

# Ricerca operativa

Mario Petruccelli  
Università degli studi di Milano

A.A. 2019/2020

# Sommario

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
1.1	Tassonomia modelli . . . . .	3
1.2	Programmazione matematica . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Modellazione di problemi</b>	<b>4</b>
2.1	Problema dello zaino . . . . .	4
2.2	Problema di trasporto e localizzazione di impianti . . . . .	5
2.3	Problema assegnamento . . . . .	6
2.4	Mix Produttivo . . . . .	6
2.4.1	Vernici . . . . .	7
2.4.2	Problema della dieta . . . . .	8
2.5	Miscelazione . . . . .	9
2.6	Turnazione personale . . . . .	10
2.7	Locazione di servizi . . . . .	11
2.8	Bin packing . . . . .	12
2.9	Problema di assegnamento . . . . .	13
2.10	Problema di sequenziamento monoprocesso . . . . .	14
2.11	Problema di pianificazione della produzione . . . . .	15
2.11.1	Variante lotto minimo . . . . .	16
2.11.2	Variante produzione con costi fissi . . . . .	17
2.11.3	Variante multiprodotto . . . . .	17
2.12	Set Covering . . . . .	17
2.13	Modellare vincoli logici utilizzando variabili binarie . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Parte formale della ricerca operativa</b>	<b>20</b>
3.1	Tecnica di soluzione lineare . . . . .	20
3.2	Tecnica di programmazione matematica . . . . .	22
3.2.1	Convessità . . . . .	22

# 1 Introduzione

**Ricerca operativa:** disciplina che affronta la risoluzione di problemi decisionali complessi tramite modelli matematici e algoritmi. Si parte da un **sistema organizzato** e lo si formalizza in un **modello matematico** per poi risolverlo tramite **algoritmi**.

## 1.1 Tassonomia modelli

- **Descrittivi** → Modelli che cercano di descrivere o simulare sistemi complessi (*e.g. modellini, plastici, ...*)
- **Predittivi** → Modelli che cercano di predire dei dati (*e.g. andamento mercati finanziari, previsioni, ...*)
- **Prescrittivi** → Modelli che trovano la soluzione ottimale ad un problema (*sono quelli che studieremo in questo corso*).

La descrizione del problema avverrà attraverso **vincoli, obiettivi**.

### Esempio di problemi decisionali

- Finanza (investimenti)
- Produzione (dimensionamento, organizzazione, ...)
- Logistica (gestione scorte, quanta merce, ...)
- Gestione (pianificazione, turnistica personale, ...)
- Servizi (rotte, ...)

**NB** *Lo stesso modello può servire per risolvere problemi diversi.*

**Set covering** Problema per la gestione di un territorio. I problemi dei sismografi e dei ripetitori sono diversi ma si ragiona allo stesso modo.

## 1.2 Programmazione matematica

La programmazione matematica (intesa come *pianificazione* delle azioni necessarie per individuare la soluzione ottima) è ciò che rappresenta il processo risolutivo nella ricerca operativa:

- Analisi del problema e scrittura di un modello matematico.
- Definizione e applicazione di un metodo di soluzione.

In particolar modo, la programmazione matematica si occupa di ottimizzare una funzione di più variabili, spesso soggette a dei vincoli. A seconda del tipo di modello abbiamo:

- Programmazione lineare continua.
- Programmazione lineare intera.
- Programmazione booleana.

## 2 Modellazione di problemi

### 2.1 Problema dello zaino

Ci sono  $n$  oggetti di valore  $p_j$  e ingombro  $w_j$  per  $j = 1, \dots, n$  ed è data la capacità massima  $b$  di un contenitore.

**Problema** Quali oggetti inserire nel contenitore senza superare capacità.

**Obiettivo** Massimizzare il valore degli oggetti. Si tratta di un problema di **ottimizzazione** e va formalizzato in modello matematico. Ci sono 4 componenti fondamentali.

**Dati** I dati sono informazioni conosciute a priori, in questo caso sono:

- $p_j \rightarrow$  valore dell'oggetto  $j$ .
- $w_j \rightarrow$  ingombro dell'oggetto  $j$ .
- $b \rightarrow$  capacità massima del contenitore.

