Билет 35

Дайте определения точек локального экстремума. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.

Решение

Определение. *Пусть D – область определения f, тогда точка $x_0 \in D$ называется локальным минимумом (максимумом) функции $f(x)$, если*

$$[\exists u_\delta(x_0)]\big(\forall x \in u_\delta\, f(x_0) \leq f(x)\big)$$

Для максимума аналогично и $f(x_0) \geq f(x)$.

Определение. *Точки локального минимума или максимума называются точками локального экстремума.*

Теорема (Ферма). *Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и при этом $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Если существует производная в точке x_0, то существуют левая и правая производные в этой точке, и они равны. Вычислим их по определению:

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0}$; поскольку в окрестности $-0 \begin{cases} f(x) = f(x_0) < 0 \\ x - x_0 < 0 \end{cases}$,
получим $f'_-(x_0) \geq 0$; Аналогично для правой производной: в окрестности $+0 \begin{cases} f(x) = f(x_0) < 0 \\ x - x_0 > 0 \end{cases}$, получим $f'_+(x_0) \leq 0$;

При этом они равны: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ □