

# Материалы для подготовки к экзамену по математическому анализу.

Орлов Никита, Бормисов Влад, Кобелев Максим, Ткачев Андрей,  
Семенов Михаил, Балабан Ирина, Логинов Михаил, Бернштейн Наталья,  
Тимур Петров, Усачев Данила, Ушакова Алена, Элбакян Мовсес,  
Лайд Егор, Гутор Тимофей, Евсеев Борис

15 декабря 2016 г.

## Задача 1

Дайте определение вещественного числа и правила сравнения вещественных чисел. Сформулируйте свойства вещественных чисел, связанные с неравенствами. Докажите, что число  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  – иррациональное.

## Теория

**Определение 1.** Множеством **вещественных чисел** называют такое множество элементов, на котором определены операции **сложения**  $+$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и **умножения**  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , которое удовлетворяет следующим аксиомам:

### 1. Сложение

1. Существует такой *нейтральный* элемент 0, такой что  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + 0 = 0 + x = x$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}$  существует *противоположный* элемент  $(-x)$  :  $x + (-x) = (-x) + x = 0$
3. *Ассоциативность*:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$
4. *Коммутативность*:  $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x + y = y + x$

### 2. Умножение

1. Существует такой *нейтральный* элемент 1, такой что  $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$  существует обратный элемент  $x^{-1}$  :  $x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$
3. *Ассоциативность*:  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
4. *Коммутативность*:  $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$

### 3. Дистрибутивность: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow (x + y)z = xz + yz$

### 4. Порядок

Для любых элементов  $a, b, c \in \mathbb{R}$  определена операция  $a \leq b$ , такая что

1.  $a \leq a$
2.  $(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$
3.  $(a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$

4. Справедливо утверждение  $(a \leq b \vee b \leq a)$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

$\forall x, y : 0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$

5. Полнота Пусть есть два непустых множества  $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ . Тогда если  $x \in X, y \in Y, x \leq y \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : x \leq c \leq y$ .

## Решение

**Задача.** Докажите, что  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

*Доказательство.* Для начала докажем, что  $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ . Пусть  $\sqrt{6} = \frac{p}{q}, GCD(p, q) = 1$ . Тогда

$$6 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 6q^2 = p^2 \Rightarrow 6 \vdots p \Rightarrow 6 \vdots p \Rightarrow p = 2k$$

$$6q^2 = 4k^2 \Rightarrow 3q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \vdots 2$$

Получили, что дробь сократима, что является противоречием.

Теперь докажем, что  $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ :

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

Так как иррациональность числа  $\sqrt{6}$  уже доказана, значит все выражение иррационально.  $\square$

## Задача 4

### Пункт а)

Теорема об отделимости:

Пусть

$$X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset;$$

$$\forall x \in X, y \in Y : x \leq y.$$

Тогда

$$\exists \sup X, \inf Y : \forall x \in X, y \in Y : x \leq \sup X \leq \inf Y \leq y.$$

### Пункт б)

Доказать по индукции:

$$\prod_{i=1}^n \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

База  $n = 1$ :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3+1}}; \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Предположим, что  $\prod_{i=i}^k \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$  верно для некоторого  $k$ . Для  $k+1$  выражение будет иметь вид:

$$\prod_{i=i}^k \frac{2i-1}{2i} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leq \frac{1}{\sqrt{3k+4}};$$

$$\prod_{i=i}^k \frac{2i-1}{2i} \leq \frac{2k+2}{(2k+1)\sqrt{3k+4}};$$

Чтобы из предположения индукции следовала верность утверждения выше, докажем еще один факт:

$$\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \leq \frac{2k+2}{(2k+1)\sqrt{3k+4}};$$

$$\frac{2k+1}{2k+1} \cdot \sqrt{\frac{3k+1}{3k+4}} \geq 1;$$

$$\frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2} \cdot \frac{3k+1}{3k+4} \geq 1;$$

$$\frac{(4k^2+8k+4)(3k+1)}{(4k^2+4k+1)(3k+4)} \geq 1;$$

$$12k^3+28k^2+20k+4 \geq 12k^3+28k^2+19k+4;$$

$$20k \geq 19k;$$

## Пункт в)

Здесь приведены также аксиомы, которые возможно не требуются в задании. Арифметические операции на  $\mathbb{R}$ :

