemos garantizar que tenga solución.

i) $$\begin{cases} 1025x \equiv 5312065 \bmod 8 \\ 36x \equiv 322 \bmod 5 \\ 4x \equiv 7 \bmod 3 \end{cases}$$

Vamos a operar de igual manera que en el ejercicio 3 i), no sin antes simplificar las congruencias anteriores ya que no están expresadas de manera correcta, no sin antes comprobar que $gcd(8,5,3) = 1$. Para este problema, esto se satisface, (comprobado con código de prácticas) por lo que podemos continuar.

- $1025x \equiv 5312065 \bmod 8$ expresamos en relación a mod 8

  $1x \equiv 1 \bmod 8$
- $36x \equiv 322 \bmod 5$

  $1x \equiv 2 \bmod 5$
- $4x \equiv 7 \bmod 3$

  $1x \equiv 1 \bmod 3$

-> Agrupando

$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod 8 \rightarrow x = 8k + 1 \\ x \equiv 2 \bmod 5 \quad x = 5m + 2 \\ x \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$$

Para resolverlo, agrupamos 2 ecuaciones (tomaré las 2 primeras)

$\Rightarrow 8k + 1 \equiv 2 \bmod 5$

$k \equiv 1 \cdot 8^{-1} \bmod 5$ Como $8 \cdot 2 \equiv 1 \bmod 5$; $8^{-1} = 2$

$k \equiv 1 \cdot 2 \bmod 5$

$k \equiv 2 \bmod 5 \rightarrow k = 5m + 2$; Sustituyendo en la 1º

$x = 8 \cdot (5m + 2) + 1 \Rightarrow x = 40m + 16 + 1 \Rightarrow x = 40m + 17$

$x \equiv 17 \bmod 40$ -> Ahora utilizamos esta congruencia con la 3º Ec. por lo que tenemos

$$\begin{cases} x \equiv 17 \bmod 40 \rightarrow x = 40k + 17 \\ x \equiv 1 \bmod 3 \rightarrow x = 3m + 1 \end{cases}$$

$40k + 17 \equiv 1 \mod 3$

$40k \equiv 1 - 17 \mod 3$

$40k \equiv -16 \mod 3$ → Expresamos en términos del módulo

$1k \equiv 2 \mod 3$

$k \equiv 2 \mod 3 \rightarrow k = 3m + 2$ Sustituimos en la 1° Ec

$x = 40 \cdot (3m+2) + 17 \Rightarrow x = 120m + 80 + 17 = 120m + 97$

$x \equiv 97 \mod 120$ //

ii) $\begin{cases} 2x \equiv 4 \mod 6 \\ 8x \equiv 3 \mod 13 \\ 12x \equiv 1 \mod 18 \end{cases}$

Podemos observar a simple vista que $18 = 6 \cdot 3$, por lo que van a compartir factores entre los módulos, resultando que ellos no sean coprimos. comprobándolo obtenemos que gcd(6,13) , gcd(6,18) = 6 y gcd(13,18) = 1. Por tanto no se cumple la condición necesaria para aplicar T.C.R, significando que aunque intentemos resolverlo, no encontraremos una solución.

iii) $\begin{cases} 2x \equiv 1 \mod 3 \\ 8x \equiv 7 \mod 11 \\ 5x \equiv 3 \mod 13 \end{cases}$

Como el gcd entre ellos es 1, esto significa que son coprimos entre ellos por tanto, existe solución. Seguimos el mismo método que en i)

- $2x \equiv 1 \mod 3$
  $x \equiv 1 \cdot 2^{-1} \mod 3$ Como $2 \cdot 2 \equiv 1 \mod 3$; $2^{-1} = 2$
  $x \equiv 1 \cdot 2 \mod 3$
- $8x \equiv 7 \mod 11$
  $x \equiv 7 \cdot 8^{-1} \mod 11$ Como $8 \cdot 7 \equiv 1 \mod 11$; $8^{-1} = 7$
  $x \equiv 7 \cdot 7 \mod 11$
  $x \equiv 5 \mod 11$
- $5x \equiv 3 \mod 13$
  $x \equiv 3 \cdot 5^{-1} \mod 13$ Como $5 \cdot 8 \equiv 1 \mod 13$; $5^{-1} = 8$
  $x \equiv 3 \cdot 8 \mod 13$
  $x \equiv 11 \mod 13$

