Задача 10

Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей и сформулируйте их свойства. Сформулируйте арифметические свойства пределов и докажите их (одно на выбор экзаменатора). Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{2n^4+3}\cdot\sqrt[7]{3n^3-1}}{\sqrt[15]{7n^{18}+3}+\sqrt[3]{4n^4+1}}$.

Решение

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *т.е.* $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| < \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon)$.

Свойства б.м. последовательностей:

1. $\exists \lim y_n = a \Leftrightarrow \{x_n = y_n - a\}$ – бесконечно малая.
2. Сумма **конечного** числа бесконечно малых посл-ей – есть бесконечно малая посл-ть.
3. Сумма бесконечно малой и ограниченной последовательности – бесконечно малая последовательность.

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно большой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, *т.е.* $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| > \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon)$.

Свойства б.б. последовательностей.

1. Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.
2. Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.
3. Произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность. Произведение бесконечно большой последовательности на константу есть бесконечно большая последовательность.

Арифметические свойства пределов.

Если существует $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$, то

1. $\lim(x_n \pm y_n) = \lim(x_n) \pm \lim(y_n)a \pm b$.

Доказательство. $\exists \alpha_n = x_n - a$ – б. м. и $\exists \beta_n = y_n - b$ – б. м.

Тогда внимательно посмотрим на $z_n = x_n + y_n$. Осознаем, что $\{z_n - a - b\}$ – бесконечно малая последовательность ($z_n - a - b = \alpha_n + \beta_n$ – конечная сумма б.м. $|z_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| = |\alpha_n| + |\beta_n|$).

По свойству (1) б.м.: $\{z_n - a - b\}$ - беск. малая $\Leftrightarrow \lim z_n = a + b$. $\square$

2. $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n) \lim(y_n) = a \cdot b$.

   Доказательство 2. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где $\alpha,\ \beta$ - беск. малые.

   Тогда $\lim x_n y_n = \lim(\alpha_n + a)(\beta_n + b) = \lim(\alpha_n \beta_n + a\beta + b\alpha + ab) = 0 + 0 + 0 + ab = ab$. $\square$

3. $\exists \lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)} = \frac{a}{b}$, если $\forall n :\ y_n \neq 0,\ b \neq 0$.

   Доказательство 3. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где $\alpha,\ \beta$ - беск. малые.

   Тогда $\lim(\dfrac{x_n}{y_n}) = \ lim(\dfrac{\alpha_n + a}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b} + \alpha\dfrac{1}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b})$, но так как $\lim(\frac{a}{\beta_n+b} - \frac{a}{b}) = 0$, то $\lim \frac{a}{\beta_n+b} = \frac{a}{b}$. $\square$