Материалы для подготовки к экзамену по математическому анализу.

Орлов Никита, Бормисов Влад, Кобелев Максим, Ткачев Андрей, Семенов Михаил, Балабан Ирина, Логинов Михаил, Бернштейн Наталья, Тимур Петров, Усачев Данила, Ушакова Алена, Элбакян Мовсес, Лайд Егор, Гутор Тимофей, Евсеев Борис

16 декабря 2016 г.

Билет (1)**.** *Дайте определение вещественного числа и правила сравнения вещественных чисел. Сформулируйте свойства вещественных чисел, связанные с неравенствами. Докажите, что число* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *– иррациональное.*

Теория

Определение. *Множеством* ***вещественных чисел*** *называют такое множество элементов, на котором определены операции* ***сложения*** $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *и* ***умножения*** $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, которое удовлетворяет следующим аксиомам:*

1. *Сложение*

   1. *Существует такой нейтральный элемент 0, такой что* $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x+0 = 0+x = x$

   2. $\forall x \in R$ *существует противоположный элемент* $(-x): \; x+(-x) = (-x)+x = 0$

   3. *Ассоциативность:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)$

   4. *Коммутативность:* $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x+y = y+x$

2. *Умножение*

   1. *Существует такой нейтральный элемент 0, такой что* $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x\cdot 1 = 1\cdot x = x$

   2. $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ *существует обратный элемент* $x^{-1}: \; x^{-1}\cdot x = x\cdot x^{-1} = 1$

   3. *Ассоциативность:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

   4. *Коммутативность:* $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x\cdot y = y\cdot x$

3. *Дистрибутивность:* $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x+y)z = xz+yz$

4. *Порядок*

   Для любых элементов $a, b, c \in \mathbb{R}$ *определена операция* $a \leqslant b$*, такая что*

   1. $a \leqslant a$

   2. $(a \leqslant b \wedge b \leqslant a) \Rightarrow a = b$

   3. $(a \leqslant b \wedge b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$

   4. *Справедливо утверждение* $(a \leqslant b \vee b \leqslant a)$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow\ x + z \leqslant y + x$$
$$\forall x, y :\ 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y\ \Rightarrow\ 0 \leqslant xy$$

5. *Полнота Пусть есть два непустых множества* $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$. *Тогда если* $x \in X, y \in Y, x \leqslant y \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leqslant c \leqslant y$.

   Пример такого поля можно построить при помощи бесконечных десятичных дробей.

Решение

Задача. *Докажите, что* $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Доказательство. Для начала докажем, что $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$. Пусть $\sqrt{6} = \frac{p}{q}, GCD(p, q) = 1$. Тогда

$$6 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 6q^2 = p^2 \Rightarrow 6 \mathrel{\vdots} p \Rightarrow 6 \mathrel{\vdots} p \Rightarrow p = 2k$$

$$6q^2 = 4k^2 \Rightarrow 3q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \mathrel{\vdots} 2$$

Получили, что дробь сократима, что является противоречием.
Теперь докажем, что $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin Q$:

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

Так как иррациональность числа $\sqrt{6}$ уже доказана, значит все выражение иррационально. $\square$

Билет (2). *Дайте опредления ограниченного (сверху, снизу) множества действительных чисел, верхней и нижней граней, точных верхней и нижней граней. Покажите, что множество*

$$X = \left\{ \frac{n^2+n}{n^2+1} | n \in \mathbb{N} \right\}$$

ограничено и найдите $supX$.

Теория

Определение.

Множество $M \subset R$ *ограничено* ***сверху***, *если* $\exists\ \overline{x} \in R : \forall x \in M \Rightarrow x \leq \overline{x}$

Множество $M \subset R$ *ограничено* ***снизу***, *если* $\exists\ \underline{x} \in R : \forall x \in M \Rightarrow \underline{x} \leq x$

Число $\overline{x}$ *называется верхней гранью,* $\underline{x}$ *- нижней гранью.*

Минимальное число из верхних граней называется точной верхней гранью, максимальное число из нижних граней называется точной нижней гранью.

Решение

Выпишем несколько членов последовательности:

$$f(n) = \frac{n^2+n}{n^2+1}$$

$$f(1) = 1$$

$$f(2) = 6/5$$

$$f(3) = 12/10 = 6/5$$

$$f(4) = 20/17$$

$$f(5) = 15/13$$

$$f(6) = 42/37$$

Докажем по индукции, что при $n > 3 : f(n) > f(n+1)$.

База верна. Индукционный переход:

$$\frac{n^2+n}{n+1} - \frac{(n+1)^2+n+1}{n+1+1} = \frac{n^2+n}{n+1} - \frac{n^2+2n+3}{(n+2)} =$$

$$= \frac{(n^2+n)(n+2)-(n^2+2n+3)(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n^2+2n)-(n^2+2n+3)}{(n+2)} \leqslant 0$$

Значит разность между предыдущим и следующим отрицательна, а значит последовательность убывает. Это значит, что все следующие числа меньше, чем 6/5

Билет (4). *Сформулируйте теорему о существовании точных верхней и нижней граней и приведите схему ее доказаиельства. Докажите утверждение, пользуясь методом математической индукции*

Пункт а)

Теорема об отделимости:
Пусть

$$X \subset R, Y \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset;$$

$$\forall x \in X, y \in Y : x \leq y.$$

Тогда

$$\exists supX, infY : \forall x \in X, y \in Y : x \leq supX \leq infY \leq y.$$

Пункт б)

Доказать по индукции:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

База $n = 1$:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3+1}}; \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Предположим, что $\prod_{i=i}^{k} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ *верно для некоторого k. Для k+1 выражение будет иметь вид:*

$$\prod_{i=i}^{k} \frac{2i-1}{2i} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}};$$

$$\prod_{i=i}^{k} \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{2k+2}{(2k+1)\sqrt{3k+4}};$$

Чтобы из предположения индукции следовала верность утверждения выше, докажем еще один факт:

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \leq \frac{2k+2}{(2k+1)\sqrt{3k+4}};$$

$$\frac{2k+1}{2k+1} \cdot \sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}} \geq 1;$$

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2} \cdot \frac{3k+1}{3k+4} \geq 1;$$

$$\frac{(4k^2+8k+4)(3k+1)}{(4k^2+4k+1)(3k+4)} \geq 1;$$

$$12k^3 + 28k^2 + 20k + 4 \geq 12k^3 + 28k^2 + 19k + 4;$$

$$20k \geq 19k;$$

Пункт в)

Здесь приведены также аксиомы, которые возможно не требуются в задании. Арифметические операции на $\mathbb{R}$*:*
Сложение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$*:*
1. $\exists 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x;$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R} : (-x) + x = x + (-x) = 0;$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ *– ассоциативность;*
4. $\forall x, y : x + y = y + x$ *– коммутативность;*

Умножение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$
1. $\exists 1 : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x;$
2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1;$
3. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (xy)z = x(yz)$ *– ассоциативность;*
4. $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = yx$ *– коммутативность;*
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$ *– дистрибутивность;*

Билет (5). *Дайте определение равномозных множеств, счетного множества. Докажите, что счетное объединение счетных множеств счетно. Покажите, что* (0,1] *равномощно* $[0,1]$.

Пункт г)

Множества называются равномощными, если существует биекция из одного множества в другое.

Пункт д)

Множество называется счетным, если оно равномощно $\mathbb{N}$

Пункт е)

Счетное объединение – объединение счетного множества множеств.
Пусть есть счетное множество множеств $A_0, A_1, A_2 \ldots$. *Тогда составим такую таблицу, что в i-й строке на j-м месте будет стоять элемент i-го множества(множеств счетное количество – можем занумеровать их) с номером j(все множества счетны – можем занумеровать элементы внутри них). Этот элемент обозначим за* a_{ij}. *Далее выделим в этой таблице «диагонали», т.е. последовательности элементов, сумма индексов которых равна. Нулевая диагональ – левый верхний элемент* a_{00}*; первая диагональ, элементы* a_{01} *и* a_{10}*; вторая –* a_{02}, a_{11}, a_{20}... *Далее будем строить последовательность всех элементов всех множеств. Будем брать диагонали по возрастанию суммы индексов в них и дописывать в конец последовательности(в самом начале пустой) числа этой диагонали в порядке возрастания номера строки(= убывания номера столбца). При этом в случае, если очередной выписываемый элемент уже встретился и был выписан ранее, то не будем его выписывать. Ясно, что в итоге получится счетное множество, т.к. счетно как каждое из множеств, так и множество всех множеств. Ч.т.д.*

Пункт ж)

Из $(0;1]$ *выделим в множество A бесконечную убывающую последовательность:* $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$. *Останется* $(0;1] \setminus A$. *Из* $[0;1]$ *выделим в множество* $A`$ *сперва 0, а затем точно такую же последовательность, как выделили из* $(0;1]$. *Останется* $[0;1] \setminus A`$. *Заметим, что после выделения A и* $A`$ *и там и там остались одинаковые множества. Биекция между ними очевидна. Осталось провести биекцию между выделенными последовательностями:*

$$A = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\},$$

$$A` = \{0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}.$$

Просто сопоставим элементы этих множеств таким образом: $\frac{1}{1} \leftrightarrow 0, \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leftrightarrow \frac{1}{3} \ldots$

Билет (6). **Пункт з)**

(этот пункт до конца не хватило времени доказать, но гуглится легко)0)
Чтобы показать счетность $\mathbb{Q}$*, покажем сперва счетность множества неотрицательных рациональных чисел, затем скажем, что для отрицательных рассуждение аналогичное, и что из счетности этих двух множеств вытекает, что их объединение так же счетно(пруф – 5.в для случая с всего двумя множествами).*
Неотрицательное рациональное число представимо в виде пары чисел – натурального или нулевого числителя и натурального ненулевого знаменателя. Получается, есть биекция из множества положительных рациональных чисел в декартово произведение ...

Пункт и)

Чтобы показать несчетность $\mathbb{R}$*, достаточно показать несчетность (0;1).*
Предположим, интервал счетен и мы занумеровали все числа в нём каким-то образом. Тогда их можно выписать в таком виде:

$$x_1 = \overline{0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}...}$$
$$x_2 = \overline{0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}...}$$
$$x_3 = \overline{0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}...}$$
$$...$$

(тут a_{ij} *– j-ая цифра после точки в i-ом числе)*
Ясно, что все эти числа принадлежат указанному интервалу, кроме тех, где все цифры нули или девятки.
Построим теперь такое число x, которое тоже будет принадлежать интервалу, но будет отлично от любого из тех, что нам удалось занумеровать и выписать выше:

$$x = \overbrace{0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}...},$$

где $b_{ii} \neq aii, b_{ii} \neq 0, b_{ii} \neq 9$*. Тогда получается, что x отличен от* x_i *в i-й позиции после точки, т.е. отличен от любого из чисел. Значит, как бы мы не нумеровали числа этого интервала, в нем всегда можно будет найти незанумерованное.*

Пункт к)

Множество, состоящее из десятичных дробей с нулевой целой частью и дробной, составленной из нулей и единичек не будет счетно по аналогии с несчетностью $\mathbb{R}$*.*
Точно так же предположим, что смогли занумеровать все числа вида, описанного в задаче, далее составим еще одно число, отличающееся от всех занумерованных в какой-то одной позиции. То есть как бы мы не нумеровали все такие числа, всегда найдется незанумерованное число.

Билет (10)**.** *Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей и сформулируйте их свойства. Сформулируйте арифметические свойства пределов и докажите их (одно на выбор экзаменатора). Найдите* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{2n^4+3}\cdot\sqrt[7]{3n^3-1}}{\sqrt[15]{7n^{18}+3}+\sqrt[3]{4n^4+1}}$.

Решение

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$*, т.е.* $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| < \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon)$.

Свойства б.м. последовательностей:

1. $\exists \lim y_n = a \Leftrightarrow \{x_n = y_n - a\}$ *– бесконечно малая.*
2. *Сумма* ***конечного*** *числа бесконечно малых посл-ей – есть бесконечно малая посл-ть.*
3. *Сумма бесконечно малой и ограниченной последовательности – бесконечно малая последовательность.*

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно большой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$*, т.е.* $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| > \varepsilon\ \forall n > N(\varepsilon)$.

Свойства б.б. последовательностей.

1. *Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.*
2. *Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.*
3. *Произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность. Произведение бесконечно большой последовательности на константу есть бесконечно большая последовательность.*

Арифметические свойства пределов.

Если существует $\lim x_n = a$ *и* $\lim y_n = b$*, то*

1. $\lim(x_n \pm y_n) = \lim(x_n) \pm \lim(y_n) = a \pm b$.

   Доказательство. $\exists \alpha_n = x_n - a$ – б. м. и $\exists \beta_n = y_n - b$ – б. м.

   Тогда внимательно посмотрим на $z_n = x_n + y_n$. Осознаем, что $\{z_n - a - b\}$ – бесконечно малая последовательность ($z_n - a - b = \alpha_n + \beta_n$ – конечная сумма б.м. $|z_n - a - b| \le |x_n - a| + |y_n - b| = |\alpha_n| + |\beta_n|$).

   По свойству (1) б.м.: $\{z_n - a - b\}$ - беск. малая $\Leftrightarrow \lim z_n = a + b$. □

2. $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n)\lim(y_n) = a\cdot b$.

   Доказательство 2. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где α, β - беск. малые.

   Тогда $\lim x_n y_n = \lim(\alpha_n + a)(\beta_n + b) = \lim(\alpha_n\beta_n + a\beta + b\alpha + ab) = 0 + 0 + 0 + ab = ab$. □

3. $\exists \lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)} = \frac{a}{b}$*, если* $\forall n:\ y_n \ne 0,\ b \ne 0$.

   Доказательство 3. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где α, β - беск. малые.

   Тогда $\lim(\dfrac{x_n}{y_n}) = \ lim(\dfrac{\alpha_n + a}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b} + \alpha\dfrac{1}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b})$, но так как $\lim(\frac{a}{\beta_n + b} - \frac{a}{b}) = 0$, то $\lim \frac{a}{\beta_n + b} = \frac{a}{b}$. □

Билет (11).

Теорема. *Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел.*

Теорема (Теорема Вейерштрасса (о пределе монотонной ограниченной последовательности))**.** *Если последовательность является возрастающей и ограниченной сверху, то:* $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \sup x_n$.

Аналогично для убывающей и ограниченной снизу последовательности: $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = \inf x_n$.

Доказательство. Докажем теорему для монотонной возрастающей последовательности $\{x_n\}$. Докажем, что точная верхняя граница $a = \sup x_n$ для последовательности и будет ее пределом.

Действительно, по определению точной верхней границы: $\forall n\ x_n \leq a$. Кроме того, какое бы ни взять число $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N, что $x_N > a - \varepsilon$. Так как последовательность монотонна, то при $n > N : x_n \geq x_N$, а значит, и $x_n > a - \varepsilon$ и выполняются неравенства: $0 \leq a - x_n < \varepsilon \vee |x_n - a| < \varepsilon$ откуда и следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

Билет (12). *Покажите, что последовательность* $(1+\frac{1}{n})^n$ *имеет предел.*

Теорема. *Данная последовательность имеет предел (обозначаемый e).*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_n = (1+\frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что последовательность ограничена и возрастает.

Сначала докажем монотонность. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}\cdot a^{n-1}\cdot b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot a^{n-2}\cdot b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}\cdot b^n.$$

Полагая, что $a=1, b=\frac{1}{n}$, получим:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdot n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).(*)$$

Из равенства (*) следует, что с увеличением n число положительных слагаемых в правой части увеличивается.

