C3C - 4ta entrega

4) Suponga $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$. Demuestre que:

a) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$

$$\underbrace{(\mathbb{A}+\mathbb{B})}_{\mathbb{C}} \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\mathbb{C}|x\rangle$$

El producto entre operadores lineales es distributivo

$$\langle x|\mathbb{C}^2|y\rangle = \langle x|\mathbb{C}\mathbb{C}|y\rangle = \langle x|(\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{A}+\mathbb{B})|y\rangle$$

$$= \langle x|\mathbb{A}\mathbb{A} + \underbrace{\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A}}_{\substack{\text{Por hipótesis} \\ \mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}}} + \mathbb{B}\mathbb{B}|y\rangle = \langle x|\mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2|y\rangle$$

Por lo tanto $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + 2\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2$

Si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A} \rightarrow (\mathbb{A}+\mathbb{B})^2 = \mathbb{A}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{B}^2$

b) $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$

$$\underbrace{(\mathbb{A}+\mathbb{B})}_{\mathbb{C}} \quad \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\mathbb{C}|x\rangle \rightarrow \mathbb{C}^3 = \mathbb{C}\mathbb{C}\mathbb{C}|x\rangle$$

$$\langle x|\mathbb{C}^3|y\rangle = \langle x|\underbrace{\mathbb{C}^2}_{\mathbb{D}}\mathbb{C}|y\rangle = \langle x|\mathbb{D}(\mathbb{A}+\mathbb{B})|y\rangle = \langle x|\mathbb{D}\mathbb{A} + \mathbb{D}\mathbb{B}|y\rangle$$

$$= \langle x|\mathbb{C}^2\mathbb{A} + \mathbb{C}^2\mathbb{B}|y\rangle = \langle x|(\mathbb{A}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{B}^2)\mathbb{A} + (\mathbb{A}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B} +$$

$$\mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{B}^2)\mathbb{B}|y\rangle = \langle x|\mathbb{A}^2\mathbb{A} + \underbrace{\mathbb{A}\mathbb{B}}_{=\mathbb{B}\mathbb{A}}\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{A} + \mathbb{B}^2\mathbb{A} + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{B}$$

$$\mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{B}^2\mathbb{B}|y\rangle = \langle x|\mathbb{A}^3 + \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{A} + \mathbb{B}^2\mathbb{A} + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3|y\rangle$$

$$= \langle x|\mathbb{A}^3 + \mathbb{B}\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2\mathbb{A} + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3|y\rangle$$

$$= \langle x|\mathbb{A}^3 + 3\mathbb{B}\mathbb{A}^2 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{B}^3|y\rangle$$

Por lo tanto: $(\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + 3\mathbb{A}^2\mathbb{B} + 3\mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}^3$

Si $\mathbb{A}\mathbb{B} \neq \mathbb{B}\mathbb{A} \rightarrow (\mathbb{A}+\mathbb{B})^3 = \mathbb{A}^3 + \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A} + \mathbb{B}\mathbb{A}^2 + \mathbb{B}^2\mathbb{A} + \mathbb{A}^2\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{B}^2 + \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}$
$+ \mathbb{B}^3$ //

5) Suponga que $\mathbb{L}$ puede ser escrito como la composición de otros dos operadores $\mathbb{L} = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+$ con $[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{I}$. Demuestre que:

a) Si $\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle \longrightarrow \mathbb{L}|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle$

b) Si $\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle$ y $|z\rangle = L_-|x\rangle \longrightarrow \mathbb{L}|z\rangle = (\lambda-1)|z\rangle$

a) • $\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle$
• $|y\rangle = \mathbb{L}_+|x\rangle$
$\Big\}\ \mathbb{L}|y\rangle = (\lambda+1)|y\rangle$

$[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+ - \mathbb{L}_+\mathbb{L}_- = \mathbb{I}$

$\mathbb{L} - \mathbb{L}_+\mathbb{L}_- = \mathbb{I}$

$\rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{I} + \mathbb{L}_+\mathbb{L}_-$

① $\mathbb{L}_+\mathbb{L}|x\rangle = \mathbb{L}_+(\lambda|x\rangle)$
$= \lambda\, \mathbb{L}_+|x\rangle$

$\mathbb{L}_+\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|y\rangle$

② $\mathbb{L}\mathbb{L}_+|x\rangle = \mathbb{L}|y\rangle$

$(\mathbb{I} + \mathbb{L}_+\mathbb{L}_-)\mathbb{L}_+|x\rangle = \mathbb{L}|y\rangle$