**Variabili** Le variabili sono elementi che rappresentano una decisione.

- $x_j = \begin{cases} 1 & \text{se il } j\text{-esimo oggetto viene inserito} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

**Obiettivo** L'obiettivo è la funzione che rappresenta il risultato da ottenere.

- $\max \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow$  massimizzare il valore

**Vincoli** I vincoli sono le limitazioni che abbiamo sui dati.

- $\sum_{j=1}^n w_j x_j \leq b \rightarrow$  la somma degli ingombri degli oggetti presi non può superare la capacità del contenitore
- $x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, n$

## 2.2 Problema di trasporto e localizzazione di impianti

Ci sono  $n$  siti candidati ad ospitare unità produttive, ciascuno con capacità massima  $a_i$  con  $i = 1, \dots, n$ . Vi sono  $m$  magazzini, ognuno con una domanda da soddisfare  $b_j$  con  $j = 1, \dots, m$ . Indichiamo con  $c_{ij}$  il costo di trasporto di una unità di prodotto dal sito  $i$  al magazzino  $j$ . L'attivazione di una unità produttiva nel sito  $i$  ha un costo fisso  $f_i$ .

**Problema** Dove aprire le unità produttive e come trasportare il prodotto dalle unità produttive aperte ai magazzini in modo da soddisfare la domanda.

**Obiettivo** Minimizzare i costi di apertura e trasporto.

### Dati

- $a_i \rightarrow$  capacità di produzione del sito  $i$
- $b_j \rightarrow$  domanda del magazzino  $j$
- $c_{ij} \rightarrow$  costo del trasporto di un'unità dal sito  $i$  al magazzino  $j$ .
- $f_i \rightarrow$  costo di attivazione unità nel sito  $i$ .

### Variabili

- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se il sito } i \text{ ospita un'unità produttiva} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $x_{ij} =$  numero di unità trasportata dal sito  $i$  al magazzino  $j$ .

### Obiettivo

- $\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^n f_i y_i \rightarrow$  minimizzare il costo di attivazione di un unità nei vari siti e il costo dei trasporti delle unità.

### Vincoli

- $\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq a_i y_i \quad i = 1, \dots, n \rightarrow$  le unità trasportate da un sito  $i$  non possono superare la capacità  $a_i$  di quel sito  $i$ .
- $\sum_{i=1}^n x_{ij} \geq b_j \quad j = 1, \dots, m \rightarrow$  Le unità inviate ad un magazzino  $j$  dai vari siti deve soddisfare la domanda di quel magazzino.
- $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$
- $y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n$

## 2.3 Problema assegnamento

Ci sono  $n$  lavoratori e  $n$  attività. Indichiamo con  $t_{ij}$  il tempo impiegato dal lavoratore  $i$  per svolgere l'attività  $j$ .

**Problema** Assegnare a ciascun lavoratore una sola attività, così che tutte le attività siano svolte.

**Obiettivo** Minimizzare il tempo richiesto a svolgere l'attività  $j$ .

### Dati

- $t_{ij} \rightarrow$  tempo impiegato dal lavoratore  $i$  per svolgere l'attività  $j$ .

### Variabili

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoratore } i \text{ svolge l'attività } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

### Obiettivo

- $\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow$  minimizzare il tempo speso per svolgere tutte le attività dei vari lavoratori.

### Vincoli

- $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \rightarrow$  a ogni lavoratore è associata una sola attività.
- $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \rightarrow$  a ogni attività è associata nn solo lavoratore.
- $x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$

## 2.4 Mix Produttivo

Si hanno  $m$  risorse produttive con disponibilità  $b_i$ . Si possono produrre  $n$  prodotti diversi. Per produrre una unità di un prodotto  $j$ -esimo si utilizzano  $a_{ij}$  unità della risorsa  $i$ -esima. Ciascun prodotto ha un profitto unitario  $c_j$ .

### Dati

- $b_i \rightarrow$  disponibilità risorsa  $i$ -esima.
- $a_{ij} \rightarrow$  unità della risorsa  $i$ -esima usate per produrre un prodotto  $j$ -esimo.
- $c_j \rightarrow$  profitto di un unità del prodotto  $j$ .

### Variabili

- $x_j$  = unità prodotte del prodotto  $j$ -esimo.

### Obiettivo

- $\max \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow$  massimizzare il profitto tra i vari prodotti.

### Vincoli

- $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \rightarrow$  le risorse usate nella produzione non possono superare la disponibilità di ciascuna risorsa.
- $x_j \geq 0 \quad \forall j$

#### 2.4.1 Vernici

L'azienda produce due tipi di vernici, una vernice per interni (I) e una vernice per esterni (E), usando due materie prime indicate con A e B. La disponibilità al giorno di materia prima A è pari a 6 ton, mentre quella di materia prima B è di 8 ton. La quantità di A e B consumata per produrre una ton di vernice E ed I è riportata nella seguente tabella.

