Metody Numeryczne Projekt 2

Martyna Kuśmierz
Grupa nr 2

11.01.2023r

1 Polecenie

7. Rozwiązywanie układu równań $Ax = b$ blokową metodą Crouta. Zakładamy, że $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą postaci
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -I & A_{22} \end{pmatrix},$$
gdzie $A_{ij} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ i $n = 2p$.

1. **Metody korzystające z rozkładu macierzy na czynniki**

   We wszystkich tematach dotyczących metod rozwiązywania układu równań liniowych $Ax = b$, w oparciu o wyznaczony rozkład $A = BC$, należy wyznaczać:

   - wskaźnik uwarunkowania macierzy $cond(A)$: $cond(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$,
   - błąd rozkładu $e_{dec} = \dfrac{\|A - BC\|}{\|A\|}$,
   - błąd względny e_{rel}: jeśli z jest dokładnym rozwiązaniem układu $Ax = b$, a x obliczonym numerycznie przybliżeniem (otrzymanym naszym algorytmem), to
   $$e_{rel} = \frac{\|x - z\|}{\|z\|},$$
   - współczynnik stabilności wsp_{stab}: jeśli z jest dokładnym rozwiązaniem układu $Ax = b$, a x obliczonym numerycznie przybliżeniem (otrzymanym naszym algorytmem), to
   $$wsp_{stab} = \frac{\|x - z\|}{\|z\|\, cond(A)},$$
   - współczynnik poprawności wsp_{popr}: jeśli x jest obliczonym numerycznie przybliżeniem (otrzymanym naszym algorytmem), to
   $$wsp_{popr} = \frac{\|b - Ax\|}{\|A\| \cdot \|x\|}.$$

2 Opis metody

Blokowa metoda Crouta polega na rozkładzie LU macierzy, gdzie macierz U posiada macierze jednostkowe na przekątnej. Następnie wykorzystujemy ten rozkład do rozwiązania układów liniowych.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ -I & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & U_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L_{11} = A_{11} \\ L_{21} = -I \end{cases}$$

$L_{11} U_{12} = A_{12} \Rightarrow A_{11} U_{12} = A_{12}$ (rozwiązując układ równań)

$L_{21} U_{12} + L_{22} = A_{22} \Rightarrow L_{22} = A_{22} + U_{12}$

Rozwiązywanie układu równań $LUx = b$, $y = Ux$

(1)
$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L_{11} y_1 = b_1 \Rightarrow y_1 \text{ - z układu równań} \\ L_{21} y_1 + L_{22} y_2 = b_2 \end{cases}$$

$$L_{21} y_1 = b_2 - L_{22} y_2$$

(2)
$$\begin{bmatrix} I & U_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = y_2 \\ x_1 + U_{12} x_2 = y_1 \end{cases}$$

$$x_1 = y_1 - U_{12} x_2$$

3 Opis programu

Program składa się ze skryptu oraz 2 funkcji.

- function [x] = Crout(A, b)
  Funkcja wykonuje rozkład macierzy A, LU w postaci Crouta oraz rozwiązuje układ liniowy LUx = b.
  Parametry wejścia:

  1. A - macierz R^{nxn}
  2. b - wektor układu R^n

  Parametry wyjścia:

  1. x - wektor rozwiązania R^n

- function [x] = BlockCrout(A,b)
  Funkcja rozwiązuje układ liniowy metodą blokową Crouta. Wykorzystuje funkcję Crout(A,b) do rozwiązywania układów równań. Dodatkowo wypisuje takie informacje jak:

  1. wskaźnik uwarunkowania macierzy
  2. błąd rozkładu
  3. błąd względny
  4. współczynnik stabilności
  5. współczynnik poprawności

  Parametry wejścia:

  1. A - macierz R^{nxn}
  2. b - wektor układu R^n

  Parametry wyjścia:

  1. x - wektor rozwiązania R^n

- Skrypt
  W skrypcie znajdują się przykładowe macierze oraz wektory i wywołanie dla nich funkcji BlockCrout(A,b). Dodatkowo wynik jest porównywany z wbudowaną funkcją w Matlabie.