Кроме того, при увеличении n число $\frac{1}{n}$ – убывает, поэтому величины $(1-\frac{1}{n}), (1-\frac{1}{n}), \cdots$ возрастают.

Поэтому последовательность $x_n = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$ — возрастающая, при этом $(1+\frac{1}{n})^n > 2.(**)$

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (*) на единицу. Правая часть увеличится, получим неравенство:

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа $3, 4, 5, \cdots, n$, стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 2(1-\frac{1}{2^n}) < 2.$$

Поэтому: $(1+\frac{1}{n})^n < 1+2 = 3.(***)$ Итак, последовательность ограничена, при этом для $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства (**) и (***):

$$2 < (1+\frac{1}{n})^n < 3.$$

Тогда по теоремме Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности исследуемая последовательность имеет предел. □

Билет (13).

Определение (Подпоследовательность). *Пусть есть любая возрастающая последовательность f, и последовательность a. Тогда последовательность $a_{f_0}, a_{f_1}, a_{f_2}, \cdots$ называется подпоследовательностью.*

Определение (Частичный предел). *Это предел какой-то подпоследовательности.*

Определение (Верхний предел).

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} = \sup\{\forall f : \exists \lim_{i\to\infty} x_{f_i}, \lim_{i\to\infty} x_{f_i}\}$$

Говоря словами это точная верхняя грань всех частичных пределов.

Определение (Нижний предел).

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} = \inf\{\forall f : \exists \lim_{i\to\infty} x_{f_i}, \lim_{i\to\infty} x_{f_i}\}$$

Говоря словами это точная нижняя грань всех частичных пределов.

Пример. *Последовательность $a_i = \frac{1}{i}$. Её верхний предел равен нижнему и равен 0. (В самом деле не трудно доказать, что если у последовательности сущетвует предел, то любой её частичный предел ему равен.)*

Пример.

$$x_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + 1}$$

Если в подпоследовательности конечное количество элементов с четными индексами, то с некоторого момента в ней будут только элементы с нечетными индексами, поэтому при подсчете предела мы можем считать что все элементы с нечетными индексами, аналогично с четными, тогда необходимо рассмтреть всего 3 случая.

- ***Есть конечное число элементов с четными индексами.*** *Тогда предел равен*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n + 1}{n + 1} = -1$$

- ***Есть конечное число элементов с нечетными индексами.*** *Тогда предел равен*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 1}{n + 1} = 1$$

- ***Есть бесконечное число элементов с четными индексами и бесконечное число с нечетными.*** *Предела не существует, иначе возьмем окрестность размера меньше одной десятой, но при четных индексах значение ровно 1, а при нечетных $\frac{1-n}{n+1} = -1 + \frac{2}{n+1}$ разность которых возрастает (и когда-то станет больше 0.1), противоречие.*

Билет (14).

Теорема (Коши-Кантор). *Для любой системы вложенных отрезков*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

Существует хотя бы одна точка c, принадлежайшая всем отрезкам данной системы. Причем если длины отрезков стремятся к 0, то такая точка единственна.

Доказательство.

- ***Существование такой точки.*** *Пусть* $A = \{\forall i |\ a_i\}$, *и* $B = \{\forall i |\ b_i\}$. *Тогда любой элемент из A, меньше любого элемента из B, воспользуемся аксиомой/теоремой о непрерывности и находим такую точку c. (Если это не было аксиомой, то легко видеть, что точка* $c = \sup A$ *нам подходит).*

- ***Если предел длин отрезков равен 0, то такая точка единственна*** *Пусть существует хотя бы две такие точки:* c_1, c_2, *тогда по условию с какого то момента длины отрезков будут меньше чем* $\frac{|c_1 - c_2|}{2}$ *значит отрезок с такой длиной не может содержать в себе обе таких точки, противоречие.*

Задача.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2-n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}})}{\sqrt{2}n\sqrt{1+\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{1}{2n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{2}(\sqrt{1+\frac{1}{2n}} - \sqrt{1-\frac{1}{2n}})}$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Домножим на сопряженное:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$$

Значит

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Применяя это к нашей задаче:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2}\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + o\left(1\right)}{\sqrt{2} + o\left(1\right)} = \sqrt{2}$$

Билет (15).

Теорема (Больцано-Вейерштрасс). *Пусть последовательность x ограничена, тогда можно выделить из неё сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. *Пусть последовательность полностью содержится на отрезке $[a_0, b_0]$, такой существует в силу ограниченности, теперь разобъем его на 2 отрезка и выберем половину в которой бесконечное число элементов из a (такая существует, иначе на отрезке конечное число элементов). Обозначим отрезок как $[a_1, b_1]$. Теперь для любого n, отрезок $[a_n, b_n]$ разобъем пополам и выберем половину на которой будет бесконечное число элементов из последовательности. Тогда длины отрезков стремятся к 0. Теперь на каждом из отрезков выберем любой элемент(не повторяющиеся, можем в силу бесконечности), тогда последовательность будет сходящейся и её предел будет равен $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Что и требовалось доказать.*

Задача.

$$x_n = \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{\pi n}{2}$$

- ***Последовательность не является бесконечно большой*** *Во всех точках вида $n = 4k$, $x_n = 0$ противоречие.*
- ***Последовательность не ограничена*** *Во всех точках вида $n = 4k+1$, $x_n = \frac{(4k+1)^2}{4k+2}$ – а она очевидно не ограничена.*

Билет (22)**.** *Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей и сформулируйте их свойства. Сформулируйте арифметические свойства пределов и докажите их (одно на выбор экзаменатора). Найдите* $\lim\limits_{n\to 2}\dfrac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{1+2x}}{\arcsin(x-2)}$.