$\underbrace{\mathbb{L}_+|x\rangle} + \mathbb{L}_+\mathbb{L}_-\mathbb{L}_+|x\rangle = \mathbb{L}|y\rangle$

$|y\rangle + \underbrace{\mathbb{L}_+\mathbb{L}|x\rangle} = \mathbb{L}|y\rangle$

$|y\rangle + \lambda|y\rangle = \mathbb{L}|y\rangle$

$\lambda|y\rangle + |y\rangle = \mathbb{L}|y\rangle$

$(\lambda+1)|y\rangle = \mathbb{L}|y\rangle$ Q.E.D

b) • $\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|x\rangle$
• $|z\rangle = \mathbb{L}_-|x\rangle$
$\Big\}\ \mathbb{L}|z\rangle = (\lambda-1)|z\rangle$

$[\mathbb{L}_-, \mathbb{L}_+] = \mathbb{L}_-\mathbb{L}_+ - \mathbb{L}_+\mathbb{L}_- = \mathbb{I}$

$\mathbb{L} - \mathbb{L}_+\mathbb{L}_- = \mathbb{I}$

$\mathbb{L}_+\mathbb{L}_- = \mathbb{L} - \mathbb{I}$

① $\mathbb{L}_-\mathbb{L}|x\rangle = \mathbb{L}_-(\lambda|x\rangle)$
$= \lambda\, \mathbb{L}_-|x\rangle$

$\mathbb{L}_-\mathbb{L}|x\rangle = \lambda|z\rangle$

② $\underbrace{\mathbb{L}}\mathbb{L}_-|x\rangle = \mathbb{L}|z\rangle$

$\mathbb{L}_-\mathbb{L}_+\mathbb{L}_-|x\rangle = \mathbb{L}|z\rangle$

$\mathbb{L}_-(\mathbb{L} - \mathbb{I})|x\rangle = \mathbb{L}|z\rangle$

$\mathbb{L}_-\mathbb{L}|x\rangle - \mathbb{L}_-|x\rangle = \mathbb{L}|z\rangle$

$\lambda|z\rangle - |z\rangle = \mathbb{L}|z\rangle$

$(\lambda-1)|z\rangle = \mathbb{L}|z\rangle$

Q.E.D

4.2.9 EJERCICIOS

1. Considere los siguientes operadores: $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\dagger}$ hermítico, $\mathbb{K} = -\mathbb{K}^{\dagger}$ antihermítico; $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^{\dagger}$ unitario, $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos operadores genéricos. Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) En general:

I. $(\mathbb{P}^{\dagger})^{-1} = (\mathbb{P}^{-1})^{\dagger}$

Si $\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{1}$, entonces:

$$\langle x | \mathbb{P}\mathbb{P}^{-1} | y \rangle = \langle y | (\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1})^{\dagger} | x \rangle^{*} = \langle y | x \rangle^{*}$$

$$(\mathbb{P}\mathbb{P}^{-1})^{\dagger} = (\mathbb{P}^{-1})^{\dagger} \mathbb{P}^{\dagger} = \mathbb{1}$$

Prop. $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{\dagger} = \mathbb{B}^{\dagger}\mathbb{A}^{\dagger}$

Para que se cumpla la igualdad $(\mathbb{P}^{-1})^{\dagger}\mathbb{P}^{\dagger} = \mathbb{1}$,

$(\mathbb{P}^{\dagger})^{-1} = (\mathbb{P}^{-1})^{\dagger}$, comprobando así la afirmación.

II

$$(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$$

Queremos probar que la inversa de $\mathbb{P}\mathbb{Q}$ es $\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$, de esta forma se debe cumplir que al efectuar

$$(\mathbb{P}\mathbb{Q})(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{I} = (\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1}(\mathbb{P}\mathbb{Q})$$

Entonces. $\mathbb{C} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$

✓ $\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{C} = \mathbb{P}\underbrace{\mathbb{Q}\mathbb{Q}^{-1}}\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}\,\mathbb{I}\,\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}\mathbb{P}^{-1} = \underline{\mathbb{I}}$

$$\mathbb{C}\mathbb{P}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{-1}\underbrace{\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{-1}\,\mathbb{I}\,\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{Q} = \mathbb{I}$$

Por asociatividad de operadores

Así, $(\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$

III

Si $[\mathbb{P},\mathbb{Q}] = 0 \Rightarrow \mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1} = \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}$

$$[\mathbb{P},\mathbb{Q}] = \mathbb{P}\mathbb{Q} - \mathbb{Q}\mathbb{P} = 0.$$

$$\mathbb{P}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathbb{P}$$

y teniendo en cuenta esto.

$$[\mathbb{P}^{-1},\mathbb{Q}^{-1}] = \mathbb{P}^{-1}\mathbb{Q}^{-1} - \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}$$

$$= (\mathbb{Q}\mathbb{P})^{-1} - (\mathbb{P}\mathbb{Q})^{-1}$$

Como

$$= \mathbb{C}^{-1} - \mathbb{C}^{-1} = 0.$$

$\mathbb{P}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathbb{P} = \mathbb{C}$

Es decir conmutan.

Así

$\mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{I} = \mathbb{P}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}$

Asociativa $= \mathbb{P}\mathbb{P}^{-1}\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}$

$= \mathbb{I}\,\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}$

$= \mathbb{Q}^{-1}\mathbb{P}$

IV. $(e^{\mathbb{P}})^{+} = e^{\mathbb{P}^{+}}$

$$(e^{\mathbb{P}})^{+} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{P}^n}{n!} \right]^{+}$$

$$= \left[\mathbb{I} + \mathbb{P} + \frac{\mathbb{P}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbb{P}^n}{n!} \right]$$

$n \in \mathbb{N} \longrightarrow n = n^{*}$ (conjugado)

$$= \mathbb{I}^{+} + \mathbb{P}^{+} + \frac{(\mathbb{P}^2)^{+}}{2!} + \dots + \frac{(\mathbb{P}^n)^{+}}{n!}$$

$\longrightarrow (\mathbb{A}^n)^{+} = (\mathbb{A}\,\mathbb{A}\,\mathbb{A} \cdots \mathbb{A})^{+} = \mathbb{A}^{+}\,\mathbb{A}^{+}\,\mathbb{A}^{+} \cdots \mathbb{A}^{+} = (\mathbb{A}^{+})^n$

$$= \mathbb{I} + \mathbb{P}^{+} + \frac{(\mathbb{P}^{+})^2}{2!} + \dots + \frac{(\mathbb{P}^{+})^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{P}^{+})^n}{n!} = e^{\mathbb{P}^{+}}$$

V. $\mathbb{P} e^{\mathbb{Q}} \mathbb{P}^{-1} = e^{\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}}$

$$e^{\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^n}{n!} \right]$$

$$= \mathbb{I} + \mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1} + \frac{(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^2}{2!} + \dots + \frac{(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^n}{n!}$$

$$= \mathbb{I} + \mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1} + \frac{\mathbb{P}\mathbb{Q}^2\mathbb{P}^{-1}}{2!} + \dots + \frac{\mathbb{P}\mathbb{Q}^n\mathbb{P}^{-1}}{n!}$$

En las potencias se eliminan factores

$$(\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1})^2 = \mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}\mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1}$$
$$= \mathbb{P}\mathbb{Q}\mathbb{I}\mathbb{Q}\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{P}\mathbb{Q}^2\mathbb{P}^{-1}$$

$$= \mathbb{P}\left[\mathbb{I} + \mathbb{Q} + \frac{\mathbb{Q}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbb{Q}^n}{n!} \right] \mathbb{P}^{-1}$$

$$= \mathbb{P}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{Q}^n}{n!} \right] \mathbb{P}^{-1}$$

$$= \mathbb{P} e^{\mathbb{Q}} \mathbb{P}^{-1}$$

(b) Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U}$ también será un operador hermítico.

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ \longrightarrow \tilde{\mathbb{A}} = \tilde{\mathbb{A}}^+ = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} = (\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U})^+$$

Como $\mathbb{A} = \mathbb{A}^+$ y $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^+$, son hermítico y unitario respectivamente

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{A}} &= \mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U} \\
&= \mathbb{U}^+\mathbb{A}^+\mathbb{U} \\
&= (\mathbb{A}\mathbb{U})^+\mathbb{U} && \longrightarrow \text{Prop } (\mathbb{A}\mathbb{B})^+ = \mathbb{B}^+\mathbb{A}^+ \quad (1) \\
&= (\mathbb{A}\mathbb{U})^+(\mathbb{U}^+)^+ && \longrightarrow \text{Prop. } (\mathbb{A}^+)^+ = \mathbb{A} \\
&= (\mathbb{U}^+\mathbb{A}\mathbb{U})^+ && \longrightarrow (1) \\
&= (\mathbb{U}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{U})^+ && \longrightarrow \mathbb{U}^+ = \mathbb{U}^{-1} : \text{unitario} \\
&= \tilde{\mathbb{A}}^+
\end{aligned}$$

(c) Si $\mathbb{A}$ es hermítico entonces $e^{i\mathbb{A}}$ es unitario.

