Ricerca operativa

Mario Petruccelli
Università degli studi di Milano

A.A. 2018/2019

Sommario

1 Introduzione

Ricerca operativa: disciplina che affronta la risoluzione di problemi decisionali complessi tramite modelli matematici e algoritmi. Si parte da un **sistema organizzato** e lo si formalizza in un **modello matematico** per poi risolverlo tramite **algoritmi**.

1.1 Tassonomia modelli

- **Descrittivi** → Modelli che cercano di descrivere o simulare sistemi complessi *(e.g. modellini, plastici, ...)*
- **Predittivi** → Modelli che cercano di predire dei dati *(e.g. andamento mercati finanziari, previsioni, ...)*
- **Prescrittivi** → Modelli che trovano la soluzione ottimale ad un problema *(sono quelli che studieremo in questo corso).*

  La descrizione del problema avverrà attraverso **vincoli**, **obiettivi**.

Esempio di problemi decisionali

- Finanza (investimenti)
- Produzione (dimensionamento, organizzazione, ...)
- Logistica (gestione scorte, quanta merce, ...)
- Gestione (pianificazione, turnistica personale, ...)
- Servizi (rotte, ...)

NB *Lo stesso modello può servire per risolvere problemi diversi.*

Set covering Problema per la gestione di un territorio. I problemi dei sismografi e dei ripetitori sono diversi ma si ragiona allo stesso modo.

1.2 Programmazione matematica

La programmazione matematica (intesa come *pianificazione* delle azioni necessarie per individuare la soluzione ottima) è ciò che rappresenta il processo risolutivo nella ricerca operativa:

- Analisi del problema e scrittura di un modello matematico.
- Definizione e applicazione di un metodo di soluzione.

In particolar modo, la programmazione matematica si occupa di ottimizzare una funzione di più variabili, spesso soggette a dei vincoli. A seconda del tipo di modello abbiamo:

- Programmazione lineare continua.
- Programmazione lineare intera.
- Programmazione booleana.

2 Esempi di problemi

2.1 Problema dello zaino

Ci sono n oggetti di valore p_j e ingombro w_j per $j = 1 \dots n$ ed è data la capacità massima b di un contenitore.

Problema Quali oggetti inserire nel contenitore senza superare capacità.

Obiettivo Massimizzare il valore degli oggetti. Si tratta di un problema di **ottimizzazione** e va formalizzato in modello matematico. Ci sono 4 componenti fondamentali.

Dati I dati sono informazioni conosciute a priori, in questo caso sono:

- $p_j \rightarrow$ valore dell'oggetto j.
- $w_j \rightarrow$ ingombro dell'oggetto j.
- $b \rightarrow$ capacità massima del contenitore.

Variabili Le variabili sono elementi che rappresentano una decisione.

- $x_j = \begin{cases} 1 \text{ se il j-esimo oggetto viene inserito} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

Obiettivo L'obiettivo è la funzione che rappresenta il risultato da ottenere.

- $max \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \rightarrow$ *massimizzare il valore*

Vincoli I vincoli sono le limitazioni che abbiamo sui dati.

- $\sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b \rightarrow$ la somma degli ingombri degli oggetti presi non può superare la capacità del contenitore
- $x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1 \dots n$

2.2 Problema di trasporto e localizzazione di impianti

Ci sono n siti candidati ad ospitare unità produttive, ciascuno con capacità massima a_i con $i = 1 \dots n$. Vi sono m magazzini, ognuno con una domanda da soddisfare b_j con $j = 1 \dots m$. Indichiamo con c_{ij} il costo di trasporto di una unità di prodotto dal sito i al magazzino j. L'attivazione di una unità produttiva nel sito i ha un costo fisso f_i.

Problema Dove aprire le unità produttive e come trasportare il prodotto dalle unità produttive aperte ai magazini in modo da soddisfare la domanda.

Obiettivo Minimizzare i costi di apertura e trasporto.

Dati

- $a_i \rightarrow$ capacità di produzione del sito i
- $b_j \rightarrow$ domanda del magazzino j
- $c_{ij} \rightarrow$ costo del trasporto di un'unità dal sito i al magazzino j.
- $f_i \rightarrow$ costo di attivazione unità nel sito i.

