अध्याय → 9

अनुक्रम तथा श्रेणी
(Sequence and Series)

गुणोत्तर श्रेणी [GeoMetric Progression (G.P.)] ÷

किसी दिए गए अनुक्रम में क्रमागत पदों का अनुपात एक नियत हो गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है।

सार्व अनुपात (Common ratio) ÷ क्रमागत पदों में अनुपात को सार्व अनुपात (r) कहते हैं

माना गुणोत्तर श्रेणी के पद $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \ldots$

सार्व अनुपात $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}$

गुणोत्तर श्रेणी के पद (General term of G.P.) ÷

माना GP का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r हो तो G.P.

गुणोत्तर श्रेणी

$$a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$$

गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद ज्ञात करना ÷

(Find n term of a G.P.)

माना किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्व अनुपात r है।

G.P. - a, ar, ar^2, ar^3, ar^4

$$a_1 = a = ar^{1-1}$$

$$a_2 = ar = ar^{2-1}$$

$$a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$$

$$a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$$

$\boxed{a_n = ar^{n-1}}$ G.P. का n वाँ पद ज्ञात करने का सूत्र

Ex→ 2, 4, 8, 16, 32 ... का 20 वाँ पद ज्ञात किजिए।

$a = 2$ $\quad r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{2} = 2$

$n = 20$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_{20} = 2 \times 2^{20-1}$$

$$= 2 \times 2^{19}$$

$$= 2^{20}$$

→ जब G.P. का अन्त से n वाँ पद ज्ञात करने का सूत्र
माना प्रथम पद a, सार्वअनुपात r तथा अन्तिमपद l हो तो
G.P. का अन्त से n वाँ पद $\boxed{a_n = \frac{l}{r^{n-1}}}$

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल ज्ञात करना
(Find the Sum of n terms in the G.P.)

माना कीसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a सार्वअनुपात r तथा n पदों का योगफल S_n

तो $\quad S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ —(i)

समी(i) के दो पदों में r से गुणा करने पर

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + ar^n \quad \text{—(ii)}$$

समी (i) −(ii)

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}}$$ जब $r < 1$

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n-1)}{(r-1)}}$$ जब $r>1$

अनन्त गुणोत्तर श्रेणी (Infinite G.P.) → किसी दी गई गुणोत्तर श्रेणी पदों की संख्या अनन्त हो, उन्हे अनन्त गुणोत्तर श्रेणी कहते है

$$S_\infty = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \infty$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$$

दो G.P. के बीच n गुणोत्तर माध्य पद ज्ञात करना →

दो राशि a तथा b के मध्य n- गुणोत्तर माध्य $G_1, G_2, G_3 \ldots G_n$ हो तो

$$a, G_1, G_2, G_3, G_4, \ldots G_n, b \text{ — GP}$$

प्रथम पद $A = a$ अन्तिम पद $A_N = b$ पदों की संख्या $N = n+2$

$\therefore \quad A_N = AR^{N-1}$

$b = aR^{n+2-1}$

$\frac{b}{a} = R^{n+1}$

$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = R$

या $\boxed{R = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}}$

$G_1 = AR = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$G_2 = AR^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$

$G_3 = AR^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$

⋮

इसी प्रकार,

$G_n = AR^n$

$$\boxed{G_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}}$$

जहाँ n, पूछे गए गुणोत्तर माध्य के पदों की संख्या है

समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य के बीच सम्बन्ध :

(Relationship between A.M. and G.M.)

माना दो राशि a तथा b का समान्तर माध्य A तथा गुणोत्तर माध्य G हो तो -

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{तथा} \quad G = \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$A - G = \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2 \times \sqrt{a} \times \sqrt{b}}{2}$$

$$A - G = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

$$A - G = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \quad ((a-b) \text{ स्वतः } \geq 0$$

$$A - G \geq 0$$

$$\boxed{A \geq G}$$

समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य के बराबर या उससे बड़ा होता है

विशेष श्रेणी का योगफल → कभी-2 ऐसी श्रेणियाँ दी जाती है जो G.P. के रूप में नहीं होती है परन्तु इन्हे G.P. में परिवर्तित किया जा सकता है ऐसी श्रेणियाँ विशेष श्रेणियाँ कहलाती है।

Ex → 3, 33, 333, 3333, ...

5, 55, 555, 5555, ...