Тема 1. Множества, операции над множествами

1.1. Выполнить операции над множествами

1) Пусть A={a, b, c, d}, B={c, d, e, f, g}. Построить множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $B\cap\overline{A}$.

2) Пусть U={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} A={1, 2, 3, 4}, B={2, 4, 6, 8}, C={1, 2, 3, 7}, D={4, 7, 9}. Построить множества $(A\cup B\cap\bar{C})\cap\bar{D}$, $(B\cup\bar{A})\cap(D\cup A\cap C)$.

1.2. Представить на кругах Эйлера соотношения между множествами, заданные утверждениями

1) У всех насекомых шесть ног (A - множество всех насекомых, B - множество имеющих 6 ног).

2) У некоторых насекомых есть крылья (B - множество насекомых, C -множество всех, имеющих крылья).

1.3. Изобразить графически отношения между множествами:

$A\subseteq B$; $A\subseteq(B\cap C)$; $A=(B\cap C)$; $(B\cap C)\subseteq A$; $A\subseteq(B\cup C)$; $(B\cup C)\subseteq A$; $A=B\setminus C$.

1.4. Решить задачу. На некоторой планете X были установлены соотношения:

1) Все трёхглазые животные меняют свой цвет.
2) Только излучающие волны страха опасны для человека.
3) Ни одно из цветопеременных животных не имеет рукокрыльев.
4) Все обитатели большого каньона имеют три глаза.
5) Все излучающие волны страха - рукокрылые.

Опасны ли для человека обитатели большого каньона?

1.5. Показать, что из $A\subseteq B$ для призвольного множества C следует:

1) $A\cap C\subseteq B$;
2) $A\subseteq B\cup C$;
3) $A\cap C\subseteq B\cap C$;
4) $A\cup C\subseteq B\cup C$.

1.6. Показать, что из $A\subseteq B\cap C$ следует, что $A\subseteq B$ и $A\subseteq C$.

1.7. Показать, что из $A\cup C\subseteq B$ следует, что $A\subseteq B$ и $C\subseteq B$.

1.8. Доказать связь операций с отношением включения:

$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(A\cup B=B)\Leftrightarrow(A\cap B=A)\Leftrightarrow(A\cap\overline{B}=\varnothing)\Leftrightarrow(\overline{A}\cup B=U)\Leftrightarrow(\overline{B}\subseteq\overline{A})$

1.9. Проверить правильность следствий. В случае, если следование не выполняется, привести соответствующие примеры:

1) Из $A\cap B\subseteq C$ следует $B\subseteq C$.
2) Из $A\cup B\subseteq C$ следует $B\subseteq C$.
3) Из $A\cup B\subseteq D$ и $D\cup G\subseteq C$ следует $A\subseteq C$.
4) Из $A\subseteq B$ следует $A\cup C\subseteq B\cap C$.
5) Из $A\subseteq B$ следует $A\cap C\subseteq B\cup C$.

1.10. Пусть известно, что $A\cap B\subseteq\overline{C}$, $A\cup C\subseteq B$. Следует ли из этого, что $A\cap C=\varnothing$? Проверить соотношение с помощью диаграмм и эквивалентных преобразований.

1.11. Проверить, существуют ли множества A,B,C, такие, что выполняются соотношения: $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\setminus C=\varnothing$.

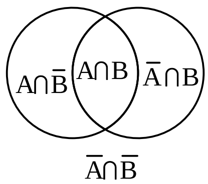
1.12. Доказать с помощью эквивалентных преобразований свойства разности:

1) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
2) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$
3) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$
4) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

1.13. Показать, что разность не ассоциативна, т.е. $(A\setminus B)\setminus C\neq A\setminus(B\setminus C)$

1.14. Привести выражения к аддитивной форме.
1) $(A\cup B)\cap(C\cup B)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D)$
2) $(A\cup C)\cap(C\cup B)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D)$
3) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$
4) $(A\cup\overline{B})\cap(B\cup D)\cap(A\cup C)\cap(B\cup\overline{D})$
5) $(A\cup B)\cap(B\cup C)$
6) $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$

1.15. Пусть заданы пересекающиеся множества A и B. Тогда 4 части плоскости будут соответствовать элементарным пересечениям $A\cap B$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap B$, $\overline{A}\cap\overline{B}$ следующим образом:



Построить изображение трёх пересекающихся множеств и расписать получившиеся части плоскости.

1.16. Даны три множества A,B,C. Записать множества, содержащие все те и только те элементы, которые принадлежат:
1) не менее, чем одному из этих множеств;
2) не менее, чем двум из этих трёх множеств;
3) всем трём множествам;
4) ровно одному из этих трёх множеств;
5) ровно двум из этих трёх множеств;
6) не более, чем одному из этих трёх множеств;
7) не более, чем двум из этих трёх множеств;
8) ни одному из этих множеств.

1.17. Проверить правильность соотношений:
1) $(A\cup C)\setminus(A\cap C)=A\cap\overline{C}\cup\overline{A}\cap C$
2) $(A\cup B)\setminus C=A\cup(B\setminus C)$
3) $(A\cup B)\setminus C=A\cap(B\setminus C)$
4) $A\cap B\cap C=A\cap B\cap(B\cup C)$
5) $A\cup B=(A\setminus(A\cap B))\cup B$
6) $A\cap B\cup A\cap C\cup B\cap C\subseteq A\cup B\cup C$
7) $(A\cup B)\setminus B=A$
8) $A\cap\overline{B}\cap C\subseteq A\cup B$
9) $\overline{A\cup B}\cap C=C\cap\overline{A}\cup\overline{B}\cap C$
10) $\overline{A\cup B}\cap C=C\setminus(C\cap(A\cup B))$
11) $A\cap B\cup\overline{B}\cap C\cup A\cap C=A\cap B\cup\overline{B}\cap C$

12) $A\cup B=(A\dot{-}B)\cup(B\dot{-}A)$
13) $A\dot{-}(A\dot{-}B)=A$
14) $A\setminus B=A\dot{-}(A\cap B)$
15) $A\dot{-}\varnothing=A$

1.18. Решить уравнения с множествами (определить наиболее точным образом множество X и указать, при каком соотношении параметров A, B, C… такое решение существует).

1) $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=B \end{cases}$
2) $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\cap X=C \end{cases}$
3) $\begin{cases} A\cup X=B \\ A\setminus X=B \end{cases}$
4) $\begin{cases} A\cup X=B\cap X \\ A\cap X=C\cup X \end{cases}$
5) $\begin{cases} A\setminus X=C \\ C\setminus X=A \end{cases}$
6) $\begin{cases} A\setminus X=B \\ X\setminus A=C \end{cases}$
7) $\begin{cases} A\setminus X=B \\ X\setminus B=C \end{cases}$
8) $\begin{cases} A\setminus X=X\setminus B \\ X\setminus A=C\setminus X \end{cases}$
9) $\begin{cases} A\cup X=D\cap X \\ A\cap X=C \end{cases}$
10) $\begin{cases} A\cap X=B\setminus X \\ C\cup X=X\setminus A \end{cases}$
11) $\begin{cases} A\cup X=B\setminus X \\ C\cup X=X\setminus A \end{cases}$

Тема 2. Совершенные формы

Здесь и далее обозначение пересечения опускается, AB означает $A\cap B$.

2.1. Привести к совершенной аддитивной нормальной форме представления множеств:

1) $(A\cup B)\setminus AC$;
2) $(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})$;
3) $A\bar{B}C\cup\bar{A}B$;
4) $AB\cup\bar{A}BC$;
5) $AB\,\bar{C}\cup BC$;
6) $A\,\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{B}C$;
7) $AB\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{C}D\cup BD$;
8) $AB\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{C}D\cup\bar{B}\,D$;
9) $(AB\cup BC\cup AC)\setminus ABC$.

2.2. Привести выражения задачи 2.1 к совершенной мультипликативной форме.

2.3. Развалины старинного замка труднодоступны для фотографирования. Нас предупредили, что замок не виден оттуда, откуда видны тесно растущая группа деревьев и современная гостиница, расположенная недалеко от замка, а так же оттуда, откуда видны деревья и разрушенные ворота укрепления рядом с замком. Мы сами установили, что если не видны ни деревья, ни гостиница, то не видны ворота укрепления, а сам замок закрыт холмом. Пусть нет другой информации. Сколько существует видов фотографий замка? Можно ли сфотографировать замок с воротами? (Считаем отдельным видом фотографии с различным набором упоминаемых в задаче объектов)

2.4. Построить покрытия двоичных таблиц:

a)

	1	2	3	4	5	6	7
a	1	1	1				
b			1	1	1		
c	1	1				1	1
d		1		1		1	1

b)

	1	2	3	4
a	1			1
b	1	1		
c		1	1	
d			1	1

c)

	1	2	3	4	5
a	1	1		1	1
b			1	1	1
c	1	1		1	
d	1		1		1

d)

	1	2	3	4	5
a	1		1		1
b	1	1		1	
c		1			1
d			1	1	

e)

	1	2	3	4	5	6	7
a	1		1				
b	1			1			
c		1	1		1		
d				1		1	
e			1		1		1
f					1		
g			1			1	1

2.5. Решить оптимизационную задачу: для фирмы переводчиков надо набрать сотрудников таким образом, чтобы мог осуществляться перевод с каждого из представленных языков и суммарная зарплата была наименьшей из возможных.

		Английский	Немецкий	Французский	Итальянский	Испанский	Греческий	з/п
a	Иванов	1		1	1			6
b	Петров		1			1		3
c	Сидоров	1		1				2
d	Васильев			1	1			3
e	Михайлов					1	1	2
f	Терентьев		1				1	5

2.6. Минимизировать сложность представления множества М в аддитивной форме и в виде скобочной структуры:

$$M = \overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4 \cup \overline{M}_1 M_2\overline{M}_3\overline{M}_4 \cup M_1\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4 \cup \overline{M}_1\overline{M}_2 M_3\overline{M}_4 \cup \overline{M}_1 M_2\overline{M}_3 M_4$$
$$\cup\, \overline{M}_1 M_2 M_3\overline{M}_4 \cup M_1\overline{M}_2 M_3\overline{M}_4 \cup M_1 M_2\overline{M}_3 M_4 \cup M_1 M_2 M_3\overline{M}_4 \cup M_1 M_2\overline{M}_3\overline{M}_4$$

2.7. Минимизировать представления множеств, заданных набором интервалов

1) {0000, 0100, 1000, 0010, 0101, 0110, 1100, 1010, 1101, 1110}
2) {0000, 1000, 0001, 0101, 1100, 1010, 1101, 1110, 1111}
3) {0000, 0100, 1000, 0010, 0101, 0110, 1100, 1010, 1101, 1111}
4) {0001, 0011, 0101, 0111, 1010, 1011, 1110, 1111, 0010}
5) {0000, 0001, 1000, 1001, 1010, 1110, 1011, 1111}

2.8. Минимизировать не полностью определённые множества в классе нормальных форм

1) $M = \begin{cases} M_1\, M_2\overline{M}_3,\ M_1\overline{M}_2 M_4, \overline{M}_1 M_2 M_3\overline{M}_4, M_1\overline{M}_2 M_3\overline{M}_4 \in M \\ \overline{M}_1 M_2\overline{M}_3, \overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4, M_1 M_2 M_3 M_4 \notin M \end{cases}$

2) $M = \begin{cases} M_1\, M_2 M_3\overline{M}_4,\ \overline{M}_1\overline{M}_2 M_3 M_4, \overline{M}_1 M_2 M_3 \in M \\ M_1\overline{M}_2 M_3 M_4, M_1 M_2\overline{M}_3 M_4, \overline{M}_2\overline{M}_3 M_4 \notin M \end{cases}$

3) $M = \begin{cases} \overline{M}_2 M_3 M_4, M_1 M_2\overline{M}_3 M_4, \overline{M}_2\overline{M}_3 M_4 \in M \\ M_1\, M_2 M_3\overline{M}_4,\ \overline{M}_1\overline{M}_2 M_3 M_4, \overline{M}_1 M_2 M_{3_1} \notin M \end{cases}$

4) $M = \begin{cases} M_1\overline{M}_2 M_3\overline{M}_4 M_5, M_1 M_3\overline{M}_5, M_1\overline{M}_3 M_4, M_1 M_2 M_3\overline{M}_4 \in M \\ \overline{M}_1 M_3 M_4, M_1 M_3 M_4 M_5, \overline{M}_1 M_2\overline{M}_4 M_5 \notin M \end{cases}$

5) $M = \begin{cases} M_1\overline{M}_2 M_3\overline{M}_5, \overline{M}_1 M_2 M_3\overline{M}_4, M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 \in M \\ M_1 M_2\overline{M}_3\overline{M}_4, \overline{M}_1\overline{M}_2 M_3 M_5, M_1\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4, \overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_5 \notin M \end{cases}$

6) $M = \begin{cases} M_1M_2\overline{M}_3, \overline{M}_1M_2M_4M_5, M_1\overline{M}_2M_3\overline{M}_5, M_1M_2M_3M_4M_5 \in M \\ \overline{M}_1\overline{M}_2M_3M_5, M_1\overline{M}_2\overline{M}_4M_5, \overline{M}_1M_2\overline{M}_3\overline{M}_5, M_1\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4\overline{M}_5 \notin M \end{cases}$

7) $M = \begin{cases} M_1M_2\overline{M}_3M_4, \overline{M}_1M_2M_4M_5, M_1\overline{M}_2M_3\overline{M}_5, M_1M_2M_3M_4M_5 \in M \\ \overline{M}_1\overline{M}_2M_3M_5, M_1\overline{M}_2\overline{M}_4M_5, \overline{M}_1M_2\overline{M}_3M_4\overline{M}_5, M_1\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_4\overline{M}_5 \notin M \end{cases}$

8) $M = \begin{cases} M_1M_2M_3M_4, \overline{M}_1M_2M_3\overline{M}_5, M_1\overline{M}_2\overline{M}_3M_5, M_1M_3\overline{M}_4M_5 \in M \\ \overline{M}_1\overline{M}_2\overline{M}_3\overline{M}_5, \overline{M}_1\overline{M}_2M_3M_4, M_1\overline{M}_3M_4\overline{M}_5, M_1\overline{M}_2M_3\overline{M}_5 \notin M \end{cases}$

9) $M = \begin{cases} M_1\overline{M}_2\overline{M}_3M_4, M_1\overline{M}_2M_3M_4M_5, M_1\overline{M}_3M_4\overline{M}_5 \in M \\ M_1M_2M_3\overline{M}_4, \overline{M}_1M_2M_3\overline{M}_4M_5, \overline{M}_1M_2\overline{M}_3M_4 \notin M \end{cases}$

Тема 3. Отношения, операции над отношениями

Декартово произведение множеств.

3. 1. Пусть A={a,b,c}, B={a,c}, C={c,d}.Постороить A×B, B×C, A×B×C

3.2 Показать с использованием диаграмм, что для любых множествA, B, C, D выполняется соотношение

(A×B)∩(C×D)= (A×D)∩(C×B).

3.3. Доказать с помощью эквивалентных преобразований, что для любых множествA, B, C выполняется соотношение:

(A\B)×C=(A×C)\(B×C).

3.4. Какое отношение выполняется между объединением произведений (A×B)∪(C×D) и произведением объединений (A∪C)× (D∪B)? В каких случаях выполняется равенство?

3.5. Пусть A≠∅, B≠∅, (A×B)∪(B×A)= C×D. Доказать, что A=B=C=D.

Формы представления отношений.

3.6. Для заданных бинарных отношений, заданных на множества A={a, b, c}, построить матричное и графовое представления. Определить δ_R, ρ_R для каждого из отношений. Построить $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_1 \setminus R_2$, $R_1 \circ R_2$, $R_1 \circ R_2$, $\overline{R_1}$, $\overline{R_2}$.

$$R_1 = \begin{Bmatrix} a & b \\ b & c \\ c & b \\ a & c \end{Bmatrix}, \quad R_2 = \begin{Bmatrix} b & a \\ b & b \\ c & b \\ a & c \end{Bmatrix}.$$

3.7. Найти δ_R, ρ_R , R^{-1}, $R \circ R$, $R \circ R^{-1}$, $R^{-1} \circ R$ для отношений:

а) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbb{N}_0,\ x=3y\}$;

б) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y \in \mathbb{Z},\ x+y=17\}$;

в) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{N}_0$, x делит y нацело$\}$;

г) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{R},\ x+y\le 0\}$;

д) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{R},\ 2x\ge 3y\}$;

е) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ x+y=0 \pmod 2\}$ (здесь и далее mod относится к равенству, т.е, в данном случае, остаток от деления на 2 левой части равенства равен остатку от деления на 2 правой части равенства).

ж) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ x+y=1 \pmod 2\}$;

з) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ x=y+3 \pmod 4\}$;

и) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ x=y+2 \pmod 4\}$;

к) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathbb{N}_0,\ x=2y \pmod 4\}$;

3.8. Пусть A и B - конечные множества, содержащие m и n элементов соответственно.

а) Сколько существует бинарных отношений на $A\times B$?

б) Сколько существует функций из A в B?

в) Сколько существует функций из A на B?

г) Сколько существует 1-1 функций из A в B?

д) Сколько существует взаимнооднозначных соответствий между A и B, при каких значениях m и n?

3.9. Пусть $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,f,e\}$, $C=\{a,c,d,e,f\}$. Построить:

а) функцию из A в B;

б)функцию из A в C;

в) функцию из A на B;

г)1-1 функцию из A в C;

д) взаимнооднозначное отображение для тех множеств, для которых возможно такое построение.

Свойства отношений.

3.10. Определить свойства отношений, заданных на множестве $A=\{a, b, c\}$.

$$R_1 = \begin{Bmatrix} a & b \\ a & c \\ b & c \\ a & a \\ b & b \end{Bmatrix} \quad R_2 = \begin{Bmatrix} a & b \\ a & a \\ b & a \\ c & b \\ b & b \end{Bmatrix}$$

3.11. Для каждого из отношений задач 3.6 и 3.7 построить рефлексивное замыкание, транзитивное замыкание, симметричное замыкание.

3.12. Построить транзитивное замыкание для следующего отношения:

$$R = \begin{Bmatrix} a & b \\ b & c \\ c & a \end{Bmatrix}$$

Определить свойства полученного отношения.

3.13. Построить отношения, обладающие следующими свойствами:

1) рефлексивное, симметричное, не транзитивное;

2) рефлексивное, антисимметричное, не транзитивное;

3) рефлексивное, не симметричное, транзитивное;

4) антисимметричное, транзитивное, не рефлексивное;

5) симметричное, транзитивное, не рефлексивное.

3.14. Для каких отношений R выполняется соотношение

$R^{-1} = \bar{R}$?

3. 15. Пусть конечное множество A содержит n элементов. Сколько на этом множестве существует различных отношений? Отношений, обладающих следующими свойствами:

1) рефлексивных;

2) иррефлексивных;

3) симметричных и рефлексивных;

4) антисимметричных?

3.16. Определить свойства отношений, заданных в задаче 3.7.

Тема 4. Свойства отношений. Специальные бинарные отношения

4.1. Пусть R определено на A×A. Известно, что δ_R=A, R(x,y)&R(z,y)⇒R(x,z). Определить свойства отношения.

4.2. Пусть R, определённое на A×A, транзитивно и симметрично, $\delta_R \cup \rho_R$=A. Доказать, что R – эквивалентность.

4.3. Пусть R рефлексивно, $R(x,y)\&R(z,y)\Rightarrow R(x,z)$. Доказать, что R – эквивалентность.

4.4. Доказать, что R – эквивалентность тогда и только тогда, когда $R\circ R^{-1}\cup i_A= R$.

4.5. Пусть R_1, R_2 – эквивалентности на A. Доказать, что $R_1 \cup R_2$– эквивалентность тогда и только тогда, когда $R_1\circ R_2 = R_1\circ R_2$.

4.6. Пусть $\leq$ и $<$ определены на $\mathbb{N}_0$ обычным образом. Доказать, что $<\circ< \neq<$, $\leq\circ<=<$, $\leq\circ\geq=\mathbb{N}^2$.

4.7. Доказать, что отношение i_A – частичный порядок на A.

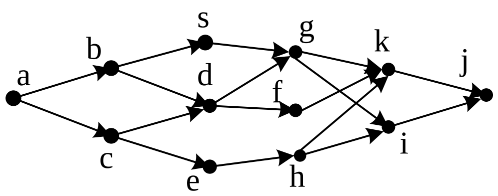
4.8. Пусть R – частичный порядок на A. Доказать, что R^{-1} так же является частичным порядком на A.

4.9. Показать, что R – предпорядок на A тогда и только тогда, когда $R\circ R\cup i_A= R$.

4.10. Пусть R_1 – предпорядок на A. Определим $\langle a,b\rangle\in R_2\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R_1\&\langle b, a\rangle\in R_1$. Доказать, что R_2 – эквивалентность на A.

4.11. Пусть R – частичный порядок на A, $B\subseteq A$. Доказать, $R\cap B^2$ - частичный порядок.

4.12. Пусть частичный порядок на множества A={a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, s} задан диаграммой Хассе.



Найти для B ($B\subseteq A$) нижнюю грань, точную нижнюю грань, верхнюю грань, точную верхнюю грань, минимальный, максимальный, наибольший, наименьший элементы.

а) B={a, s, d};

б) B={c, s, d};

в) B={b, s, d, h};

г) B={b, c, g, h};

д) B={ b, c, g, f};

е) B={c, f, g}.

Тема 5. Алгебра высказываний.

5.1. Пусть a – идёт дождь, b - дует ветер. Записать:

1) идёт дождь или дует ветер,

2) идёт дождь и дует ветер,

3) идёт дождь, но не дует ветер;

4) не идёт дождь и не дует ветер;

5) не идёт дождь или не дует ветер;

6) не дует ветер или идёт дождь;

7) если идёт дождь, то дует ветер;

8) если идёт дождь, то не дует ветер;

9) либо идёт дождь, либо дует ветер ;

10) дождь идёт тогда и только тогда, когда дует ветер;

11) неверно, что если идёт дождь, то дует ветер;

12) неверно, что дождь идёт тогда и только тогда, когда не дует ветер;

13) если дует ветер, то идёт дождь;

14) неверно, что дождь идёт тогда и только тогда, когда дует ветер;

15) неверно, что идёт дождь или дует ветер;

16) неверно, что либо идёт дождь, либо дует ветер;

17) неверно, что идёт дождь и дует ветер;

18) неверно, что не идёт дождь и не дует ветер;

19) неверно, что не идёт дождь или не дует ветер.

Построить таблицу истинности для каждого высказывания. Найти равные (эквивалентные) высказывания.

5.2. Записать

1)**a** истинно тогда и только тогда, когда **b** ложно;

2) **a** истинно, когда **b** ложно;

3) **a** истинно только тогда, когда **b** ложно;

4) если а истинно, то из **b** следует **c**;

5) если из **a** следует **b**, то **c** истинно;

6) если значения истинности **a** и **b** различны, то значение истинности **c** совпадает со значением истинности **a**;

7) если значения истинности **a** и **b** различны, то **a** истинно;

Упростить два последних высказывания.

5.3. Обозначим **a** – Джон умён, **b** – Гарри глуп **,** **c** – Джон выиграет состязание.

Записать высказывания:

1) Если Джон умён, а Гарри глуп, то Джон выиграет состязание.
2) Джон выиграет состязание в том и только том случае, если он умён илиГарри глуп.
3) Если Гарри глуп, а Джон не выиграет состязание, то Джон не умён.

Определить среди этих высказываний эквивалентные.

5.4. Определить, могут ли одновременно выполняться оба равенства, и если могут, то при каком значении переменной b.

1) **a=1, a&b=0;**

2) **a=1, a&b=1;**

3) **a=0, a&b=1;**

4) **a=0, a&b=0**;

5) **a=1, a∨b=0**;

6) **a=1, a∨b=1**;

7) **a=0, a∨b=0**;

8) **a=0, a∨b=1**.

9) **a=1, a⇒b=0;**

10) **a=1, a⇒b=1;**

11) **a=0, a⇒b=1;**

12) **a=0, a⇒b=0**;

13) **a =1, b⇒a =0**;

14) **a =1, b⇒a =1**;

15) **a =0, b⇒a =0**;

16) **a =0, b⇒a =1;**

17) **a=1, a&b=b;**

18) **a=1, a&b=a;**

19) **a=0, a&b=b;**

20) **a=0, a&b=a;**

21) **a=1, a∨b=b;**

22 **a=1, a∨b=a;**

23) **a=0, a∨b=b;**

24) **a=0, a∨b=a.**

5.5. Определить значения истинности пропозициональных переменных.

1) $(1 \Rightarrow x) \Rightarrow y = 0$

2) $x \vee y = \overline{x}$

5.6. По данным значениям истинности определить значения истинности высказываний.

1) $x \Rightarrow y = 1$, $x \Leftrightarrow y = 0$, $y \Rightarrow x = ?$

2) $x \Leftrightarrow y = 1$, $\overline{x} \Leftrightarrow y = ?$ $y \Leftrightarrow \overline{x} = ?$ $x \oplus y = ?$

3) $x = 1$ $\overline{x} \& y \Rightarrow z = ?$ $\overline{x} \Rightarrow z \vee y = ?$

4) $x \Rightarrow y = 1$; $z \Rightarrow (x \Rightarrow y) = ?$ $\overline{x \Rightarrow y} \Rightarrow y = ?$ $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z = ?$

5.7. Найти эквивалентные среди высказываний:

$a \Rightarrow b$; $a \& \overline{b} \Rightarrow a$, $a \& \overline{b} \Rightarrow b$, $a \& \overline{b} \Rightarrow 0$, $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$

5.8. На перемене 9 учеников оставалось в классе. Один из них разбил окно. На вопрос учителя, кто разбил окно, были получены следующие ответы.

Петя: Это сделал Вадик.

Боря: Это неправда.

Таня: Его разбила я.

Коля: Окно разбила либо Таня, либо Аня.

Вадик: Боря лжёт.

Юра: Окно разбила Таня.

Лёня: Таня окно не разбивала.

Аня: Ни Таня, ни я этого не делали.

Оля: Аня права, но Вадик тоже не виновен.

Если из 9 высказываний истинно ровно 3, кто из них разбил окно? Кто из школьников сказал правду?

5.9. Проверить правильность рассуждений афинянки и её сына.

Мать предупреждает честолюбивого сына, который решил стать оратором: «Если ты будешь говорить правду, тебя возненавидят богатые и знатные. Если ты будешь лгать, тебя возненавидит простой народ. Но ты должен будешь говорить правду или лгать. Следовательно, тебя возненавидят богатые и знатные, или возненавидит простой народ!»

На это сын отвечает: «Если я буду говорить правду, меня прославит простой народ. Если я буду лгать, меня прославят богатые и знатные. Но я должен буду говорить правду или лгать. Следовательно, меня прославят богатые и знатные, или меня прославит простой народ.»

Обозначения: b– возненавидят богатые и знатные, $\overline{b}$ - прославят богатые и знатные, c – возненавидит простой народ, $\overline{c}$– прославит простой народ, a – говорить правду, $\overline{a}$ – лгать.

5.10. Упростить формулы, приведя их к дизъюнктивной форме, и применив законы алгебры логики:

1) $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} \vee (x \Rightarrow y) \& x$

2) $x \& z \vee x \& \overline{z} \vee y \& z \vee \overline{x} \& y \& z$

3) $(x \Rightarrow y) \& (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

4) $(x \Rightarrow y) \& (y \Rightarrow z) \Rightarrow (z \Rightarrow x)$

5) $x\&y\&z \vee x\&y\&\bar{z} \vee x\&\bar{y}\&z \vee x\&\bar{y}\&\bar{z}$

5.11. Привести выражения к дизъюнктивной форме:

1) $b \oplus bc$

2) $(a \oplus b)\&(\bar{c} \vee a)$

3) $(a \vee b)\&(b \vee c)\&(a \vee \bar{c})\&(\bar{a} \vee c)$

4) $(a \Rightarrow b)\&(\bar{a} \Rightarrow c)$

5) $((a \Rightarrow b) \Rightarrow (c \Rightarrow \bar{a})) \Rightarrow (\bar{b} \Rightarrow \bar{c})$

6) $(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow \bar{c}) \Rightarrow (a \Rightarrow \bar{b}))$

7) $((((a \Rightarrow b) \Rightarrow \bar{a}) \Rightarrow \bar{b}) \Rightarrow \bar{c}) \Rightarrow c$

5.12. Построить разложение Шеннона для следующих функций:

1) $a\&b \oplus (b \vee c\&d)$ по переменной b;

2) $a\&b\&c \oplus (a \vee b\&c)$ по переменной a;

3) $(a \Rightarrow b\&c) \oplus c\&d$ по переменной d;

4) $a\&b \oplus (c \Rightarrow a\&\bar{b})$ по переменной a, по переменной **b**.

5.13.1) Построить совершенные формы для функций задачи 5.10(1-4).

2) Для формулы $x_1\&\overline{x_2} \vee (x_1 \vee \overline{x_3})\&(x_3 \vee \overline{x_1})$ построить совершенную дизъюнктивную форму. По ней записать совершенную конъюнктивную форму.

3) Для формулы $(x_1 \vee \overline{x_2})\&x_3$ построить совершенную конъюнктивную форму. По совершенной конъюнктивной форме записать совершенную дизъюнктивную форму.

5.14. Записать функцию $c \vee a\&\bar{b}$ с использованием связок {&, ‾}; {∨, ‾}.

5.15. Для функции $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2\&\overline{x_3}$ построить таблицу истинности и суперпозиции:

$f(x_1, x_2, x_2)$, $f(x_1, x_1, x_2)$, $f(x_1, x_2, x_1)$. Определить свойства функции $f(x_1, x_2, x_3)$.

5.16. Определить свойства функций:

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \vee \overline{x_3}$

2) $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\&\overline{x_2} \vee (x_2 \oplus x_3)$

5.17. Определить свойства функций $f_9(x_1, x_2)$, $f_7(x_1, x_2)$, $f_9(x_1, x_2)$, $f_8(x_1, x_2)$, $f_5(x_1, x_2)$, $f_{14}(x_1,x_2)$, $f_{13}(x_1, x_2)$.

5.18. Построить полиномы Жегалкина для формул:

1) $x \vee y$

2) $x_1 \vee \overline{x_2}$

3) $x_1 \& (x_2 \vee \overline{x_3})$

4) $x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_3)$

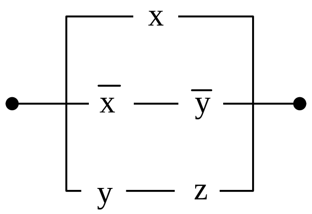
5) По полиному Жегалкина

$1 \oplus x \oplus y \oplus z \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$

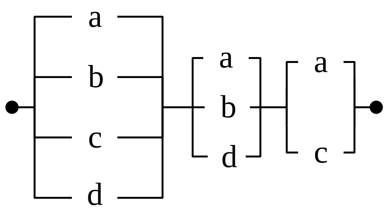
построить аддитивную форму.

5.19. Упростить релейно-контактные схемы

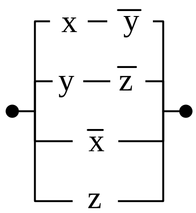
a)



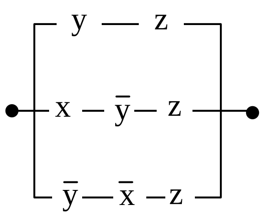
b)



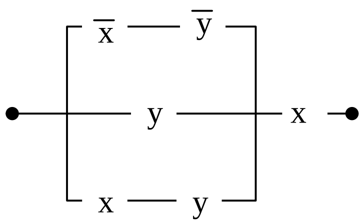
c)



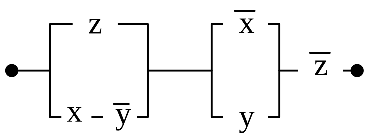
d)



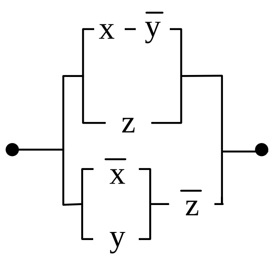
e)



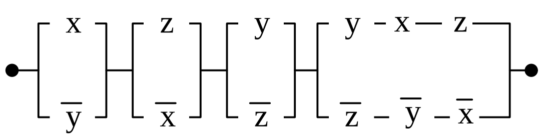
f)



g)

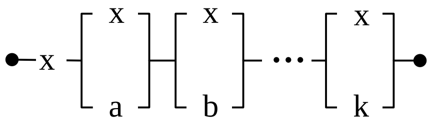


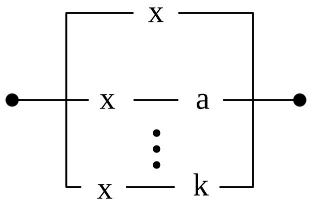
h)



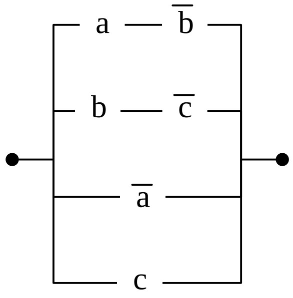
i)

j)

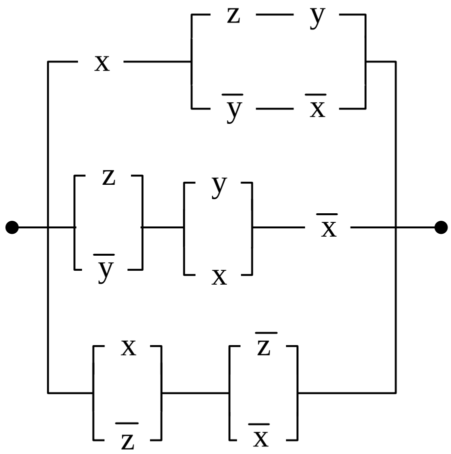




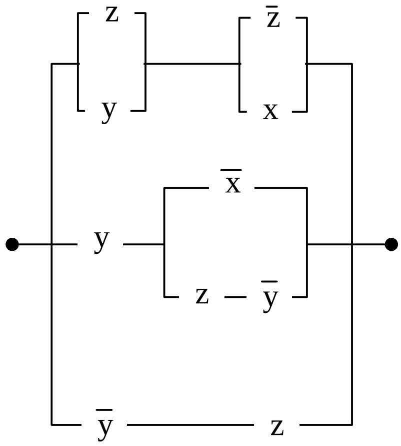
k)



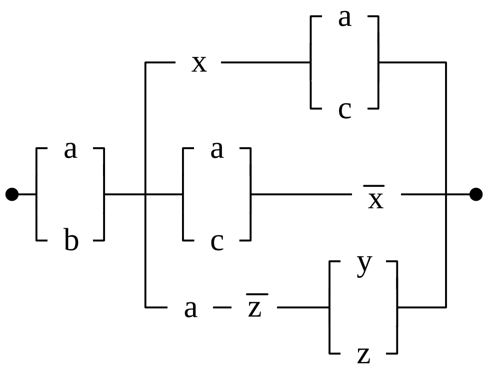
l)



m)



n)



Тема 6. Исчисление предикатов. Запись суждений в исчислении предикатов

6.1. Пусть Ч(x) означает x- чётное, П(x) : x -простое число; Q(x,y): x=y; c_2 - константа, соответствующая числу 2, s(x) - функция x+1(число, следующее за x). Записать:

а) существует чётное число;

б) существует простое число;

в) существует чётное простое число;

г) если число чётное, то следующее за ним нечётно, и если число нечётно, то следующее за ним чётно;

д) число чётно тогда и только тогда, когда следующее за ним нечётно;

е) все чётные числа, кроме двойки, не простые;

ж) если число простое и не равно 2, то оно нечётное.

6.2. Пусть C(x) - x - торговец подержанными автомобилями, H(x) - x - честный.

Прочитать суждения, выраженные формулами:

а) $\exists x\ C(x)$;

б)$\exists x\ H(x)$;

в)$\forall x(C(x) \Rightarrow \overline{H(x)})$

г) $\exists x(C(x) \& H(x))$;

д) $\exists x(H(x) \Rightarrow C(x))$.

6.3. Пусть предикат S(x,y) означает обманывать объект x во время y. Записать суждение:

Можно обманывать кого-то всё время, можно обманывать всех некоторое время, но нельзя обманывать всех всё время.

6.4. Пусть для описания базы данных используются предикаты:

Сотр(x,y) - человек x(ФИО) занимает должность y,

Преп(x) - должность x является преподавательской,

Студент (x) - человек x (ФИО) является студентом,

Группа(x) - объект x - студенческая группа,

Учится (x,y) - человек x(ФИО) учится в группе y,

ВедётЗанятия(x,y,z,w) - преподаватель x(ФИО) ведёт занятия в группе y, по дисциплине z, вид занятия w.

Константы $C_{пр}$ - должность "профессор", $C_{доц}$ - должность "доцент", $C_{л}$ - вид занятий "лекция", $C_{с}$ - вид занятий "семинар".

Записать суждения:

а) Существуют студенты.

б) Существуют преподаватели.

в) Существуют сотрудники, не преподаватели.

г) Каждый студент где-нибудь учится.

д) В каждой группе кто-нибудь учится.

е) Студентов в группе более одного.

ж) Студент учится ровно в одной группе.

з) Каждый преподаватель ведёт занятия по какому-нибудь предмету (в какой-нибудь группе, какой-нибудь вид занятий).

и) Каждый профессор читает какой-нибудь лекционный курс.

к) Каждый доцент, читающий лекции по какой-нибудь дисцилине, ведёт семинарские занятия по этой дисциплине.

л) Никакой профессор не ведёт семинарские занятия по предмету, который он не читает.

6.5. Пусть есть предикаты: Д(x,y) - число x делится на y нацело; N(x) - число x является натуральным; П(x) - x - число простое; Q(x,y): x=y. C_1 - константа 1.

Записать суждения:

а) Число простое, если оно делится только на себя и на 1.

б) Если у числа есть делители, отличные от него самого и 1, то оно не простое.

6.6. Пусть есть предикаты: N(x) - число x является натуральным; Q(x,y): x=y; S(x,y,z): x+y=z; P(x,y,z): xy=z, G(x,y): x>y.

а) Описать числа 0, 1, 2 (записать формулы со свободной переменной x, истинные тогда и только тогда, когда x равен данному числу).

б) Описать число чётное, нечётное(формула со свободной переменной x, истинная тогда и только тогда, когда выполняется условие).

в) Описать: z является наименьшим общим кратным чисел x и y.

г) x является простым числом.

д) z является наибольшим общим делителем чисел x и y.

6.7. Геометрия. Даны предикаты T(x): x - точка;

Пр(x): x - прямая;

Пл(x): x - плоскость;

Прин(x,y): $x \in y$(элемент принадлежит множеству, например, точка прямой или плоскости);

Q(x,y): x=y.

Записать суждения:

а) Через любую точку можно провести прямую.

б) На любой прямой есть точка.

в) На прямой более, чем одна точка.

г) Через любые две (различные) точки можно провести прямую и притом только одну.

д) Через любые две прямые можно провести не более одной плоскости.

е) Через любые три точки можно провести не более одной прямой.

ж) Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести ровно 1 плоскость.

и) Если прямая принадлежит плоскости, то любая точка прямой принадлежит плоскости.

к)Любые две (различные) прямые имеют не более одной общей точки.

л) Прямая x параллельна прямой y.

6.8. Записать суждение:

Если всякий разумный филосов - циник, и только женщины являются разумными философами, то тогда, если существуют разумные философы, некоторые из женщин - циники.

Использовать предикаты: Рф(x): x является разумным философом; Ц(x): x является циником; Ж(x): x - женщина.

Тема 7. Интерпретации формул. Модели

7.1. Для формулы построить интерпретацию, в которой формула истинна (ложна):

$\exists x(P(x)\Rightarrow Q(x))\&\exists yP(y)\Rightarrow\exists zQ(z)$

7.2. Для интерпретации с областью D={a,b} и значениями предиката P(x,y), заданными таблицей, определить значения истинности формул:

x	y	P(x,y)
a	a	1
a	b	0
b	a	1
b	b	1

a) $\exists x\exists y\ P(x,y)$;
b) $\exists x\forall y\ P(x,y)$;
c) $\forall x\forall y\ P(x,y)$;
d) $\forall y\ P(x,y)$;
e) $\exists y\ P(x,y)$;
f) $\forall x\ P(x,x)$;
g) $\forall x\forall y\ (P(x,y)\Rightarrow P(y,x))$;
h) $\forall x\forall y\ (P(x,y)\Rightarrow P(x,x))$.

7.3. Найти интерпретации, для которых одновременно выполняются условия:

a) $\forall x\ P(x,x)$ - И, $\exists x\forall y\ P(x,y)$ - Л;
b) $\forall y\ \exists x\ P(x,y)$ - И, $\exists x\ P(x,x)$- Л;

c) $\forall x \exists y P(x,y)$ - И, $\forall x P(x,x)$- Л;
d) $\forall y \exists x P(x,y)$ - И, $\exists x \forall y P(x,y)$- Л;
e) $\exists x P(x,x)$- И; $\forall x \exists y P(x,y)$- Л;
f) $\forall x \exists y P(x,y)$ - И, $\exists y \forall x P(x,y)$ - Л;
g) $\forall x P(x,x)$- И, $\forall y \forall x P(x,y)$- Л;
h) $\forall x P(x,x)$- И, $\forall y \exists x P(x,y)$- Л.

7.4. Для интерпретации с областью D={1,2} и значениями функции f(x) и предиката P(x,y), заданными таблицами, определить значения истинности формул:

x	f(x)
1	2
2	1

x	y	P(x,y)
1	1	1
1	2	0
2	1	1
2	2	1

a) $\forall x \exists y P(x,y)$;
b) $\forall y \forall x (P(x,y) \vee P(f(y),x))$;
c) $\exists x \forall y (P(x,y) \vee P(y,x))$;
d) $\forall x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(f(x),f(y))$;
e) $\exists x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(f(x),f(y))$;
f) $\exists x \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(f(y),f(x))$;
g) $\forall x P(x,f(x))$;
h) $\exists x P(x,f(x))$;
i) $\forall x \exists y (P(x,y) \vee P(f(y),f(x))$.

7.5. В парке растут дубы и сосны. Какие из следующих утверждений могут быть истинными?

a) Каждый дуб ниже какой-то сосны, и каждая сосна ниже любого дуба.
b) Каждый дуб ниже какой-то сосны, и какая-то сосна ниже любого дуба.
c) Какой-то дуб ниже какой-то сосны, и любая сосна ниже любого дуба.
d) Какой-то дуб ниже любой сосны, и какая-то сосна ниже любого дуба.
e) Какой-то дуб ниже какой-то сосны, и каждая сосна ниже какого-то дуба.

7.6. Проверить общезначимость формул методом семантических таблиц. В случае необщезначимости формулы привести интерпретацию, в которой формула ложна.

a) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z))$
b) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists y P(y) \Rightarrow \exists z Q(z))$
c) $(\exists x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y)) \Rightarrow \forall z(P(z) \Rightarrow Q(z))$
d) $(\exists x P(x) \Rightarrow \forall y Q(y)) \Rightarrow \forall z(P(z) \Rightarrow Q(z))$
e) $\exists x (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\forall y P(y) \Rightarrow \exists y Q(y))$
f) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists y P(y) \Rightarrow \forall z Q(z))$
g) $\forall x(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists y P(y) \Leftrightarrow \exists z Q(z))$
h) $\forall x(P(x) \& Q(x)) \Leftrightarrow \forall y P(y) \& \forall z Q(z)$
i) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists y P(y) \vee \exists z Q(z)$

j) $\forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \Rightarrow \forall z(P(z) \vee Q(z))$
k) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall yP(y) \vee \forall zQ(z)$
l) $\exists x\, P(x) \,\&\, \forall y\, Q(y) \Rightarrow \exists z\, (P(z) \,\&\, Q(z))$
m) $\exists x\, P(x) \,\&\, \exists y\, Q(y) \Rightarrow \exists z\, (P(z) \,\&\, Q(z))$
n) $\forall xP(x) \vee \exists yQ(y) \Rightarrow \forall z(P(z) \vee Q(z))$
o) $\forall x\, (P(x) \,\&\, M(x)) \,\&\, \exists y\, (M(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow \exists z\, (P(z) \,\&\, Q(z))$
p) $\exists x\, (P(x) \,\&\, M(x)) \,\&\, \exists y\, (M(y) \,\&\, \overline{S}(y)) \Rightarrow \exists z\, (P(z) \,\&\, \overline{S}\, (z))$
q) $\forall x\, (P(x) \Rightarrow \overline{M}(x)) \,\&\, \exists y\, (S(y) \,\&\, M(y)) \Rightarrow \exists z\, (S(z) \,\&\, \overline{P}\, (z))$
r) $\forall x(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \,\&\, \exists yP(y) \Rightarrow \exists z\, Q(z))$
s) $\exists x \forall yP(x,y) \Rightarrow \forall y \exists xP(x,y)$
t) $\forall y \exists xP(x,y) \Rightarrow \exists x \forall yP(x,y)$

7.6. Доказать общезначимость формул разбором случаев

a) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall yP(y) \Rightarrow \forall z\, Q(z))$
b) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists yP(y) \Rightarrow \exists z\, Q(z))$
c) $(\exists x\, P(x) \Rightarrow \forall y\, Q(y)) \Rightarrow \forall z(P(z) \Rightarrow Q(z))$
d) $\exists x\, (P(x) \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\, \forall y\, P(y) \Rightarrow \exists z\, Q(z))$
e) $\forall x(P \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \forall y\, Q(y))$
f) $\forall x\, (P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists yP(y) \Rightarrow Q)$
g) $\exists x\, (P \Rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow \exists y\, Q(y))$
h) $\exists x\, (P(x) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\, \forall y\, P(y) \Rightarrow Q)$
i) $\forall x(P(x) \,\&\, Q(x)) \Leftrightarrow \forall yP(y) \,\&\, \forall zQ(z)$
j) $\exists x\, (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists y\, P(y) \vee \exists z\, Q(z)$
k) $\forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \Rightarrow \forall z(P(z) \vee Q(z))$
l) $\exists x\, (P(x) \,\&\, Q(x)) \Rightarrow \exists y\, P(y) \,\&\, \exists z\, Q(z)$
m) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \forall yP(y) \vee \exists zQ(z)$
n) $\exists x\, P(x) \,\&\, \forall y\, Q(y) \Rightarrow \exists z\, (P(z) \,\&\, Q(z))$
o) $\forall x(P \,\&\, Q(x)) \Leftrightarrow P \,\&\, \forall yQ(y)$
p) $\forall x\, (P \vee Q(x)) \Leftrightarrow P \vee \forall y\, Q(y)$
q) $\exists x\, (P \,\&\, Q(x)) \Leftrightarrow P \,\&\, \exists y\, Q(y)$
r) $\exists x\, (P \vee Q(x)) \Leftrightarrow P \vee \exists y\, Q(y)$

7.7. Привести формулы к предварённой нормальной форме

a) $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x,y) \,\&\, \exists zS(x,z)) \Rightarrow (\forall x \exists zQ(x,z) \Rightarrow \forall wP(w))$
b) $\forall xP(x) \,\&\, \forall y\, Q(y) \Rightarrow \forall z(\exists yS(z,y) \Rightarrow P(z))$
c) $\forall x(P(x) \,\&\, \exists y(S(y,x) \Rightarrow \forall wS(w,y)) \Rightarrow \exists uQ(u)))$
d) $\forall xP(x) \Rightarrow (\exists yQ(y) \Rightarrow \forall wS(w))) \Rightarrow \exists t(S(t) \,\&\, P(t))$
e) $\forall x(\exists z\, Q(x,z) \Leftrightarrow \exists yS(x,y)) \Rightarrow \exists\, wP(w))$
f) $\forall x(P(x) \Leftrightarrow \forall yQ(x,y) \,\&\, \exists zS(x,z)) \Rightarrow (\forall x \exists zQ(x,z) \Rightarrow \forall wP(w))$
g) $\forall x(\forall yQ(x,y) \vee P(x) \Rightarrow \exists zS(x,z)) \Rightarrow (\forall x \exists zQ(x,z) \Leftrightarrow \forall wP(w))$
h) $\forall x(P(x) \,\&\, \forall yQ(x,y) \Rightarrow \exists zS(x,z)) \Leftrightarrow (\forall x \exists zQ(x,z) \Rightarrow \forall wP(w))$