		Vernici	
		E	I
Materie prime	A	1	2
	B	2	1

Si ipotizza che tutta la vernice prodotta venga venduta. Il prezzo di vendita per tonnellata è 3K\$ per E e 2K\$ per I. L'azienda ha effettuato un'indagine di mercato con i seguenti esiti:

- La domanda giornaliera di vernice I non super mai di più di 1 ton quella di vernice E.
- La domanda massima giornaliera di vernice I è di 2 ton.

### Dati

- 3k\$ per E.
- 2k\$ per I.
- Disponibilità A 6 tonnellate.
- Disponibilità B 8 tonnellate.

### Variabili

- $x_E$  Tonnellate vernice E.
- $x_I$  Tonnellate vernice I.

### Obiettivo

- $\max 3x_E + 2x_I$

### Vincoli

- $x_E + 2x_I \leq 6$
- $2x_E + x_I \leq 8$
- $x_I - x_E \leq 1$
- $x_I \leq 2$
- $x_E, x_I \geq 0$

## 2.4.2 Problema della dieta

Un determinato mangime per animali deve contenere in ogni dose almeno 2hg di proteine, 4hg di carboidrati e 3hg di grasso. Si possono miscelare 4 ingredienti con le seguenti caratteristiche (*in hg per ogni kg*).

Ingrediente	Proteine	Carboidrati	Grasso	Costo euro/kg
1	1	4	3	3
2	3	4	2	6
3	2	3	3	5
4	2	2	4	6

**Problema** Determinare quali ingredienti ed in quale quantità miscelare in modo da minimizzare il costo del mangime.

### Dati

- Ogni dose deve contenere *almeno* 2hg di proteine, 4hg di carboidrati, 3hg di grasso.

### Variabili

- $x_j$  = quantità di ingredienti  $j$  in kg.



### Obiettivo

- $\min \sum_{j=1}^4 c_j x_j \rightarrow$  minimizzare il costo.

### Vincoli

- $\min 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4$
- $x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 2hg$  proteine
- $4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 4hg$  carboidrati
- $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 3hg$  grasso
- $x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots 4$

## 2.5 Miscelazione

Due tipi di benzina si ottengono miscelando 3 tipi di materie grezze. Le due benzine sono vendute rispettivamente a 40 cent/l e a 30 cent/l. Le materie grezze sono vendute a 10 cent/l, 16 cent/l, 14 cent/l e sono disponibili in quantità giornaliere pari a 100000 l, 70000 l, 120000 l.

**Problema** Produrre benzina con le quantità di materie a disposizione.

**Obiettivo** Massimizzare il profitto tenendo conto del costo delle materie.

### Dati

- $r_j \rightarrow$  ricavo benzina *j-esima*.
- $c_i \rightarrow$  costo petrolio *i-esimo*.
- $a_i \rightarrow$  quantità giornaliera di petrolio *i-esimo*.
- $\%_{ij}^{m/M} \rightarrow$  percentuale minima e massima di petrolio *i-esimo* da avere all'interno della benzina *j-esima*.

### Variabili

- $p_{ij} =$  percentuale di petrolio *i* in benzina *j*.
- $b_j =$  litri di benzina *j-esima* prodotti.
- $p_i =$  litri di petrolio *i-esimo* usati.

- $x_{ij} := p_{ij}b_j \rightarrow$  litri di petrolio  $i$ -esimo usato per produrre i litri di benzina  $j$ -esima (ciò permette di ottenere un modello lineare).

### Obiettivo

- $\max \left[ \underbrace{\sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m x_{ij}) r_j}_{\text{litri prodotti di benzina } j\text{-esima}} - \underbrace{\sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n x_{ij}) c_i}_{\text{litri di petrolio } i\text{-esimo utilizzati}} \right] \rightarrow$  massimizzare il ricavo netto della produzione.

