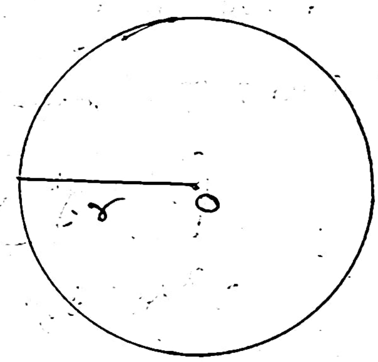
अध्याय - 11

शंकु परिच्छेद
(Conic Sections)

(i) Circl (वृत्त)
(ii) Parabola (परवलय)
(iii) Ellipse (दीर्घवृत्त)
(iv) Hyperbola (अतिपरवलय)

वृत्त : वृत्त तल के उन बिन्दुओं का समुच्चय हो . है, जो तल के एक स्थिर बिन्दु से समान दूरी पर होता है। स्थिर बिन्दु को केन्द्र तथा नियत दूरी को त्रिज्या कहते है



उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करना जिसका केन्द्र मूलबिन्दु तथा त्रिज्या r हो
(Find the equation of circle whose centre origin and radius r) :

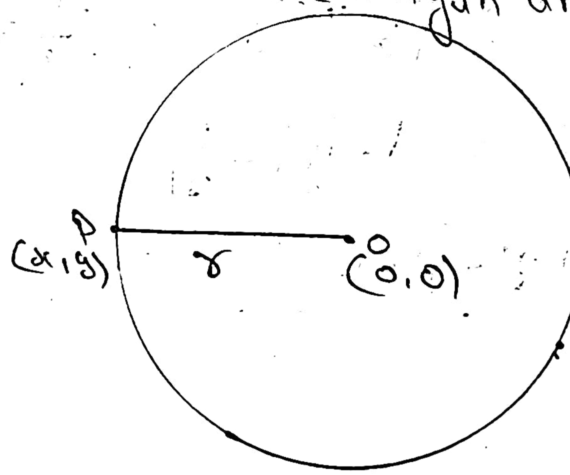
O से P की बीच की दूरी

$OP = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\boxed{x^2+y^2+r^2}$



उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करना जिसका केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या है ÷
(Find the equation of Circle whose Centre (h, k) and radius r)

$$OP = r$$

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = OP$$

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$$

Squaring on both side

दोनो पक्षों का वर्ग करने पर

$$\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2}$$

वृत्त का व्यापक समीकरण
(General Equation of Circle) ÷

वृत्त का व्यापक समीकरण,

$$\boxed{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$$

x^2 का गुणांक = y^2 का गुणांक

केन्द्र = $\left(\frac{-1}{2} \times x \text{ का गुणांक}, \frac{-1}{2} \times y \text{ का गुणांक}\right)$

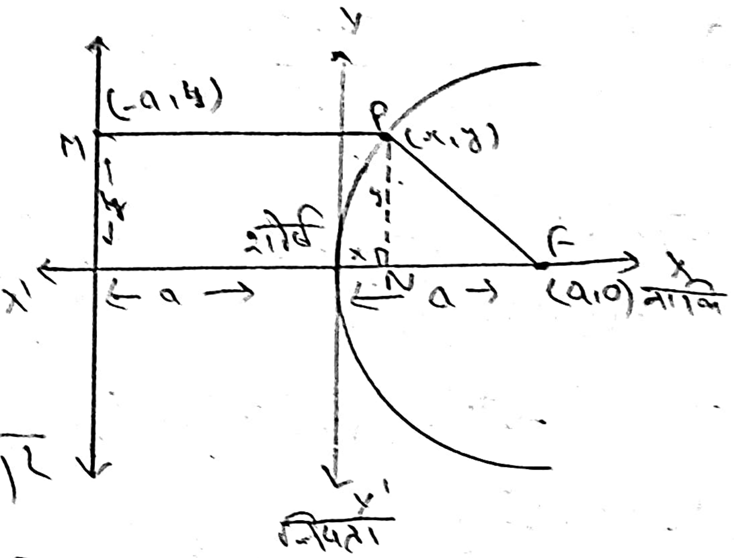
केन्द्र = $\left(\frac{-1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}g, \frac{-1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}f\right)$