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ \longrightarrow \mathbb{U} = e^{i\mathbb{A}} \longrightarrow \mathbb{U}^{-1} = e^{-i\mathbb{A}} = e^{-i\mathbb{A}^+} = \mathbb{U}^+$$

Como $\mathbb{A} = \mathbb{A}^+$ es hermítico

$$e^{i\mathbb{A}} = e^{i\mathbb{A}^+} = \mathbb{U}$$

$$\mathbb{U}^{-1} = e^{-i\mathbb{A}} = e^{-i\mathbb{A}^+} = \mathbb{U}^+ \longrightarrow \text{conjugado y operador } +$$

La condición para ser unitario es $\mathbb{U}^+\mathbb{U} = \mathbb{U}\mathbb{U}^+ = \mathbb{I}$

$$\mathbb{U}^+\mathbb{U} = e^{-i\mathbb{A}}e^{i\mathbb{A}} = \mathbb{I} = e^{i\mathbb{A}}e^{-i\mathbb{A}} = \mathbb{U}\mathbb{U}^+$$

OBSERVACIÓN: Si $\mathbb{A}$ no es $\mathbb{A} = \mathbb{A}^+$ se tendría que $\mathbb{U} = e^{i\mathbb{A}}$ y $\mathbb{U}^{-1} = e^{-i\mathbb{A}} \neq \mathbb{U}^+$

(d) Si $\mathbb{K}$ es antihermítico entonces $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{U}^{-1}\,\mathbb{K}\,\mathbb{U}$ es también lo será. En particular eso se cumple para $\tilde{\mathbb{K}} = i\,\mathbb{A}$. Es decir, podemos construir un operador antihermítico a partir de uno hermítico.

$$\mathbb{K} = -\mathbb{K}^{+} \longrightarrow \tilde{\mathbb{K}} = -\tilde{\mathbb{K}}^{+} = \mathbb{U}^{-1}\,\mathbb{K}\,\mathbb{U} = -(\mathbb{U}^{-1}\,\mathbb{K}\,\mathbb{U})^{+}$$

Como $\mathbb{K} = -\mathbb{K}^{+}$ y $\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^{+}$, son antihermítico y unitario respectivamente

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{K}} &= \mathbb{U}^{-1}\,\mathbb{K}\,\mathbb{U} \\
&= \mathbb{U}^{+}(-\mathbb{K}^{+})\,\mathbb{U} \\
&= \mathbb{U}^{+}(-\mathbb{K})^{+}\,\mathbb{U} && \longrightarrow \text{Prop. } \lambda^{*}\mathbb{A}^{+} = (\lambda\mathbb{A})^{+} \; (1) \\
&= -(\mathbb{K}\,\mathbb{U})^{+}\,\mathbb{U} && \longrightarrow \text{LINEALIDAD.} \\
&= -(\mathbb{K}\,\mathbb{U})^{+}(\mathbb{U}^{+})^{+} && \longrightarrow \text{Prop. } (\mathbb{A}^{+})^{+} = \mathbb{A} \\
&= -(\mathbb{U}^{+}\,\mathbb{K}\,\mathbb{U})^{+} && \longrightarrow (1) \\
&= -(\mathbb{U}^{-1}\,\mathbb{K}\,\mathbb{U})^{+} && \longrightarrow \mathbb{U}^{+} = \mathbb{U}^{-1} : \text{unitario.} \\
&= -\tilde{\mathbb{K}}^{+}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbb{K}} = i\,\mathbb{A} \longrightarrow -\tilde{\mathbb{K}} = -(i\,\mathbb{A})^{+} = -(-i\,\mathbb{A}^{+}) = i\,\mathbb{A}^{+} = i\,\mathbb{A} = \tilde{\mathbb{K}}$$

como $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{+}$

(e) Dados dos operadores $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$, hermíticos, su composición $\mathbb{A}\mathbb{B}$, será hermítica si y sólo si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ conmutan.