Сложение  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R}$ :

1.  $\exists 0 : \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$ ;
2.  $\forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R} : (-x) + x = x + (-x) = 0$ ;
3.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$  – ассоциативность;
4.  $\forall x, y : x + y = y + x$  – коммутативность;

Умножение  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$

1.  $\exists 1 : \forall x \in \mathbb{R} : 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ;
2.  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists x^{-1} : x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ ;
3.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (xy)z = x(yz)$  – ассоциативность;
4.  $\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = yx$  – коммутативность;
5.  $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$  – дистрибутивность;

## Задача 5

### Пункт а)

Множества называются равномошными, если существует биекция из одного множества в другое.

## Пункт б)

Множество называется счетным, если оно равномощно  $\mathbb{N}$

## Пункт в)

Счетное объединение – объединение счетного множества множеств.

Пусть есть счетное множество множеств  $A_0, A_1, A_2, \dots$ . Тогда составим такую таблицу, что в  $i$ -й строке на  $j$ -м месте будет стоять элемент  $i$ -го множества (множеств счетное количество – можем занумеровать их) с номером  $j$  (все множества счетны – можем занумеровать элементы внутри них). Этот элемент обозначим за  $a_{ij}$ . Далее выделим в этой таблице «диагонали», т.е. последовательности элементов, сумма индексов которых равна. Нулевая диагональ – левый верхний элемент  $a_{00}$ ; первая диагональ, элементы  $a_{01}$  и  $a_{10}$ ; вторая –  $a_{02}, a_{11}, a_{20}, \dots$ . Далее будем строить последовательность всех элементов всех множеств. Будем брать диагонали по возрастанию суммы индексов в них и дописывать в конец последовательности (в самом начале пустой) числа этой диагонали в порядке возрастания номера строки (= убывания номера столбца). При этом в случае, если очередной выписываемый элемент уже встретился и был выписан ранее, то не будем его выписывать.

Ясно, что в итоге получится счетное множество, т.к. счетно как каждое из множеств, так и множество всех множеств. Ч.т.д.

## Пункт г)

Из  $(0; 1]$  выделим в множество  $A$  бесконечную убывающую последовательность:  $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ . Останется  $(0; 1] \setminus A$ . Из  $[0; 1]$  выделим в множество  $A'$  сперва 0, а затем точно такую же последовательность, как выделили из  $(0; 1]$ . Останется  $[0; 1] \setminus A'$ . Заметим, что после выделения  $A$  и  $A'$  и там и там остались одинаковые множества. Биекция между ними очевидна. Осталось провести биекцию между выделенными последовательностями:

$$A = \{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\},$$

$$A' = \{0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}.$$

Просто сопоставим элементы этих множеств таким образом:  $\frac{1}{1} \leftrightarrow 0, \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \leftrightarrow \frac{1}{3}, \dots$

## Задача 6

### Пункт а)

(этот пункт до конца не хватило времени доказать, но гуглится легко)0 )

Чтобы показать счетность  $\mathbb{Q}$ , покажем сперва счетность множества неотрицательных рациональных чисел, затем скажем, что для отрицательных рассуждение аналогичное, и что из счетности этих двух множеств вытекает, что их объединение так же счетно (пруф – 5.в для случая с всего двумя множествами).

Неотрицательное рациональное число представимо в виде пары чисел – натурального или нулевого числителя и натурального ненулевого знаменателя. Получается, есть биекция из множества положительных рациональных чисел в декартово произведение ...

## Пункт б)

Чтобы показать несчетность  $\mathbb{R}$ , достаточно показать несчетность  $(0;1)$ .

