Билет 34

Дайте определение производных и дифференциалов высших порядков. Докажите формулу Лейбница. Найдите $y^{(10)}(0)$, если $y = \frac{1}{4y^2-8y+3}$

Решение

Определение. *Производной n-го порядка называется рекуррентное соотношение:*

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'; \;\; f^{(0)}(x) = f(x)$$

Определение. *Дифференциалом n-го порядка называется рекуррентное соотношение:*

$$d^{(n)} = f^{(n)}dx^n$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией.

База: $n = 2$, тогда $d^2 f = d(df) = d(f'xdx) = d(f') \cdot dx = (f'(x))' \cdot dx \cdot dx = f^{(2)}(x) \cdot dx^2$.

Переход: $d^n f = d(d^{n-1}f) =$ (по предположению индукции) $= f^{(n)}(x)dx^n$ □

Определение. *Формула Лейбница для производных произведений функций n-го порядка: Пусть $f(x)$ и $g(x)$ —n раз дифференцируемые функции, тогда*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Доказательство. База: $n = 1$, $(f \cdot g)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} \cdot f^{(1)}g^{(0)} + \binom{1}{1} \cdot f^{(0)}g^{(1)} = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$

Переход: рассмотрим $n+1$ производную: $(fg)^{(n+1)} = (\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)})' = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(n-k+1)}g^{(k)} + f^{(n-k)}g^{(k+1)}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} \cdot g^{(k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k+1)}$ Докажем, что эти две суммы можно преобразовать в одну сумму произведений. Сменим индекс суммирования во второй сумме: $k = m-1$, в первой $k = m$. Тогда элементы первой суммы будут иметь вид $\binom{n}{m} f^{(n-m+1)} \cdot g^{(m)}$, а элементы второй —$\binom{n}{m-1} f^{(n-(m-1))} \cdot g^{((m-1)+1)} = \binom{n}{m-1} f^{(n-m+1))} \cdot g^{(m)}$. Из комбинаторики известно, что $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$, тогда сумма таких элементов имеет вид:

$\binom{n}{m} f^{(n-m+1)} \cdot g^{(m)} + \binom{n}{m-1} f^{(n-(m-1))} \cdot g^{((m-1)+1)} = \binom{n+1}{m} f^{(n-m+1))} \cdot g^{(m)}$.

При изменении m от 1 до n такое объединение даёт все слагаемые обеих сумм, кроме:

- члена $i = 0$ в первой сумме, равного $\binom{n}{0} f^{(n-0+1)} g^{(0)} = f^{(n+1)} g^{(0)}$
- члена $i = n$ во второй сумме, равного $\binom{n}{n} f^{(n-n)} g^{(n+1)} = f^{(0)} g^{(n+1)}$

В итоге получаем, что $(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum\limits_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} f^{(n+1-m))} \cdot g^{(m)}. + f^{(0)} g^{(n+1)}$ Обратная замена $m = k$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k))} \cdot g^{(k)}$ $\square$