Nombre María Fernanda Carvajal Guerrero Código 2200804

3er parcial

3) a) Encuentre los polos y los residuos de las siguientes funciones.

- $\dfrac{1}{z^4+5z^2+6}$ Polos son los lugares donde estalla la función.

$\hookrightarrow z_1 = \sqrt{2}\,i,\; z_2 = -\sqrt{2}\,i,\; z_3 = \sqrt{3}\,i,\; -\sqrt{3}\,i$

Para hallar el residuo reescribimos $f(z)$ como $\dfrac{1}{(z^2+2)(z^2+3)}$ y expandimos por series de Laurent:

- Para $z_1 = \sqrt{2}\,i$; la expansión de Laurent es:

$$\frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)} = \left[\underbrace{\frac{-\sqrt{2}\,i}{4(z-\sqrt{2}\,i)}}_{\text{Parte principal}} - \frac{7}{8} + \frac{65\,i\sqrt{2}(z-\sqrt{2}\,i)}{32} + \frac{575(z-\sqrt{2}\,i)^2}{64} - \dots\right]$$

Por lo tanto para $z_1 = \sqrt{2}\,i \longrightarrow Res_1 = \dfrac{-\sqrt{2}\,i}{4}$

- Para $z_2 = -\sqrt{2}\,i$; la expansión de Laurent es:

$$\frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)} = \left[\underbrace{\frac{\sqrt{2}\,i}{4(z+\sqrt{2}\,i)}}_{\text{Parte principal}} - \frac{7}{8} - \frac{65\,i\sqrt{2}(z+\sqrt{2}\,i)}{32} + \frac{575(z+\sqrt{2}\,i)^2}{64} + \dots\right]$$

Por lo tanto para $z_2 = -\sqrt{2}\,i \longrightarrow Res_2 = \dfrac{\sqrt{2}\,i}{4}$

- Para $z_3 = \sqrt{3}\,i$; la expansión de Laurent es:

$$\frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)} = \left[\underbrace{\frac{\sqrt{3}\,i}{6(z-\sqrt{3}\,i)}}_{\text{Parte principal}} - \frac{13}{12} - \frac{145\,i\sqrt{3}(z-\sqrt{3}\,i)}{72} + \frac{1585(z-\sqrt{3}\,i)^2}{144} + \dots\right]$$

Por lo tanto para $z_3 = \sqrt{3}\,i \longrightarrow Res_3 = \dfrac{\sqrt{3}\,i}{6}$

- Para $z_4 = -\sqrt{3}\,i$; la expansión de Laurent es:

$$\frac{1}{(z^2+2)(z^2+3)} = \left[\underbrace{\frac{-\sqrt{3}\,i}{6(z+\sqrt{3}\,i)}}_{\text{Parte principal}} - \frac{13}{12} + \frac{145\,i\sqrt{3}(z+\sqrt{3}\,i)}{72} + \frac{1585(z+\sqrt{3}\,i)^2}{144} + \dots\right]$$

Por lo tanto para $z_4 = -\sqrt{3}\,i \longrightarrow Res_4 = \dfrac{-\sqrt{3}\,i}{6}$

- $\dfrac{1}{(z^2-1)^2} \rightarrow$ Dos polos, cada uno doblemente degenerado.
$z_1 = 1 \quad z_2 = -1$

$\hookrightarrow \dfrac{1}{(z+1)^2(z-1)^2} \rightarrow$ Ahora sí puedo excluir el término donde revienta para expandir :)

• Para $z_1 = 1$; la expansión de Laurent es:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \left[\underbrace{\frac{1}{4(z-1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}} + \frac{3}{16} - \frac{1(z-1)}{8} + \frac{5(z-1)^2}{64} + \dots\right]$$

