Procesamiento Cuántico de Información

Ariel Bendersky[1]

[1]Departamento de Computación - FCEyN - Universidad de Buenos Aires

Clase 10

Clase 10

- Purificación.
- Repaso de mediciones.
- POVM (Positive Operator Valued Measure).
- Canales/procesos/operaciones.
- Tomografía de procesos cuánticos estándar.

Purificación

Purificación

Un estado mixto ρ siempre se puede pensar como un estado puro en un espacio más grande.

Demostración

Consideremos la diagonalización de $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k|$.
Consideremos el estado $|\Phi\rangle$ dado por:
$|\Phi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k} |k\rangle |\psi_k\rangle$.
Notemos que $|\Phi\rangle$ vive en un espacio de Hilbert más grande que el del soporte de ρ.

$$\mathrm{Tr}_1 (|\Phi\rangle \langle\Phi|) = \mathrm{Tr}_1 \left(\sum_{jk} \sqrt{p_j}\sqrt{p_k} |j\rangle \langle k| \otimes |\psi_j\rangle \langle\psi_k| \right)$$
$$= \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k| = \rho.$$

Purificación

Purificación

Un estado mixto ρ siempre se puede pensar como un estado puro en un espacio más grande.

Demostración

Consideremos la diagonalización de $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k|$.
Consideremos el estado $|\Phi\rangle$ dado por:
$|\Phi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k} |k\rangle |\psi_k\rangle$.
Notemos que $|\Phi\rangle$ vive en un espacio de Hilbert más grande que el del soporte de ρ.

$$\mathrm{Tr}_1 (|\Phi\rangle \langle\Phi|) = \mathrm{Tr}_1 \left(\sum_{jk} \sqrt{p_j}\sqrt{p_k} |j\rangle \langle k| \otimes |\psi_j\rangle \langle\psi_k| \right)$$

$$= \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k| = \rho.$$

Purificación

Purificación

Un estado mixto ρ siempre se puede pensar como un estado puro en un espacio más grande.

Demostración

Consideremos la diagonalización de $\rho = \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$.
Consideremos el estado $|\Phi\rangle$ dado por:
$|\Phi\rangle = \sum_k \sqrt{p_k}\, |k\rangle |\psi_k\rangle$.
Notemos que $|\Phi\rangle$ vive en un espacio de Hilbert más grande que el del soporte de ρ.

$$\mathrm{Tr}_1\left(|\Phi\rangle\langle\Phi|\right) = \mathrm{Tr}_1\left(\sum_{jk}\sqrt{p_j}\sqrt{p_k}\, |j\rangle\langle k| \otimes |\psi_j\rangle\langle\psi_k|\right)$$
$$= \sum_k p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \rho.$$

Purificación

Todo estado mixto puede pensarse como un estado puro en un espacio más grande.

Nota sobre entrelazamiento y estados mixtos

Si el estado ρ es mixto si y solo si el estado puro más grande que sale de la purificación es entrelazado.

Purificación

Todo estado mixto puede pensarse como un estado puro en un espacio más grande.

Nota sobre entrelazamiento y estados mixtos

Si el estado ρ es mixto si y solo si el estado puro más grande que sale de la purificación es entrelazado.

Repaso de mediciones

Pizarra

POVM - Positive Operator Valued Measure

Mediciones proyectivas

Son las única mediciones admitidas por la mecánica cuántica como principio. Sea un conjunto de proyectores $\{\Pi_k\}$, con $\sum_k \Pi_k = Id$, representa una medición proyectiva sobre un estado cualquiera ρ con probabilidades de obtener el resultado k dado $P_k = \mathrm{Tr}(\rho\Pi_k)$.

Positive Operator Valued Measure

Sea un conjunto de operadores positivos $\{A_k\}$, con $\sum_k A_k = Id$, representa un POVM sobre un estado cualquiera ρ con probabilidades de obtener el resultado k dado $P_k = \mathrm{Tr}(\rho A_k)$.

POVM - Positive Operator Valued Measure

Mediciones proyectivas

Son las única mediciones admitidas por la mecánica cuántica como principio. Sea un conjunto de proyectores $\{\Pi_k\}$, con $\sum_k \Pi_k = Id$, representa una medición proyectiva sobre un estado cualquiera ρ con probabilidades de obtener el resultado k dado $P_k = \mathrm{Tr}(\rho\Pi_k)$.

Positive Operator Valued Measure

Sea un conjunto de operadores positivos $\{A_k\}$, con $\sum_k A_k = Id$, representa un POVM sobre un estado cualquiera ρ con probabilidades de obtener el resultado k dado $P_k = \mathrm{Tr}(\rho A_k)$.

