Procesamiento Cuántico de Información

Ariel Bendersky[1]

[1]Departamento de Computación - FCEyN - Universidad de Buenos Aires

Clase 11

Clase 11

- Isomorfismo de Choi-Jamoiłkowski.
- Más tomografía de procesos.

Isomorfismo de Choi-Jamoiłkowski

Isomorfismo entre operadores y canales

Existe un isomorfismo (una relación de 1 a 1) entre operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ y canales $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$

El isomorfismo

$$\rho_{\mathcal{E}} = \mathbb{I} \otimes \mathcal{E}\left(|I\rangle\langle I|\right)$$

donde

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |ii\rangle$$

Isomorfismo de Choi-Jamoiłkowski

Isomorfismo entre operadores y canales

Existe un isomorfismo (una relación de 1 a 1) entre operadores de $\mathcal{B}\left(\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}\right)$ y canales $\mathcal{B}\left(\mathcal{H}\right)\to\mathcal{B}\left(\mathcal{H}\right)$

El isomorfismo

$$\rho_{\mathcal{E}} = \mathbb{I}\otimes\mathcal{E}\left(\left|I\right\rangle\left\langle I\right|\right)$$

donde

$$\left|I\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_i \left|ii\right\rangle$$

Isomorfismo de Choi-Jamoiłkowski - Demostración

$$\rho_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d}\mathbb{I} \otimes \mathcal{E}\left(\sum_{j,k=1}^{d} |jj\rangle\langle kk|\right) = \frac{1}{d}\sum_{j,k=1}^{d} |j\rangle\langle k| \otimes \mathcal{E}\left(|j\rangle\langle k|\right)$$

Escribimos el canal en la base de operadores $\{|m\rangle\langle n|\,; m, n \in \{1, ..., d\}\}$.

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{E}} &= \frac{1}{d}\sum_{j,k=1}^{d} |j\rangle\langle k| \otimes \sum_{p,q,r,s=1}^{d} \chi_{(p,q),(r,s)} |p\rangle\langle q|j\rangle\langle k|s\rangle\langle r| \\ &= \frac{1}{d}\sum_{j,k=1}^{d} |j\rangle\langle k| \otimes \sum_{p,q,r,s=1}^{d} \chi_{(p,q),(r,s)} |p\rangle\,\delta_{qj}\delta_{ks}\langle r|\end{aligned}$$

Isomorfismo de Choi-Jamoiłkowski - Demostración

$$\rho_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d} \sum_{p,q,r,s=1}^{d} |q\rangle \langle s| \otimes \chi_{(p,q),(r,s)} |p\rangle \langle r|$$

$$\rho_{\mathcal{E}} = \frac{1}{d} \sum_{p,q,r,s=1}^{d} \chi_{(p,q),(r,s)} |qp\rangle \langle sr|$$

La matriz del estado $\rho_{\mathcal{E}}$ es la misma que la del canal $\mathcal{E}$ (a menos de un swap, que se podía evitar si el canal actuaba sobre la primera parte del estado).

Isomorfismo de Choi-Jamoiłkowski

Hay una relación de 1 a 1 entre canales y operadores. Hay una relación 1 a 1 entre canales CP y operadores semidefinidos positivos. Hay una relación 1 a 1 entre canales CPT y operadores densidad. Esa relación está dada por:

$$\rho_{\mathcal{E}} = \mathbb{I} \otimes \mathcal{E} \left(|I\rangle \langle I| \right)$$

donde

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |ii\rangle$$

Operacionalmente

Dado un canal físico, se puede obtener el estado isomorfo haciendo pasar una parte de un estado máximamente entrelazado por el canal.
Para convertir un estado en su canal isomorfo, se requiere postselección.

Isomorfismo de Choi-Jamoiłkowski

Hay una relación de 1 a 1 entre canales y operadores. Hay una relación 1 a 1 entre canales CP y operadores semidefinidos positivos. Hay una relación 1 a 1 entre canales CPT y operadores densidad. Esa relación está dada por:

$$\rho_{\mathcal{E}} = \mathbb{I} \otimes \mathcal{E} \left(|I\rangle \langle I| \right)$$

donde

$$|I\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |ii\rangle$$

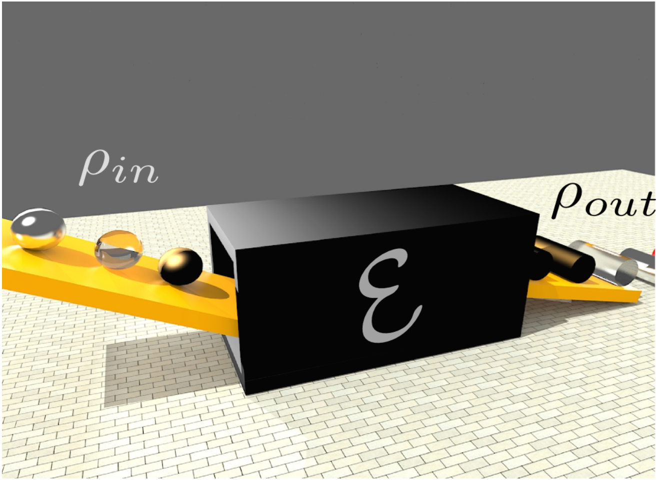
Operacionalmente

Dado un canal físico, se puede obtener el estado isomorfo haciendo pasar una parte de un estado máximamente entrelazado por el canal.

Para convertir un estado en su canal isomorfo, se requiere postselección.

Tomografía de procesos cuánticos

Tomografía de procesos cuánticos



Descripción de un proceso cuántico

Canales cuánticos

Dada una base de operadores $\{E_m\}$ y un canal lineal $\mathcal{E}$ tal que $\rho \to \mathcal{E}(\rho)$:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{mm'} \chi_{mm'} E_m \rho E_{m'}{}^{\dagger}$$

La matriz χ junto con la base $\{E_m\}$ caracteriza completamente al canal.

La tomografía de procesos cuánticos (QPT)...

... es el procedimiento por el cual se determina la matriz χ de un canal para la base $\{E_m\}$.

Descripción de un proceso cuántico

Canales cuánticos

Dada una base de operadores $\{E_m\}$ y un canal lineal $\mathcal{E}$ tal que $\rho \to \mathcal{E}(\rho)$:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{mm'} \chi_{mm'} E_m \rho E_{m'}{}^{\dagger}$$

La matriz χ junto con la base $\{E_m\}$ caracteriza completamente al canal.

La tomografía de procesos cuánticos (QPT)...

... es el procedimiento por el cual se determina la matriz χ de un canal para la base $\{E_m\}$.

Descripción de un proceso cuántico

Canales cuánticos

Dada una base de operadores $\{E_m\}$ y un canal lineal $\mathcal{E}$ tal que $\rho \to \mathcal{E}(\rho)$:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{mm'} \chi_{mm'} E_m \rho E_{m'}{}^{\dagger}$$

La matriz χ junto con la base $\{E_m\}$ caracteriza completamente al canal.

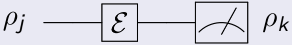
La tomografía de procesos cuánticos (QPT)...

... es el procedimiento por el cual se determina la matriz χ de un canal para la base $\{E_m\}$.

Tomografía de procesos cuánticos

Tomografía de procesos cuánticos estándar

Circuito

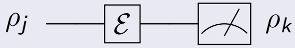


$$\lambda_{jk} = \mathrm{Tr}\left(\rho_k \mathcal{E}\left(\rho_j\right)\right)$$

M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000), ISBN 0-521-63503-9.

Tomografía de procesos cuánticos estándar

Circuito



$$\lambda_{jk} = \mathrm{Tr}\left(\rho_k \mathcal{E}\left(\rho_j\right)\right)$$

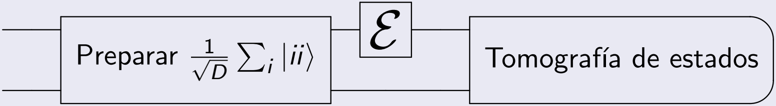
Pros y contras

- *Pro*: Es simple para introducir QPT.
- *Contra*: La obtención de la matriz χ requiere invertir una matriz exponencialmente grande.
- *Contra*: No es selectivo.

M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000), ISBN 0-521-63503-9.

QPT asistido por sistema auxiliar (AAPT y DCQD)

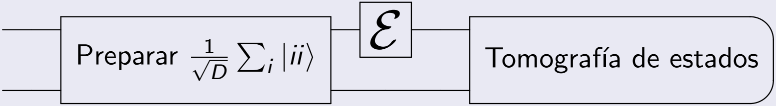
Circuito



J. B. Altepeter et al., Phys. Rev. Lett. 90, 193601 (2003); M. Mohseni et al., Phys. Rev. A 77, 032322 (2008).

QPT asistido por sistema auxiliar (AAPT y DCQD)

Circuito



Pros y contras

- *Pro:* Con $O(n)$ compuertas cuánticas y n qubits auxiliares obtenemos χ_{mm}.
- *Contra:* Los $\chi_{mm'}$ requieren la inversión de un sistema de ecuaciones exponencialmente grande.
- *Contra:* Requiere n qubits auxiliares.

J. B. Altepeter et al., Phys. Rev. Lett. 90, 193601 (2003); M. Mohseni et al., Phys. Rev. A 77, 032322 (2008).

Tomografía de procesos cuánticos

Selective and Efficient Estimation of Parameters for Quantum Process Tomography
A. Bendersky, F. Pastawski and J. P. Paz, Phys. Rev. Lett. 100, 190403 (2008).

Selective and Efficient Quantum Process Tomography
A. Bendersky, F. Pastawski and J. P. Paz, Phys. Rev. A 80, 032116 (2009).

Medida de Haar

Definición

Es la única medida invariante unitaria normalizada sobre el espacio de Hilbert:

$$\int f\left(U\left|\psi\right\rangle\right) d\psi = \int f\left(\left|\psi\right\rangle\right) d\psi$$

$$\int d\psi = 1.$$

Propiedad que nos interesa

$$\int \left\langle\psi\right| A \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right| B \left|\psi\right\rangle = \frac{\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B) + \mathrm{Tr}(AB)}{d(d+1)}$$

Las únicas formas bilineales invariantes unitarias son $\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$ y $\mathrm{Tr}(AB)$). La normalización fija las constantes.

Fidelidad media y tomografía diagonal

La fidelidad media como introducción a la tomografía diagonal...

Definición de fidelidad media

La fidelidad media de un canal $\mathcal{E}$ se define como:

$$F(\mathcal{E}) = \int \langle\psi| \mathcal{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)|\psi\rangle \, d\psi$$

donde la integral es en la medida de Haar.

Propiedades

- El integrando es cuadrático en E_m.
- La fidelidad del canal identidad es 1.

Fidelidad media y tomografía diagonal

La fidelidad media como introducción a la tomografía diagonal...

Definición de fidelidad media

La fidelidad media de un canal $\mathcal{E}$ se define como:

$$F(\mathcal{E}) = \int \langle\psi| \mathcal{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right)|\psi\rangle \, d\psi$$

donde la integral es en la medida de Haar.

Propiedades

- El integrando es cuadrático en E_m.
- La fidelidad del canal identidad es 1.

Fidelidad media y tomografía diagonal

La fidelidad media como introducción a la tomografía diagonal...

Definición de fidelidad media

La fidelidad media de un canal $\mathcal{E}$ se define como:

$$F(\mathcal{E}) = \int \langle\psi| \mathcal{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) |\psi\rangle \, d\psi$$

donde la integral es en la medida de Haar.

Propiedades

- El integrando es cuadrático en E_m.
- La fidelidad del canal identidad es 1.

Medición de la fidelidad media

$$|\psi\rangle \;—\; \boxed{\mathcal{E}} \;—\; |\psi\rangle$$

$$F\left(\mathcal{E}\right) = \int d\psi \left\langle \psi \right| \mathcal{E}\left(\left|\psi\right\rangle \left\langle \psi \right| \right) \left|\psi\right\rangle$$

¿Cómo se relaciona con la tomografía diagonal?

$$F\left(\mathcal{E}\right) = \frac{D\chi_{00} + 1}{D + 1}$$

donde D es la dimensión de $\mathcal{H}$ y $E_0 = I$.

Medición de la fidelidad media

$$|\psi\rangle \; - \boxed{\mathcal{E}} - \; |\psi\rangle$$

$$F(\mathcal{E}) = \int d\psi \, \langle\psi| \, \mathcal{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) |\psi\rangle$$

¿Cómo se relaciona con la tomografía diagonal?

$$F(\mathcal{E}) = \frac{D\chi_{00} + 1}{D + 1}$$

donde D es la dimensión de $\mathcal{H}$ y $E_0 = I$.

Medición de la fidelidad media

$$|\psi\rangle \; - \boxed{\mathcal{E}} - \; |\psi\rangle$$

$$F(\mathcal{E}) = \int d\psi \, \langle\psi| \, \mathcal{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) |\psi\rangle$$

¿Cómo se relaciona con la tomografía diagonal?

$$F(\mathcal{E}) = \frac{D\chi_{00} + 1}{D + 1}$$

donde D es la dimensión de $\mathcal{H}$ y $E_0 = I$.

Medición de la fidelidad media

$$|\psi\rangle \; — \boxed{\mathcal{E}} — \; |\psi\rangle$$

$$F(\mathcal{E}) = \int d\psi \, \langle\psi| \, \mathcal{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) |\psi\rangle$$

¿Cómo se relaciona con la tomografía diagonal?

$$F(\mathcal{E}) = \frac{D\chi_{00} + 1}{D + 1}$$

donde D es la dimensión de $\mathcal{H}$ y $E_0 = I$.

Medición de la fidelidad media

$$|\psi\rangle \;-\!\!\!-\; \boxed{\mathcal{E}} \;-\!\!\!-\; |\psi\rangle$$

$$F(\mathcal{E}) = \int d\psi \, \langle\psi| \, \mathcal{E}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\right) |\psi\rangle$$

¿Cómo se relaciona con la tomografía diagonal?

$$F(\mathcal{E}) = \frac{D\chi_{00} + 1}{D + 1}$$

donde D es la dimensión de $\mathcal{H}$ y $E_0 = I$.

Medición de la fidelidad media

$$|\psi\rangle \; - \boxed{\mathcal{E}} - \; \left(|\psi\rangle\right)$$

$$F\left(\mathcal{E}\right) = \int d\psi \left\langle\psi\right| \mathcal{E}\left(\left|\psi\right\rangle\left\langle\psi\right|\right)\left|\psi\right\rangle$$

¿Cómo se relaciona con la tomografía diagonal?

$$F\left(\mathcal{E}\right) = \frac{D\chi_{00}+1}{D+1}$$

donde D es la dimensión de $\mathcal{H}$ y $E_0 = I$.

Tomografía diagonal

Medición de χ_{mm}

Consideremos el canal:

$$\mathcal{E}_m(\rho) = E_m^\dagger \mathcal{E}(\rho) E_m$$

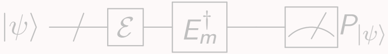
Luego:

$$F(\mathcal{E}_m) = \frac{D\chi_{mm} + 1}{D + 1}$$

Donde usamos que $\mathrm{Tr} E_m^\dagger E_n = D\delta_{mn}$ y que el canal preserva traza.

Cada χ_{mm} está relacionado con la fidelidad de un canal modificado.

Circuito



Nuevamente, falta promediar sobre todo el espacio de Hilbert.

Tomografía diagonal

Medición de χ_{mm}

Consideremos el canal:

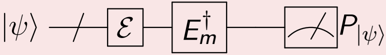
$$\mathcal{E}_m(\rho) = E_m^\dagger \mathcal{E}(\rho) E_m$$

Luego:

$$F(\mathcal{E}_m) = \frac{D\chi_{mm} + 1}{D + 1}$$

Donde usamos que $\mathrm{Tr} E_m^\dagger E_n = D\delta_{mn}$ y que el canal preserva traza. Cada χ_{mm} está relacionado con la fidelidad de un canal modificado.

Circuito



Nuevamente, falta promediar sobre todo el espacio de Hilbert.

Tomografía no diagonal

Lamentablemente...

... la tomografía no diagonal no es la fidelidad de un canal físico.

$$\int \langle\psi| \mathcal{E}\left(E_m^\dagger |\psi\rangle\langle\psi| E_{m'}\right)|\psi\rangle \, d\psi = \frac{D\chi_{mm'} + \delta_{mm'}}{D+1}$$

¿Cómo hacemos?

¿Podemos hacer algo equivalente a aplicar operadores distintos a derecha y a izquierda?

Tomografía no diagonal

Lamentablemente...

... la tomografía no diagonal no es la fidelidad de un canal físico.

$$\int \langle\psi| \mathcal{E}\left(E_m^\dagger |\psi\rangle\langle\psi| E_{m'}\right) |\psi\rangle \, d\psi = \frac{D\chi_{mm'} + \delta_{mm'}}{D+1}$$

¿Cómo hacemos?

¿Podemos hacer algo equivalente a aplicar operadores distintos a derecha y a izquierda?

Tomografía no diagonal

Lamentablemente...

... la tomografía no diagonal no es la fidelidad de un canal físico.

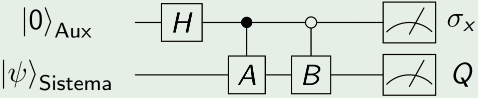
$$\int \langle\psi| \mathcal{E}\left(E_m^\dagger |\psi\rangle\langle\psi| E_{m'}\right)|\psi\rangle \, d\psi = \frac{D\chi_{mm'} + \delta_{mm'}}{D+1}$$

¿Cómo hacemos?

