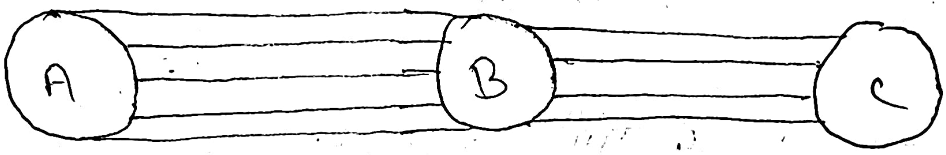
अध्याय - 7

क्रमचय तथा संचय

गणना का आधारभूत प्रमेय → यदि किसी कार्य को m प्रकार से किया जा सकता है, जिसके बाद दूसरे कार्य को n प्रकार से किया जा सकता है तो दोनों ~~कार्~~ कार्यों $m \times n$ प्रकार से किया जा सकता है

Ex - A, B, C कोई तीन स्टेशन है स्टेशन A से स्टेशन B तक जाने के पाँच रास्ते है। तथा स्टेशन B से स्टेशन C तक जाने के लिए चार रास्ते है।



गणना के आधार भूत प्रमेय से,

A से C तक जाने के रास्ते $= 5 \times 4$
$= 20$

n क्रम गुणीत (n factorial) → प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के सतत गुणनफल को संख्या n का गुणीत कहते है।

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \ldots\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$1! = 1$

$0! = 1$

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!$

Ex-1 (i) $\frac{10!}{6!} = \frac{10\times9\times8\times7\times\cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 5040$

(ii) $5!+3! = 120+6 = 126$

(iii) $6!-4! = 720-24 = 696$

(iv) $3!\times4! = 6\times24 = 144$

Note → (i) दो क्रमगुणीत संख्याओं को प्रत्यक्ष रूप से जोड़ा, घटाया, गुणा तथा भाग नहीं किया जा सकता है।

(ii) भिन्नों तथा ऋणात्मक पूर्णांकों के लिए क्रमगुणीत परिभाषित नहीं है।

क्रमचय (Permutation) → दि गयी वस्तुओं में एक बार में कुछ या सभी वस्तुओं को लेने पर जो क्रमचय जो भिन्न विन्यास (अरेन्जमेन्ट) बनते है। उनमे से प्रत्येक विन्यास को क्रमचय कहते है

यदि किसी समुच्चय ABC से एक बार में दो अवयव लेकर बनने वाला भिन्न विन्यास ab, bc, ba c, bc, ca, cb, अत: क्रमचय की संख्या 6 है।

n विभिन्न वस्तुओं मे से एक समय मे r वस्तुओं के लेकर बनाए गए क्रमचयों की संख्या ^nP_r होती है जहाँ $0 < r \le n$ तथा किसी भी क्रमचय मे वस्तुओं की पुनरावृत्ती की अनुमति नहीं है।

$$^nP_r = n\times(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

NOTE → n विभिन्न वस्तुओं में एक समय में r वस्तुएँ लेकर बनने क्रमचयों की संख्या जबकि प्रत्येक वस्तुएँ लेकर बनने क्रमचयों की संख्या जबकि प्रत्येक वस्तु की पुनरावृत्ति हो n^r होगा।

^nP_r के सूत्र का निगमन →
(Derivation of formula ^nP_r)

$$^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{1}$$

अंश तथा हर में $(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\ldots 3.2.1$ से गुणा करने पर

$$^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1} \times \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2\times 1}$$

$$\boxed{^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

संचय (Combinations) → वस्तु क्रम ध्यान न रखते हुए, दी गयी वस्तुओं में कुछ या सभी को एक साथ लेकर जो समूह बनाते है।

n विभिन्न वस्तुओं में से r लेकर बने सभी संचयों की संख्या ^nC_r से निरूपित करते है

$$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad \text{जहाँ } 0 \le r \le n$$

Ex → $$^{10}C_2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{\cancel{10}^{5} \times 9 \times \cancel{8!}}{\cancel{2} \times 1 \times \cancel{8!}} = 45$$

Note → (1) $^nC_0 = 1$ (2) $^nC_n = 1$ (3) $^nP_r = {^nC_r} \times r!$

(4) $^nC_r = {^nC_{n-r}}$ (5) $^nC_{r-1} + {^nC_r} = {^{n+1}C_r}$