Agrupando las congruencias obtenemos:

Sustituyendo la 1º con la 2º

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 3 & \rightarrow x = 3k+2 \\ x \equiv 5 \bmod 11 & \rightarrow x = 11m+5 \\ x \equiv 11 \bmod 13 & \rightarrow x = 13m+11 \end{cases}$$

$3k+2 \equiv 5 \bmod 11$

$3k = 3 \bmod 11$

$k \equiv 3 \cdot 3^{-1} \bmod 11$ Como $3 \cdot 4 \equiv 1 \bmod 11$, $3^{-1} = 4$

$k \equiv 3 \cdot 4 \bmod 11$

$k \equiv 1 \bmod 11 \rightarrow k = 11m + 1$; Sustituyendo en la 1º

$x = 3 \cdot (11m+1) + 2 \Rightarrow x = 33m + 3 + 2 \Rightarrow x = 33m + 5 \rightarrow x \equiv 5 \bmod 33$

→ Sustituimos dicho resultado en la tercera ecuación

$33m + 5 \equiv 11 \bmod 13$

$7m \equiv 11 - 5 \bmod 13$ Como $7 \cdot 2 \equiv 1 \bmod 13$; $7^{-1} = 2$

$m \equiv 6 \cdot 7^{-1} \bmod 13$

$m \equiv 6 \cdot 2 \bmod 13$

$m = 12 \bmod 13 \rightarrow m = 13 \cdot z + 12 \rightarrow$ Sustituimos

$x \equiv 33 \cdot (13z + 12) + 5 \Rightarrow x = 429z + 396 + 5 \Rightarrow x = 429z + 401$ //

$x \equiv 401 \bmod 429$

iv) $$\begin{cases} 4x+2 \equiv 3x-1 \bmod 5 \\ 6x-3 \equiv 2(x-1) \bmod 7 \\ 2x \equiv 1 \bmod 3 \end{cases}$$

Procederemos de igual forma que las anteriores pero antes tenemos que simplificar y comprobar la coprimalidad.

En este caso, gcd $(5,7,3) = 1$ esto quiere decir que los módulos son coprimos por lo tanto podemos obtener solución. Vamos a simplificar

- $4x + 2 \equiv 3x - 1 \bmod 5 \Rightarrow x \equiv -3 \bmod 5 \Rightarrow x \equiv 2 \bmod 5$
- $6x - 3 \equiv 2(x-1) \bmod 7 \Rightarrow 6x \equiv 3 + 2x - 2 \bmod 7 \Rightarrow 4x \equiv 1 \bmod 7$

  $x \equiv 1 \cdot 4^{-1} \bmod 7$ Como $4 \cdot 2 \equiv 1 \bmod 7$

  $x \equiv 2 \bmod 7$ $4^{-1} = 2$
- $2x \equiv 1 \bmod 3 \Rightarrow x \equiv 1 \cdot 2^{-1} \bmod 3 \Rightarrow x \equiv 1 \cdot 2 \bmod 3 \Rightarrow x \equiv 2 \bmod 3$

Agrupando las congruencias obtenemos:

$$\begin{cases} x \equiv 2 \bmod 5 \\ x \equiv 2 \bmod 7 \\ x \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

* Como las congruencias tienen la misma solución $x \equiv 2$, simplemente multiplicando los módulos obtendremos la solución.

$$5 \cdot 7 \cdot 3 = 105 \Rightarrow x \equiv 2 \bmod 105 \Leftrightarrow x = 105k + 2 \quad //$$