

Задача 23

Дайте определения эквивалентных функций, бесконечно малой функции и функций одного порядка. Найдите функцию $g(x) = Cx^a$, эквивалентную функции $f(x) = \sqrt[3]{x^6} + 3\sqrt[5]{x}$, при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$.

Решение

Определение. бесконечно малые функции $a(x)$ и $b(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$

Таблица эквивалентных б.м. функций при $x \rightarrow 0$

1.	$\sin x \sim x$	6.	$\ln(1+x) \sim x$
2.	$\arcsin x \sim x$	7.	$\log_a x \sim \frac{x}{\ln a}$
3.	$\operatorname{tg} x \sim x$	8.	$a^x - 1 \sim x \ln a$
4.	$\operatorname{arctg} x \sim x$	9.	$e^x - 1 \sim x$
5.	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	10.	$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Определение. функции $a(x)$ и $b(x)$ называются бесконечно малыми *одного порядка малости* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a(x)}{b(x)} = c, c \neq 0$

Определение. функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

Примеры:

1. $f(x) = (x - 1)^2$ – бесконечно малая при $x \rightarrow 1$.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ – бесконечно малая при $x \rightarrow \infty$.

Задание

Найдите функцию $g(x) = Cx^a$, эквивалентную функции $f(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}$, при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$.

1. $x \rightarrow 0$. Рассмотрим $g(x) = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 3 \cdot \sqrt[5]{x}}}{\sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^6}{x^{1/5}} + 3 \cdot \frac{x^{1/5}}{x^{1/5}}}}{\sqrt[3]{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^{29/5} + 3}}{\sqrt[3]{3}} = 1$$

2. Это значит, что $g(x)$ – искомая эквивалентная функция.

3. $x \rightarrow \infty$, положим $g(x) = x^2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 3 \cdot \sqrt[5]{x}}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + 3 \cdot x^{-29/5}} = 1$

4. А значит, $g(x)$ – искомая эквивалентная функция. Мы красавы!