МИНИМУМ ВОПРОСОВ И ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ
к экзамену по курсу «Математический анализ-1», ФКН НИУ ВШЭ, декабрь 2016

1. Дайте определение вещественного числа и правила сравнения вещественных чисел. Сформулируйте свойства вещественных чисел, связанные с неравенствами. Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ – иррациональное.
2. Дайте определения ограниченного (сверху, снизу) множества действительных чисел, верхней и нижней граней, точных верхней и нижней граней. Покажите, что множество $X=\left\{\frac{n^2+n}{n^2+1}: n\in\mathbb{N}\right\}$ ограничено и найдите $\sup X$.
3. Сформулируйте теорему о существовании точных верхней и нижней граней и приведите <u>схему ее доказательства</u>. Покажите, что множество чисел вида $\frac{p}{q}$, $0<p<q$, $p,q\in\mathbb{N}$ не имеет наибольшего элемента; найдите его точную верхнюю грань.
4. Сформулируйте теорема об отделимости числовых множеств. Определите арифметические операции над действительными числами. Докажите, пользуясь методом математической индукции, что $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, $n\in\mathbb{N}$.
5. Дайте определение равномощных множеств, счетного множества. <u>Докажите</u>, что счетное объединение счетных множеств – счетно. Покажите, что $(0,1]\sim[0,1]$.
6. <u>Покажите</u>, что множество $\mathbb{Q}$ – счетное, $\mathbb{R}$ – несчетное. Будет ли счетным или несчетным множество $\{0,a_0a_1\ldots : a_i\in\{0,1\}\}$?
7. Дайте определение предела последовательности и покажите по определению, что последовательность $x_n=\frac{2n-1}{n+2}$ имеет предел, равный 2.
8. Предел последовательности. Сформулируйте и <u>докажите</u> теоремы о единственности предела и об ограниченности сходящейся последовательности. Покажите, что последовательность $x_n=\dfrac{n^{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}+1}{(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}n+1}$ ограничена, найдите $\inf\limits_n x_n$, $\sup\limits_n x_n$.
9. Сформулируйте и <u>докажите</u> свойства пределов, связанные с неравенствами. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.
10. Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей и сформулируйте их свойства. Сформулируйте арифметические свойства пределов и <u>докажите</u> их (одно на выбор экзаменатора). Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{2n^4+3}\cdot\sqrt[7]{3n^3-1}}{\sqrt[15]{7n^{18}+3}+\sqrt[3]{4n^4+1}}$.
11. Сформулируйте и <u>докажите</u> теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности. Покажите, что последовательность $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n+x_n^{-1}$, $x_1=2$ имеет предел и найдите его.
12. <u>Покажите</u>, что последовательность $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ имеет предел.
13. Дайте определения подпоследовательности, частичных пределов, верхнего и нижнего пределов последовательности, приведите соответствующие примеры. Найдите $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n$, если $x_n=\frac{(-1)^n n+1}{n+1}$.
14. Сформулируйте и <u>докажите</u> теорему Кантора о системе стягивающихся отрезков. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2-n}}$.

15. Сформулируйте и <u>докажите</u> теорему Больцано-Вейерштрасса об ограниченной последовательности. Покажите, что последовательность $x_n = \frac{n^2}{n+1}\sin\frac{\pi n}{2}$ не является бесконечно большой, но будет неограниченной.
16. Дайте определение фундаментальной последовательности. Сформулируйте и <u>докажите</u> критерий Коши сходимости последовательности. Покажите, что последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ не имеет предела.
17. Дайте определение предела функции по Коши и по Гейне и покажите по определению, что $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-3}{x-3} = -1$ (покажите, что функция $f(x) = \cos\frac{1}{x}$ не имеет предела в точке $x = 0$).
18. Дайте определения односторонних пределов и бесконечных пределов. Найдите $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\frac{|x^2-2x|}{x^2-x-2}$.
19. Сформулируйте и <u>докажите</u> (на выбор экзаменатора) локальные свойства пределов. Найдите $\lim\limits_{x\to\pm 0}\frac{4^{\frac{1}{x}}-1}{4^{\frac{1}{x}}+1}$.
20. Сформулируйте и <u>докажите</u> (на выбор экзаменатора) свойства пределов, связанные с неравенствами. Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$.
21. <u>Докажите</u> 1-й замечательный предел. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin^2 \pi x}{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}$.
22. Дайте определение бесконечно малой функции, сформулируйте и <u>докажите</u> (на выбор экзаменатора) арифметические свойства пределов. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{1+2x}}{\arcsin(x-2)}$.
23. Дайте определение эквивалентных функций, бесконечно малой функции и функций одного порядка. Найдите функцию $g(x) = Cx^{\alpha}$, эквивалентную функции $f(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}$ при $x \to 0$, при $x \to \infty$.
24. Сформулируйте 2-й замечательный предел и следствия из него. <u>Докажите</u> 2-й замечательный предел или одно из следствий (на выбор экзаменатора). Найдите $\lim\limits_{x\to 1}\left(\cos 2\pi x\right)^{\frac{\log_2(x+1)-1}{\sqrt{3x^2-6x+7}-2}}$.
25. Дайте определение функции, непрерывной в точке. Дайте классификацию точек разрыва. Докажите по определению, что функция $y = \sin(x^2)$ непрерывна в любой точке.
26. Сформулируйте локальные свойства непрерывных функций (об ограниченности, о сохранение знака) и <u>докажите</u> одно из них (на выбор экзаменатора). Найдите значения a и b, при которых функция $f(x) = \begin{cases} \frac{3\cdot 2^{x-1}-3^x}{\sqrt{x+3}-2}, & x<1 \\ ax+b, & 1\le x\le 2, \\ \frac{\sin(\pi x)}{\cos(\frac{\pi}{4}x)}, & x>2 \end{cases}$ будет непрерывной на промежутке $[0,4]$.
27. Сформулируйте алгебраические свойства непрерывных функций (арифметические свойства, непрерывность сложной и обратной функций) и <u>докажите</u> одно из них (на выбор экзаменатора).

