Ricerca operativa

Mario Petruccelli
Università degli studi di Milano

A.A. 2018/2019

Sommario

1 Introduzione

Ricerca operativa: Disciplina che affronta la risoluzione di problemi decisionali complessi tramite modelli matematici e algoritmi.

$$\underbrace{\textbf{Sistema organizzato}}_{\substack{\text{Input: Decisioni}\\ \text{Output: Prestazioni}}} \rightarrow \underbrace{\textbf{Modello}}_{\substack{\text{Input: Dati e parametri}\\ \text{Output: Decisioni e prestazioni}}}$$

Problemi

- Pochi dati
- Troppa semplificazione

1.1 Tassonomia modelli

- **Descrittivi** → (es modellini, plastici, ...)
- **Predittivi** → Più complicati (es andamento mercati finanziari, previsioni, ...)
- **Prescrittivi** → Modelli di problemi di ottimizzazione
  ↓
  Metodologie: Teoria e algoritmi di ottimizzazione, teoria grafi e reti di flusso, teoria dei giochi e delle decisioni.

  La descrizione del problema sarà attraverso: vincoli, obiettivi.

Esempio di problemi decisionali

- Finanza (investimenti)
- Produzione (dimensionamento, organizzazione, ...)
- Logistica (gestione scorte, quanta merce, ...)
- Gestione (pianificazione, turnistica personale, ...)
- Servizi (rotte, ...)

NB *Lo stesso modello può servire per risolvere problemi diversi.*

Set covering Problema per la gestione di un territorio. I problemi dei sismografi e dei ripetitori sono diversi ma si ragiona allo stesso modo.

Programmazione matematica Ottimizzare una funzione di più variabili, spesso soggette a vincoli.

Risoluzione

- Analisi struttura e creazione modello matematico.
- Definizione soluzione.

Programmazione Pianificazione delle azioni necessarie per individuare la soluzione ottima.

- Programmazione lineare continua.
- Programmazione lineare intera → difficile: può non concludersi.
- Programmazione booleana.
- Programmazione non lineare.
- Programmazione stocastica.

1.2 Problema dello zaino

n oggetti di valore p_j e peso w_j j=1 ... n ed è data la capacità massima b di un contenitore.

Problema quali oggetti inserire nel contenitore senza superare capacità.

Obiettivo Massimizzare il valore degli oggetti.

Si tratta di un piano di **ottimizzazione** e ne definiamo i 4 componenti fondamentali.

- Dati $\rightarrow p_j, w_j, b$
- Variabili (decisioni) $\rightarrow x_j = \begin{cases} 1 \text{ se il j-esimo oggetto viene inserito} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$
- Vincoli
- Obiettivo $\rightarrow \underbrace{\sum_{j=1}^{n} p_j x_j}_{\text{Funzione obiettivo} \rightarrow \max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j} =$ Valore complessivo degli oggetti inseriti.

Se $x_j = 1$ allora anche $p_j x_j = 1 \rightarrow$ ragiono uguale per i vincoli.

$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b \rightarrow$ valore complessivo ingombro.

Quindi **modello** max $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \quad \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b \quad x_j \in \{0, 1\} j = 1...n$

1.3 Esempi di problemi

1.3.1 Problema trasporto e localizzazione impianti

Dove aprire unità produttive e come trasportare prodotto dalle unità aperte ai magazzini per soddisfare domanda.

Obiettivo Minimizzare costi di apertura e trasporto.

Dati

- n siti candidati per unità produttive, ognuna con capacità massima a_j $j = 1, \ldots, n$.
- m magazzini con una domanda da soddisfare b_j $j = 1, \ldots, n$.
- c_{ij} costo di trasporto di un'unità di prodotto dal sito i al magazzino j.

L'attivazione di un'unità produttiva nel sito i ha un costo fisso f_i.

Variabili

- $x_{ij} \geq 0$ unità di merce trasportata da sito i a magazzino j.
- Dobbiamo aggiungere una variabile binaria per decidere se aprire o meno unità produttiva.

$$y_i = \begin{cases} 1 & \textit{se apro impianto } i \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

NB Dobbiamo rispettare che sia un problema di programmazione lineare, *i.e.* non moltiplicare variabili tra di loro.

Vincoli

- Fissato un i questo non può superare la sua capacità produttiva

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad i = 1, \dots, m$$

Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\min \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i$$

$$\text{Subject to} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i y_i \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j \ \forall j \qquad x_{ij} \geq 0 \ \forall i, j \qquad y_i \in \{0, 1\} \ \forall i$$

1.3.2 Problema assegnamento

Associare a ciascuna persona una sola attività in modo che tutte le attività siano svolte e sia minima la somma dei tempi impiegatiper svolgere.

Dati

- n lavoratori.
- n attività.
- Indichiamo con $t_{ij} > 0$ il tempo che impiega il lavoratore i, l'attività j con $i, j = 1, \ldots, n$

Variabili

$$\text{Variabile binaria } x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{se i svolge j} \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

Vincoli

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \leq \{0, 1\} \quad \forall i, j$$

Obiettivo

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij}$$

Si prende il tempo solo se x_{ij} è a 1.

1.3.3 Mix Produttivo

Determinare quali prodotti produrre e in quale quantità per massimizzare il profitto complessivo.

Dati

- $i = 1, \dots, m$ risorse produttive in quantità limitata. La massima disponibilità è $b_1, \dots, b_m$
- Per produrre un'unità di prodotto $j-esimo$ si utilizzano a_{ij} unità della risorsa $i - esima$.
- Agli n prodotti sono associati i profitti unitari $c_1, \dots, c_n$ *(profitto per unità di prodotto)*. Si suppone che tutta la produzione venga venduta.

Variabili x_j = numero prodotti di tipo j

Vincoli

	Tablet	**Portatile**	**Ore uomo**
Profitto unitario	30	20	
Finitura	4	6	540
Controllo qualità	1	1	100

Obiettivo

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \max 30x_t + 20x_p$$

Esempio:

$$\max 30x_t + 20x_p$$

$$8x_t + 4x_p \leq 640$$

$$4x_t + 6x_p \leq 540$$

$$x_t + x_p \leq 100$$

$$x_t, x_p \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

Esempio vernici Quantità vernici che bisogna produrre per massimizzare il guadagno.

Dati

- $3k\$$ per E.
- $2k\$$ per I.
- Disponibilità A 6 tonnellate.
- Disponibilità B 8 tonnellate.

Variabili

- x_E Tonnellate vernice E.
- x_I Tonnellate vernice I.

Vincoli

		Vernici	
		E	I
Materie prime	A	1	2
	B	2	1

Obiettivo

$$\max 3x_E + 2x_I$$

$$1x_E + 2x_I \leq 6$$

$$2x_E + 1x_I \leq 8$$

$$x_I \leq x_E + 1$$

$$x_I \leq 2$$

$$x_E, x_I \geq 0$$

Esempio problema dieta Quali ingredienti e in che quantità miscelare per minimizzare il costo del mangime.

Dati Ogni dose deve contenere *almeno* 2hg di proteine, 4hg di carboidrati, 3hg di grasso.

Variabili x_j = kg ingredienti di j.

Vincoli

Ingrediente	Proteine	Carboidrati	Grasso	Costo $/kg
1	1	4	3	3
2	3	4	2	6
3	2	3	3	5
4	2	2	4	6

Obiettivo

$$\min 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 2 \text{ proteine}$$

$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 4 \text{ carboidrati}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 3 \text{ grasso}$$

$$x_j \geq 0$$