केन्द्र = $(-g, -f)$

$r = \sqrt{g^2+f^2-c}$

परवलय (Parabola) →

$$\frac{FP}{PM} = \text{उत्केन्द्र.}$$



परवलय की परिभाषा,

$$FP = PM$$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(a+x)^2+(y-y)^2}$$

$$\sqrt{x^2+a^2-2ax+y^2} = \sqrt{(a+x)^2+0^2}$$

$$\sqrt{x^2+a^2-2ax+y^2} = \sqrt{x^2+a^2+2ax}$$

दोनो पक्षो का वर्ग करने पर,

$$x^2+a^2-2ax+y^2 = x^2+a^2+2ax$$

$$x^2+a^2-x^2-a^2+y^2 = 2ax+2ax$$

$$y^2 = 4ax$$

$$\boxed{y^2 = 4ax}$$

परवलय चार प्रकार के होते हैं →

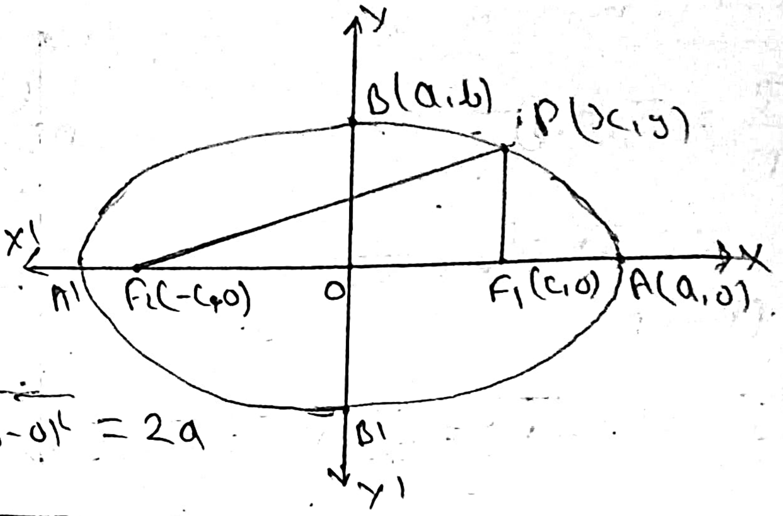
(i) $y^2 = 4ax$ – (i) शीर्ष (0,0)
(ii) नाभि (a,0)
(iii) नियता $x = a$ या $x + a = 0$
(iv) x - अक्ष पर
(v) नाभिलम्ब $= 4a$

(ii) $y^2 = -4ax$ – (i) शीर्ष (0,0)
(ii) नाभि (−a,0)
(iii) नियता $x = a$ या $x - a = 0$
(iv) x-अक्ष पर
(v) नाभिलम्ब $= 4a$

(iii) $x^2 = 4ay$ – (i) शीर्ष (0,0)
(ii) नाभि (0,a)
(iii) नियता $y = -a$ या $x - a = 0$
(iv) y - अक्ष पर
(v) नाभिलम्ब $= 4a$

(iv) $x^2 = -4ay$ – (i) शीर्ष (0,0)
(ii) नाभि (0,−a)
(iii) नियता $y = a$ या $y + a = 0$
(iv) अक्ष $-y$
(v) नाभिलम्ब $= 4a$

दीर्घ वृत्त का प्रमाणिक समीकरण →
(Standard equation of Ellipse)



दीर्घवृत्त की परिभाषा से,

$$PF_2 + PF_1 = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2+c^2+2cx+y^2} + \sqrt{x^2+c^2-2xc+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2+c^2+2cx+y^2} = 2a - \sqrt{x^2+c^2-2xc+y^2}$$

दोनो पक्षों के वर्ग करने पर

$$\left(\sqrt{x^2+c^2+2cx+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2}\right)^2$$

$$x^2+c^2+2cx+y^2 = 4a^2+x^2+c^2-2cx+y^2 - 4a\sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2}$$

$$x^2+c^2+2cx+y^2-4a^2-x^2-c^2+2cx-y^2 = -4a\sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2}$$

$$-4a^2+4cx = -4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}$$

दोनो पक्षों मे -4 से भाग देने पर

$$a^2 - cx = a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}$$

पुनः दोनो पक्षों मे वर्ग करने पर

$$(a^2-cx)^2 = a^2(x^2+y^2-2cx+c^2)$$

$$a^4 + c^2x^2 - 2a^2cx = a^2x^2 + y^2a^2 - 2a^2cx + a^2c^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 - 2a^2cx + 2a^2cx = a^2c^2 - a^4$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

$$\because c^2 = a^2 - b^2$$

$$x^2(a^2-b^2-a^2) - a^2y^2 = a^2(a^2-b^2-a^2)$$

$$-b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$$

$$+(b^2x^2+a^2y^2) = +a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{\cancel{b^2}x^2}{a^2\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ (X - अक्ष के लिए)
जहाँ $(a > b)$

Note → (i) जब दीर्घ वृत्त X- अक्ष के अनुदिश हो, तो —

केन्द्र → O (0, 0)
शीर्ष → $(\pm a, 0)$
दीर्घ अक्ष की लम्बाई → $2a$
लघु अक्ष की लम्बाई → $2b$
दीर्घ अक्ष का समीकरण $y = 0$
लघु अक्ष का समीकरण $x = 0$
नाभियाँ $(\pm ae, 0)$

नियताओं के समीकरण ⇒ $x = \pm\left(\frac{a}{e}\right)$
उत्केन्द्रता → $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
नाभिलम्ब की लम्बाई → $\frac{2b^2}{a}$
नाभिलम्ब के शीर्ष → $\left(\pm ae, \pm \frac{b^2}{a}\right)$
नाभीय त्रिज्याएँ → $|F_1P| = (a - ex_1)$
$|F_2P| = (a + ex_1)$
नाभियों के बीच की दूरी → $2ae$