### Vincoli

- $\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad \forall i \rightarrow$  i litri di petrolio  $i$ -esimo utilizzati non possono superare i litri disponibili giornalmente.
- $\%_{ij}^m (\sum_{k=1}^m x_{kj}) \leq x_{ij} \leq \%_{ij}^M (\sum_{k=1}^m x_{kj}) \quad \forall i, j \rightarrow$  i litri di petrolio  $i$ -esimo all'interno della miscela per benzina  $j$ -esima deve essere compresa tra gli estremi di percentuale dati dalla tabella.
- $x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j$

## 2.6 Turnazione personale

Ci sono 3 turni lavorativi (mattina, pomeriggio, notte). Sono presenti  $n$  lavoratori che svolgono 5 turni settimanali, dopo un turno lavorativo per un lavoratore ce ne devono essere almeno 2 di riposo. Ogni lavoratore propone 5 turni in ordine di preferenza.

**Problema** Organizzare turni in modo tale che ognuno si coperto.

**Obiettivo** Minimizzare il grado di soddisfabilità globale.

### Dati

- $p_{gt}^j \rightarrow$  grado di soddisfabilità del lavoratore  $j$ -esimo a lavorare il giorno  $g$  nel turno  $t$ .
- $r_{gt} \rightarrow$  numero lavoratori necessari il giorno  $g$  al turno  $t$ .

### Variabili

- $x_{gt}^j = \begin{cases} 1 & \text{se il lavoratore } j\text{-esimo lavora il giorno } g \text{ al turno } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

### Obiettivo

- $\min \sum_{j=1}^n \sum_{g \in G} \sum_{t \in T} p_{gt}^j x_{gt}^j$

### Vincoli

- $\sum_{j=1}^n x_{gt}^j \geq r_{gt} \quad \forall g, t \rightarrow$  per ogni turno giornaliero ci devono essere tanti lavoratori quanti sono richiesti.
- $\sum_{g \in G} \sum_{t \in T} x_{gt}^j \geq 5 \quad \forall j \rightarrow$  ogni lavoratore deve lavorare per almeno 5 turni.

•

$$\left. \begin{array}{l} x_{l,m}^j + x_{l,p}^j + x_{l,s}^j \leq 1 \\ x_{l,p}^j + x_{l,s}^j + x_{ma,m}^j \leq 1 \\ \dots \\ x_{d,m}^j + x_{d,p}^j + x_{d,s}^j \leq 1 \end{array} \right\} \forall j \rightarrow \text{ogni lavoratore deve avere almeno 2 turni di riposo dopo un turno di lavoro.}$$

## 2.7 Locazione di servizi

Abbiamo un insieme  $N = \{1, \dots, n\}$  di potenziali localizzazioni di servizi ed un insieme  $I = \{1, \dots, m\}$  di clienti. Ogni località  $j$  ha una capacità  $u_j$  e costo di attivazione  $c_j$ . Ogni cliente  $i$  ha una richiesta  $b_i$ . Il costo da sostenere per servire il cliente  $i$  dalla località  $j$  è  $h_{ij}$  e ogni cliente è servito da una sola località.

**Problema** Determinare la localizzazione di servizi così da soddisfare ogni cliente.

**Obiettivo** Minimizzare il costo di attivazione e di servizio complessivo.

### Dati

- $u_j \rightarrow$  capacità località  $j$ -esima.
- $c_j \rightarrow$  costo attivazione località  $j$ -esima.
- $b_i \rightarrow$  richiesta cliente  $i$ -esimo.
- $h_{ij} \rightarrow$  costo per servire il cliente  $i$  dalla località  $j$ .

### Variabili

- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se è attivo un servizio nella località } j\text{-esima} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il cliente } i \text{ viene servito dalla località } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

#### Obiettivo

- $\min[\sum_{j \in N} \sum_{i \in I} h_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in N} c_j y_j] \rightarrow$  minimizzare il costo di attivazione di servizio tra i vari siti e clienti.

#### Vincoli

- $\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \rightarrow$  ogni cliente  $i$  è servito da una sola località  $j$ .
- $\sum_{i \in I} x_{ij} b_i \leq u_j \quad \forall j \in N \rightarrow$  ogni località  $j$  attiva deve soddisfare la domanda  $b_i$  del cliente  $i$  associato.
- $x_{ij} \leq y_j \quad \forall i \in I, j \in N$
- $x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$
- $y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j$

Gli ultimi 3 sono vincoli opzionali (ma non troppo). Il simplesso risolve il modello nel continuo, da cui tira poi fuori la soluzione intera.

## 2.8 Bin packing

Ci sono  $n$  oggetti, ciascuno con ingombro  $w_j$ . Sono dati dei contenitori di capacità  $b$ .

**Problema** Assegnare gli oggetti ai contenitori rispettando le capacità.

**Obiettivo** Minimizzare il numero di contenitori usati.

#### Dati

- $w_j \rightarrow$  ingombro oggetto  $j$ -esimo.
- $b$  capacità contenitori.