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^+ \quad y \quad \mathbb{B} = \mathbb{B}^+ \quad , \quad \mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^+ = \mathbb{B}^+\mathbb{A}^+$$

$$\longleftrightarrow \quad [\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = 0$$

① $\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^+ = \mathbb{B}^+\mathbb{A}^+ = \mathbb{B}\mathbb{A}$

Al ser $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$ se tiene que

$[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = 0 \longrightarrow$ CONMUTAN

② $[\mathbb{A}, \mathbb{B}] = \mathbb{A}\mathbb{B} - \mathbb{B}\mathbb{A} = 0$

De la conmutación se obtiene que $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A}$, pero como $\mathbb{A} = \mathbb{A}^+$ y $\mathbb{B} = \mathbb{B}^+$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{A}^+\mathbb{B}^+ = (\mathbb{B}\mathbb{A})^+ = \mathbb{B}^+\mathbb{A}^+ = (\mathbb{A}\mathbb{B})^+$$
$$\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}\mathbb{B})^+$$

(f) Si $\mathbb{S}$ es un operador real y antisimétrico y $\mathbb{I}$ el operador unidad pruebe:

I. los operadores $(\mathbb{I} - \mathbb{S})$ y $(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ conmutan.

$$\mathbb{S}: \mathbb{S}^+ = \mathbb{S}^T = -\mathbb{S}$$

$$[(\mathbb{I} - \mathbb{S}), (\mathbb{I} + \mathbb{S})]$$
$$= (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S}) - (\mathbb{I} + \mathbb{S})(\mathbb{I} - \mathbb{S})$$
$$= \cancel{\mathbb{I}^2} - \mathbb{S}\mathbb{I} + \mathbb{I}\mathbb{S} - \cancel{\mathbb{S}^2} - \cancel{\mathbb{I}^2} - \mathbb{S}\mathbb{I} + \mathbb{I}\mathbb{S} + \cancel{\mathbb{S}^2}$$
$$= -2\mathbb{S}\mathbb{I} + 2\mathbb{I}\mathbb{S}$$
$$= -2\mathbb{S} + 2\mathbb{S}$$
$$= 0 \longrightarrow \text{CONMUTAN}$$

II. El operador $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})$ es simétrico, mientras que $(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$ es ortogonal.

$$\mathbb{A}^+ = [(\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})]^+ = (\mathbb{I} + \mathbb{S})^+(\mathbb{I} - \mathbb{S})^+$$
$$= (\mathbb{I}^+ + \mathbb{S}^+)(\mathbb{I}^+ - \mathbb{S}^+)$$
$$= (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} - (-\mathbb{S}))$$
$$= (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})$$
$$= \mathbb{A}$$

↳ SIMÉTRICO / HERMÍTICO

$(\mathbb{I}-S)(\mathbb{I}+S)^{-1}$ ortogonal $\longrightarrow \left[(\mathbb{I}-S)(\mathbb{I}+S)^{-1}\right]^{+} = \left[(\mathbb{I}-S)(\mathbb{I}+S)^{-1}\right]^{-1}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}^{+} &= \left[(\mathbb{I}-S)(\mathbb{I}+S)^{-1}\right]^{+} \\
&= \left[(\mathbb{I}+S)^{-1}\right]^{+}(\mathbb{I}-S)^{+} \\
&= \left[(\mathbb{I}+S)^{+}\right]^{-1}(\mathbb{I}-S)^{+} \\
&= (\mathbb{I}^{+}+S^{+})^{-1}(\mathbb{I}^{+}-S^{+}) \\
&= (\mathbb{I}-S)^{-1}(\mathbb{I}-(-S)) \\
&= \left[(\mathbb{I}-S)^{-1}(\mathbb{I}+S)\right]^{-1} \\
&= (\mathbb{I}-S)(\mathbb{I}+S)^{-1} \longrightarrow \text{CONMUTAN} \\
&= \mathbb{A}^{-1}
\end{aligned}
$$

↳ ORTOGONAL/ UNITARIO

↳ $(\mathbb{I}-S)(\mathbb{I}+S)^{-1}$
$= (\mathbb{I}+S)^{-1}(\mathbb{I}-S)$

Scanned with CamScanner

(g) Considere una matriz ortogonal de la forma $\mathbb{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, encuentre la expresión para $\mathbb{S}$ que reproduce.