4 Przykłady

1. W przypadku poniższej macierzy A wyniki różnią się w miejscu zaokrąglenia. X to wynik obliczony za pomocą algorytmu, a ans to wynik obliczony za pomocą wbudowanej funkcji w Matlabie.

```
A =                              b =

     1     2     3     4              1
     5     6     7     8              2
    -1     0     9    10              3
     0    -1    11    12              4
```

```
Wskaźnik uwarunkowania macierzy:
   80.0998

Błąd rozkładu:     0

Błąd względny:   1.2452e-15

Współczynnik stabilności:   1.5546e-17

Współczynnik poprawności:     0
```

```
x =          ans =

    0.1562      0.1563
   -0.2188     -0.2188
   -0.0312     -0.0313
    0.3438      0.3438
```

2. Podmacierze macierzy B są macierzami hilberta. Wektor b jest ten sam. Błędy rozkładu i względne są bardzo niewielkie.

```
B =

    1.0000    0.5000    1.0000    0.5000
    0.5000    0.3333    0.5000    0.3333
   -1.0000         0    1.0000    0.5000
         0   -1.0000    0.5000    0.3333

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:
   26.2887

Błąd rozkładu:   3.0260e-17

Błąd względny:   9.6259e-17

Współczynnik stabilności:   3.6616e-18

Współczynnik poprawności:   4.6933e-17
```

```
x =          ans =

   -0.6897     -0.6897
   -1.2414     -1.2414
   -7.3103     -7.3103
   19.2414     19.2414
```

3. Macierz C podobnie jak macierz B składa się z macierzy hilberta. Jej wskaźnik uwarunkowania jest większy niż w przypadku poprzedniej macierzy. Błędy są jednak porównywalne.

```
C =

    1.0000    0.5000    0.3333    1.0000    0.5000    0.3333
    0.5000    0.3333    0.2500    0.5000    0.3333    0.2500
    0.3333    0.2500    0.2000    0.3333    0.2500    0.2000
   -1.0000         0         0    1.0000    0.5000    0.3333
         0   -1.0000         0    0.5000    0.3333    0.2500
         0         0   -1.0000    0.3333    0.2500    0.2000


d =

     1
     2
     3
     4
     5
     6

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:
  763.4293

Błąd rozkładu:   3.0170e-17

Błąd względny:   1.5778e-15

Współczynnik stabilności:   2.0667e-18

Współczynnik poprawności:   5.1189e-17
```

```
x =          ans =

   -0.7764      -0.7764
   -1.5928      -1.5928
   -1.9525      -1.9525
   27.7764      27.7764
 -190.4072    -190.4072
  211.9525     211.9525
```

4. Podmacierze macierzy D składają się z macierzy Pascala. Wskąźnik uwarunkowania jest niewielki, a wszystkie współczynniki wynoszą 0.

```
D =

     1     1     1     1
     1     2     1     2
    -1     0     1     1
     0    -1     1     2

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:
    8.3063

Błąd rozkładu:     0

Błąd względny:     0

Współczynnik stabilności:     0

Współczynnik poprawności:     0
```

```
x =            ans =

   -0.8000       -0.8000
   -0.4000       -0.4000
    0.8000        0.8000
    1.4000        1.4000
```

5. Wyznacznik macierzy E wynosi 0. Program jednak nie obsługuje macierzy osobliwych.

```
E =

     1     2     1     4
     5     6     5     8
    -1     0    -1     0
     0    -1     0    12

Error using BlockCrout
Macierz jest osobliwa
```

6. Macierz F jest macierzą o bardzo wysokim wskaźniku uwarunkowania. Niewielka zmiana w wektorze c1 powoduje znaczącą zmianę wyniku.

```
F =

   -0.5000   -1.0000
   -1.0000   -1.9990


c1 =

    4.0000
    7.9999

Wskaźnik uwarunkowania macierzy:
   1.2492e+04

Błąd rozkładu:     0

Błąd względny:     0

Współczynnik stabilności:     0

Współczynnik poprawności:     0
```

```
x =          ans =

   -7.8000     -7.8000
   -0.1000     -0.1000
```

```
c2 =

     4
     8

x =      ans =

    -8        -8
     0         0
```

5 Analiza wyników

Przy użyciu algorytmu otrzymujemy identyczne wyniki jak w przypadku wbudowanej funkcji w Matlabie do rozwiązania układu równań liniowych. Niemożliwe jest rozwiązanie układu dla macierzy osobliwych. Błędy rozkładów poszczególnych macierzy są bardzo niewielkie lub zerowe. Uzyskujemy prawidłowe wyniki również dla macierzy o wysokim wskaźniku uwarunkowania.