Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad
Teoría de Lenguajes

Autómatas finitos no determinísticos con transiciones instantáneas

Primer Cuatrimestre 2025

Bibliografía

Capítulo 3, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*, J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

En esta clase

- Autómatas finitos no determinísticos con transiciones instantáneas.
- Teorema: Equivalencia entre AFND-λ y AFND.

Definición (Autómata Finito No Determinístico con transiciones λ)

Un AFND-λ es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ donde
Q *es conjunto de estados*
Σ *es el alfabeto*
q_0 *es estado inicial*
F *es conjunto de estados finales*
$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$.

Debemos definir formalmente el conjunto aceptado por AFND-λ.

Demostraremos que para todo AFND-λ hay un AFND que reconoce el mismo lenguaje. Vamos a necesitar herramientas.

Relaciones

Dados los conjuntos A y B, se llama relación de A en B a cualquier subconjunto de $A \times B$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es reflexiva cuando

$$\forall a \in A, (a, a) \in R.$$

Ejemplo: "$\leq$"sobre $\mathbb{N}$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es simétrica cuando

$$\forall a, b \in A, \Big(\text{Si } (a, b) \in R \text{ entonces } (b, a) \in R\Big).$$

Ejemplo: "$\neq$"sobre $\mathbb{N}$.

Una relación $R \subseteq A \times A$ es transitiva cuando

$$\forall a, b, c \in A, \Big(\text{Si } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \text{ entonces } (a, c) \in R\Big).$$

Ejemplo: "a paralela a b", en el conjunto de rectas del plano.

Una relación es de equivalencia, cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Composición de relaciones

Sean A, B y C tres conjuntos, y sean R y G dos relaciones tales que $R \subseteq A \times B$ y $G \subseteq B \times C$.

La relación de composición: $G \circ R \subseteq A \times C$ se define como

$$G \circ R = \{(a, c), a \in A, c \in C : \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \wedge (b, c) \in G\}.$$

Una relación R definida sobre A es de identidad (id_A) si se cumple que

$$\forall a, b \in A,\ a\, id_A\, b \text{ si y solo si } a = b.$$

La relación de identidad es el elemento neutro de la composición. Dada una relación $R \subseteq A \times B$ es cierto que

$$id_B \circ R = id_A \circ R$$

Relación potencia

Dada una relación $R \subseteq A \times A$, y dado n se define la potencia $R^n \subseteq A \times A$ como

$$R^n = \begin{cases} id_A & \text{si } n = 0 \\ R \circ R^{n-1} & \text{si no} \end{cases}$$

con $R = R^1$.

Notar que R^n es un conjunto de pares, cualquiera sea el valor de n.

Clausura transitiva

Dada una relación $R \subseteq A \times A$ se define clausura transitiva R^+,

$$R^+ = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k.$$

Proposición

1. $R \subseteq R^+$
2. R^+ *es transitiva*
3. *Si* $S \subseteq A \times A$*,* $R \subseteq S$ *y* S *es transitiva entonces* $R^+ \subseteq S$*.*

Entonces, R^+ es la relación transitiva más pequeña que contiene a R.

Demostración de la proposición

1. Inmediato de la definición de R^+.

2. Queremos ver que si $(a, b) \in R^+$ y $(b, c) \in R^+$ enonces $(a, c) \in R^+$. Si $(a, b) \in R^+$, entonces existe una secuencia de elementos $d_1, \ldots, d_n$ tal que $(d_1, d_2) \in R, (d_2, d_3) \in R, \ldots (d_{n-1}, d_n) \in R$, donde $d_1 = a$ y $d_n = b$. Por lo tanto, $(a, b) \in R^n$ Análogamente, como $(b, c) \in R^+$ entonces existe una secuencia de elementos $e_1, \ldots, e_m$ tal que $(e_1, e_2) \in R, (e_2, e_3) \in R, \ldots (e_{m-1}, e_m) \in R$, donde $e_1 = b$ y $e_m = c$. Por lo tanto $(b, v) \in R^m$. Concluimos que $(a, c) \in R^{n+m}$ y esto implica $(a, c) \in R^+$.

2. Demostremos que si $R \subseteq S$ y S es transitiva entonces $R^+ \subseteq S$. Supongamos $(a, b) \in R^+$. Entonces, existe una secuencia de elementos $c_1, \ldots, c_n$ tal que $(c_1, c_2) \in R, (c_2, c_3) \in R, \ldots (c_{n-1}, c_n) \in R$, donde donde $c_1 = a$ y $c_n = b$. Como $R \subseteq S$ tenemos que $(c_1, c_2) \in S, (c_2, c_3) \in S, \ldots (c_{n-1}, c_n) \in S$, y como S es transitiva entonces, la aplicación repetida de la transitividad nos lleva a que $(c_1, c_n) \in S$, o sea $(a, b) \in S$. $\square$

Clausura transitivo-reflexiva : R^*

$$R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i = R^+ \cup id$$

Clausura λ

La clausura λ de un estado q, $Cl_\lambda(q)$, es el conjunto de estados alcanzable desde q, siguiendo sólo transiciones λ.
Usamos la noción de clausura transitivo-reflexiva para definir Cl_λ.

Definición (clausura λ de un estado)

Dado un AFND-λ $(Q, \Sigma, \delta, q_o, F)$.
Sea $R \subseteq Q \times Q$ tal que $R = \{(q, p) : p \in \delta(q, \lambda)\}$.
Definimos $Cl_\lambda : Q \to \mathcal{P}(Q)$,

$$Cl_\lambda(q) = \{p : (q, p) \in R^*\}$$

Notar que $q \in Cl_\lambda(q)$.

Definición (clausura λ de un conjunto de estados P)

$Cl_\lambda : \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{P}(Q)$,

$$Cl_\lambda(P) = \bigcup_{q \in P} Cl_\lambda(q).$$

Definición (función transición-sin-λ $\overline{\delta}$)

Sea AFND-λ $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ con $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$. Definimos

$$\overline{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}\left(Q\right),$$
$$\overline{\delta}\left(q, a\right) = Cl_\lambda\Big(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q)} \delta(p, a)\Big)$$

$$\widehat{\overline{\delta}} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}\left(Q\right), \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$
$$\widehat{\overline{\delta}}\left(q, \lambda\right) = Cl_\lambda\left(q\right), \quad \widehat{\overline{\delta}}(q, xa) = \left(\bigcup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q,x)} \overline{\delta}(p, a)\right).$$

Atención!!
Aqui se usa $\widehat{\overline{\overline{\delta}}}$ para definir aceptación en AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$.

Definición (lenguaje aceptado por un AFND-λ)

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. El lenguaje aceptado por M, $\mathcal{L}(M)$, es el conjunto de cadenas aceptadas por M,

$$\mathcal{L}(M) = \left\{ x \in \Sigma^* : \widehat{\overline{\overline{\delta}}}(q_0, x) \cap F \neq \phi \right\}.$$

Teorema (equivalencia entre AFND y AFND-λ)

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ hay un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

Demostración del teorema

Sea AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ donde $\delta : Q \times \Sigma \cup \{\lambda\} \to \mathcal{P}(Q)$.
Sea $\overline{\delta} : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ la ya definida función de transición-sinλ,

$$\overline{\delta}\,(q, a) = Cl_\lambda\Big(\bigcup_{p \in Cl_\lambda(q)} \delta(p, a)\Big)$$

Definimos AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F'\rangle$, donde
$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$, para todo $q \in Q$, $a \in \Sigma$,

$$\delta'(q, a) = \overline{\delta}(q, a)$$

Es decir, δ' es idéntica a $\overline{\delta}$ para todos los $q \in Q$ y $a \in \Sigma$. Sin embargo, $\overline{\delta}$ está definida además para λ mientras que δ' no lo está.

Definimos

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{si } Cl_\lambda\,(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ F & \text{, caso contrario} \end{cases}$$

Observar que $F' \supseteq F$.

Demostración del teorema

Consideremos $\widehat{\overline{\delta}} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,
$\widehat{\overline{\delta}}(q, \lambda) = Cl_\lambda(q)$
$\widehat{\overline{\delta}}(q, xa) = \displaystyle\bigcup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q,x)} \overline{\delta}(p, a), \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$
Definimos $\widehat{\delta'} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$,
$\widehat{\delta'}(q, \lambda) = \{q_0\}$
$\widehat{\delta'}(q, xa) = \displaystyle\bigcup_{p \in \widehat{\delta}(q,x)} \delta'(p, a), \quad x \in \Sigma^*, a \in \Sigma$

Debemos ver para toda $x \in \Sigma^*$, $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.

Caso $x = \lambda$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$.
Como $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$ tenemos $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$.
Luego $F' = F \cup \{q_0\}$ y por lo tanto $q_0 \in F'$, entonces $\lambda \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $\lambda \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\widehat{\delta'}(q_0, \lambda) \cap F' \neq \emptyset$.
Dado que $\widehat{\delta'}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$. Luego $q_0 \in F'$.
Necesariamente $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset$ (asumir $Cl_\lambda(q_0) \cap F = \emptyset$ implica $q_0 \notin F$, $F = F'$ y $q_0 \notin F'$, lo que contradice $q_0 \in F'$).
Dado que $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$, tenemos $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset$, y por la definición de palabra aceptada en AFND-λ, $\lambda \in \mathcal{L}(M)$.