Предположим, интервал счетен и мы занумеровали все числа в нём каким-то образом. Тогда их можно выписать в таком виде:

$$x_1 = \overline{0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}\dots}$$

$$x_2 = \overline{0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}\dots}$$

$$x_3 = \overline{0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}\dots}$$

...

(тут  $a_{ij}$  –  $j$ -ая цифра после точки в  $i$ -ом числе)

Ясно, что все эти числа принадлежат указанному интервалу, кроме тех, где все цифры нули или девятки.

Построим теперь такое число  $x$ , которое тоже будет принадлежать интервалу, но будет отлично от любого из тех, что нам удалось занумеровать и выписать выше:

$$x = \overbrace{0.b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}\dots},$$

где  $b_{ii} \neq a_{ii}$ ,  $b_{ii} \neq 0$ ,  $b_{ii} \neq 9$ . Тогда получается, что  $x$  отличен от  $x_i$  в  $i$ -й позиции после точки, т.е. отличен от любого из чисел. Значит, как бы мы не нумеровали числа этого интервала, в нем всегда можно будет найти занумерованное.

## Пункт в)

Множество, состоящее из десятичных дробей с нулевой целой частью и дробной, составленной из нулей и единиц не будет счетно по аналогии с несчетностью  $\mathbb{R}$ .

Точно так же предположим, что смогли занумеровать все числа вида, описанного в задаче, далее составим еще одно число, отличающееся от всех занумерованных в какой-то одной позиции. То есть как бы мы не нумеровали все такие числа, всегда найдется занумерованное число.

## Задача 10

Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей и сформулируйте их свойства. Сформулируйте арифметические свойства пределов и докажите их

(одно на выбор экзаменатора). Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{2n^4 + 3} \cdot \sqrt[7]{3n^3 - 1}}{\sqrt[15]{7n^{18} + 3} + \sqrt[3]{4n^4 + 1}}$ .

## Решение

**Определение 2.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно малой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| < \varepsilon \forall n > N(\varepsilon)$ .

**Свойства б.м. последовательностей:**

1.  $\exists \lim y_n = a \Leftrightarrow \{x_n = y_n - a\}$  – бесконечно малая.
2. Сумма **конечного** числа бесконечно малых посл-ей – есть бесконечно малая посл-ть.
3. Сумма бесконечно малой и ограниченной последовательности – бесконечно малая последовательность.

**Определение 3.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| > \varepsilon \forall n > N(\varepsilon)$ .

#### Свойства б.б. последовательностей.

1. Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.
2. Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.
3. Произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность. Произведение бесконечно большой последовательности на константу есть бесконечно большая последовательность.

### Арифметические свойства пределов.

Если существует  $\lim x_n = a$  и  $\lim y_n = b$ , то

1.  $\lim(x_n \pm y_n) = \lim(x_n) \pm \lim(y_n) = a \pm b$ .

*Доказательство.*  $\exists \alpha_n = x_n - a$  - б. м. и  $\exists \beta_n = y_n - b$  - б. м.

Тогда внимательно посмотрим на  $z_n = x_n + y_n$ . Осознаем, что  $\{z_n - a - b\}$  - бесконечно малая последовательность ( $z_n - a - b = \alpha_n + \beta_n$  - конечная сумма б.м.  $|z_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| = |\alpha_n| + |\beta_n|$ ).

По свойству (1) б.м.:  $\{z_n - a - b\}$  - беск. малая  $\Leftrightarrow \lim z_n = a + b$ .  $\square$

2.  $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n) \lim(y_n) = a \cdot b$ .

*Доказательство 2.*  $x_n = \alpha_n + a$  и  $y_n = \beta_n + b$ , где  $\alpha, \beta$  - беск. малые.

Тогда  $\lim x_n y_n = \lim(\alpha_n + a)(\beta_n + b) = \lim(\alpha_n \beta_n + a\beta + b\alpha + ab) = 0 + 0 + 0 + ab = ab$ .  $\square$

3.  $\exists \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)} = \frac{a}{b}$ , если  $\forall n : y_n \neq 0, b \neq 0$ .

