

प्रायिकता (Probability)परिणाम और प्रतिदर्श समष्टि (Outcomes and Sample Space) :

किसी प्राकृतिक परीक्षण के किसी संभावित नतीजे को परिणाम कहते हैं।

किसी परीक्षण के सभी संभव परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं। इसे  $S$  से प्रदर्शित करते हैं।

Ex-1) एक पासे को उछालने पर परिणाम 1, 2, 3, 4, 5 और 6 में से कोई एक संख्या आता है।

प्रतिदर्श समष्टि  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  प्रतिदर्श बिन्दु

Note (i) पासे को उछालने पर संभव परिणामों आने की संख्या  $= n(S) = 6^n$   
जहाँ  $n$  पासे को कितनी बार उछाला गया है।

(ii) सिक्के को उछालने पर जो संभव परिणाम आने की संख्या  
 $= n(S) = 2^n$

घटना (Events) : प्रतिदर्श समष्टि  $S$  के प्रत्येक उपसमुच्चय को घटना कहते हैं। इसे  $E$  से व्यक्त करते हैं।

Ex-2) एक पासे को एक बार फेंकने पर प्राप्त संख्या विषम आने की  
 $S$  : एक पासे को एक बार फेंकने पर

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$E$  : पासे पर विषम संख्या आने की घटना

$$E = \{1, 3, 5\}$$

घटनाओं के प्रकार (Types of Events) :

(i) निश्चित एवं असंभव घटना (Definite and uncertain) :-

प्रतिदश सम्पत्ति  $S$ ,  $\phi$  दोनो प्रतिदश सम्पत्ति के उपसमुच्चय हैं,  
 $S$  को निश्चित घटना तथा  $\phi$  असंभव घटना है,  
 Ex-1 एक पाश को फेंकने पर प्रतिदश सम्पत्ति

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$E$ : एक पाश पर संख्या न प्राप्त होने की प्रायिकता

अतः  $E = \phi$

$F$ : एक पाश पर सम या विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

अतः  $E$  एक असंभव घटना है तथा  $F$  एक निश्चित घटना है।

(ii) सरल या प्रारम्भिक घटना (Simple Event or initial Event) :-

यदि किसी घटना  $E$  में केवल एक ही प्रतिदश बिंदु हो, तो घटना  $E$  को सरल या प्रारम्भिक घटना कहते हैं।

Ex-1 एक पाश को एक बार उछालने पर

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$E$ : सम अथवा विषम संख्या प्राप्त होने की

$$E = \{2, 4, 6\}$$

(iii) मिश्र घटना (Compound Events) किसी घटना में एक से अधिक प्रतिदश बिंदु होते हैं, तो उसे मिश्र घटना कहते हैं।

Ex-1 दो सिक्के को उछालने पर कम से कम एक चित

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$E$ : कम से कम एक चित प्राप्त होने की

$$E = \{HH, HT, TH\}$$

(iv) समसंभावित घटना (Even Probable Event) → यदि किसी घटना के घटित होने की संभावना दूसरे घटना के घटित होने की संभावना के बराबर हो तो दोनों घटनाएँ समसंभावित हैं।

Ex → जब एक सिक्का उछाला जाता है तो चित या पट का आना एक समसंभावित घटना है।

(v) पूरक घटना (Complementary Event) → उत्पन्न घटना A के सापेक्ष एक अन्य घटना A' होती है, जिसे घटना A घटित नहीं होती है, इसे A' से व्यक्त करते हैं।

Ex → एक पाश को एक बार उछालने पर उत्पन्न सम्भवी  
 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A = पाश पर एक संख्या आने की घटना

A =  $\{2, 4, 6\}$

A' = पाश पर विषम संख्या आने की

A' =  $\{1, 3, 5\}$

$$A' = S - A$$

(vi) परस्पर अपवर्जी या संयुक्त घटना → दो या दो से अधिक घटनाएँ परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं यदि किसी एक के घटित होने पर दूसरी घटनाएँ घटित न हों,

माना दो घटनाएँ A व B उत्पन्न सम्भवी S के दो उपसमुच्चय हैं, यदि  $A \cap B = \emptyset$  तो A तथा B परस्पर अपवर्जी घटना हैं।