¿Podemos hacer algo equivalente a aplicar operadores distintos a derecha y a izquierda?

Tomografía no diagonal

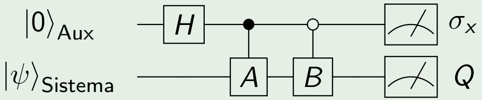
¡Sí podemos!



¿Cómo funciona?

Tomografía no diagonal

¡Sí podemos!



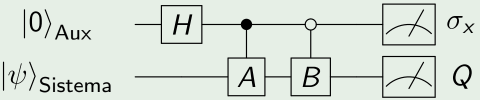
¿Cómo funciona?

El estado anterior a la medición es:

$$\begin{aligned}
\rho_f = \quad & \frac{1}{2}\Big(|0\rangle\langle 0| \otimes B|\psi\rangle\langle\psi| B^\dagger + \\
+ \quad & |0\rangle\langle 1| \otimes B|\psi\rangle\langle\psi| A^\dagger + \\
+ \quad & |1\rangle\langle 0| \otimes A|\psi\rangle\langle\psi| B^\dagger + \\
+ \quad & |1\rangle\langle 1| \otimes A|\psi\rangle\langle\psi| A^\dagger \Big)
\end{aligned}$$

Tomografía no diagonal

¡Sí podemos!



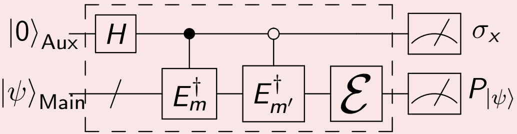
¿Cómo funciona?

$$\mathrm{Tr}\left(\rho_f \;\; \sigma_x \otimes Q\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\left(B\,|\psi\rangle\,\langle\psi|\,A^\dagger + A\,|\psi\rangle\,\langle\psi|\,B^\dagger\right)Q\right]$$

Tomografía no diagonal

Entonces...

Un método con un qubit auxiliar alcanza para realizar dicha tarea.



$$\int \langle \sigma_x \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \rangle \, d\psi = \frac{D\Re(\chi_{mm'}) + \delta_{mm'}}{D+1}$$

$$\int \langle \sigma_y \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \rangle \, d\psi = \frac{D\Im(\chi_{mm'})}{D+1}$$

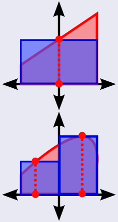
The missing link

Promediando sobre todo el espacio de Hilbert.

2 diseños

La idea general

Al integrar polinomios en $\mathbb{R}$, alcanza con evaluar el polinomio en un conjunto finito de puntos para obtener el resultado exacto.



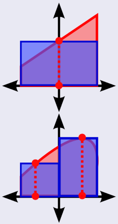
La misma idea

Para integrar en $\mathcal{H}$ polinomios de grado t en $|\psi\rangle$ y $\langle\psi|$, alcanza con evaluar en un conjunto finito de estados llamado t–diseño.

2 diseños

La idea general

Al integrar polinomios en $\mathbb{R}$, alcanza con evaluar el polinomio en un conjunto finito de puntos para obtener el resultado exacto.

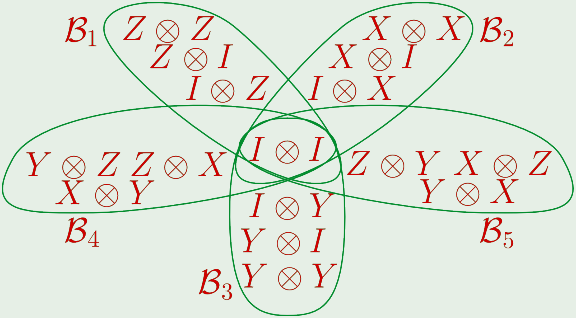


La misma idea

Para integrar en $\mathcal{H}$ polinomios de grado t en $|\psi\rangle$ y $\langle\psi|$, alcanza con evaluar en un conjunto finito de estados llamado t–diseño.

2–diseños y partición de Paulis

Ejemplo para 2 qubits



Notación:

$$|\psi_m^J\rangle$$

Figura tomada de la tesis de licenciatura de Fernando Pastawski

Sobre la eficiencia

¿Es eficiente?

El 2–diseño tiene una cantidad exponencialmente grande de elementos.

Sin embargo...

... tomando una muestra aleatoria de los elementos del 2–diseño se puede aproximar eficientemente el coeficiente buscado.