(ii) जब दीर्घ वृत्त Y- अक्ष के अनुदिश हो, तो —

केन्द्र → O (0, 0)
शीर्ष → $(0, \pm b)$
दीर्घ अक्ष की लम्बाई → $2b$
लघु अक्ष की लम्बाई → $2a$
दीर्घ अक्ष का समीकरण $x = 0$
लघु अक्ष का समीकरण $y = 0$.
नाभियाँ → $(0, \pm be)$

नियताओं के समीकरण ⇒ $y = \pm\left(\frac{b}{e}\right)$
उत्केन्द्रता → $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$
नाभिलम्ब की लम्बाई → $\frac{2a^2}{b}$
नाभिलम्ब के शीर्ष → $\left(\pm \frac{a^2}{b}, \pm be\right)$
नाभीय त्रिज्याएँ → $|F_1P| = (b - ey_1)$
$|F_2P| = (b + ey_1)$
नाभियों के बीच की दूरी → $2be$

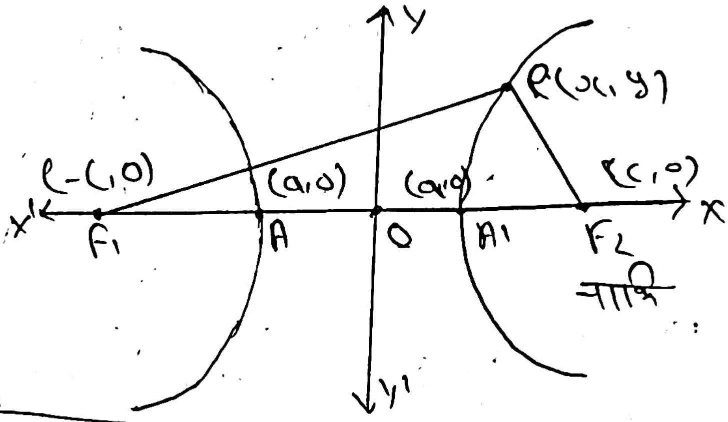
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ (Y - अक्ष के लिए)
जहाँ $(a < b)$

अतिपरवलय (Hyperbola) :

अतिपरवलय की परिभाषा से,

$$PF_2 - PF_1 = 2a$$

$$PF_2 = 2a + PF_1$$



$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

दोनों पक्षों में वर्ग लेने पर

$$(x+c)^2+(y-0)^2 = 4a^2+(x-c)^2+(y-0)^2+4a\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}$$

$$x^2+c^2+2xc+y^2 = 4a^2+x^2+c^2-2xc+y^2+4a\sqrt{x^2+c^2-2xc+y^2}$$

$$x^2+c^2+2xc+y^2-x^2-c^2-y^2+2xc-4a^2 = 4a\sqrt{x^2+c^2-2xc+y^2}$$

$$2xc+2xc-4a^2 = 4a\sqrt{x^2+c^2-2cx+y^2}$$

$$4xc-4a^2 = 4a\sqrt{x^2+c^2-2xc+y^2}$$

4 से भाग देने पर

$$xc-a^2 = a\sqrt{x^2+c^2-2xc+y^2}$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$c^2x^2+a^4-2cxa^2 = a^2(x^2+c^2-2xc+y^2)$$

$$c^2x^2+a^4-2cxa^2 = a^2x^2+a^2c^2-2xca^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2-a^2y^2-a^2x^2 = a^2c^2-a^4$$

$$\because c=\sqrt{a^2+b^2} \Rightarrow c^2=a^2+b^2$$

$$(a^2+b^2)x^2-a^2y^2-a^2x^2 = a^2(a^2+b^2)-a^4$$

$$a^2x^2+b^2x^2-a^2y^2-a^2x^2 = a^4+a^2b^2-a^4$$

$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2$$

दोनों पक्षों में a^2b^2 भाग देने पर

$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2}-\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ (x- अक्ष के लिए)

$$\boxed{\frac{y^2}{a} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$ (y - अक्ष के लिए)

Note → (i) X- अक्ष के लिए

शीर्ष → $(\pm a, 0)$
नाभि → $(\pm c, 0)$
अनुप्रस्थ अक्ष → $2a$
संयुग्मी अक्ष → $2b$
उत्केन्द्रता → $e = \sqrt{a^2+b^2}/a$
नाभिलम्ब → $\frac{2b^2}{a}$

(ii) Y - अक्ष के लिए

शीर्ष → $(0, \pm a)$
नाभि → $(0, \pm c)$
अनुप्रस्थ अक्ष → $2b$
संयुग्मी अक्ष → $2a$
उत्केन्द्रता → $e = \frac{c}{a}$
नाभि लम्ब → $\frac{2a^2}{b}$