Taller 1

María Fernanda Carvajal Guerrero
Carlos Santiago Rodríguez Sarmiento
Universidad Industrial de Santander
Bucaramanga, Santander

9 de noviembre de 2021

1. Sección 1.6.6

1.1. Ejercicio 2

Demuestre:

a. $cos(3\alpha) = cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha)sen^2(\alpha)$

b. $sen(3\alpha) = 3cos^2(\alpha)sen(\alpha) - sen^3(\alpha)$

Solución:

Entonces, utilizando la Fórmula de De Moivre, recordando que esta es:

$$[cos(\theta) + isen(\theta)]^n = cos(n\theta) + isen(n\theta) \tag{1}$$

Podemos reescribir $cos(3\alpha)$ y $sen(3\alpha)$ como un binomio al cubo:

$$cos(3\alpha) + isen(3\alpha) = [cos(\alpha) + isen(\alpha)]^3$$

Y desarrollando el binomio por el método de Newton se tiene que:

$$cos(3\alpha) + isen(3\alpha) = cos^3(\alpha) + 3cos^2(\alpha)isen(\alpha) + 3cos(\alpha)(isen(\alpha))^2 + (isen(\alpha))^3$$

Ahora bien, recordando que $i^2 = -1$ se reescribe la expresión anterior como:

$$cos(3\alpha) + isen(3\alpha) = cos^3(\alpha) + 3cos^2(\alpha)sen(\alpha)i - 3cos(\alpha)sen^2(\alpha) - isen^3(\alpha) \tag{2}$$

Así, para concluir la demostración se iguala la parte real de 2 con $cos(3\alpha)$:

$$cos(3\alpha) = cos^3(\alpha) - 3cos(\alpha)sen^2(\alpha) \rightarrow \text{QED} \tag{3}$$

y la parte imaginaria con $sen(3\alpha)i$:

$$\cancel{i}sen(3\alpha) = \cancel{i}(3cos^2(\alpha)sen(\alpha) - sen^3(\alpha))$$

por lo que se obtiene:

$$sen(3\alpha) = (3cos^2(\alpha)sen(\alpha) - sen^3(\alpha) \rightarrow \text{QED} \tag{4}$$

De esta forma 3 y 4 demuestran a y b respectivamente.

1.2. Ejercicio 5

Encuentre las raíces de:

$$a)(2i)^{\frac{1}{2}} \quad b)(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} \quad c)(-1)^{\frac{1}{3}} \quad d)8^{\frac{1}{6}} \quad e)(-8-8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$$

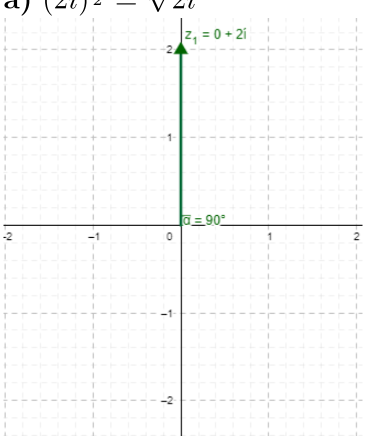
Para obtener las raíces de los anteriores números, es necesario tener en cuenta la siguiente fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$$

Donde:

- $n =$ Número de raíces que se debe calcular
- $z =$ Número complejo en forma binómica
- $|z| =$ Módulo del número complejo
- $\theta =$ Argumento del número complejo
- $k = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

a) $(2i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2i}$



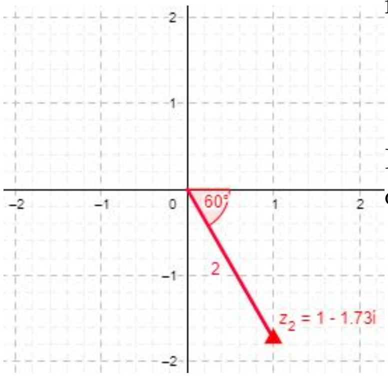
De la gráfica sabemos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y haciendo el cálculo del módulo sabemos que es $|z| = \sqrt{2^2} = 2$, así:

$$\sqrt[2]{2i} = \sqrt{2}e^{\frac{i(\frac{\pi}{2}+2(k)\pi)}{2}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binómica:

- $k = 0 \qquad \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \boxed{(1+i)}$
- $k = 1 \qquad \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})} = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}i) = \boxed{(-1-i)}$

b) $(1-\sqrt{3}i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{1-\sqrt{3}i}$



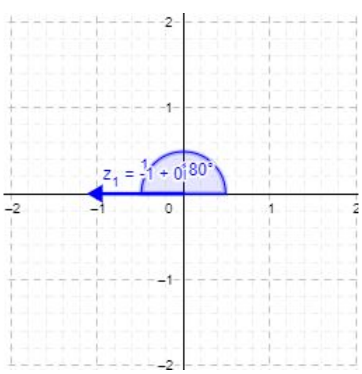
Podemos obtener el módulo y el argumento a partir de las siguientes fórmulas $|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ y $\theta = \tan^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{1}) = -\frac{\pi}{3}$

$$\sqrt[2]{1-\sqrt{3}i} = \sqrt{2}e^{\frac{i(-\frac{\pi}{3}+2(k)\pi)}{2}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binómica:

- $k=0 \qquad \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{6})} = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}i) = \boxed{(\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)}$
- $k=1 \qquad \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{6})} = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}i) = \boxed{(-\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)}$

c) $(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1}$



De la gráfica sabemos que $\theta = \pi$ y haciendo el cálculo del módulo sabemos que es $|z| = \sqrt{(-1)^2} = 1$, así:

$$\sqrt[3]{-1} = 1e^{\frac{i(\pi+2(k)\pi)}{3}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binómica:

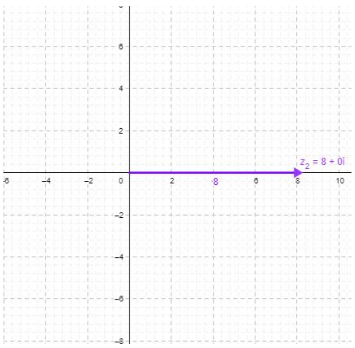
- $k=0 \qquad 1e^{i(\frac{\pi}{3})} = 1(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)}$
- $k=1 \qquad 1e^{i(\pi)} = 1(-1, 0i) = \boxed{(-1+0i)}$
- $k=2 \qquad 1e^{i(\frac{5\pi}{3})} = 1(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)}$

d) $(8)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{8}$

De la gráfica sabemos que $\theta = 0$ y haciendo el cálculo del módulo sabemos que es $|z| = \sqrt{8^2} = 8$, así:

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{8}e^{\frac{i(0+2(k)\pi)}{6}}$$

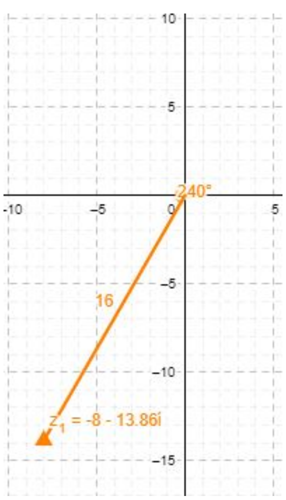
En donde se efectúa las operaciones correspondientes teniendo en cuenta que $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ y $\sqrt[6]{216} = \sqrt[6]{6^3} = \sqrt{6}$,luego se transforma de polar a binómica:



- $k = 0$ $\quad \sqrt[6]{8}e^{i0} = \sqrt{2}(1, 0i) = \boxed{(\sqrt{2} + 0i)}$
- $k = 1$ $\quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i)}$
- $k = 2$ $\quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i)}$
- $k = 3$ $\quad \sqrt[6]{8}e^{i\pi} = \sqrt{2}(-1, 0i) = \boxed{(-\sqrt{2} + 0i)}$
- $k = 4$ $\quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i)}$
- $k = 5$ $\quad \sqrt[6]{8}e^{i\frac{5\pi}{3}} = \sqrt{2}(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i)}$

e) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$

Partiendo de las fórmulas para el módulo y el argumento, $|z| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16$ y $\theta = \pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}$, respectivamente:



$$\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i} = 2e^{\frac{i(\frac{4\pi}{3}+2(k)\pi)}{4}}$$

