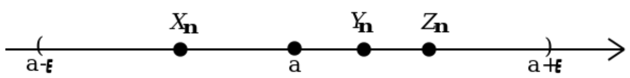
Задача 9

Покажите, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ имеет предел.

Теорема (О трёх последовательностях)**.** *Если последовательности* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *таковы, что* $x_n \leq y_n \leq z_n$ *для всех* $n \geq N_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *то последовательность* $\{y_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Доказательство. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geq N_1$ и $z_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geq N_2$. Отсюда и из условия $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех $n \geq N_0$ следует,



что при всех $n \geq N$, где $N = max\,(N_0, N_1, N_2)$, выполняется условие $y_n \in U_\varepsilon(a)$. Это означает, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. □

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, *причем* $a < b$, *то*

$$\exists N_0 : \forall n \geq N_0 \to x_n < y_n.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы ε-окрестности точек a и b не пересекались (возьмем, например, $\varepsilon = \frac{(b-a)}{3} > 0$). Согласно определению предела по заданному ε можно найти номера N_1 и N_2 такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geq N_1$ и $y_n \in U_\varepsilon(b)$ при всех $n \geq N_2$. Пусть $N_0 = max\,(N, N_2)$. Тогда при всех $n \geq N_0$ выполняются неравенства

$$x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n$$

откуда следует утверждение

$$\exists N_0 : \forall n \geq N_0 \to x_n < y_n.$$

$\square$

Следствие. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *и* $\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \geq y_n$ *то*

$$a \geq b.$$

Доказательство. Предположим, что неравенство $a \geq b$ не выполняется. Тогда $a < b$ и по предыдущей теореме справедливо утверждение

$$\exists N_0 : \forall n \geq N_0 \to x_n < y_n,$$

которое противоречит условию

$$\forall n \in \mathbb{N} \to x_n \geq y_n.$$

Поэтому должно выполняться неравенство $a \geq b$. $\square$

Задачка. *Найти* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $\{x_n\} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Решение. Будем юзать теорему о двух милиционерах (или о трех последовательностях). Для этого заметим

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}.$$

С другой стороны имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+0}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+0}} =$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1.$$

Таким образом:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq x_n \leq 1.$$

Переходя к приделам, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} i \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \leq \lim_{x\to\infty} x_n \leq \lim_{x\to\infty} 1.$$

$$1 \leq \lim_{x \to \infty} x_n \leq 1.$$

Ну и ежику понятно, что $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = 1$. $\square$