

LESSON-3

त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric function)

Relation between Degree and Radian (रेडियन तथा डिग्री में सम्बन्ध) :

$$2\pi \text{ रेडियन (rd)} = 360^\circ$$

$$\pi = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\pi \text{ rd} = 180^\circ$$

$$\boxed{1 \text{ rd} = \frac{180^\circ}{\pi}}$$

$$\text{Where } \pi = \frac{22}{7}$$

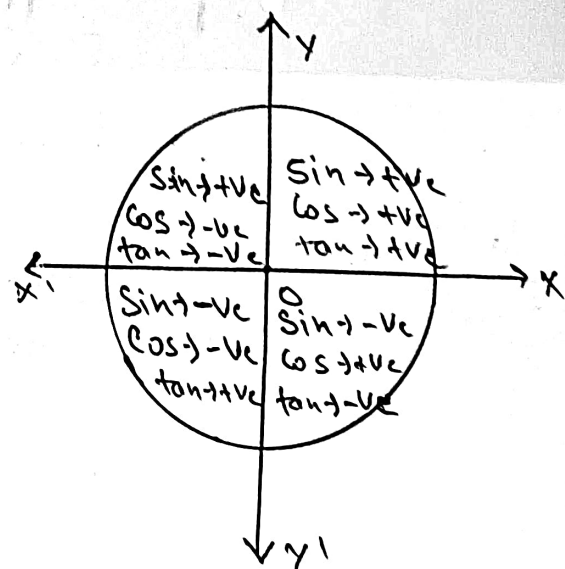
Ex-1 5rd change into Degree.

$$\begin{aligned} 5 \text{ rd} &= \left(5 \times \frac{180^\circ}{\pi} \right) \\ &= \frac{900}{\frac{22}{7}} = \left(\frac{3150}{11} \right)^\circ \text{ Ans} \end{aligned}$$

Measurement of some angles in Radians and Degrees. (कुछ कोणों का रेडियन तथा डिग्री में माप) :

In Degree	In Radian
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
90°	$\pi/2$
120°	$2\pi/3$

135°	3π/4	<u>प्रथम पाद</u> →
150°	5π/6	Sin → +ve Cos → +ve tan → +ve
180°	π	
210°	7π/6	<u>द्वितीय पाद</u> →
225°	5π/4	Sin → -ve tan → -ve Cos → -ve
240°	4π/3	
270°	3π/2	<u>तृतीय पाद</u> →
300°	5π/3	Sin → -ve Cos → +ve tan → -ve
315°	7π/4	
330°	11π/6	
360°	2π	



<u>चतुर्थ पाद</u> →
Sin → -ve Cos → +ve tan → -ve

Note → (i) $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ and $\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ (quadrant)

I II III IV

trigonometry functions transform into each other in

Sin ↔ Cos
tan ↔ cot
Sec ↔ cosec

Ex → $\sin 120^\circ = \sin(90 + 30) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $(\pi - x)$, $(\pi + x)$, $(2\pi + x)$

trigonometry functions are No change.

$\sin(\pi - x) = \sin x$
 $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$

Trigonometric function of Sum and Difference of two angles :

Let two angle is A and B.

- (1) $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$
- (2) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
- (3) $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$
- (4) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
- (5) $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
- (6) $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$
- (7) $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$
- (8) $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

Trigonometric functions of double and triple angles :

- (1) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$
- (2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$
 $= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$
- (3) $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$
- (4) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$
- (5) $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$
- (6) $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

- (7) $\sin C + \sin D = 2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$
- (8) $\sin C - \sin D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$
- (9) $\cos C + \cos D = 2 \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$
- (10) $\cos C - \cos D = -2 \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \sin\left(\frac{C-D}{2}\right)$
- (11) $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- (12) $2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- (13) $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- (14) $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$
- (15) $\sin(A+B) \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$
- (16) $\cos(A+B) \cos(A-B) = \cos^2 A - \cos^2 B$

त्रिकोणमितीय समीकरण (Trigonometry equation) :

एक चर राशियों त्रिकोणमितीय फलनों वाले समीकरण को त्रिकोणमितीय समीकरण कहते हैं।

Ex) $\tan x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $\cos x = \sin 2x$

त्रिकोणमितीय समीकरण के हल (Solution of Trigonometry function) :

त्रिकोणमितीय समीकरण के दो हल होते हैं।

- (i) मुख्य हल (Principal Solution) किसी त्रिकोणमितीय समीकरण का हल $0-2\pi$ के अन्तर्गत प्राप्त किया जाए, त्रिकोणमितीय समीकरण का मुख्य हल कहलाता है।

(i) व्यापक हल (General Solution), पूर्णक n से युक्त व्यंजक जो किसी त्रिकोण मीतीय समीकरण के सभी हल व्यक्त करता हो उसे व्यापक हल कहते हैं।

Note → Second Quadrant को $180 - x$, III Quadrant को $180 + x$ तथा IV चतुर्थांश को $360 - x$ का प्रयोग करते हैं।

जहाँ $x \in \text{I}^{\text{st}}$ चतुर्थांश

व्यापक हल के लिए (For the General Solution),

- (i) यदि $\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$; जहाँ $n \in \mathbb{Z}$
- (ii) यदि $\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; जहाँ $n \in \mathbb{Z}$
- (iii) यदि $\tan x = 0 \Rightarrow x = (n\pi)$; जहाँ $n \in \mathbb{Z}$

Ex- यदि $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए,

$$\sin x = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

(ii) $\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ का मुख्य हल ज्ञात कीजिए,

$$\sin x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$x \in \text{III}, x \in \text{IV}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$