Билет 36

Сформулируйте теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Решение

Теорема (Ролля). *Если f непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a)=f(b)$, то*

$$\big[\exists c \in (a,b)\big]\big(f'(c)=0\big)$$

Доказательство. Если $f = const$, то очевидно $f'(x)=0$ и $f(a)=f(b)$. Иначе, из непрерывности и ограниченности по теореме Вейерштрасса $[\exists c_1, c_2 \in (a,b)]\big(f(c_1 = inf(f), f(c_2) = sup(f))\big)$. Поскольку $f \neq const$, $f(c_1) < f(c_2)$. При этом хотя бы одна из точек c_1, c_2 внутренняя, то есть не совпадает с a или b, пусть это точка $c_1 \in (a,b)$. Тогда $[\exists \delta > 0]\big(u_\delta(c_1) \subset (a,b)\big)$ и $[\forall x \in u_\delta]\big((c_1) < f(x)\big)$, то есть c_1 – точка локального минимума, а по теореме Ферма $f'(c-1)=0$. □

Теорема (Лагранжа). *Если f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то*

$$\big[\exists c \in (a,b)\big]\Big(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\Big)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + \lambda \cdot x$. Подберём такое значение λ, чтобы выполнялось условие теоремы Ролля, то есть $g(a)=g(b)$. Запишем $f(a)+\lambda a = f(b) + \lambda b$, отсюда $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$. Тогда $[\exists c \in (a,b)]\big(g'(c)=0\big) \Rightarrow f'(c)+\lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, что и требовалось доказать. □

Теорема (Коши). *Если f, g непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то*

$$\big[\exists c \in (a,b)\big]\Big(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\Big)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, где $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, тогда F удовлетворяет условию теоремы Ролля, то есть $[\exists c]\big(F'(c) = 0\big)$; $f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. □