Variabili

- $y_i = \begin{cases} 1 \text{ se il sito } i \text{ ospita un'unità produttiva} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$
- x_{ij} = numero di unità trasportata dal sito i al magazzino j.

Obiettivo

- $min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i y_i \rightarrow$ minimizzare il costo di attivazione di un unità nei vari siti e il costo dei trasporti delle unità.

Vincoli

- $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i y_i \quad i = 1 \dots n \rightarrow$ le unità trasportate da un sito i non possono superare la capacità a_i di quel sito i.
- $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j \quad j = 1 \dots m \rightarrow$ Le unità inviate ad un magazzino j dai vari siti deve soddisfare la domanda di quel magazzino.
- $x_{ij} \geq 0 \quad i = 1 \dots n \quad j = 1 \dots m$
- $y_i \in \{0, 1\} \quad i = 1 \dots n$

2.3 Problema assegnamento

Ci sono n lavoratori e n attività. Indichiamo con t_{ij} il tempo impiegato dal lavoratore i per svolgere l'attività j.

Problema Assegnare a ciascun lavoratore una sola attività, così che tutte le attività siano svolte.

Obiettivo Minimizzare il tempo richiesto a svolgere l'attività j.

Dati

- $t_{ij} \rightarrow$ tempo impiegato dal lavoratore i per svolgere l'attività j.

Variabili

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se il lavoratore } i \text{ svolge l'attività } j \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$

Obiettivo

- $min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_{ij} \rightarrow$ minimizzare il tempo speso per svolgere tutte le attività dei vari lavoratori.

Vincoli

- $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \rightarrow$ a ogni lavoratore è associata una sola attività.
- $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \rightarrow$ a ogni attività è associata nn solo lavoratore.
- $x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j$

2.4 Mix Produttivo

Si hanno m risorse produttive con disponibilità b_i. Si possono produrre n prodotti diversi. Per produrre una unità di un prodotto *j-esimo* si utilizzano a_{ij} unità della risorsa *i-esima*. Ciascun prodotto ha un profitto unitario c_j.

Dati

- $b_i \rightarrow$ disponibilità risorsa *i-esima*.
- $a_{ij} \rightarrow$ unità della risorsa *i-esima* usate per produrre un prodotto *j-esimo*.
- $c_j \rightarrow$ profitto di un unità del prodotto j.

Variabili

- x_j = unità prodotte del prodotto *j-esimo*.

Obiettivo

- $max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow$ massimizzare il profitto tra i vari prodotti.

Vincoli

- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \forall i \rightarrow$ le risorse usate nella produzione non possono superare la disponibilità di ciascuna risorsa.

- $x_j \geq 0 \quad \forall j$

2.4.1 Vernici

L'azienda produce due tipi di vernici, una vernice per interni (I) e una venrice per esterni (E), usando due materie prime indicate con A e B. La disponibilità al giorno di materia prima A è pari a 6 ton, mentre quella di materia prima B è di 8 ton. La quantità di A e B consumata per produrre una ton di vernice E ed I è riportata nella seguente tabella.

		Vernici	
		E	I
Materie prime	A	1	2
	B	2	1

Dati

- $3k\$$ per E.

- $2k\$$ per I.

- Disponibilità A 6 tonnellate.

- Disponibilità B 8 tonnellate.

Variabili

- x_E Tonnellate vernice E.

- x_I Tonnellate vernice I.

Obiettivo

Vincoli

$$\max 3x_E + 2x_I$$
$$1x_E + 2x_I \leq 6$$
$$2x_E + 1x_I \leq 8$$
$$x_I \leq x_E + 1$$
$$x_I \leq 2$$
$$x_E, x_I \geq 0$$

Esempio problema dieta Quali ingredienti e in che quantità miscelare per minimizzare il costo del mangime.

Dati Ogni dose deve contenere *almeno* 2hg di proteine, 4hg di carboidrati, 3hg di grasso.

Variabili x_j = kg ingredienti di j.

Obiettivo

Ingrediente	Proteine	Carboidrati	Grasso	Costo $/kg
1	1	4	3	3
2	3	4	2	6
3	2	3	3	5
4	2	2	4	6

Vincoli

$$\min 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4$$
$$1x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 2 \text{ proteine}$$
$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 \geq 4 \text{ carboidrati}$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \geq 3 \text{ grasso}$$
$$x_j \geq 0$$