Задача 11

Теорема. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел.*

Теорема (Теорема Вейерштрасса (о пределе монотонной ограниченной последовательности))**.** *Если последовательность является возрастающей и ограниченной сверху, то:* $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \sup x_n$.

Аналогично для убывающей и ограниченной снизу последовательности: $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \inf x_n$.

Доказательство. Докажем теорему для монотонной возрастающей последовательности $\{x_n\}$. Докажем, что точная верхняя граница $a = \sup x_n$ для последовательности и будет ее пределом.

Действительно, по определению точной верхней границы: $\forall n \ x_n \leq a$. Кроме того, какое бы ни взять число $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N, что $x_N > a - \varepsilon$. Так как последовательность монотонна, то при $n > N$: $x_n \geq x_N$, а значит, и $x_n > a - \varepsilon$ и выполняются неравенства: $0 \leq a - x_n < \varepsilon \vee |x_n - a| < \varepsilon$ откуда и следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. □