अध्याय → 5

# सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण (Complex Number and Quadratic equation)

## Complex Number (सम्मिश्र संख्याएँ) →

वास्तविक संख्या तथा काल्पनिक संख्याओं के समायोजन या मिलाने से जो नई संख्या प्राप्त होती है, उन्हें सम्मिश्र संख्याएँ कहते हैं।

## संयुग्मी सम्मिश्र संख्याएँ (Conjugate Number) ÷

किसी दिए गए सम्मिश्र संख्या में $i$ के स्थान पर $-i$ कर देने से प्राप्त होता है संख्या संयुग्मी संख्या कहलाती है। इसे $\bar{z}$ से व्यक्त करते हैं।

माना सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ का संयुग्मी सम्मिश्र संख्या

$$\bar{z} = a + (-ib)$$
$$\bar{z} = a - ib$$

## $i$ की घात (Degree of $i$) ÷

$i = \sqrt{-1}$ , $i^2 = -1$ , $i^3 = -i$ , $i^4 = 1$

Notes → (i) यदि $i$ की घात, 4 का गुणज (4 से विभाज्य हो), तो उनका मान 1 होता है।

Ex → $i^{40} = 1$ , $i^{100} = 1$ , $i^{280} = 1$

(ii) यदि ($i$) की घात 4 से विभाज्य न हो, तो उन्हें 4 से भाग देकर 4 × भागफल + शेषफल के रूप में परिवर्तित करते हैं

Ex → $i^{107} = i^{4\times 20+3} = i^{104} \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$

(iii) $i$ की घात (-ve) नहीं होता है। -ve घात को +ve घात में बदल कर हल करते हैं।

$$i^{-m} = \frac{1}{i^m}$$

या

$$\frac{1}{i^{-m}} = i^m$$

Ex→ $i^{-103}$

$$= \frac{1}{i^{103}} = \frac{1}{i^{4\times25+3}} = \frac{1}{i^{100}\times i^3} = \frac{1}{1\times(-i)} = -\frac{1}{i}$$

$$= \frac{-1}{i}\times\frac{i}{i} = \frac{-i}{i^2} = \frac{+i}{+1} = i$$

सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित (Algebra of Complex Number) →

(i) सम्मिश्र संख्याओं का योगफल तथा अन्तर → (Add and Difference of Complex Number)

$$z_1 = a_1 + ib_1$$
$$z_2 = a_2 + ib_2$$
$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + (a_2 + ib_2)$$
$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + ib_1 + ib_2$$
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

इसी प्रकार $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

(ii) गुणन (Multiply) → $z_1 \times z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)$

$$= (a_1 + a_2 + ia_1b_2$$

$= a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i a_2 b_1 + (-1) b_1 b_2$

$= a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) - b_1 b_2$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_1 + a_2 b_1)$

(iii) भागफल (Divide) ÷

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} \times \frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2)^2 - (ib_2)^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 - i a_1 b_2 + i a_2 b_1 - i^2 b_1 b_2}{(a_2)^2 - i^2 b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + i a_2 b_1 - i a_1 b_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i a_2 b_1 - i a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

(iv) गुणात्मक प्रतिलोम (Inverse qualitative) + माना सम्मिश्र z होतो उसका गुणात्मक प्रतिलोम

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

(iv) गुणात्मक प्रतिलोम → माना सम्मिश्र संख्या z हो तो उसका गुणात्मक प्रतिलोम $z^{-1} = \frac{1}{z}$

Ex. $4+4i$ का गुणात्मक प्रतिलोम.

$$z = 4+4i$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{4+4i} = \frac{1}{4+4i} \times \frac{4-4i}{4-4i} = \frac{4-4i}{4^2-(4i)^2}$$

$$= \frac{4-4i}{16-16\times(-1)} = \frac{4-4i}{16+16} = \frac{4-4i}{32} = \frac{4}{32} - \frac{4i}{32}$$

आर्गण्ड तल (Argand Plane) →

सम्मिश्र संख्याओं का मॉपांक तथा कोणांक ज्ञात करना :-

माना एक सम्मिश्र संख्या $z = a+ib$ हो तो

(Modulus) मापांक $(r) = \sqrt{(RP)^2 + (IP)^2}$

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

कोणांक के लिए (Amplitude) or (argument) :-

$$\tan\phi = \left(\frac{IP}{RP}\right) \qquad \text{Where } 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

(i) यदि युग्मों का क्रम प्रथम चतुर्थांश में हो, (+, +)

$$\theta = \phi$$

(ii) यदि युग्मों का क्रम द्वितीय चतुर्थांश में हो, (−, +)

$$\theta = \pi - \phi$$

(iii) यदि युग्मों का क्रम तृतीय चतुर्थांश में हो, (−, −)

$$\theta = -\pi + \phi$$

(iv) यदि युग्मों का क्रम चतुर्थ चतुर्थांश में हो, (+, −)

$$\theta = -\phi$$

ध्रुवीय निरूपण (Polar form) → किसी भी सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ जहाँ $r$ मापांक तथा $\theta$ कोणांक है।

Note → (i) $z \times \bar{z} = |z|^2$

(ii) जो सम्मिश्र संख्या मानक रूप $(a+ib)$ के रूप में न हो, तो उसे सर्वप्रथम मानक रूप में व्यक्त करके तब उसका ध्रुवीय रूप ज्ञात करते है।