अध्याय → 2

संबंध और फलन (Relation and function)

<u>क्रमित युग्म</u> → दो अवयवों का वह युग्म जो एक निश्चित क्रम में लिखा गया हो क्रमित युग्म कहलाता है।
क्रमित युग्मों में अवयवों का महत्वपूर्ण योगदान होता है अर्थात् अवयवों का क्रम बदलने पर क्रमित युग्म बदल जाता है।

$$\{(a,b),\ a \in R \text{ and } b \in R\}$$

<u>दो क्रमित युग्मों की समानता</u> → दो क्रमित युग्में समान होते हैं यदि और केवल यदि उनके प्रथम अवयव समान एवं द्वितीय अवयव भी समान हैं।
अर्थात् $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ and $b = d$

<u>दो समुच्चयों का कार्तीय गुणनफल</u> → दो अरिक्त A व B का कार्तीय गुणन (Cross Product) $A \times B$ उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय है जिनको प्रथम घटक A से तथा द्वितीय घटक B से लेकर बनाया जा सकता है।

$$A \times B = \{(a,b),\ a \in A \ \&\ b \in B\}$$

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$$
$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$$
$$B \times A = \{(1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (b,2), (3,b)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

<u>Note</u> → (i) यदि इन दोनों समुच्चयों में से कोई एक समुच्चय रिक्त समुच्चय हो तो इनका कार्तीय गुणन रिक्त समुच्चय होगा।

(ii) यदि $A \times B$ दिया है तो $B \times A$ इनके क्रमित युग्मों के अवयवों को बदल देते हैं।

(iii) यदि $A \times B$ दिया है तो $A \times B$ में उपस्थित सभी क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों का समुच्चय A का द्वितीय अवयवों का समुच्चय B के बराबर होता है।

$$A \times B = \{(3,2), (3,4), (5,2), (5,4)\}$$ हो तो समुच्चय A व B ज्ञात कीजिए।

$$A = \{3, 5\}$$
$$B = \{2, 4\}$$

(iv) यदि समुच्चय A में अवयवों की संख्या M तथा समुच्चय B में अवयवों की N हो, तो

$$n(A) = M$$
$$n(B) = N$$

$$\boxed{n(A \times B) = n(A) \times n(B)}$$

(v) यदि A और B, n अवयव उभयनिष्ठ है, तो $A \times B$ और $B \times A$ में n^2 अवयवों उभयनिष्ठ होंगे।

(vi) यदि A में m अवयव और B में n अवयव हो तो

$$\boxed{A \times B = 2^{mn}}$$

(vii) यदि तीन समुच्चय A, B, C हो, तो उनका कार्तीय गुणनफल

$$\boxed{A \times B \times C = A \times (B \times C)}$$

संबंध (Relation) → A व B दो अरिक्त समुच्चय है तो A×B का कोई उपसमुच्चय A से B में एक संबंध R कहलाता है
अर्थात $R \subseteq A \times B$

संबंध का निरूपण :

(i) **रोस्टर विधि** → इस विधि में सम्बन्ध को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में लिखा जाता है

Ex → यदि $A = \{2, 3\}$; $B = \{4, 5, 6, 8\}$ और R इस प्रकार परिभाषित a से b विभाज्य है $a \in A$ तथा $b \in B$

$A = \{2, 3\}$

$B = \{4, 5, 6, 8\}$

$R = \{(a, b) : a \in A$ and $b \in B$, a से b विभाज्य है$\}$

$A \times B = \{2, 3\} \times \{4, 5, 6, 8\}$

$= \{(2,4), (2,5), (2,6), (2,8), (3,4), (3,5), (3,6), (3,8)\}$

$R = \{(2,4), (2,6), (2,8), (3,6)\}$

(ii) **समुच्चय निर्माण विधि** →

$R = \{(x, y) : x \in A$ and $y \in B$ and $x = Ry\}$

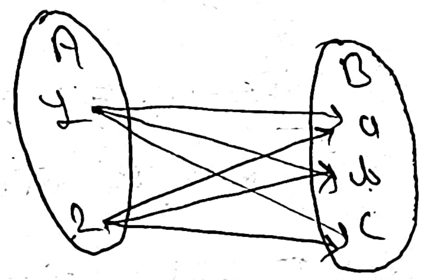
Ex → यदि समुच्चय $A = 1, 2, 3, 4 \ldots 20$ और R (A×A) का उपसमुच्चय है। x, y का 4 गुना जहाँ $x, y \in A$

$R = \{(x, y) : x, y \in A$ and $x = 4y\}$

तीर आरेख विधि → इस विधि में समुच्चय A के अवयवों को समुच्चय B के अवयवों से सम्बन्ध तीर द्वारा दर्शाते है

Ex → $A = \{1, 2\}$ $B = \{a, b, c\}$

$R = \{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c)\}$



संबंध का प्रांत, परिसर, सह प्रान्त → माना R समुच्चय A से B में एक सम्बन्ध है,

तब $R \subseteq A \times B$

प्रान्त (Domain) → सम्बन्ध R को व्यक्त करने वाले सभी संभावित क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों का समुच्चय संबंध R का प्रान्त कहलाता है

$$\text{Domain}(R) = \{x : x \in A \text{ and } (x, y) \in R\}$$

परिसर (Range) संबंध R को व्यक्त करने वाले सभी संभावित क्रमित युग्मों के द्वितीय अवयवों का समुच्चय संबंध R का प्रान्त कहलाता है

$$\text{Range}(R) = \{y : y \in B \text{ and } (x, y) \in R\}$$

सह प्रान्त (Co-Domain) → सम्पूर्ण समुच्चय B सम्बन्ध R का सहप्रान्त कहलाता है,

परिसर ⊆ सहप्रान्त

$$\text{Domain}(R) \subseteq A$$

$$\text{Domain}(R) \subseteq B$$