Решение

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *т.е.* $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): |x_n|<\varepsilon\ \forall n>N(\varepsilon)$.

Свойства б.м. последовательностей:

1. $\exists \lim y_n = a \Leftrightarrow \{x_n = y_n - a\}$ *– бесконечно малая.*
2. *Сумма* **конечного** *числа бесконечно малых посл-ей – есть бесконечно малая посл-ть.*
3. *Сумма бесконечно малой и ограниченной последовательности – бесконечно малая последовательность.*

Определение. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется бесконечно большой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, *т.е.* $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon): |x_n|>\varepsilon\ \forall n>N(\varepsilon)$.

Свойства б.б. последовательностей.

1. *Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.*
2. *Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.*
3. *Произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность. Произведение бесконечно большой последовательности на константу есть бесконечно большая последовательность.*

Арифметические свойства пределов.

Если существует $\lim x_n = a$ *и* $\lim y_n = b$, *то*

1. $\lim(x_n \pm y_n) = \lim(x_n) \pm \lim(y_n) = a \pm b$.

   Доказательство. $\exists \alpha_n = x_n - a$ – б. м. и $\exists \beta_n = y_n - b$ – б. м.

   Тогда внимательно посмотрим на $z_n = x_n + y_n$. Осознаем, что $\{z_n - a - b\}$ – бесконечно малая последовательность ($z_n - a - b = \alpha_n + \beta_n$ – конечная сумма б.м. $|z_n - a - b| \le |x_n - a| + |y_n - b| = |\alpha_n| + |\beta_n|$).

   По свойству (1) б.м.: $\{z_n - a - b\}$ - беск. малая $\Leftrightarrow \lim z_n = a + b$. □

2. $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n)\lim(y_n) = a\cdot b$.

   Доказательство 2. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где α, β - беск. малые.

   Тогда $\lim x_n y_n = \lim(\alpha_n + a)(\beta_n + b) = \lim(\alpha_n\beta_n + a\beta + b\alpha + ab) = 0 + 0 + 0 + ab = ab$. □

3. $\exists \lim(\frac{x_n}{y_n}) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)} = \frac{a}{b}$, *если* $\forall n:\ y_n \ne 0,\ b \ne 0$.

   Доказательство 3. $x_n = \alpha_n + a$ и $y_n = \beta_n + b$, где α, β - беск. малые.

   Тогда $\lim(\dfrac{x_n}{y_n}) = \ lim(\dfrac{\alpha_n + a}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b} + \alpha\dfrac{1}{\beta_n + b}) = \lim(\dfrac{a}{\beta_n + b})$, но так как $\lim(\frac{a}{\beta_n+b} - \frac{a}{b}) = 0$, то $\lim \frac{a}{\beta_n+b} = \frac{a}{b}$. □

Задание

1. *Домножим на сопряженное* $\lim\limits_{n\to 2} \dfrac{(\sqrt{4x-3}-\sqrt{1+2x})\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})}{\arcsin(x-2)\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})}$.

2. *Скобка в знаментале стремится к* $2\cdot\sqrt{5}$ *При* $->0, arcsin(x)\ x$

$$\lim_{n\to 2} \frac{(\sqrt{4x-3}-\sqrt{1+2x})\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})}{\arcsin(x-2)\cdot(\sqrt{4x-3}+\sqrt{1+2x})} = \frac{2\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot 2\cdot\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3. *Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Билет (23). *Дайте определения эквивалентных функций, бесконечно малой функции и функций одного порядка. Найдите функцию $g(x) = Cx^a$, эквивалентную функции $f(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}$, при x -> 0, x -> inf.*

Решение

Определение. *бесконечно малые функции a(x) и b(x) называются эквивалентными бесконечно малыми при x->a, если* $\lim\limits_{n \to a} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$

Таблица эквивалентных б.м. функций при $x \to 0$

1.	$\sin x \sim x$	6.	$\ln(1+x) \sim x$
2.	$\arcsin x \sim x$	7.	$\log_a x \sim \frac{x}{\ln a}$
3.	$\mathrm{tg} x \sim x$	8.	$a^x - 1 \sim x \ln a$
4.	$\mathrm{arctg} x \sim x$	9.	$e^x - 1 \sim x$
5.	$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	10.	$(1+x)^m - 1 \sim mx$

Определение. *функции a(x) и b(x) называются бесконечно малыми одного порядка малости при x->a, если* $\lim\limits_{n \to a} \dfrac{a(x)}{b(x)} = c, c! = 0$

Определение. *функция* $y = f(x)$ *называется бесконечно малой при x -> a, если* $\lim\limits_{n \to a} f(x) = 0$

Примеры:

1. $f(x) = (x-1)^2$ *– бесконечно малая при x -> 1.*
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ *– бесконечно малая при* x -> inf.