$\mathbb{R} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}$.

$$\mathbb{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$\mathbb{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -b \\ c & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1 & b \\ -c & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$\mathbb{R} = \left[\begin{pmatrix} 1 & -b \\ c & 1 \end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix} 1/bc+1 & -b/bc+1 \\ c/bc+1 & 1/bc+1 \end{pmatrix}\right].$$

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} \dfrac{-bc+1}{bc+1} & \dfrac{-2b}{bc+1} \\ \dfrac{2c}{bc+1} & \dfrac{-bc+1}{bc+1} \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = \frac{-bc+1}{bc+1} \quad (3) \quad ; \quad \operatorname{sen}\theta = -\frac{2b}{bc+1} \quad ; \quad \cancel{+}\operatorname{sen}\theta = \frac{\cancel{+}2c}{bc+1} \quad (1)$$

$(1)\ (bc+1)\operatorname{sen}\theta = -2b \quad ; \quad (2)\ (bc+1)\operatorname{sen}\theta = 2c$

$(1) = (2)$

$-\cancel{2}b = \cancel{2}c$

$-b = c \quad (4)$

Reemplazo (4) en (3)

$$\cos\theta = \frac{c^2+1}{-c^2+1}$$

$$(-c^2+1)\cos\theta = c^2+1$$

$$-c^2\cos\theta + \cos\theta = c^2+1$$

$$\cos\theta - 1 = c^2 + c^2\cos\theta$$

$$c^2 = \frac{\cos\theta - 1}{1+\cos\theta} \to c = \left(\frac{\cos\theta - 1}{1+\cos\theta}\right)^{1/2}$$

Por (4) tenemos

$$b = -\left(\frac{\cos\theta - 1}{1+\cos\theta}\right)^{1/2}.$$

$$\mathbb{S} = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\dfrac{\cos\theta - 1}{1+\cos\theta}\right)^{1/2} \\ \left(\dfrac{\cos\theta - 1}{1+\cos\theta}\right)^{1/2} & 0 \end{bmatrix}$$

2) $|f\rangle_t \leftrightarrow f(t) = 5t + 3t^2 + 4t^3$

$P_4(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + a_3\varphi_3(x) + a_4\varphi_4(x)$

$C_K = \frac{2}{2K+1}$ con $K = 0, 1, 2, \dots, n$

$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(5t + 3t^2 + 4t^3)\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{5t^2}{2} + \frac{\cancel{3}t^3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{4}t^4}{\cancel{4}}\right]_{-1}^{1} = 1$

$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}(5t + 3t^2 + 4t^3)\,t\,dt = \frac{37}{5}$

$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}(5t + 3t^2 + 4t^3)\,\frac{1}{2}(3t^2 - 1)\,dt = 2$

$a_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}(5t + 3t^2 + 4t^3)\,\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,dt = \frac{8}{5}$

$a_4 = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(5t + 3t^2 + 4t^3)\,\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\,dt = 4{,}1\times 10^{-17} \approx 0$

$P_4(x) = 1\varphi_0(x) + \frac{37}{5}\varphi_1 + 2\varphi_2 + \frac{8}{5}\varphi_3 + 0\varphi_4$

$\hookrightarrow P_4(x) = 1 + \frac{37}{5}x + 2\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right) + \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right) + 0\left(\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)\right)$

$P_4(x) = 1 + \frac{37}{5}x + 3x^2 - 1 + \frac{4}{5}(5x^3 - 3x)$

Base de monomios $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

$\hookrightarrow M_4(x) = 0(1) + 5(t) + 3(t^2) + 4(t^3) + 0t^4$

Matriz de transformación:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & 30/8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = A_{L\leftarrow M}$$

$$A_{L\leftarrow M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8/35 \end{pmatrix} \qquad A_{M\leftarrow L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 & -15/4 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 35/8 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se ven las componentes de $f(t)$ en la base de monomios?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Legendre}]{\text{Ahora en}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 4/7 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8/35 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 37/5 \\ 2 \\ 8/5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Componentes de $|f\rangle$ en la base de P. de Legendre

b) Se va a construir un proyector sobre $\mathbb{P}(t)_2$, así:

$$\mathbb{P} = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\rightarrow$ Ojo a la rep matricial

$\Rightarrow$ Se comprueba Idempotencia

Sobre las componentes de un vector arbitrario:

$$P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ k \end{bmatrix} = PP \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ k \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Recordando el isomorfismo entre los Polinomios y $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{P}_4 \sim \mathbb{R}^5$

