Metody Numeryczne Projekt 1

Martyna Kuśmierz
Grupa nr 2

14.12.2022r

1 Opis metody

Tematem projektu jest wyznaczanie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a w postaci Newtona danej funkcji. Postać Newtona wielomianu interpolacyjnego wygląda następująco:

$$p_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + c_n(x - x_0)...(x - x_{n-1})$$

Węzły wykorzystuje się do wyznaczania współczynnika c_n. Można też zauważyć, że $c_0 = f(x_0)$. Kolejne współczynniki są wyznaczane za pomocą ilorazów różnicowych w następujący sposób:

$$c_n = f_{0,1,...,n}$$

Ilorazy k-tego rzędu dla j = 0,...,n-k i k = 1,...,n:

$$f_{j,j+1,...,j+k} = \frac{f_{j+1,...,j+k} - f_{j,...,j+k-1}}{x_{j+k} - x_j}$$

Ilorazy różnicowe można obliczać wykorzystując schemat ilorazów różnicowych. Wpisujemy wtedy kolejne obliczone ilorazy do tabeli. Podkreślone elementy to kolejne współczynniki $c_0, c_1, ..., c_n$ w naszym wielomianie:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & \underline{f_0} & & & & \\
x_1 & f_1 & \underline{f_{01}} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} & & & \\
x_2 & f_2 & f_{12} = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} & \underline{f_{012}} = \frac{f_{12} - f_{01}}{x_2 - x_0} & & \\
x_3 & f_3 & f_{23} = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} & f_{123} = \frac{f_{23} - f_{12}}{x_3 - x_1} & \underline{f_{0123}} = \frac{f_{123} - f_{012}}{x_3 - x_0} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
x_n & f_n & f_{n-1,n} = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} & f_{n-2,n-1,n} = \frac{f_{n-1,n} - f_{n-2,n-1}}{x_n - x_{n-2}} & f_{n-3,n-2,n-1,n} & \cdots \ \underline{f_{01...n}}
\end{array}$$

Dodatkowo do obliczenia wartości wielomianu interpolacyjnego został wykorzystany uogólniony schemat Hornera:

$w = c_n$
for $k = n - 1, n - 2, ..., 0$
$w = c_k + (x - x_k)w$
end
$p_n(x) = w$

2 Opis programu

Program składa się ze skryptu oraz 4 funkcji.

- function [c] = wspolczynniki(x,y)
  Funkcja wyznacza współczynniku wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona wykorzystując schemat ilorazów różnicowych.
  Parametry wejścia:
  1. x - wektor węzłów interpolacji
  2. y - wektor wartości

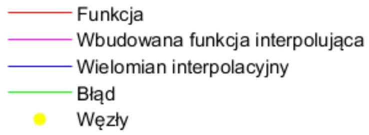
  Parametry wyjścia:
  1. c - wektor współczynników wielomianu
- function [y] = newton(c,x,r)
  Funkcja oblicza wartość wielomianu w postaci Newtona w zadanych punktach za pomocą uogólnionego schematu Hornera.
  Parametry wejścia:
  1. c - wektor współczynników wielomianu
  2. x - wektor węzłów interpolacji
  3. r - wektor argumentów

  Parametry wyjścia:
  1. y - wektor wyników
- function [] = wykres(a,b,n,f)
  Funkcja rysuje wykres funkcji f oraz jej wielomianu interpolacyjnego stopnia n w przedziale [a,b]. Dodatkowo rysuje błąd i wielomian interpolacyjny przy użyciu wbudowanej funkcji polyfit i polyval.
  Parametry wejścia:
  1. a,b - końce przedziału
  2. n - stopień wielomianu interpolacyjnego
  3. f - funkcja
- function [y] = blad(y1,y2)
  Funkcja oblicza błąd bezwzględny między dwiema podanymi funkcjami.
  Parametry wejścia:
  1. y1, y2 - funkcje, których błąd bezwzględny będzie obliczony

  Parametry wyjścia:
  1. y = błąd bezwzględny
- Skrypt
  W skrypcie znajduje się możliwość wprowadzania przez użytkownika krańców przedziału, dla którego zostaną wykonane wykresy.

