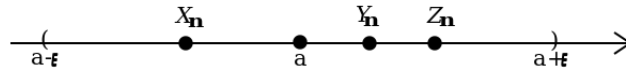


Задача 11

Покажите, что последовательность $(1 + \frac{1}{n})^n$ имеет предел.

Теорема (О трёх последовательностях). Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех $n \geq N_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, то последовательность $\{y_n\}$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$.

Доказательство. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ найдутся номера $N_1 = N_1(\varepsilon)$ и $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geq N_1$ и $z_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geq N_2$. Отсюда и из условия $x_n \leq y_n \leq z_n$ для всех $n \geq N_0$ следует,



что при всех $n \geq N$, где $N = \max(N_0, N_1, N_2)$, выполняется условие $y_n \in U_\varepsilon(a)$. Это означает, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$. \square

Теорема. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, причем $a < b$, то

$$\exists N_0 : \forall n \geq N_0 \rightarrow x_n < y_n.$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, чтобы ε -окрестности точек a и b не пересекались (возьмем, например, $\varepsilon = \frac{(b-a)}{3} > 0$). Согласно определению предела по заданному ε можно найти номера N_1 и N_2 такие, что $x_n \in U_\varepsilon(a)$ при всех $n \geq N_1$ и $y_n \in U_\varepsilon(b)$ при всех $n \geq N_2$. Пусть $N_0 = \max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n \geq N_0$ выполняются неравенства

$$x_n < a + \varepsilon < b - \varepsilon < y_n$$

откуда следует утверждение

$$\exists N_0 : \forall n \geq N_0 \rightarrow x_n < y_n.$$

□

Следствие. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, и $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \geq y_n$ то

$$a \geq b.$$

Доказательство. Предположим, что неравенство $a \geq b$ не выполняется. Тогда $a < b$ и по предыдущей теореме справедливо утверждение

$$\exists N_0 : \forall n \geq N_0 \rightarrow x_n < y_n,$$

которое противоречит условию

$$\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow x_n \geq y_n.$$

Поэтому должно выполняться неравенство $a \geq b$.

□