POVM - Positive Operator Valued Measure

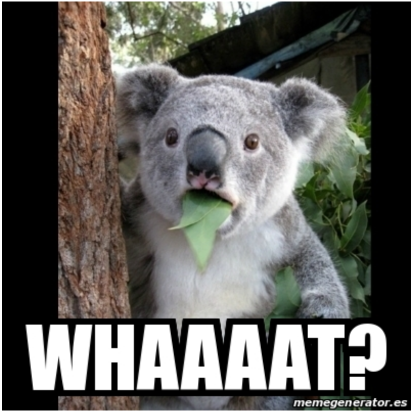
Mediciones proyectivas

Son las única mediciones admitidas por la mecánica cuántica como principio. Sea un conjunto de proyectores $\{\Pi_k\}$, con $\sum_k \Pi_k = Id$, representa una medición proyectiva sobre un estado cualquiera ρ con probabilidades de obtener el resultado k dado $P_k = \mathrm{Tr}(\rho\Pi_k)$.

Positive Operator Valued Measure

Sea un conjunto de operadores positivos $\{A_k\}$, con $\sum_k A_k = Id$, representa un POVM sobre un estado cualquiera ρ con probabilidades de obtener el resultado k dado $P_k = \mathrm{Tr}(\rho A_k)$.

POVM - Positive Operator Valued Measure



¿No era que la única medición posible era la proyectiva?

POVM - Positive Operator Valued Measure

Postulado de la mecánica cuántica - Medición proyectiva

ρ  $\mathrm{Tr}\left(\rho \Pi_\mu\right)$

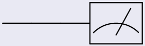
$$\sum_\mu \Pi_\mu = \mathbb{I}$$

Medición proyectiva

La medición está asociada al valor medio de proyectores. Es el único tipo de medición compatible con la mecánica cuántica para *sistemas aislados*.

POVM - Positive Operator Valued Measure

Postulado de la mecánica cuántica - Medición proyectiva

ρ  $\mathrm{Tr}\left(\rho\Pi_\mu\right)$

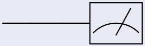
$$\sum_\mu \Pi_\mu = \mathbb{I}$$

Medición proyectiva

La medición está asociada al valor medio de proyectores. Es el único tipo de medición compatible con la mecánica cuántica para *sistemas aislados*.

POVM - Positive Operator Valued Measure

Postulado de la mecánica cuántica - Medición proyectiva

ρ  $\mathrm{Tr}\left(\rho \Pi_\mu\right)$

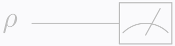
$$\sum_\mu \Pi_\mu = \mathbb{I}$$

Medición proyectiva

La medición está asociada al valor medio de proyectores. Es el único tipo de medición compatible con la mecánica cuántica para *sistemas aislados*.

POVM - Positive Operator Valued Measure

POVM



$\mathrm{Tr}\left(\rho A_\mu\right)$

$$\sum_\mu A_\mu = \mathbb{I}$$

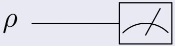
Medición generalizada

La medición está asociada al valor medio de operadores positivos.

Implementación - Teorema de la dilatación de Naimark

POVM - Positive Operator Valued Measure

POVM



$$\mathrm{Tr}\left(\rho A_\mu\right)$$

$$\sum_\mu A_\mu = \mathbb{I}$$

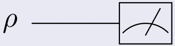
Medición generalizada

La medición está asociada al valor medio de operadores positivos.

Implementación - Teorema de la dilatación de Naimark

POVM - Positive Operator Valued Measure

POVM



$$\mathrm{Tr}\left(\rho A_\mu\right)$$

$$\sum_\mu A_\mu = \mathbb{I}$$

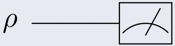
Medición generalizada

La medición está asociada al valor medio de operadores positivos.

Implementación - Teorema de la dilatación de Naimark

POVM - Positive Operator Valued Measure

POVM



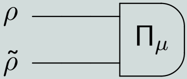
$$\mathrm{Tr}\left(\rho A_\mu\right)$$

$$\sum_\mu A_\mu = \mathbb{I}$$

Medición generalizada

La medición está asociada al valor medio de operadores positivos.

Implementación - Teorema de la dilatación de Naimark



POVM - Positive Operator Valued Measure

¿Y el estado post-medición?

Si medimos un POVM $\{A_\mu\}$ no sabemos cuál es el estado post medición a menos que conozcamos el estado auxiliar y la medición proyectiva conjunta que se hace.