3 Przykłady funkcji

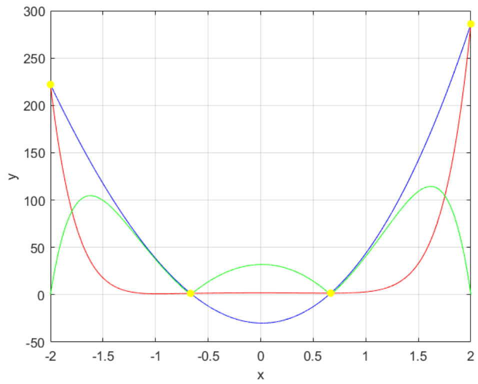
Legenda do wszystkich wykresów:

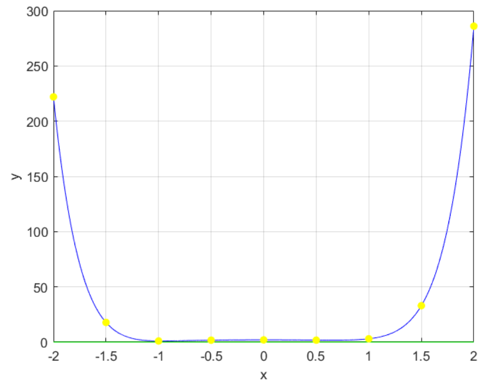


1. Wielomian

$$f(x) = x^8 + x^5 - x^2 + 2$$

W przypadku wielomianu, jeżeli funkcja interpolująca jest skonstruowana na tylu węzłach, co stopień wielomianu lub więcej, jest ona identyczna i błąd wynosi 0. Po lewej wykres dla 3 węzłów, a po prawej dla 8.

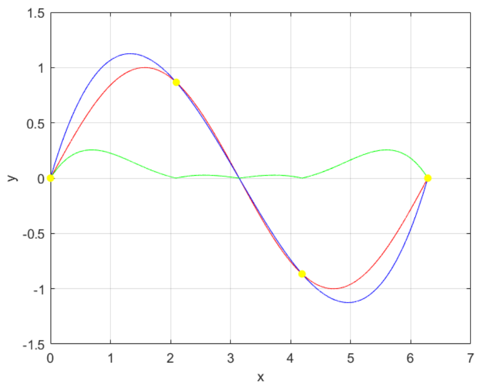


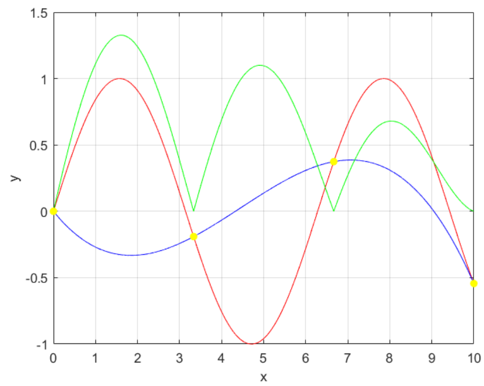


2. Funkcja trygonometryczna

$$f(x) = sin(x)$$

W przypadku tej funkcji wybór przedziału ma duży wpływ na dokładność funkcji interpolującej. Przy funkcji interpolującej skonstruowanej na 3 węzłach różnica wygląda następująco (po lewej przedział $[0,\ 2\pi]$, po prawej $[0,\ 10]$).

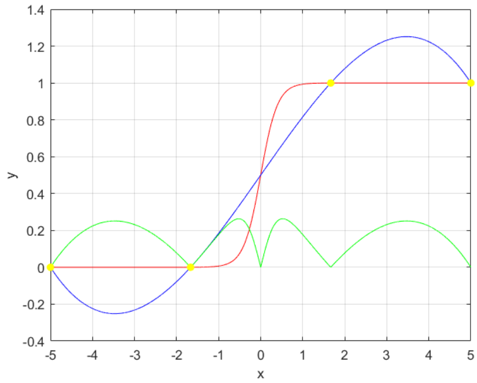


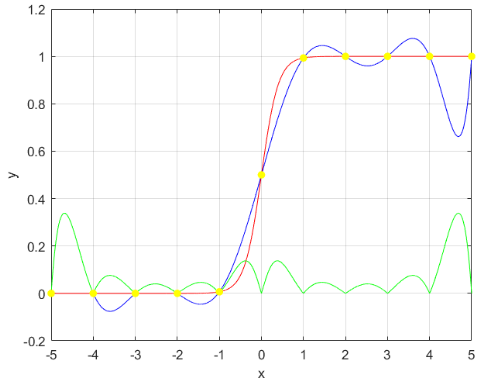


3. Rozkład logistyczny

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-5x}}$$

Wykresy funkcji i funkcji interpolującej zostały wykonane dla x należących do przedziału [-5, 5]. Największe błędy interpolacji występują na krańcach przedziału i rosną ze wzrostem ilości węzłów. Po lewej wykres dla 3 węzłów, a po prawej dla 10.