Ahora, para $|f\rangle_t$ en la base de monomios se aplica la proyección

$$f^i |m_i\rangle = f = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Proyección ortogonal sobre xyz

y en la base de Legendre:

$$f^i |P_i\rangle = \tilde{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 37/5 \\ 2 \\ 8/5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P \begin{pmatrix} 1 \\ 37/5 \\ 2 \\ 8/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 37/5 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 \\ 37/5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Proyección ortogonal sobre xyz

$$P(0_{P_4}) = 0_{P_2} \rightarrow P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c), d), e) $\mathbb{T} = e^{\mathbb{D}}$ con $\mathbb{D} = \dfrac{d}{dx}$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Operador derivada para la base $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$

Las columnas de la matriz son las imágenes de la base luego de aplicar $\mathbb{D}$

$$\mathbb{T} = e^{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} \quad \text{con } X^0 = \mathbb{I}$$

c) $\Pi^{-1} \Rightarrow$ Por definición $\Pi\Pi^{-1} = \mathbb{I}$ Matriz nula

Así entonces

$\Pi\Pi^{-1} = \mathbb{I}$; $e^{(\mathbb{D}+\mathbb{B})} = \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{D}+\mathbb{B} = \mathbb{O}$ $\quad e^{\mathbb{D}-\mathbb{D}} = e^{\mathbb{O}} = \mathbb{I}$

$e^{\mathbb{D}}e^{\mathbb{B}} = \mathbb{I}$ $\quad \mathbb{B} = -\mathbb{D}$

Recordando que $\exp(A)$ siendo A una matriz diagonal, esta es:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & a_2 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \ddots \\ 0 & 0 \quad a_n \end{bmatrix} \Rightarrow \exp(A) = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 \dots 0 \\ 0 & e^{a_2} \quad 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \quad e^{a_n} \end{bmatrix}$$

y, como la matriz nula es diagonal

$$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \quad 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \exp(\mathbb{O}) = \begin{bmatrix} e^0 & 0 \dots 0 \\ 0 & e^0 \quad 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 \quad e^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \quad 0 \\ \vdots & \ddots \\ 0 & 0 \quad 1 \end{bmatrix} = \mathbb{I}$$

Por lo tanto $\Pi^{-1} = \exp(-\mathbb{D})$

- $\Pi^{+} \rightarrow$ Transpuesta conjugada // (Adjunta)

Tomando en cuenta que $\exp(\mathbb{D}^{+}) = (\exp(\mathbb{D}))^{+}$

$\Pi^{+} = (\exp(\mathbb{D}))^{+} = \exp(\mathbb{D}^{+})$

Con $\mathbb{D} = \frac{d}{dx}$ y el producto interno definido como $\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$

Adjunta formal del operador diferencial: $\langle g|\mathbb{D}|f\rangle = \langle f|\mathbb{D}^{+}|g\rangle$

$\langle \mathbb{D}f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(t)g(t)dt = f(t)g(t)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)g'(t) = f(t)g(t)\Big|_{-1}^{1} - \langle f, \mathbb{D}g\rangle$

$= (f(1)g(1) - f(-1)g(-1)) - \langle f, \mathbb{D}^{+}g\rangle \rightarrow$ Se define una función $\mathbb{B}$ tal que $\mathbb{B} = \delta(t-1) - \delta(t)$

$*\Rightarrow \langle f|\mathbb{D}^{+}|g\rangle = \langle g|\mathbb{D}|f\rangle \Longleftrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)\mathbb{D}^{+}g(x)dx = \int_{-1}^{1} \mathbb{D}f g(x)dx = \mathbb{I}$

$\mathbb{I} = [g(1)f(1) - g(-1)f(-1)] - \int_{-1}^{1} f(x)g'(x) = \int_{-1}^{1} f(x)(-g'(x))dx$

$\mathbb{D}^{+}|g\rangle(x) = -g'(x)$ $\quad$ OJO: la transpuesta del operador $\mathbb{D}$ es una integración por partes

¿Hermítico o unitario? Como $\mathbb{D}^{+}$ es una integración por partes se intercambian signos; por lo tanto $\mathbb{D}$ es antisimétrico $(-\mathbb{D} = \mathbb{D}^{+})$

y, de acuerdo a lo hallado para $\Pi^{-1} = \exp(-\mathbb{D}) = \exp(\mathbb{D}^{+}) = (\exp(\mathbb{D}))^{+} = \Pi^{+}$ y el operador Π es unitario //

$$\Pi^{-1} = \Pi^{+}$$

Scanned with CamScanner

Polinomios de Legendre

$\varphi_0 = 1$

$\varphi_1 = x$

$\varphi_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

$\varphi_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

$\varphi_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$

$\Longrightarrow D \Longrightarrow$

$\varphi_0' = 0 = 0\varphi_0$

$\varphi_1' = 1 = 1\varphi_0$

$\varphi_2' = 3x = 3\varphi_1$

$\varphi_3' = \frac{15}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

$\varphi_4' = \frac{35}{2}x^3 - \frac{30}{4}x = \frac{35}{2}x^3 - \frac{15}{2}x$

$\varphi_3' = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2$

$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{15x^2}{2} - \frac{3}{2}\right)dx = 1$