Задание

Найдите функцию $g(x) = Cx^a$, *эквивалентную функции* $f(x) = \sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}$, *при x -> 0, x -> inf.*

1. *x -> 0. Рассмотрим* $g(x) = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[15]{x}$

   $$\lim_{n \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 3 \cdot \sqrt[5]{x}}}{\sqrt[3]{x^6 + 3\sqrt[5]{x}}} = \lim_{n \to 0} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^6}{x^{1/5}} + 3 \cdot \frac{x^{1/5}}{x^{1/5}}}}{\sqrt[3]{3}} = \lim_{n \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^{29/5} + 3}}{\sqrt[3]{3}} = 1$$

2. *Это значит, что g(x) - искомая эквивалентная функция.*
3. *x -> inf, положим* $g(x) = x^2$ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6 + 3 \cdot \sqrt[5]{x}}}{x^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[3]{1 + 3 \cdot x^{-29/5}} = 1$
4. *А значит, g(x) - искомая эквивалентная функция. Мы красавы!*

Билет (25). *Дайте определение функции, непрерывной в точке. Дайте класссификацию точек разрыва. Докажите по определению, что функция $y = sin(x^2)$ непрервына в любой точке.*

Определение. *Функция $f(x)$ называеттся непрерываной в точке $x = x_0$, если для любой окрестности $V(y_0)$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $U(y_0)$ такая, что $f(U(x_0)) \subseteq V(y_0)$*

Определение (по Коши). *Функция $f(x)$ ялвяется непрерывной в точке $x = x_0$, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) : \forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Определение (по Гейне). *Функция $f(x)$ ялвяется непрерывной в точке $x = x_0$, если*

$$\forall \{x_n\} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Определение (через приращение). *Функция $f(x)$ ялвяется непрерывной в точке $x = x_0$, если*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$$

Классификация точек разрыва?

1. *Если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = b$, но $\nexists f(a) : f(a) = b$, то функция терпит устранимый разрыв в точке a.*
2. *Если $\exists \lim_{x\to a^-} f(x) = \alpha$, $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \beta$ и $\alpha \neq \beta$, то функция терпит разрыв первого рода в точке a.*
3. *Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен $+\infty$ или $-\infty$, то функция терпит разрыв второго рода в точке a.*

Решение

По определению, $f(x)$ непрерывная в точке a, если она определена в точке a и $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.
Так как $f(x) = sin(x^2)$ определена на всем $\mathbb{R}$, то $\forall a \in \mathbb{R} \exists f(a)$.
Осталось проверить верность предела

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (sin((a + \Delta x)^2) - sin(a^2)) = 0$$

Найдем первый предел

$$\lim_{\Delta x\to 0} sin((a + \Delta x)^2) = \lim_{\Delta x\to 0} sin(a^2 + 2\Delta x a + \Delta x^2) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} sin(a^2 + 2\Delta x a) \cdot cos(\Delta x)^2 + \lim_{\Delta x\to 0} cos(a^2 + 2\Delta x a) \cdot sin(\Delta x)^2 =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} sin(a^2 + 2\Delta x a) \cdot \lim_{\Delta x\to 0} cos(\Delta x)^2 =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} sin(a^2) cos(2\Delta x a) + \lim_{\Delta x\to 0} cos(a^2) sin(2\Delta x a) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} sin(a^2) = sin(a^2)$$

В итоге получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (sin((a + \Delta x)^2) - sin(a^2)) = \lim_{\Delta x\to 0} (sin(a^2) - sin(a^2)) = 0$$

$\square$

Билет (28).

Теорема (Теорема Вейерштрасса о достижимости точных граней функцией, непрерывной на отрезке). *Если функция f непрерывна на отрезке [a,b], то она ограничена на нем и притом достигает своих минимального и максимального значений, т.е. существуют* x_m, $x_M \in [a,\, b]$ *такие, что* $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$ *для всех* $x \in [a{,}b]$.

Доказательство. В силу полноты действительных чисел существует (конечная или бесконечная) точная верхняя грань $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Поскольку M — точная верхняя грань, существует последовательность x_n такая, что $\lim f(x_n) = M$. По теореме Больцано — Вейерштрасса из ограниченной последовательности x_n можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{n_k}, предел которой (назовем его x_M) также принадлежит отрезку [a,b]. В силу непрерывности функции f имеем $f(x_M) = \lim f(x_{n_k})$, но с другой стороны $\lim f(x_{n_k}) = \lim f(x_n) = M$. Таким образом, точная верхняя грань M конечна и достигается в точке x_M. Для нижней грани доказательство аналогично.