*Доказательство 3.*  $x_n = \alpha_n + a$  и  $y_n = \beta_n + b$ , где  $\alpha, \beta$  - беск. малые.

Тогда  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim\left(\frac{\alpha_n + a}{\beta_n + b}\right) = \lim\left(\frac{a}{\beta_n + b} + \alpha \frac{1}{\beta_n + b}\right) = \lim\left(\frac{a}{\beta_n + b}\right)$ , но так как  $\lim\left(\frac{a}{\beta_n + b} - \frac{a}{b}\right) = 0$ , то  $\lim \frac{a}{\beta_n + b} = \frac{a}{b}$ .  $\square$

## Задача 11

**Теорема.** Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет конечный предел.

**Теорема** (Теорема Вейерштрасса (о пределе монотонной ограниченной последовательности)). Если последовательность является возрастающей и ограниченной сверху, то:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \sup x_n$ .

Аналогично для убывающей и ограниченной снизу последовательности:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \inf x_n$ .

*Доказательство.* Докажем теорему для монотонной возрастающей последовательности  $\{x_n\}$ . Докажем, что точная верхняя граница  $a = \sup x_n$  для последовательности и будет ее пределом.

Действительно, по определению точной верхней границы:  $\forall n x_n \leq a$ . Кроме того, какое бы ни взять число  $\varepsilon > 0$ , найдется такой номер  $N$ , что  $x_N > a - \varepsilon$ . Так как последовательность монотонна, то при  $n > N : x_n \geq x_N$ , а значит, и  $x_n > a - \varepsilon$  и выполняются неравенства:  $0 \leq a - x_n < \varepsilon \vee |x_n - a| < \varepsilon$  откуда и следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .  $\square$

## Задача 12

Покажите, что последовательность  $(1 + \frac{1}{n})^n$  имеет предел.

**Теорема.** Данная последовательность имеет предел (обозначаемый  $e$ ).

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}$ .

Покажем, что последовательность ограничена и возрастает.

Сначала докажем монотонность. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot b^n.$$

Полагая, что  $a = 1, b = \frac{1}{n}$ , получим:

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{n})^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}). \\ (1 + \frac{1}{n})^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \dots (1 - \frac{n-1}{n}). (*) \end{aligned}$$

Из равенства (\*) следует, что с увеличением  $n$  число положительных слагаемых в правой части увеличивается.

Кроме того, при увеличении  $n$  число  $\frac{1}{n}$  убывает, поэтому величины  $(1 - \frac{1}{n}), (1 - \frac{2}{n}), \dots$  возрастают.

Поэтому последовательность  $x_n = \{(1 + \frac{1}{n})^n\}$  — возрастающая, при этом  $(1 + \frac{1}{n})^n > 2$ . (\*\*)

Покажем, что она ограничена. Заменим каждую скобку в правой части равенства (\*) на единицу. Правая часть увеличится, получим неравенство:

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Усилим полученное неравенство, заменив числа  $3, 4, 5, \dots, n$ , стоящие в знаменателях дробей, числом 2:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}).$$

Сумму в скобке найдем по формуле суммы членов геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 \cdot (1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^n}) < 2.$$

Поэтому:  $(1 + \frac{1}{n})^n < 1 + 2 = 3$ . (\*\*\*) И так, последовательность ограничена, при этом для  $n \in \mathbb{N}$  выполняются неравенства (\*\*) и (\*\*\*):

$$2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3.$$

Тогда по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности исследуемая последовательность имеет предел.  $\square$

## Задача 29

**Теорема** (Коши о промежуточном значении). Пусть дана непрерывная функция на отрезке  $f \in C([a, b])$ . Пусть также  $f(a) \neq f(b)$ , и без ограничения общности предположим, что  $f(a) = A < B = f(b)$ . Тогда для любого  $C \in [A, B]$  существует  $c \in [a, b]$  такое, что  $f(c) = C$ .