$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{15}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\,dx = 0$

$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{15x^2}{2} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = 5$

$\varphi_3' = 1 + \frac{5}{2}(3x - 1) = 1 + \frac{15}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}x - \frac{3}{2}$ ✓✓

$\varphi_4' = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3$

$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{35x^3}{2} - \frac{30}{4}x\,dx = 0$

$a_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{35x^3}{2} - \frac{30}{4}x\right)x\,dx = 3$

$a_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{35x^3}{2} - \frac{30}{4}x\right)\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\,dx = 0$

$a_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{35x^3}{2} - \frac{30}{4}x\right)\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\,dx = 7$

$\varphi_4' = 3x + 7\left[\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\right]$

$\varphi_4' = 3x + \frac{35}{2}x^3 - \frac{21}{2}x$

$\varphi_4' = \frac{35}{2}x^3 - \frac{21}{2}x$ ✓✓

d) Π en monomios

$$\Pi = \exp(\mathbb{D}) = \exp\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&3&0\\ 0&0&0&0&4\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1\\ 0&1&2&3&4\\ 0&0&1&3&6\\ 0&0&0&1&4\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$Tr = 5 \rightarrow$ Suma diagonal

$\det = 1 \rightarrow$ Multip. diagonal

Π en Legendre:

$$\varphi_0 = 1$$
$$\varphi_1 = x$$
$$\varphi_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$
$$\varphi_3 = \frac{1}{2}(5x^3-3x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$
$$\varphi_4 = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) = \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}$$

$\Rightarrow \mathbb{D} \Rightarrow$

$$\varphi_0' = 0 = 0\varphi_0$$
$$\varphi_1' = 1\varphi_0$$
$$\varphi_2' = 3x = 3\varphi_1$$
$$\varphi_3' = 1\varphi_0 + 5\varphi_2$$
$$\varphi_4' = 3\varphi_1 + 7\varphi_3$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \exp(\mathbb{D}) = \exp\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0\\ 0&0&3&0&3\\ 0&0&0&5&0\\ 0&0&0&0&7\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&1&3/2&7/2&35/8\\ 0&1&3&15/2&41/2\\ 0&0&1&5&35/2\\ 0&0&0&1&7\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$Tr = 5$

$\det = 1$

¿Cómo transforman?

$\rightarrow$ En monomios: $\Pi|f\rangle = \Pi \begin{pmatrix} 0\\5\\3\\4\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\\23\\15\\4\\0 \end{pmatrix} \Rightarrow 12 + 23t + 15t^2 + 4t^3$

$\rightarrow$ En Legendre: $\Pi|f\rangle = \Pi \begin{pmatrix} 1\\37/5\\2\\8/5\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17\\127/5\\10\\8/5\\0 \end{pmatrix} \rightarrow 17\varphi_0 + \frac{127}{5}\varphi_1 + 10\varphi_2 + \frac{8}{5}\varphi_3$

e) Con la representación matricial:

Para monomios

$$\Pi^{\dagger} = \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1&-1&1&-1&1\\ 0&1&-2&3&-4\\ 0&0&1&-3&6\\ 0&0&0&1&-4\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \Pi^{-1}|f\rangle = \Pi^{-1}\begin{pmatrix} 0\\5\\3\\4\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6\\11\\-9\\4\\0 \end{pmatrix} \rightarrow -6 + 11t - 9t^2 + 4t^3$$

$\searrow \exp(-\mathbb{D})$

Para polinomios de Legentre

$$\Pi^{\dagger} = \Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1&1&3/2&7/2&75/8\\ 0&1&3&15/2&41/2\\ 0&0&1&5&35/2\\ 0&6&0&1&7\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \Pi^{-1}|f\rangle = \Pi^{-1}\begin{pmatrix} 1\\37/5\\2\\8/5\\0 \end{pmatrix} \rightarrow -9\varphi_0 + \frac{67}{5}\varphi_1 - 6\varphi_2 + \frac{8}{5}\varphi_3$$