Теорема. *Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке.*

Доказательство. Пусть f неограниченна на отрезке [a,b], тогда : $\forall c > 0 \exists x_c \in [a{,}b] : |f(x_c)| > c$
$c = 1 \exists xc \in [a{,}b] : |f(x_1)| > 1$
...
$c = n \exists xc \in [a{,}b] : |f(x_n)| > n$
Получим последовательность $x_n \subset [a{,}b]$, то есть последовательность x_n ограниченная Отсюда по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить подпоследовательность, которая сходится к точке ξ , то есть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = f(\xi)$. $\xi \in [a{,}b]$ по свойству пределов в форме неравенств. Но по условию функция f непрерывна в точке ξ и тогда по определению непрерывности точки по Гейне: $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$. С другой стороны $|f(x_{n_k})| > n_k, n_k \geq k \implies \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ А это противоречит единственности предела. □

□

Билет (29)**.**

Теорема (Коши о промежуточном значении)**.** *Пусть дана непрерывная функция на отрезке* $f \in C\big([a,b]\big)$. *Пусть также* $f(a) \neq f(b)$, *и без ограничения общности предположим, что* $f(a) = A < B = f(b)$. *Тогда для любого* $C \in [A,B]$ *существует* $c \in [a,b]$ *такое, что* $f(c) = C$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $g(a) < 0$ $g(b) > 0$. Покажем, что существует такая точка $c \in [a,b]$, что $g(c) = 0$. Разделим отрезок $[a,b]$ точкой x_0 на два равных по длине отрезка, тогда либо $g(x_0) = 0$ и нужная точка $c = x_0$ найдена, либо $g(x_0) \neq 0$ и тогда на концах одного из полученных промежутков функция $g(x)$ принимает значения разных знаков (на левом конце меньше нуля, на правом больше). Обозначив полученный отрезок $[a_1,b_1]$, разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. Тогда, либо через конечное число шагов придем к искомой точке с, либо получим последовательность вложенных отрезков $[a_n,b_n]$ по длине стремящихся к нулю и таких, что $g(a_n) < 0 < g(b_n)$. Пусть с - общая точка всех отрезков (согласно принципу Кантора, она существует и единственна) $[a_n,b_n]$ $n = 1,2,...$ Тогда $c = \lim a_n = \lim b_n$, и в силу непрерывности функции $g(x) : g(c) = \lim g(a_n) = \lim g(b_n)$. Поскольку $\lim g(a_n) \leq 0 \leq \lim g(b_n)$, получим, что $g(c) = 0$. ☐

Теорема (Коши о нуле непрерывной функции)**.** *Если функция непрерывна на некотором отрезке и на концах этого отрезка принимает значения противоположных знаков, то существует точка, в которой она равна нулю. Данная теорема следует из предыдущей.*

Задача

Докажите, что уравнение $x^3 + 5x - 1 = 0$ *имеет единственный корень с и найдите его с точностью 0.01 методом половинного деления.*

Решение

Найдем производную функции $f(x) = x^3+5x-1$. *Она равна* $3x^2+5$. *Легко убедиться, что не существует решения уравнения* $3x^2 + 5 = 0$, *а это означает, что функция монотонна. Тогда получается, что у исходного уравнения может быть только одно решение. Заметим, что* $f(a) = f(0) = -1$, $f(b) = f(1) = 5$. *Тогда по теореме Коши, корень находится между числами 0 и 1. Будем искать его методом дихотомии.* $c_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$. $f(c_1) = 1.875$. $f(a) \cdot f(c1) < 0$ *, значит корень лежит на отрезке* $(0,0.5)$. $c_2 = \frac{0.5}{2} = 0.25$. $f(c_2) = 0.29$. $c_3 = \frac{0.25}{2} = 0.125$. $f(c3) \cdot f(0.25) < 0 \implies$ *корень лежит между 0.125 и 0.25. Повторяем аналогичные действия, пока* $f(c_n)$ *не станет меньше 0.01.*

Билет (30)**. Определения**

Производная функции

Производная функции в точке: $\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
Правая производная: $\lim_{\Delta x\to +0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
Левая производная: $\lim_{\Delta x\to -0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Геометрический смысл производной

Если функция $f\colon U(x_0)\to\mathbb{R}$ *имеет конечную производную в точке* x_0*, то в окрестности* $U(x_0)$ *её можно приблизить линейной функцией* $f_l(x)\equiv f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$*. Функция* f_l *называется касательной к* f *в точке* x_0 *Число* $f'(x_0)$ *является угловым коэффициентом (угловым коэффициентом касательной) или тангенсом угла наклона касательной прямой.*

Задача

Показать по определению, что производная $\sin^2(x)$ *равна* $\sin(2x)$*.*

Решение

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin^2(x+\Delta x)-sin^2(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sin(x+\Delta x)-sin(x))\cdot(\sin(x+\Delta x)+sin(x)))}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin(\frac{\Delta x)}{2})\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})2\cos(\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin(x+\frac{\Delta x)}{2})}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin(\Delta x)\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\cdot\sin(x+\frac{\Delta x)}{2})}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(2x+\Delta x)\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x}=\sin(2x)$$

Билет (34). *Дайте определение производных и дифференциалов высших порядков. Докажите формулу Лейбница. Найдите* $y^{(10)}(0)$*, если* $y = \frac{1}{4y^2-8y+3}$

Решение

Определение. *Производной* n*-го порядка называется рекуррентное соотношение:*

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'; \;\; f^{(0)}(x) = f(x)$$

Определение. *Дифференциалом* n*-го порядка называется рекуррентное соотношение:*

$$d^{(n)} = f^{(n)}dx^n$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией.
База: $n = 2$, тогда $d^2f = d(df) = d(f'xdx) = d(f') \cdot dx = (f'(x))' \cdot dx \cdot dx = f^{(2)}(x) \cdot dx^2$.
Переход: $d^nf = d(d^{n-1}f) =$ (по предположению индукции) $= f^{(n)}(x)dx^n$ □