#### Variabili

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } i\text{-esimo accetta l'oggetto } j\text{-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se uso il contenitore } i\text{-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

#### Obiettivo

- $\min \sum_{i=1}^n y_i \rightarrow$  minimizzare il numero di contenitori usati.

#### Vincoli

- $\sum_{j=1}^n x_{ij} w_j \leq b y_i \quad \forall i \rightarrow$  tutti gli oggetti contenuti in ogni contenitore  $i$ -esimo non devono superare la capacità  $b$ .
- $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \rightarrow$  ogni oggetto può essere messo in un unico contenitore.
- $x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$
- $y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i$

## 2.9 Problema di assegnamento

Ci sono  $m$  macchine identiche e  $n$  lavorazioni. Ogni lavorazione  $j$  richiede di essere processata da una qualsiasi delle  $m$  macchine per una durata ininterrotta  $p_j$ . Ogni macchina processa una sola lavorazione alla volta.

**Problema** Come assegnare le lavorazioni alle macchine.

**Obiettivo** Minimizzare l'istante di completamento della macchina che termina per ultima.

#### Dati

- $p_j \rightarrow$  durata della lavorazione  $j$ -esima.

#### Variabili

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la macchina } i\text{-esima effettua la lavorazione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $T \geq 0 \rightarrow$  istante di completamento della macchina che termina per ultima.

### Obiettivo

- $\min \max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} p_j \rightarrow$  minimizzare l'istante di completamento della macchina che termina per ultima.

### Vincoli

- $\sum_{j=1}^m x_{ij} p_j \leq T \quad \forall i \rightarrow$  ogni macchina termina le lavorazioni al più in contemporanea con la macchina che termina per ultima.
- $\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \rightarrow$  ogni lavorazione *i-esima* è effettuata da una e una sola macchina.
- $x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$

## 2.10 Problema di sequenziamento monoprocesore

C'è una macchina e ci sono  $n$  lavorazioni. Ogni lavorazione  $j$  ha un tempo di processamento  $p_j$ , è disponibile a partire dall'istante  $r_j$  e deve essere completata entro la data  $d_j$ . La macchina può processare una sola lavorazione alla volta.

**Problema** In quale ordine processare le lavorazioni sulla macchina.

**Obiettivo** Minimizzare la somma degli istanti di completamento di tutte le lavorazioni.

### Dati

- $p_j \rightarrow$  tempo di processamento della lavorazione *j-esima*.
- $r_j \rightarrow$  istante minimo di inizio della lavorazione *j-esima*.
- $d_j \rightarrow$  istante massimo di completamento della lavorazione *j-esima*.

### Variabili

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se la lavorazione } i \text{ precede la lavorazione } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $c_j =$  istante di completamento del lavoro *j-esimo*.

### Obiettivo

- $\min \sum_{j=1}^n c_j \rightarrow$  minimizzare la somma degli istanti di completamento delle

lavorazioni.

### Vincoli

- $c_j \leq c_k - p_k + M(1 - x_{jk}) \quad 1 \leq j < k \leq n \quad M \in R \rightarrow$  se  $j$  precede  $k$ , il suo istante di completamento al più coincide con quello di inizio di  $k$ .
- $c_k \leq c_j - p_j + Mx_{jk} \quad 1 \leq j < k \leq n \quad M \in R \rightarrow$  vincolo ridondante, poichè tiene conto del caso opposto ( $k$  precede  $j$ ).
- $0 \leq p_j + r_j \leq c_j \leq d_j \quad \forall j = 1, \dots, n \rightarrow$  l'istante minimo di fine processo  $j$  ( $p_j + r_j$ ) al più coincide con il suo istante di completamento effettivo, ed al più coincide con l'istante massimo di completamento.
- $x_{jk} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq j < k \leq n$

## 2.11 Problema di pianificazione della produzione

Determiniamo un piano di produzione di un prodotto specifico nell'arco di  $n$  periodi. Per ciascun periodo conosciamo la domanda da soddisfare  $d_t$ , il costo di produzione  $c_t$  e il costo di magazzino  $i_t$  per unità di prodotto. La capacità massima di produzione è  $c$ .