Parte principal → Hay dos términos porque el polo es doblemente degenerado

Por lo tanto, para $z_1 = 1 \longrightarrow Res_1 = -\frac{1}{4}$

• Para $z_2 = 2$; la expansión de Laurent es:

$$\frac{1}{(z-1)^2(z+1)^2} = \left[\frac{1}{4(z+1)^2} + \frac{1}{4(z+1)} + \frac{3}{16} + \frac{1(z+1)}{8} + \frac{5(z+1)^2}{64} + \dots\right]$$

Por lo tanto, para $z_2 = -1 \longrightarrow Res_2 = \frac{1}{4}$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+6}$

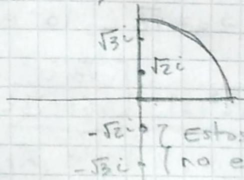
¿Cuál es el comportamiento de las integrales cuando $R \to \infty$?

Sea $f(z) = \dfrac{z^2 \longrightarrow p(z)}{(z^2+2)(z^2+3) \rightarrow q(z)}$ una función racional

Si el grado de $p(z)$ es n y el grado de $q(z)$ es $m \geq n+2$ y C_r es un contorno semicircular $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ entonces $\int_{C_R} f(z)dz \to 0$ cuando $R \to \infty$. Así:

$$\int_0^{\infty} \frac{z^2\,dz}{(z^2+2)(z^2+3)} = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{(x^2+2)(x^2+3)} + \cancel{\int_{C_R} \frac{z^2\,dz}{(z^2+2)(z^2+3)}}^{\,0}$$

Entonces, por teorema del Residuo:



Estos polos no entran

$$\int_0^{\infty} \frac{z^2\,dz}{(z^2+2)(z^2+3)} = \frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}\pi i\left(\underbrace{\frac{i\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}\right)\right]$$

Residuos calculados en MAXIMA ;)

$$= \pi\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$$

• $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+a^2}\,dx$ con $a \in \mathbb{R}$ $\qquad \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\text{sen}(\alpha x)dx$

De nuevo, como va de 0 a ∞ se reescribe la integral como:

$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{\infty} \frac{x\,\text{sen}\,x}{x^2+a}\,dx$ ahora sabiendo que $\text{sen}(1x)$, $\alpha = 1$, se reescribe la integral como:

$$\oint \frac{z}{z^2+a^2}e^{iz}dz = \int_{C_R} \frac{z}{z^2+a^2}e^{iz}dz + \int_{-R}^{R} \frac{x}{x^2+a^2}e^{ix}dx = 2\pi i\,Res\left(f(z)e^{iz}, ai\right)$$

con $f(z) = \dfrac{z}{z^2+a^2}$ y $Res\left(f(z)e^{iz}, ai\right) = \left.\dfrac{ze^{iz}}{2z}\right|_{z=ai} = \dfrac{\cancel{ai}\,e^{i(ai)}}{2\cancel{ai}} = \dfrac{e^{-a}}{2}$

$$\rightarrow \cancel{2}\pi i\left(\frac{e^{-a}}{\cancel{2}}\right) = \boxed{\frac{\pi i}{e^a}}$$

entonces $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+a^2} e^{ix} dx = \cancel{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+a^2} dx} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2} = \frac{\pi i}{e^a}$

así: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{e^a}$ y $\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2e^a}$

2) $x = \cosh(w)\cos(v)$, $y = \operatorname{senh}(w)\operatorname{sen}(v)$

a) Base de vectores unitarios asociados a esta transformación:

$|r\rangle = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} \longleftrightarrow |r\rangle = x(w,v)\hat{\imath} + y(w,v)\hat{\jmath} = \cosh(w)\cos(v)|e_x\rangle + \operatorname{senh}(w)\operatorname{sen}(v)|e_y\rangle$

$\left.\begin{matrix} x = \cosh(w)\cos(v) \\ y = \operatorname{senh}(w)\operatorname{sen}(v) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} dx = \operatorname{senh}(w)\cos(v)dw - \cosh(w)\operatorname{sen}(v)dv \\ dy = \cosh(w)\operatorname{sen}(v)dw + \operatorname{senh}(w)\cos(v)dv \end{cases}$