(vii) निःशेष घटनाएँ → ऐसी घटनाओं का समुच्चय जिसके बाहर कोई घटना घटित नहीं हो, तथा उसमें से एक घटना उत्पन्न प्रयोग में घटित हो, निःशेष घटना कहलाती है।

याद तीन घटनाएँ  $E_1, E_2, E_3$  प्रतिवर्षी शमष्टि के उपसमुच्चय हैं।

परस्पर निःशेष घटना हैं।  $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = S$  होता है। ये तीनों घटनाएँ

Ex 3: एक पासे को एक बार उछालने पर घटना  $E_1: 3$  से छोटी संख्या प्राप्त होने की

$E_2: 3$  से बड़ी संख्या प्राप्त होने की

$E_3: 2$  से बड़ी संख्या प्राप्त होने की

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E_1 = \{1, 2\}$$

$$E_2 = \{4, 5, 6\}$$

$$E_3 = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

$$= \{1, 2\} \cup \{4, 5, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\}$$

$$= \{1, 2, 4, 5, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$E_1 \cup E_2 \cup E_3 = S$$

आपिकता का अक्षिगृहीतीय दृष्टिकोण : माना किसी प्रादृष्टिक (Axiomatic Approach to Probability) परिक्षण का प्रतिवर्षी शमष्टि  $S$  है। आपिकता ( $P$ ) एक वास्तविक फलन है जिसका

घात  $S$  का घात समुच्चय है। और परिसर अन्तराल  $[0, 1]$  है जो निम्नलिखित अक्षिगृहीत्यों को संतुष्ट करता है

किसी घटना  $E$  के लिए  $P$  की आपिकता  $P(S) = 1$  यदि

$E$  और  $F$  परस्पर अपवर्जी घटना हैं तो

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F)$$

घाद  $E$  तथा  $F$  परस्पर अपरती घटना न हो

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Note → (i) घटना  $E$  के घटित होने की प्रायिकता

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

(ii) सभी घटनाओं के घटित होने की प्रायिकताओं का योग 1 होता है।

एक घटना के घटित होने की प्रायिकता → किसी परिक्षण के करने (Probability of an event Occurring) पर किसी घटना के घटित होने की संभावना तकनीकी भाषा में घटना के घटित होने की प्रायिकता कहलाती है।

माना एक प्रतिदर्श समष्टि  $S$  तथा  $E$  प्रतिदर्श  $S$  की कोई घटना हो।  
घटना के घटित होने की प्रायिकता  $P(E)$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

घटना के अनुकूल तथा प्रतिकूल संयोगानुपात

(Favorable and Unfavorable odds of an event)

माना किसी परिक्षण का प्रतिदर्श समष्टि  $S$  तथा  $E$  कोई घटना हो।  
 $E'$  इसकी पूरक घटना हो

(i) घटना  $E$  के अनुकूल संयोगानुपात =  $\frac{n(E)}{n(E')}$

घटना  $E$  के प्रतिकूल संयोगानुपात =  $\frac{n(E')}{n(E)}$

सम संभावित परिणामों की प्रायिकता

(Probability of equally likely outcomes)

माना एक परिक्षण का प्रतिदर्श समष्टि  $S = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

तथा सभी परिणामी समसंभावित हैं  
अर्थात्  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$  के लिए

$$P(\omega_i) = P \text{ (माना)}$$

$$\therefore P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1$$

$$\therefore P + P + P + P = 1$$

$$4P = 1$$

$$P = 1/4$$

माना प्रत्येकी समष्टि  $S$  की कोई घटना  $E$  इस प्रकार है कि

$$n(S) = n$$

$$n(E) = m$$

यदि प्रत्येक परिणाम समसंभावित है तो यह अनुसरित होता है कि

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

Note (i)  $P(E) + P(\bar{E}) = 1$

(ii) यदि  $A \subseteq B$  होता है तो  $P(A) \leq P(B)$  — (i)

(iii)  $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

(iv)  $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$  } — (ii)

(v)  $P(A \cap B) \leq P(A)$   
 $P(A \cap B) \leq P(B)$  } — (iii)

यदि सभी (i), (ii) व (iii) के दोनों प्रसिद्ध सत्य हैं तो  
घटनाएँ पुनः संगत कहलाती हैं