Определение. *Формула Лейбница для производных произведений функций* n*-го порядка: Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *—*n *раз дифференцируемые функции, тогда*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Доказательство. База: $n = 1$, $(f \cdot g)' = f'g + fg' = \binom{1}{0} \cdot f^{(1)}g^{(0)} + \binom{1}{1} \cdot f^{(0)}g^{(1)} = \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$

Переход: рассмотрим $n+1$ производную: $(fg)^{(n+1)} = (\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)})' = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{(n-k+1)}g^{(k)} + f^{(n-k)}g^{(k+1)}) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)} \cdot g^{(k)} + \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k+1)}$ Докажем, что эти две суммы можно преобразовать в одну сумму произведений. Сменим индекс суммирования во второй сумме: $k = m - 1$, в первой $k = m$. Тогда элементы первой суммы будут иметь вид $\binom{n}{m} f^{(n-m+1)} \cdot g^{(m)}$, а элементы второй —$\binom{n}{m-1} f^{(n-(m-1))} \cdot g^{((m-1)+1)} = \binom{n}{m-1} f^{(n-m+1))} \cdot g^{(m)}$. Из комбинаторики известно, что $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$, тогда сумма таких элементов имеет вид:
$\binom{n}{m} f^{(n-m+1)} \cdot g^{(m)} + \binom{n}{m-1} f^{(n-(m-1))} \cdot g^{((m-1)+1)} = \binom{n+1}{m} f^{(n-m+1))} \cdot g^{(m)}$.
При изменении m от 1 до n такое объединение даёт все слагаемые обеих сумм, кроме:

- члена $i = 0$ в первой сумме, равного $\binom{n}{0} f^{(n-0+1)} g^{(0)} = f^{(n+1)} g^{(0)}$
- члена $i = n$ вло второй сумме, равного $\binom{n}{n} f^{(n-n)} g^{(n+1)} = f^{(0)} g^{(n+1)}$

В итоге получаем, что $(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)}g^{(0)} + \sum\limits_{m=1}^{n} \binom{n+1}{m} f^{(n+1-m))} \cdot g^{(m)}. + f^{(0)}g^{(n+1)}$ Обратная замена $m = k$, тогда $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k))} \cdot g^{(k)}$ □

Билет (35). *Дайте определения точек локального экстремума. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.*

Решение

Определение. *Пусть D – область определения f, тогда точка $x_0 \in D$ называется локальным минимумом (максимумом) функции $f(x)$, если*

$$[\exists u_\delta(x_0)]\big(\forall x \in u_\delta\, f(x_0) \leq f(x)\big)$$

Для максимума аналогично и $f(x_0) \geq f(x)$.

Определение. *Точки локального минимума или максимума называются точками локального экстремума.*

Теорема (Ферма). *Если $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке x_0 и при этом $\exists f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Если существует производная в точке x_0, то существуют левая и правая производные в этой точке, и они равны. Вычислим их по определению:

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0}{x - x_0}$; поскольку в окрестности -0 $\begin{cases} f(x) = f(x_0) < 0 \\ x - x_0 < 0 \end{cases}$, получим $f'_-(x_0) \geq 0$; Аналогично для правой производной: в окрестности $+0$ $\begin{cases} f(x) = f(x_0) < 0 \\ x - x_0 > 0 \end{cases}$, получим $f'_+(x_0) \leq 0$;

При этом они равны: $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$ □

Билет (36). *Сформулируйте теоремы Ролля, Лагранжа, Коши*

Решение

Теорема (**Ролля**). *Если f непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале (a,b) и $f(a) = f(b)$, то*

$$\big[\exists c \in (a,b)\big]\big(f'(c) = 0\big)$$

Доказательство. Если $f = const$, то очевидно $f'(x) = 0$ и $f(a) = f(b)$. Иначе, из непрерывности и ограниченности по теореме Вейерштрасса $[\exists c_1, c_2 \in (a,b)]\big(f(c_1 = inf(f), f(c_2) = sup(f))\big)$. Поскольку $f \neq const$, $f(c_1) < f(c_2)$. При этом хотя бы одна из точек c_1, c_2 внутренняя, то есть не совпадает с a или b, пусть это точка $c_1 \in (a,b)$. Тогда $[\exists \delta > 0]\big(u_\delta(c_1) \subset (a,b)\big)$ и $[\forall x \in u_\delta]\big((c_1) < f(x)\big)$, то есть c_1 – точка локального минимума, а по теореме Ферма $f'(c-1) = 0$. □

Теорема (**Лагранжа**). *Если f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), то*

$$\big[\exists c \in (a,b)\big]\Big(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\Big)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) + \lambda \cdot x$. Подберём такое значение λ, чтобы выполнялось условие теоремы Ролля, то есть $g(a) = g(b)$. Запишем $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$, отсюда $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{a-b}$. Тогда $[\exists c \in (a,b)]\big(g'(c) = 0\big) \Rightarrow f'(c) + \lambda = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, что и требовалось доказать. □

Теорема (**Коши**). *Если f, g непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x) \neq 0$ на (a,b), то*

$$\big[\exists c \in (a,b)\big]\Big(\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\Big)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$, где $\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, тогда F удовлетворяет условию теоремы Ролля, то есть $[\exists c]\big(F'(c) = 0\big)$; $f'(c) + \lambda g'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. □