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $g(x) = f(x) - C$ . Она непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и  $g(a) < 0$ ,  $g(b) > 0$ . Покажем, что существует такая точка  $c \in [a, b]$ , что  $g(c) = 0$ . Разделим отрезок  $[a, b]$  точкой  $x_0$  на два равных по длине отрезка, тогда либо  $g(x_0) = 0$  и нужная точка  $c = x_0$  найдена, либо  $g(x_0) \neq 0$  и тогда на концах одного из полученных промежутков функция  $g(x)$  принимает значения разных знаков (на левом конце меньше нуля, на правом больше). Обозначив полученный отрезок  $[a_1, b_1]$ , разделим его снова на два равных по длине отрезка и т.д. Тогда, либо через конечное число шагов придем к искомой точке  $c$ , либо получим последовательность вложенных отрезков  $[a_n, b_n]$  по длине стремящихся к нулю и таких, что  $g(a_n) < 0 < g(b_n)$ . Пусть  $c$  - общая точка всех отрезков (согласно принципу Кантора, она существует и единственна)  $[a_n, b_n]$   $n = 1, 2, \dots$ . Тогда  $c = \lim a_n = \lim b_n$ , и в силу непрерывности функции  $g(x)$ :  $g(c) = \lim g(a_n) = \lim g(b_n)$ . Поскольку  $\lim g(a_n) \leq 0 \leq \lim g(b_n)$ , получим, что  $g(c) = 0$ .  $\square$

**Теорема** (Коши о нуле непрерывной функции). Если функция непрерывна на некотором отрезке и на концах этого отрезка принимает значения противоположных знаков, то существует точка, в которой она равна нулю. Данная теорема следует из предыдущей.

## Задача

Докажите, что уравнение  $x^3 + 5x - 1 = 0$  имеет единственный корень  $c$  и найдите его с точностью 0.01 методом половинного деления.

## Решение

Найдем производную функции  $f(x) = x^3 + 5x - 1$ . Она равна  $3x^2 + 5$ . Легко убедиться, что не существует решения уравнения  $3x^2 + 5 = 0$ , а это означает, что функция монотонна. Тогда получается, что у исходного уравнения может быть только одно решение. Заметим, что  $f(a) = f(0) = -1$ ,  $f(b) = f(1) = 5$ . Тогда по теореме Коши, корень находится между числами 0 и 1. Будем искать его методом дихотомии.  $c_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5$ .  $f(c_1) = 1.875$ .  $f(a) \cdot f(c_1) < 0$ , значит корень лежит на отрезке  $(0, 0.5)$ .  $c_2 = \frac{0.5}{2} = 0.25$ .  $f(c_2) = 0.29$ .  $c_3 = \frac{0.25}{2} = 0.125$ .  $f(c_3) \cdot f(0.25) < 0 \implies$  корень лежит между 0.125 и 0.25. Повторяем аналогичные действия, пока  $f(c_n)$  не станет меньше 0.01.



## Задача 30

### Определения

### Производная функции

Производная функции в точке:  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Правая производная:  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Левая производная:  $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

### Геометрический смысл производной

Если функция  $f: U(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  имеет конечную производную в точке  $x_0$ , то в окрестности  $U(x_0)$  её можно приблизить линейной функцией  $f_l(x) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Функция  $f_l$  называется касательной к  $f$  в точке  $x_0$ . Число  $f'(x_0)$  является угловым коэффициентом (угловым коэффициентом касательной) или тангенсом угла наклона касательной прямой.

### Задача

Показать по определению, что производная  $\sin^2(x)$  равна  $\sin(2x)$ .

### Решение

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x + \Delta x) - \sin^2(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x + \Delta x) - \sin(x)) \cdot (\sin(x + \Delta x) + \sin(x))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot 2 \cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\Delta x) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x + \Delta x) \cdot \sin(\Delta x)}{\Delta x} = \sin(2x) \end{aligned}$$