Задача 11

Покажите, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ имеет предел.

Теорема. *Данная последовательность имеет предел (обозначаемый e).*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что последовательность ограничена и возрастает.

Сначала докажем монотонность. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n} \cdot b^n.$$

Полагая, что $a = 1, b = \frac{1}{n}$, получим:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1-\frac{n-1}{n}).$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \cdots (1-\frac{n-1}{n}).(*)$$

Из равенства (*) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается.

Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ – убывает, поэтому величины $(1-\frac{1}{n}), (1-\frac{1}{n}), \cdots$ возрастают.

Поэтому последовательность $x_n = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$ — возрастающая, при этом $(1+\frac{1}{n})^n > 2.(**)$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (*) на единицу. Правая часть увеличится, получим неравенство:

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа $3, 4, 5, \cdots, n$, стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^n}) < 2.$$

Поэтому: $(1+\frac{1}{n})^n < 1+2 = 3.(***)$ Итак, последовательность ограничена, при этом для $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (**) и (***):

$$2 < (1+\frac{1}{n})^n < 3.$$

Тогда по теоремме Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности исследуемая последовательность имеет предел. $\square$