$\frac{\partial x(w,v)}{\partial w} = \operatorname{senh}(w)\cos(v)$ $\qquad \frac{\partial x(w,v)}{\partial v} = -\cosh(w)\operatorname{sen}(v)$

$\frac{\partial y(w,v)}{\partial w} = \cosh(w)\operatorname{sen}(v)$ $\qquad \frac{\partial y(w,v)}{\partial v} = \operatorname{senh}(w)\cos(v)$

Así, los factores de escala son:

$h_w = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial w} \right\| = \| \operatorname{senh}(w)\cos(v)|e_x\rangle + \cosh(w)\operatorname{sen}(v)|e_y\rangle \|$

$h_w = (\operatorname{senh}^2(w)\cos^2(v) + \cosh^2(w)\operatorname{sen}^2(v))^{1/2}$

$= (\operatorname{senh}^2(w)\cos^2(v) + \cosh^2(w)\operatorname{sen}^2(v) + \cosh^2(w)\cos^2(v) - \cosh^2(w)\cos^2(v))^{1/2}$

$= (\cos^2(v)\underbrace{(\operatorname{senh}^2(w) - \cosh^2(w))}_{(-1)} + \cosh^2(w)\underbrace{(\operatorname{sen}^2(v) + \cos^2(v))}_{1})^{1/2}$

$h_w = (\cosh^2(w) - \cos^2(v))^{1/2}$

$h_v = \left\| \frac{\partial |r\rangle}{\partial v} \right\| = \| -\cosh(w)\operatorname{sen}(v)|e_x\rangle + \operatorname{senh}(w)\cos(v) \|$

$h_v = (\cosh^2(w)\operatorname{sen}^2(v) + \operatorname{senh}^2(w)\cos^2(v))^{1/2} = h_w = (\cosh^2(w) - \cos^2(v))^{1/2}$

$|e_w\rangle = \frac{1}{h_w}\frac{\partial |r\rangle}{\partial w} = \frac{\operatorname{senh}(w)\cos(v)}{(\cosh^2(w)-\cos^2(v))^{1/2}}|e_x\rangle + \frac{\cosh(w)\operatorname{sen}(v)}{(\cosh^2(w)-\cos^2 v)^{1/2}}|e_y\rangle$

$|e_v\rangle = \frac{1}{h_v}\frac{\partial |r\rangle}{\partial v} = \frac{-\cosh(w)\operatorname{sen}(v)}{(\cosh^2(w)-\cos^2(v))^{1/2}}|e_x\rangle + \frac{\operatorname{senh}(w)\cos(v)}{(\cosh^2(w)-\cos^2(v))^{1/2}}|e_y\rangle$

b) Exprese $|a\rangle = 5\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$ en esa nueva base

$$A_{C\leftarrow E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(v)\operatorname{senh}(w) & \cosh(w)\operatorname{sen}(v) \\ -\cosh(w)\operatorname{sen}(v) & \operatorname{senh}(w)\cos(v) \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \tilde{A}_{E\leftarrow C} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(v)\operatorname{senh}(w)}{\operatorname{sen}^2(v)\cosh^2(w)+\cos^2(v)\operatorname{senh}^2(w)} & \frac{-\operatorname{sen}(v)\cosh(w)}{\operatorname{sen}^2(v)\cosh^2(w)+\cos^2(v)\operatorname{senh}^2(w)} \\ \frac{\operatorname{sen}(v)\cosh(w)}{\operatorname{sen}^2(v)\cosh^2(w)+\cos^2(v)\operatorname{senh}^2(w)} & \frac{\cos(v)\operatorname{senh}(w)}{\operatorname{sen}^2(v)\cosh^2(w)+\cos^2(v)\operatorname{senh}^2(w)} \end{pmatrix}$$

