

## Задача 22

Дайте определения бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей и сформулируйте их свойства. Сформулируйте арифметические свойства пределов и докажите их (одно на выбор экзаменатора).

Найдите  $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt{1+2x}}{\arcsin(x-2)}$ .

## Решение

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно малой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| < \varepsilon \forall n > N(\varepsilon)$ .

### Свойства б.м. последовательностей:

1.  $\exists \lim y_n = a \Leftrightarrow \{x_n = y_n - a\}$  – бесконечно малая.
2. Сумма **конечного** числа бесконечно малых посл-ей – есть бесконечно малая посл-ть.
3. Сумма бесконечно малой и ограниченной последовательности – бесконечно малая последовательность.

**Определение.** Последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно большой, если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : |x_n| > \varepsilon \forall n > N(\varepsilon)$ .

### Свойства б.б. последовательностей.

1. Сумма бесконечно больших последовательностей одного знака есть бесконечно большая последовательность того же знака.
2. Сумма бесконечно большой и ограниченной последовательностей есть бесконечно большая последовательность.
3. Произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность. Произведение бесконечно большой последовательности на константу есть бесконечно большая последовательность.

## Арифметические свойства пределов.

Если существует  $\lim x_n = a$  и  $\lim y_n = b$ , то

1.  $\lim(x_n \pm y_n) = \lim(x_n) \pm \lim(y_n) = a \pm b$ .

*Доказательство.*  $\exists \alpha_n = x_n - a$  - б. м. и  $\exists \beta_n = y_n - b$  - б. м.

Тогда внимательно посмотрим на  $z_n = x_n + y_n$ . Осознаем, что  $\{z_n - a - b\}$  - бесконечно малая последовательность ( $z_n - a - b = \alpha_n + \beta_n$  - конечная сумма б.м.  $|z_n - a - b| \leq |x_n - a| + |y_n - b| = |\alpha_n| + |\beta_n|$ ).

По свойству (1) б.м.:  $\{z_n - a - b\}$  - беск. малая  $\Leftrightarrow \lim z_n = a + b$ .  $\square$

2.  $\lim(x_n y_n) = \lim(x_n) \lim(y_n) = a \cdot b$ .

*Доказательство 2.*  $x_n = \alpha_n + a$  и  $y_n = \beta_n + b$ , где  $\alpha, \beta$  - беск. малые.

Тогда  $\lim x_n y_n = \lim(\alpha_n + a)(\beta_n + b) = \lim(\alpha_n \beta_n + a\beta + b\alpha + ab) = 0 + 0 + 0 + ab = ab$ .  $\square$

3.  $\exists \lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim(x_n)}{\lim(y_n)} = \frac{a}{b}$ , если  $\forall n : y_n \neq 0, b \neq 0$ .

*Доказательство 3.*  $x_n = \alpha_n + a$  и  $y_n = \beta_n + b$ , где  $\alpha, \beta$  - беск. малые.

Тогда  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim\left(\frac{\alpha_n + a}{\beta_n + b}\right) = \lim\left(\frac{a}{\beta_n + b} + \alpha \frac{1}{\beta_n + b}\right) = \lim\left(\frac{a}{\beta_n + b}\right)$ ,  
но так как  $\lim\left(\frac{a}{\beta_n + b} - \frac{a}{b}\right) = 0$ , то  $\lim \frac{a}{\beta_n + b} = \frac{a}{b}$ .  $\square$

## Задание

1. Домножим на сопряженное  $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x-3} - \sqrt{1+2x}) \cdot (\sqrt{4x-3} + \sqrt{1+2x})}{\arcsin(x-2) \cdot (\sqrt{4x-3} + \sqrt{1+2x})}$ .

2. Скобка в знаменателе стремится к  $2 \cdot \sqrt{5}$  При  $x \rightarrow 0$ ,  $\arcsin(x)$   $\sim$   
 $\lim_{n \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x-3} - \sqrt{1+2x}) \cdot (\sqrt{4x-3} + \sqrt{1+2x})}{\arcsin(x-2) \cdot (\sqrt{4x-3} + \sqrt{1+2x})} = \frac{2 \cdot (x-2)}{(x-2) \cdot 2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

3. Ответ:  $\frac{1}{\sqrt{5}}$