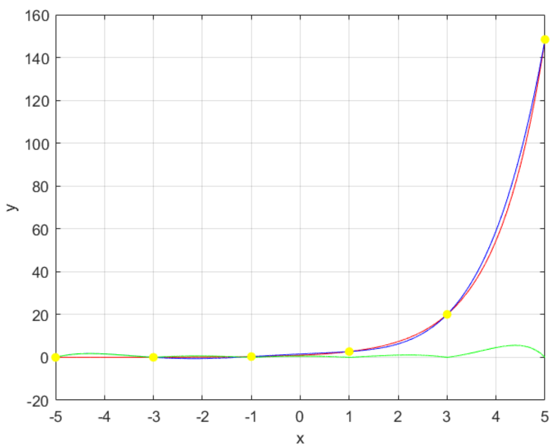




4. Funkcja wykładnicza

$$f(x) = e^x$$

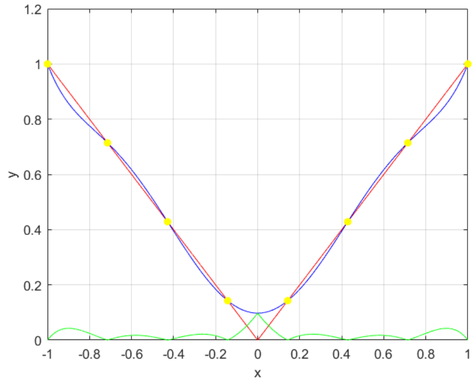
W przypadku funkcji wykładniczej wartość błędu rośnie przy dużym wzroście wartości funkcji, czyli na prawym końcu przedziału. Wykres wykonany dla 5 węzłów.

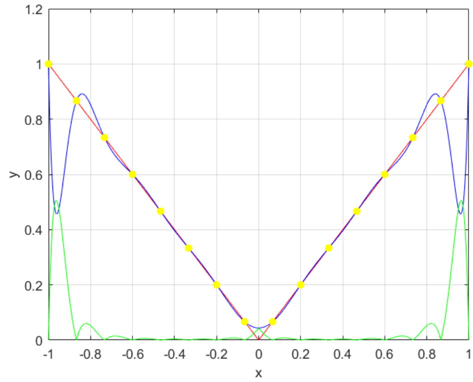


5. Wartość bezwzględna

$$f(x) = |x|$$

Wykresy funkcji oraz funkcji interpolacyjnych skonstruowanych na równoodległych węzłach z przedziału [-1,1]. W przypadku zwiększenia stopnia wielomianu interpolacyjnego uzyskano duże wartości błędu dla wartości z końca przedziału. Lewy wykres wykonany dla 7 węzłów, a prawy dla 15.

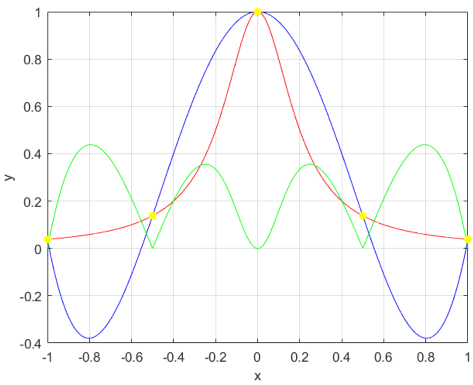


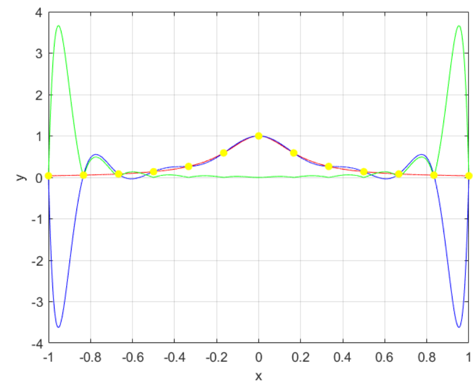


6. Funkcja Rungego

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

Wykresy funkcji oraz funkcji interpolacyjnych skonstruowanych na równoodległych węzłach z przedziału [-1,1]. Analogicznie, jak w poprzednim przypadku, podczas zwiększenia stopnia wielomianu interpolacyjnego uzyskano duże wartości błędu dla wartości z końca przedziału. Lewy wykres wykonany dla 4 węzłów, a prawy dla 12.





4 Analiza uzyskanych wyników

W celu sprawdzenia poprawności algorytmu wykorzystane zostały dwie wbudowane funkcje w Matlaba, polyfit i polyval. Za pomocą polyfit zostały obliczone współczynniki wielomianu, a polyval - wartość funkcji interpolującej. Ten sposób obliczenia został zaznaczony na wykresach różową linią i w każdym przypadku pokrywa się z użytym wcześniej algorytmem. Ciekawymi przypadkami są funkcje 3, 5 oraz 6. Ostatnia z nich to funkcja Rungego. Obserwowane zjawisko przy interpolacji wielomianami wysokich stopni opartych na węzłach równoodległych nosi nazwę zjawiska Rungego. Są to charakterystyczne duże wartości błędu na krańcach przedziału. Aby tego uniknąć stosuje się węzły Czybeszewa.