Найдите точки разрыва функции, установите их род, постройте эскиз графика функции:

$$y=\begin{cases} \dfrac{3\big||x|-1\big|}{x^2-1}, & x<2, \\ \cos\pi x, & 2<x\le 3, \\ 4^{\frac{1}{3-x}}+\sin\dfrac{\pi}{x-4}, & 3<x<4, \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$$

28. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса об ограниченности и о достижимости точных граней функцией, непрерывной на отрезке. <u>Докажите</u> одно из них (на выбор экзаменатора). Исследуйте на непрерывность и постройте график функции $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+2^{nx}}{1+x2^{nx}}$.
29. Сформулируйте теоремы Коши о нуле и промежуточном значении. <u>Докажите</u> одно из них (на выбор экзаменатора). Докажите, что уравнение $x^3+5x-1=0$ имеет единственный корень c и найдите его приближенно с точностью 0.01 методом половинного деления ($|f(c)|<0.01$).
30. Дайте определение производной и односторонних производных функции. Укажите геометрический смысл производной. Покажите (по определению), что $\left(\sin^2 x\right)'=\sin 2x$.
31. Дайте определение дифференцируемой функции и дифференциала. Укажите геометрический смысл дифференциала. Найдите, при каких значениях $a>0$ функция $y=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{8+\sin^2 2x}-2}{\operatorname{tg}^a|x|}, & \text{если } x\ne 0, \\ 0, & \text{если } x=0, \end{cases}$ будет иметь производную в точке $x=0$.
32. Сформулируйте и <u>докажите</u> теорему о связи понятий производной и дифференцируемости. Сформулируйте и <u>докажите</u> (на выбор экзаменатора) правила дифференцирования. Найдите приближенное значение $0.99^{0.99}$ с помощью дифференциала.
33. Как вычисляются производные обратной функции, сложной функции, параметрически заданной функции, неявной функции? В чем заключается инвариантность формы 1-го дифференциала? Найдите $y''(0)$, если $x+ye^y=1$.
34. Дайте определение производных и дифференциалов высших порядков. <u>Докажите</u> формулу Лейбница. Найдите $y^{(10)}(0)$, если $y=\dfrac{1}{4x^2-8x+3}$.
35. Дайте определения точек локального экстремума. Сформулируйте и <u>докажите</u> теорему Ферма. Найдите точки экстремума функции $x=\dfrac{t}{t+1}$, $y=\dfrac{t^2}{t^2+1}$, определите их характер.
36. Сформулируйте теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. <u>Докажите</u> одну из них (на выбор экзаменатора). Докажите неравенство $x-\frac{1}{3}x^3<\operatorname{arctg}x<x$, $x>0$ с помощью формулы конечных приращений.
37. Численное дифференцирование. Найдите, при каком шаге h численного дифференцирования погрешность вычисления численной производной $\tilde{y}'(1)$ функции $y=x^3$ будет наименьшей, если функция y имеет неустранимую аддитивную погрешность $\varepsilon(x-1)$ (т.е. вместо $y=x^3$ мы имеем функцию $y=x^3+\varepsilon(x-1)$).
38. Численное решение уравнений: методы касательных, хорд и простой итерации. Найдите приближенное решение уравнение $x^3+5x-1=0$ методом Ньютона (хорд, секущих, простой итерации) с точностью 0.01.
39. Дайте определение наклонной, вертикальной и горизонтальной асимптот к графику функции. Приведите и <u>докажите</u> формулы вычисления наклонных асимптот. Найдите все асимптоты к графику функции $y=\dfrac{x2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}-2}$ и постройте эскиз этого графика.