$2\times 2 \quad 2\times 1$

$$\tilde{A}_{E\leftarrow C} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(v)\operatorname{senh}(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} & \frac{-\operatorname{sen}(v)\cosh(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} \\ \frac{\operatorname{sen}(v)\cosh(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} & \frac{\cos(v)\operatorname{senh}(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} \end{pmatrix}$$

$$|\tilde{a}\rangle = \tilde{A}_{E\leftarrow C}|a\rangle = \begin{pmatrix} \frac{5\cos(v)\operatorname{senh}(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} - \frac{2\operatorname{sen}(v)\cosh(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} \\ \frac{5\operatorname{sen}(v)\cosh(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} + \frac{2\cos(v)\operatorname{senh}(\omega)}{\operatorname{sen}^2(v)+\operatorname{senh}^2(\omega)} \end{pmatrix}$$

1) $|a\rangle \star |b\rangle = |a\rangle\cdot|b\rangle + |a\rangle \wedge |b\rangle$

a) ¿El producto geométrico es producto interno?
No, no es un producto interno porque, hasta $\mathbb{R}^3$, el producto externo se comporta como producto vectorial (cruz) y este tiene como resultado un vector. Los productos internos hablan de nociones de ángulos y debe ser un valor escalar. El producto geométrico NO da escalar.

b) Para E^n una base es $\{|\sigma_1\rangle, |\sigma_2\rangle, \dots, |\sigma_n\rangle\}$
→ Asumiendo a la base $\{|\sigma_1\rangle, |\sigma_2\rangle, \dots, |\sigma_n\rangle\}$ como ortonormal se tiene que:

$$\langle\sigma^i|\sigma_j\rangle = \frac{1}{2}\left(|\sigma_i\rangle\star|\sigma_j\rangle + |\sigma_j\rangle\star|\sigma_i\rangle\right) = \delta^i_j$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\sigma_i\rangle\cdot|\sigma_j\rangle + |\sigma_i\rangle\wedge|\sigma_j\rangle + |\sigma_j\rangle\cdot|\sigma_i\rangle + |\sigma_j\rangle\wedge|\sigma_i\rangle\right)$$

$$\text{Si } i=j \rightarrow \frac{1}{2}\Big(\overset{1}{|\sigma_i\rangle\cdot|\sigma_i\rangle} + \overset{0}{\cancel{|\sigma_i\rangle\wedge|\sigma_i\rangle}} + \overset{1}{|\sigma_i\rangle\cdot|\sigma_i\rangle} + \cancel{|\sigma_i\rangle\wedge|\sigma_i\rangle}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(1+1) = 1 \rightarrow \delta^j_i$$

$$\text{Si } i\neq j \rightarrow \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\cancel{|\sigma_i\rangle\cdot|\sigma_j\rangle}} + |\sigma_i\rangle\wedge|\sigma_j\rangle + \overset{0}{\cancel{|\sigma_j\rangle\cdot|\sigma_i\rangle}} + |\sigma_j\rangle\wedge|\sigma_i\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\overset{0}{\cancel{|\sigma_i\rangle\wedge|\sigma_j\rangle - |\sigma_i\rangle\wedge|\sigma_j\rangle}}\Big) = 0 \rightarrow \delta^i_j$$

c) Considere el caso 2D $\{|\sigma_1\rangle, |\sigma_2\rangle\}$ y definimos $i = |\sigma_1\rangle\star|\sigma_2\rangle$.
Muestre que:

a) $i^2 = -1$

$$(|\sigma_1\rangle\star|\sigma_2\rangle)^2 = (|\sigma_1\rangle\cdot|\sigma_2\rangle + |\sigma_1\rangle\wedge|\sigma_2\rangle)^2 = (|\sigma_1\rangle\cdot|\sigma_2\rangle)^2 + 2(|\sigma_1\rangle\cdot|\sigma_2\rangle)(|\sigma_1\rangle\wedge|\sigma_2\rangle) + (|\sigma_1\rangle\wedge|\sigma_2\rangle)^2$$