# Билет 26

Локальные свойства непрерывных функций (об ограниченности, о сохранение знака) и докажите одно из них (на выбор экзаменатора)

**Локальные свойства непрерывных функций:**

1. Если функция f непрерывна в точке a, то она ограниченна в некоторой окрестности этой точки :

   $$\exists c > 0 \exists U_\delta(a) :$$

   $$\forall x \in U_\delta(a) : |f(x)| < c$$

   Следует из свойств пределов.

2. Если функция f непрерывна в точке $a$ и $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a знак функции совпадает со знаком числа f(a):

   $$\exists U_\delta(a) : \forall x \in U_\delta(a) \to sign f(x) = sign f(a)$$

   Следует из свойств пределов.

3. Если $f$ и $g$ непрерывны в точке $a$, то функции : $f \pm g$ , $f \cdot g$ , $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке a.

   Следует из непрерывности и свойств пределов.

4. Если $z = f(y)$ непрерывна в точке $y$, а $y = \varphi(x)$ , непрерывна в точке $x_0$ причем $y_0 = \varphi(x_0)$ , то в некоторой окрестности $x_0$ определена сложная функция равная $f[\varphi(x)]$ которая также непрерывна в точке $x_0$:

   $$\lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) \vee \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$$

   $$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\varphi(x_0)]$$

   Композиция непрерывных функций также является непрерывной.

**Задачка.** *Найти значения a и b, при которых функция*

$$y = \begin{cases} \frac{3 \cdot 2^{x-1} - 3^x}{\sqrt{x+3-2}} & x < 1 \\ ax + b, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{sin(\pi x)}{\cos(\frac{\pi}{4} x)} & 2 \leq x \end{cases}$$

*непрерывна на промежутке* $[0; 4]$

*Решение.* **(1)** На $[0;\ 1]$ и $(2;\ 4)$ $f(x)$ непрерывна (т.к. в них $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0}$ ‘$f(x)$ и $\exists f(a)$)

**(2)** $f(x)$ – непрерына в т. 1 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = a + b = \lim_{x\to 1-0} f(x) =$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{3\cdot((e^{ln(2)(x-1)}-1)-(e^{ln(3)(x-1)}-1))\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-4} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{3\cdot(x-1)(ln(2)-ln(3))\cdot(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} 3\cdot(x-1)(ln(2)-ln(3))\cdot(\sqrt{x+3}+2) = 12(ln2-ln3)$$

$$\Downarrow$$

$$a + b = 12(ln2 - ln3)$$

**(3)** $f(x)$ непрерывна в т. 2 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 2a + b = \lim_{x\to 2+0} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{sin(\pi x)}{cos(\frac{\pi}{4}x)} = \lim_{y\to 0+0} = \frac{sin(\pi y)}{cos(\frac{\pi}{4}y+\frac{\pi}{2})} = *$$

Пусть $y = x - 2$. Тогда $y \to 0 + 0$, $x = y + 2$.

$$* = \lim_{y\to 0+0} \frac{sin(\pi y)}{-sin(\frac{\pi}{4}y)} = \lim_{y\to 0+0} -\frac{sin(\pi y)\cdot\frac{\pi}{4}y}{\pi y\cdot sin(\frac{\pi}{4}y)}\cdot\frac{4\pi}{\pi} = -4$$

$$\Rightarrow 2a + b = -4$$

И, хвала небесам, получаем:

$$\begin{cases} a + b = 12(ln2 - ln3) \\ 2a + b = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -4 - 12(ln2 - ln3) \\ b = 24(ln2 - ln3) + 4 \end{cases}$$

**Ответ:**

$$\begin{cases} a = -4 - 12(ln2 - ln3) \\ b = 24(ln2 - ln3) + 4 \end{cases}$$

$\square$