**Problema** Pianificare la produzione così da soddisfare la domanda per ogni periodo.

**Obiettivo** minimizzare i costi.

### Dati

- $d_t \rightarrow$  domanda del periodo  $t$ -esimo.
- $c_t \rightarrow$  costo di produzione di un'unità nel periodo  $t$ -esimo.
- $i_t \rightarrow$  costo di magazzino di un'unità nel periodo  $t$ -esimo.
- $c \rightarrow$  capacità massima di produzione.

### Variabili

- $x_t =$  unità del prodotto nel periodo  $t$ -esimo.
- $m_t =$  unità del prodotto immagazzinate al termine del periodo  $t$ -esimo

### Obiettivo

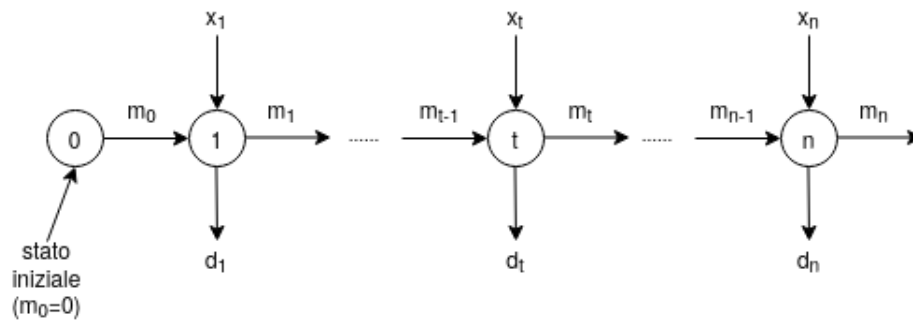
- $\min \sum_{t=1}^n c_t x_t + \sum_{t=1}^n i_t m_t \rightarrow$  minimizzare il costo di produzione e di magazzino.

### Vincoli

- $m_{t-1} + x_t = d_t + m_t \quad t = 1, \dots, n \rightarrow$  le unità immagazzinate dal periodo precedente insieme alle unità prodotte nel periodo  $t$  attuale devono coincidere con la domanda nel periodo  $t$  sommati ai prodotti rimanenti immagazzinati.
- $x_t \leq c \quad t = 1, \dots, n \rightarrow$  le unità prodotte non possono superare la capacità produttiva.

Questo problema è rappresentabile tramite un **modello di flusso**:

Figure 1: Modello di flusso



A ogni periodo la produzione deve soddisfare la domanda (e non superare la capacità) e le unità rimaste vanno in magazzino.

#### 2.11.1 Variante lotto minimo

Ogni periodo il lotto minimo è pari a  $L$ .

**Variabili**  $y_t = \begin{cases} 1 & \text{se produco un lotto al periodo } t\text{-esimo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

### Vincoli

- $x_t \geq L y_t \quad t = 1, \dots, n$
- $x_t \leq c y_t \quad t = 1, \dots, n$



### 2.11.2 Variante produzione con costi fissi

Se in un periodo è stata prodotta almeno una unità di prodotto si aggiunge un costo fisso  $k$ .

**Obiettivo**  $\min \sum_{t=1}^n c_t x_t + \sum_{t=1}^n i_t m_t + \sum_{t=1}^n k y_c \rightarrow$  aggiungo il costo fisso nel caso in cui produco qualcosa.

### 2.11.3 Variante multiprodotto

Possono essere fabbricati più prodotti durante gli  $n$  periodi.

#### Variabili

- $x_t^j \rightarrow$  unità di prodotto  $j$  fabbricate nel periodo  $t$ .
- $m_t^j \rightarrow$  unità di prodotto  $j$  immagazzinate nel periodo  $t$ .

**Obiettivo**  $\min \sum_j (\sum_{t=1}^n c_t^j x_t^j + \sum_{t=1}^n i_t^j m_t^j + \sum_{t=1}^n k y_t^j)$

## 2.12 Set Covering

È dato un insieme  $M = \{1, 2, \dots, m\}$  ed una famiglia di  $n$  suoi sottoinsiemi  $S_j \subseteq M$ . Ogni sottoinsieme ha un costo  $c_j$

**Problema** Trovare un insieme  $T \subseteq N = \{1, \dots, n\}$  tale che l'unione degli  $S_j$ , con  $j \in T$  sia uguale a  $M$ .

**Obiettivo** Minimizzare i costi dei sottoinsiemi scelti.

#### Dati

- $M \rightarrow$  insieme di partenza.
- $S_j \rightarrow$  sottoinsieme di  $M$ .
- $c_j \rightarrow$  costo del sottoinsieme  $j$ -esimo.

#### Variabili

- $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se scelgo il sottoinsieme } j\text{-esimo } S_j. \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

### Obiettivo

- $\min \sum_{j \in N} c_j y_j \rightarrow$  minimizzare il costo dei sottoinsiemi scelti per coprire  $M$ .

### Vincoli

- $\bigcup_{j \in T} S_j = M \rightarrow$  l'unione dei sottoinsiemi scelti coincide con  $M$ .  
Tuttavia  $S_j$  è rappresentabile come un vettore di  $m$  elementi:

- $S_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \dots \\ a_{m,j} \end{pmatrix} \rightarrow a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'elemento } i\text{-esimo appartiene al sottoinsieme } S_j \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Inoltre, il sottoinsieme  $S_j$  viene scelto se la rispettiva variabile  $y_j$  è uguale a 1, quindi utilizziamo un vettore di  $n$  elementi, costituito da  $y_j$ .

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Ora rappresentiamo anche  $a_{i,j}$  sotto forma matriciale:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Se effettuiamo il prodotto matriciale tra  $A$  e  $\underline{Y}$  otteniamo un sistema, in cui ogni riga rappresenta quante volte il valore  $i \in M$  compare tra tutti i sottoinsiemi scelti.

$$A\underline{Y} \geq 1 \rightarrow \begin{cases} a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \dots + a_{1,n}y_n \geq 1 \\ \dots \\ a_{m,1}y_1 + a_{m,2}y_2 + \dots + a_{m,n}y_n \geq 1 \end{cases}$$

- $y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \rightarrow \underline{Y} \in \{0, 1\}^n$

## 2.13 Modellare vincoli logici utilizzando variabili binarie

In primo luogo associamo una variabile binaria a ciascuna variabile logica. Ad esempio alla variabile logica  $X$  = "attivare l'impianto di produzione" associamo la variabile bi-

binaria  $x$  nel seguente modo:  $x = \begin{cases} 1 & \text{"attivazione dell'impianto di produzione"} \\ 0 & \text{"non attivazione dell'impianto di produzione"} \end{cases}$

Rappresentiamo	con
$\neg X$	$(1 - x)$
$X \vee Y$	$(x + y)$
$X \rightarrow Y$	$x \leq y$
$X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_n \rightarrow Y$	$\sum_1^n x_i \leq ny$
$X \rightarrow Y_1 \vee Y_2 \vee \dots \vee Y_n$	$x \leq \sum_1^n y_i$
$X \rightarrow Y_1 \wedge Y_2 \wedge \dots \wedge Y_n$	$nx \leq \sum_1^n y_i$

Esempi

$X \rightarrow (\neg Y \vee \neg Z)$	diviene	$x \leq (1 - y) + (1 - z)$	cioè	$x + y + z \leq 2$
$(X \vee Y) \rightarrow (\neg Z)$	diviene	$x + y \leq 2(1 - z)$		
$(X \vee Y) \wedge (\neg Z \vee Y)$	diviene	$x + y \geq 1, (1 - z) + y \geq 1$		
Almeno due fra $X, Y, Z$	diviene	$x + y + z \geq 2$		
Al più $k$ fra $X_1, X_2, \dots, X_n$	diviene	$\sum_1^n x_i \leq k$		

### 3 Parte formale della ricerca operativa

#### 3.1 Tecnica di soluzione lineare

Prendiamo un esempio che abbiamo già visto, il problema delle vernici.

##### Obiettivo

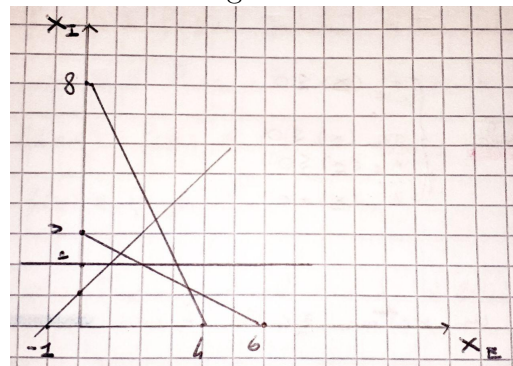
- $\max 3x_E + 2x_I \leq 6$

##### Vincoli

- $x_E + 2x_I \leq 6$
- $2x_E + x_I \leq 8$
- $x_I - x_E \leq 1$
- $x_I \leq 2$
- $x_E, x_I \geq 0$

1. Disegniamo lo **spazio delle soluzioni** di  $x_E$  e  $x_I$  che soddisfano tutti i vincoli.
  - (a) Consideriamo nel primo vincolo solamente l'uguaglianza  $x_E + 2x_I = b$
  - (b) Inseriamo i punti sul piano in base alle soluzioni del vincolo per una delle 2 variabili fissate.
    - i.  $x_E = 0 \rightarrow x_I = 3$
    - ii.  $x_I = 0 \rightarrow x_E = 6$
  - (c) Traccia la retta tra i 2 punti.
  - (d) Ripeti per ogni vincolo.