El error

Si queremos tener una probabilidad p de obtener el coeficiente con un error menor a ϵ debemos realizar M experimentos.

$$M \geq \frac{\ln\left(\frac{2}{p}\right)}{2\epsilon^2}.$$

Sobre la eficiencia

¿Es eficiente?

El 2–diseño tiene una cantidad exponencialmente grande de elementos.

Sin embargo...

... tomando una muestra aleatoria de los elementos del 2–diseño se puede aproximar eficientemente el coeficiente buscado.

El error

Si queremos tener una probabilidad p de obtener el coeficiente con un error menor a ϵ debemos realizar M experimentos.

$$M \geq \frac{\ln\left(\frac{2}{p}\right)}{2\epsilon^2}.$$

Sobre la eficiencia

¿Es eficiente?

El 2–diseño tiene una cantidad exponencialmente grande de elementos.

Sin embargo...

... tomando una muestra aleatoria de los elementos del 2–diseño se puede aproximar eficientemente el coeficiente buscado.

El error

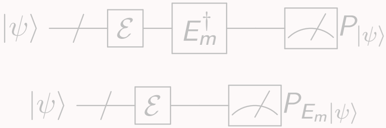
Si queremos tener una probabilidad p de obtener el coeficiente con un error menor a ϵ debemos realizar M experimentos.

$$M \geq \frac{\ln\left(\frac{2}{p}\right)}{2\epsilon^2}.$$

Determinación simultánea de coeficientes diagonales

Observación

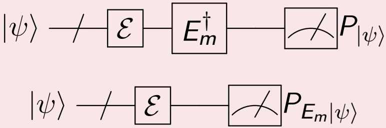
Son equivalentes los siguientes circuitos:



Determinación simultánea de coeficientes diagonales

Observación

Son equivalentes los siguientes circuitos:



Detección de coeficientes diagonales principales

Observación

Tomando experimentos de a pares se pueden obtener los coeficientes principales.

Resultado

La cantidad M de experimentos necesarios para detectar todos los $\chi_{mm} > \epsilon$ con una incerteza individual δ, y una probabilidad de éxito p es

$$M \geq \frac{2\left(D + \frac{1}{\epsilon}\right)(D+1)}{D^2\delta^2(1-p)}$$

Detección de coeficientes diagonales principales

Observación

Tomando experimentos de a pares se pueden obtener los coeficientes principales.

Resultado

La cantidad M de experimentos necesarios para detectar todos los $\chi_{mm} > \epsilon$ con una incerteza individual δ, y una probabilidad de éxito p es

$$M \geq \frac{2\left(D + \frac{1}{\epsilon}\right)(D+1)}{D^2\delta^2(1-p)}$$

Detección de coeficientes diagonales principales

Observación

Tomando experimentos de a pares se pueden obtener los coeficientes principales.

Resultado

La cantidad M de experimentos necesarios para detectar todos los $\chi_{mm} > \epsilon$ con una incerteza individual δ, y una probabilidad de éxito p es

$$M \geq \frac{2\left(D + \frac{1}{\epsilon}\right)(D+1)}{D^2\delta^2(1-p)}$$

¿Para qué sirve detectar coeficientes principales?

Resultado para canales CP

$$|\chi_{mn}|^2 \leq \chi_{mm}\chi_{nn}$$

Luego...

... conocer los coeficientes diagonales principales ayuda a determinar la importancia de los bloques principales de la matriz χ.

¿Para qué sirve detectar coeficientes principales?

Resultado para canales CP

$$|\chi_{mn}|^2 \leq \chi_{mm}\chi_{nn}$$

Luego...

... conocer los coeficientes diagonales principales ayuda a determinar la importancia de los bloques principales de la matriz χ.

¿Para qué sirve detectar coeficientes principales?

Resultado para canales CP

$$|\chi_{mn}|^2 \leq \chi_{mm}\chi_{nn}$$

Luego...

... conocer los coeficientes diagonales principales ayuda a determinar la importancia de los bloques principales de la matriz χ.

¿Para qué sirve detectar coeficientes principales?

Resultado para canales CP

$$|\chi_{mn}|^2 \leq \chi_{mm}\chi_{nn}$$

Luego...

... conocer los coeficientes diagonales principales ayuda a determinar la importancia de los bloques principales de la matriz χ.

Vimos hoy

- Isomorfismo de Choi-Jamiołkowski entre canales y operadores.
- Tomografía selectiva y eficiente de canales cuánticos.