Задача 22

Дайте определения бесконечно малой функции. Сформулируйте арифметические свойства пределов и докажите их (одно на выбор экзаменатора). Найдите $\lim\limits_{n\to 2}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{1+2x}}{\arcsin(x-2)}$.

Решение

Определение. *функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при x -> a, если* $\lim\limits_{n\to a} f(x) = 0$

Примеры:

1. $f(x) = (x-1)^2$ – бесконечно малая при x -> 1.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая при x -> inf.

Арифметические свойства пределов.

Если существует $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$, то

1. $\lim(x_n \pm y_n) = \lim(x_n) \pm \lim(y_n) = a \pm b$.

   Доказательство. $\exists \alpha_n = x_n - a$ – б. м. и $\exists \beta_n = y_n - b$ – б. м.

   Тогда внимательно посмотрим на $z_n = x_n + y_n$. Осознаем, что $\{z_n - a - b\}$ – бесконечно малая последовательность ($z_n - a - b = \alpha_n + \beta_n$ – конечная сумма б.м. $|z_n - a - b| \le |x_n - a| + |y_n - b| = |\alpha_n| + |\beta_n|$).

   По свойству (1) б.м.: $\{z_n - a - b\}$ - беск. малая $\Leftrightarrow \lim z_n = a + b$. $\square$

2. $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n)\lim(y_n) = a \cdot b$.

   Доказательство 2. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где $\alpha,\ \beta$ - беск. малые.

   Тогда $\lim x_n y_n = \lim(\alpha_n + a)(\beta_n + b) = \lim(\alpha_n\beta_n + a\beta + b\alpha + ab) = 0 + 0 + 0 + ab = ab$. $\square$

3. $\exists \lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)} = \frac{a}{b}$, если $\forall n:\ y_n \neq 0,\ b \neq 0$.

   Доказательство 3. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где $\alpha,\ \beta$ - беск. малые.

   Тогда $\lim(\dfrac{x_n}{y_n}) = \ lim(\dfrac{\alpha_n + a}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b} + \alpha\dfrac{1}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b})$, но так как $\lim(\frac{a}{\beta_n + b} - \frac{a}{b}) = 0$, то $\lim \frac{a}{\beta_n + b} = \frac{a}{b}$. $\square$

Задание

1. Домножим на сопряженное $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{(\sqrt{4x-3}-\sqrt{1+2x})\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})}{\arcsin(x-2)\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})}$.

2. Скобка в знаментале стремится к $2\cdot\sqrt{5}$ При x -> 0, arcsin(x) x $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{(\sqrt{4x-3}-\sqrt{1+2x})\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})}{\arcsin(x-2)\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})}. = \dfrac{2\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot 2\cdot\sqrt{5}}. = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

3. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}$