La iglesia del espacio de Hilbert más grande

Tanto los estados mixtos como las mediciones generalizadas pueden pensarse como mediciones proyectivas sobre estados puros en espacios más grandes. No hay nada de física nueva en los estados mixtos y los POVMs, son herramientas matemáticas cómodas.

Procesos cuánticos

Procesos cuánticos

Procesos cuánticos

Vimos dos tipos de procesos:

- Evoluciones unitarias $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$.
- Mediciones proyectivas $\mathcal{E}(\rho) = \Pi_k \rho \Pi_k$

Ambas son lineales:

$$\mathcal{E}(a\rho_1 + b\rho_2) = a\mathcal{E}(\rho_1) + b\mathcal{E}(\rho_2).$$

Necesitamos una marco teórico para trabajar con operaciones lineales.

Canales lineales

Sea $\mathbb{E} = \{E_k\}$ una base del espacio de operadores (por ejemplo la base $\{|a\rangle\langle b|\}$, o la de operadores de Pauli generalizados si estamos en dimensión 2^n). El canal lineal más general posible está dado por:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{mm'} \chi_{mm'} E_m \rho E_{m'}^{\dagger}$$

La base $\mathbb{E}$ y la matriz χ caracterizan completamente el canal. Las propiedades del canal se podrán ver como propiedades de la matriz χ.

Canales positivos

Canales positivos (P)

Un canal $\mathcal{E}$ es positivo si preserva positividad. Es decir, para todo operador ρ semidefinido positivo, $\mathcal{E}(\rho)$ es semidefinido positivo.

Canales no físicos

Si un canal no es positivo no puede ser un canal físico. ¿Por qué?

Canales positivos

Canales positivos (P)

Un canal $\mathcal{E}$ es positivo si preserva positividad. Es decir, para todo operador ρ semidefinido positivo, $\mathcal{E}(\rho)$ es semidefinido positivo.

Canales no físicos

Si un canal no es positivo no puede ser un canal físico. ¿Por qué?

Canales que preservan traza

Canales que preservan traza (T)

Un canal $\mathcal{E}$ preserva traza si para todo operador ρ se cumple que $\mathrm{Tr}(\rho) = \mathrm{Tr}(\mathcal{E}(\rho))$.

Ejemplos

Los canales unitarios $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$ preservan traza. En efecto, $\mathrm{Tr}(U\rho U^\dagger) = \mathrm{Tr}(\rho U^\dagger U) = \mathrm{Tr}(\rho)$.
Las proyecciones, no. $\mathcal{E}(\rho) = \Pi\rho\Pi^\dagger$. Es fácil ver con un ejemplo que no preserva traza.

Canales que preservan traza

Canales que preservan traza (T)

Un canal $\mathcal{E}$ preserva traza si para todo operador ρ se cumple que $\mathrm{Tr}(\rho) = \mathrm{Tr}(\mathcal{E}(\rho))$.

Ejemplos

Los canales unitarios $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$ preservan traza. En efecto, $\mathrm{Tr}(U\rho U^\dagger) = \mathrm{Tr}(\rho U^\dagger U) = \mathrm{Tr}(\rho)$.
Las proyecciones, no. $\mathcal{E}(\rho) = \Pi\rho\Pi^\dagger$. Es fácil ver con un ejemplo que no preserva traza.

Canales que preservan traza

Canales que preservan traza (T)

Un canal $\mathcal{E}$ preserva traza si para todo operador ρ se cumple que $\mathrm{Tr}(\rho) = \mathrm{Tr}(\mathcal{E}(\rho))$.

Ejemplos

Los canales unitarios $\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger$ preservan traza. En efecto, $\mathrm{Tr}(U\rho U^\dagger) = \mathrm{Tr}(\rho U^\dagger U) = \mathrm{Tr}(\rho)$.
Las proyecciones, no. $\mathcal{E}(\rho) = \Pi\rho\Pi^\dagger$. Es fácil ver con un ejemplo que no preserva traza.

Pregunta

La transposición (sin conjugar) dada por $\mathcal{E}(\rho) = \rho^T$, ¿es positiva?
¿Preserva traza?
¿Será un canal físico o necesitamos algo más?
Pizarra.

Canales completamente positivos

Definición: Canales completamente positivos

Un canal $\mathcal{E}$ es completamente positivo si todas sus extensiones $\mathcal{E} \otimes 1_d$ son canales positivos.