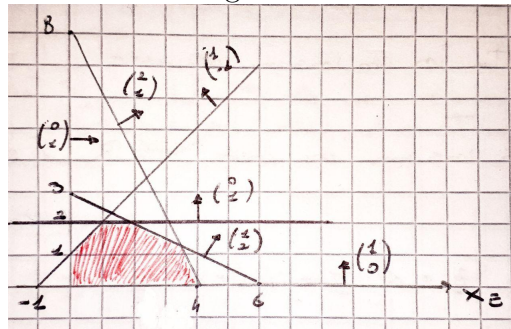
Figure 2:



2. Ora cerchiamo di evidenziare la **regione ammissibile**

- (a) Rappresentiamo i vettori **gradienti** per ogni vincolo, ciascuno rappresentato dai coefficienti del vincolo.  $x_E + 2x_I \leq 6 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- (b) Nel caso di vincoli con il  $\geq$  il **gradiente** indica la parte dei punti soddisfatta dal vincolo, altrimenti l'opposto.
- (c) L'intersezione tra tutti gli spazi da la regione ammissibile

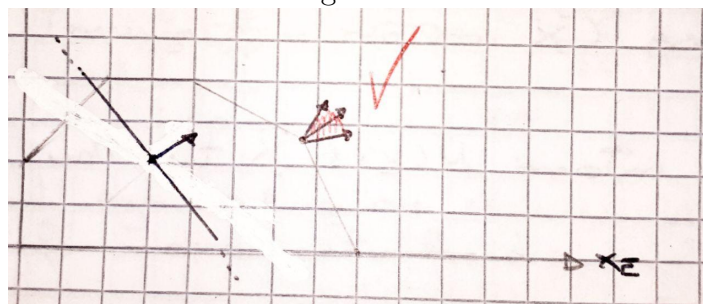
Figure 3:



3. Ora troviamo il punto che dà la **soluzione ottima**.

- (a) Si genera un punto generico nella regione ammissibile.
- (b) Sul punto si disegna il gradiente della funzione obiettivo.
- (c) Poi la retta ortogonale al gradiente (**retta di Isocosto**) in cui tutti i punti hanno lo stesso costo.
- (d) Il gradiente indica la direzione e il verso da seguire per aumentare il valore della funzione, quindi, dovendo massimizzare la funzione, spostiamo la retta in quella direzione fino a che la retta rimane nella regione ammissibile.
- (e) Per verificarlo, dobbiamo essere sicuri che il **gradiente** della funzione obiettivo sia nel cono tra il gradiente del primo vincolo incontrato e del secondo.

Figure 4:



## 3.2 Tecnica di programmazione matematica

Formalizziamolo ora come **problema di programmazione matematica**:

Problema  $(f, X)$  con

- $f : R^n \rightarrow R$  funzione obiettivo.
- $X \subseteq R^n$  regione ammissibile

Quindi un problema per noi diventa  $\min f(\underline{x}) \quad \underline{x} \in X$ .

$$\text{Con } \underline{x} \text{ definita: } \underline{x} \in X \iff x \text{ soddisfa } \begin{cases} g_1(\underline{x}) \leq 0 \\ \dots \\ g_m(\underline{x}) \leq 0 \\ h_1(\underline{x}) = 0 \\ \dots \\ h_k(\underline{x}) = 0 \end{cases}$$

### 3.2.1 Convessità

Dati  $\underline{x}$  e  $\underline{y} \in R^n$  e lo scalare  $\lambda \in [0, 1]$ , un vettore  $\underline{z} \in R^n$  è una combinazione convessa di  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  se:

$$\underline{z} = \lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{y}$$

Un insieme  $S \subseteq R^n$  è convesso se ogni combinazione convessa di una qualunque coppia  $\underline{x}, \underline{y} \in S$  appartiene ad  $S$  stesso. L'intersezione di un qualunque numero di insiemi convessi è un insieme convesso.