En donde se efectúa las operaciones correspondientes y se transforma de polar a binómica:

- $k = 0$ $\quad 2e^{i(\frac{\pi}{3})} = 2(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(1 + \sqrt{3}i)}$
- $k = 1$ $\quad 2e^{i(\frac{5\pi}{6})} = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}i) = \boxed{(-\sqrt{3} + i)}$
- $k = 2$ $\quad 2e^{i(\frac{4\pi}{3})} = 2(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}i) = \boxed{(-1 - \sqrt{3}i)}$
- $k = 3$ $\quad 2e^{i(\frac{11\pi}{6})} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}i) = \boxed{(\sqrt{3} - i)}$

1.3. Ejercicio 6

Demuestre que:

- $Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$
- $Log(1-i) = \frac{1}{2}ln(2) - \frac{\pi}{4}i$
- $Log(e) = 1 + 2n\pi i$
- $Log(i) = (2n + \frac{1}{2})\pi i$

Para demostrar estas expresiones partimos de la definición:

$$Log(z) = ln|z| + i(\theta + 2\pi n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Siendo el valor principal cuando $n = 0$ Así:

- $Log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2}i$

  Demostración. Partiendo del valor principal (n=0) y siendo $z = -ei$, su módulo será $|z| = \sqrt{(-e)^2} = e$ y su argumento $\theta = -\frac{\pi}{2}$ dado que solo presenta componente imaginaria negativa, tenemos que:

  $$Log(-ie) = ln(e) + i(-\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2}i$$

  □

- $Log(1-i) = \frac{1}{2}ln(2) - \frac{\pi}{4}i$

  Demostración. Partiendo del valor principal (n=0) y siendo $z = 1 - i$, su módulo será $|z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ y su argumento $\theta = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ dado que se encuentra en el cuarto cuadrante, de esta forma nos queda:

  $$Log(1-i) = ln(\sqrt{2}) + i(-\frac{\pi}{4}) = ln(2^{\frac{1}{2}}) - i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}ln(2) - \frac{\pi}{4}i$$

  Por propiedad de los logaritmos $Log_a(x^b) = b \cdot Log_a(x)$ □

- $Log(e) = 1 + 2n\pi i$

  Demostración. Partiendo de la definición general brindada anteriormente y siendo $z = e$ junto con su módulo $|z| = \sqrt{(e)^2} = e$ y su argumento $\theta = \tan^{-1}(\frac{0}{e}) = 0$ tenemos que:

  $$Log(e) = ln(e) + i(0 + 2\pi n) = 1 + 2n\pi i \quad para\, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  □

- $Log(i) = (2n + \frac{1}{2})\pi i$

  Demostración. Partiendo de la definición general brindada anteriormente y siendo $z = i$ junto con su módulo $|z| = \sqrt{(1)^2} = 1$ y su argumento $\theta = \frac{\pi}{2}$ dado que solo posee la componente imaginaria positiva, tenemos que:

  $$Log(i) = ln(1) + i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 0 + i\pi(\frac{1}{2} + 2n) = (2n + \frac{1}{2})\pi i$$

  □

2. Sección 1.5.7

2.1. Ejercicio 2

Considere que:

- $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = x^i\hat{\mathbf{i}}_i$
- $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x, y, z) = a^i(x, y, z)\hat{\mathbf{i}}_i$
- $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}(x, y, z) = b^i(x, y, z)\hat{\mathbf{i}}_i$
- $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$
- $\psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z)$

Utilizando notación de índices, demuestre:

Identidad 1. $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

Demostración. Utilizando notación de índices reescribimos la expresión:

$$\nabla(\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})) = \partial^i(\phi(x^j)\psi(x^j))\hat{\mathbf{i}}_i$$

Ahora, usando regla de producto, se escribe la expresión como:

$$\partial^i(\phi(x^j)\psi(x^j))\hat{\mathbf{i}}_i = \phi(x^j)\boxed{\partial^i\psi(x^j)\hat{\mathbf{i}}_i} + \psi(x^j)\boxed{\partial^i\phi(x^j)\hat{\mathbf{i}}_i}$$

Donde las expresiones encerradas corresponden a $\nabla\psi$ y $\nabla\phi$ respectivamente, por lo que se tiene que:

$$\nabla(\phi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})) = \partial^i(\phi(x^j)\psi(x^j))\hat{\mathbf{i}}_i = \phi(x^j)\nabla\psi + \psi(x^j)\nabla\phi = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

□

Identidad 2. $\nabla \cdot (\nabla \times a) =?$

Demostración. Utilizando notación de índices reescribimos la expresión:

$$\nabla \cdot (\nabla \times a) = \partial_j (\nabla \times \mathbf{a})^i = \partial_i (\epsilon^{ijk} \partial_j a_k) = \epsilon^{ijk} \partial_i \partial_j a_k = 0$$

Esta sería la demostración correspondiente al teorema que plantea que la divergencia del rotacional de un campo vectorial es 0. $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ para todo F. Se comprueba a través del determinante:

$$\begin{vmatrix} \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= \partial_1(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2) - \partial_2(\partial_1 a_3 - \partial_3 a_1) + \partial_3(\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1) =$$

$$\partial_1\partial_2 a_3 - \partial_1\partial_3 a_2 - \partial_2\partial_1 a_3 + \partial_2\partial_3 a_1 + \partial_3\partial_1 a_2 - \partial_3\partial_2 a_1 = 0$$

Ahora bien, por Teorema de Clairaut las segundas derivadas parciales de una función continua son iguales, así se tiene que:

$$\partial_1\partial_2 a_3 - \partial_1\partial_3 a_2 - \partial_2\partial_1 a_3 + \partial_1\partial_2 a_3 + \partial_1\partial_3 a_2 + \partial_2\partial_1 a_3 = 0$$

Así, se cancelan los términos semejantes y se anula el determinante.

Por otro lado $\nabla \times (\nabla \cdot a)$ no va a ser posible dado que el producto vectorial entre un vector y el resultado del producto punto que es un escalar no está definido. □

Identidad 3. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$

Demostración. Utilizando notación de índices reescribimos la expresión:

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))^i = \epsilon^{ijk} \partial_j (\nabla \times \mathbf{a})_k = \epsilon^{ijk} \partial_j (\epsilon_{kmn} \partial^m a^n)$$

Ahora se reordena la expresión y los subíndices kmn a mnk (es posible debido a las propiedades de permutación de Levi-Civita y a la conmutatividad de la notación indicial) por conveniencia de la demostración:

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))^i = \epsilon^{ijk} \epsilon_{kmn} \partial_j \partial^m a^n = \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnk} \partial_j \partial^m a^n$$

Ahora tenemos una propiedad que relaciona al símbolo de Levi-Civita con el delta de kronecker que es $\epsilon^{ijk}\epsilon_{kmn} = (\delta^i_m \delta^j_n - \delta^j_m \delta^i_n)$ y efectuámos el producto:

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))^i = (\delta^i_m \delta^j_n - \delta^j_m \delta^i_n) \partial_j \partial^m a^n = \delta^i_m \delta^j_n \partial_j \partial^m a^n - \delta^j_m \delta^i_n \partial_j \partial^m a^n$$

Ahora por índices mudos:

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))^i = \partial_n \partial^m a^n - \partial_m \partial^m a^n = \partial^m \boxed{\partial_n a^n} - \boxed{\partial_m \partial^m} a^n$$

Las expresiones encerradas corresponden a $\nabla \cdot a$ y $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ respectivamente:

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))^i = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

□