Ejemplos

Los canales unitarios y los proyectores son CP. La transposición es P pero no CP.
CP nos acerca un poco más a la noción de canal físico.

Canales completamente positivos

Propiedades

Dado un canal $\mathcal{E}$ son equivalentes:

- $\mathcal{E}$ es completamente positivo.
- La matriz χ de $\mathcal{E}$ es semidefinida positiva.
- $\mathcal{E}$ admite descomposición en operadores de Kraus como $\mathcal{E}(\rho) = \sum_k M_k \rho M_k^\dagger$.

Canales físicos

Evoluciones (sin medición)

Los canales CPT representan evoluciones físicas (sin medición). Todo canal CPT puede pensarse como una evolución unitaria en un espacio más grande (W. F. Stinespring, Proc. Amer. Math. Soc. 6, 211 (1955).)

Evoluciones (con medición)

Los canales CP que no aumentan la traza representan evoluciones físicas incluyendo el proceso de medición. Se implementan con unitarias en espacios más grandes, mediciones y postselección (G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, Europhys. Lett. 83, 30004 (2008).)

Canales físicos

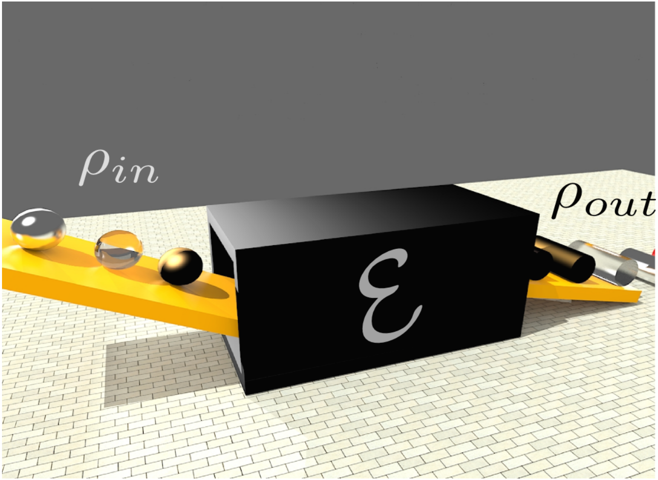
Evoluciones (sin medición)

Los canales CPT representan evoluciones físicas (sin medición). Todo canal CPT puede pensarse como una evolución unitaria en un espacio más grande (W. F. Stinespring, Proc. Amer. Math. Soc. 6, 211 (1955).)

Evoluciones (con medición)

Los canales CP que no aumentan la traza representan evoluciones físicas incluyendo el proceso de medición. Se implementan con unitarias en espacios más grandes, mediciones y postselección (G. Chiribella, G. M. D'Ariano, and P. Perinotti, Europhys. Lett. 83, 30004 (2008).)

Tomografía de procesos



Tomografía de procesos estándar

Idea

Si sabemos cómo actúa el canal sobre una base de los operadores hermíticos, sabemos como funciona siempre por linealidad.

Primer paso, elijo una base de los operadores hermíticos que sean también matrices densidad $\{\rho_k\}$.

Tomografía de procesos estándar

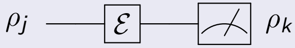
Idea

Si sabemos cómo actúa el canal sobre una base de los operadores hermíticos, sabemos como funciona siempre por linealidad.

Primer paso, elijo una base de los operadores hermíticos que sean también matrices densidad $\{\rho_k\}$.

Tomografía de procesos cuánticos estándar

Circuito

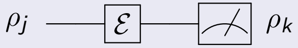


$$\lambda_{jk} = \mathrm{Tr}\left(\rho_k \mathcal{E}\left(\rho_j\right)\right)$$

M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000), ISBN 0-521-63503-9.

Tomografía de procesos cuánticos estándar

Circuito



$$\lambda_{jk} = \mathrm{Tr}\left(\rho_k \mathcal{E}\left(\rho_j\right)\right)$$

Pros y contras

- *Pro*: Es simple para introducir QPT.
- *Contra*: La obtención de la matriz χ requiere invertir una matriz exponencialmente grande.
- *Contra*: No es selectivo.

M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000), ISBN 0-521-63503-9.

Vimos hoy

- Purificación.
- Repaso de mediciones.
- POVM (Positive Operator Valued Measure).
- Canales/procesos/operaciones.
- Tomografía de procesos cuánticos estándar.

La que viene

- Métodos más sofisticados de tomografía de procesos.
- Isomorfismo de Choi-Jamiołkowski.
- Usando tomografía de estados para tomografía de procesos.