Caso $x \neq \lambda$. Debemos ver que $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $x \in \mathcal{L}(M')$.
Dado que

Demostremos primero que $\widehat{\delta'}(q_0, x) = \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x)$, para todo $x \in \Sigma^+$.
Lo hacemos por inducción en la estructura de la cadena.

Caso base $x = a$, $a \in \Sigma$, por lo tanto $|x| = 1$. Por definición de M',
$\delta'(q, a) = \overline{\delta}(q, a)$. Y tenemos que $\widehat{\delta'}(q, a) = \delta'(q, a)$ $\widehat{\overline{\delta}}(q, a) = \overline{\delta}(q, a)$.
Por lo tanto, $\widehat{\delta'}(q, a) = \widehat{\overline{\delta}}(q, a)$.

Caso inductivo $x = wa$, $w \in \Sigma^*$ con $|w| = n$, $a \in \Sigma$, y asumamos que la propiedad vale para w. Entonces,

$$\widehat{\delta'}(q_0, wa) = \bigcup_{p \in \widehat{\delta'}(q_0, w)} \delta'(p, a) = \bigcup_{p \in \widehat{\overline{\delta}}(q_0, w)} \overline{\delta}(p, a) = \widehat{\overline{\delta}}(q_0, wa)$$

ya que ,
por HI, las expresiones debajo de las uniones son iguales.
por la definicion de δ', $\delta'(p, a) = \overline{\delta}(p, a)$.

Seguimos con el caso $|x| \geq 1$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M)$. Entonces, $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing$,
Por lo tanto, usando $\widehat{\delta'}(q, x) = \widehat{\overline{\delta}}(q, x)$ y $F \subseteq F'$, $\widehat{\delta'}(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$.
Concluimos $x \in \mathcal{L}(M')$.

Supongamos $x \in \mathcal{L}(M')$. Entonces, $\widehat{\delta'}(q_0, x) \cap F' \neq \varnothing$.
Usando $\widehat{\delta'}(q, x) = \widehat{\overline{\delta}}(q, x)$ y ($F' = F$, ó, $F' = F \cup \{q_0\}$), tenemos
$\left(\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \varnothing\right)$ ó $\left(\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap \{q_0\} \neq \varnothing \wedge Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing\right)$
La parte izquierda nos dice que $x \in \mathcal{L}(M)$.
La parte derecha nos dice dos cosas. La primera es que
$q_0 \in \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x)$. Entonces por la definición de $\overline{\delta}$, $Cl_\lambda(q_0) \subseteq \widehat{\overline{\delta}}(q_0, x)$,
La segunda es que $Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \varnothing$
Juntando la primera y la segunda tenemos $\widehat{\overline{\delta}}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$, lo que implica que $x \in \mathcal{L}(M)$.

Juntando izquierda y derecha obtenemos
$x \in \mathcal{L}(M)$ ó $x \in \mathcal{L}(M)$
Concluimos,
$x \in \mathcal{L}(M)$.

$\square$

Hemos demostrado que para todo AFND-λ M existe AFND M' tal que $\mathcal{L}(M)=\mathcal{L}(M')$, y
Y la clase pasada demostramos que para todo AFND N existe AFD N' tal que $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N')$.
Concluimos

Teorema

Para todo AFND-λ M existe AFD M' tal que $\mathcal{L}(M)=\mathcal{L}(M')$.

Ejercicios

1. Demostrar que ara cada AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ existe otro AFND -λ $M' = \left\langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \right\rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$ y F' tiene un único estado final.
2. Indicar Verdadero o Falso y justificar
   Sea Σ un alfabeto con al menos dos símbolos, y sea a un símbolo de Σ.
   Sea AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. Considerar el AFND-$\lambda$
   $M' = \left\langle Q, \Sigma \setminus \{a\}, \delta', q_0, F \right\rangle$ que se obtiene de reemplazar todas las transiciones con el símbolo a por transiciones λ. Es decir,
   - para todo $q \in Q$, para todo $x \in \Sigma$ tal que $x \neq a$, $\delta'(q, x) = \delta(q, x)$,
   - para todo $q \in Q$, $\delta'(q, \lambda) = \delta(q, a)$,

   ¿Cual es el lenguaje aceptado por M'?
3. ¿Se puede acotar superiormente cuantas transiciones requiere la aceptación de una palabra en un AFND-λ?
4. ¿Puede haber ciclos de transiciones-λ?