1 Решение уравнения и методики

Надо решть уравнение

$$I_c(H) = \max_{\varphi_0}\Big[J_c\int_0^L \sin\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}x + \psi(x) + \varphi_0(H)\Big)dx\Big] \tag{1}$$

где $\alpha = \dfrac{Ld}{\Phi_0}$. Распишем сперва что нам дает условние максимизации по φ_0

$$\begin{aligned} I_c(H) = \max_{\varphi_0}\Big[J_c\int_0^L \sin\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}x + \psi(x) + \varphi_0\Big)dx\Big] = \\ = \max_{\varphi_0}\Big[J_c\int_0^L \sin\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}x + \psi(x)\Big)\cos(\varphi_0)dx + J_c\int_0^L \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}x + \psi(x)\Big)\sin(\varphi_0)dx\Big] = \\ = \max_{\varphi_0}\Big[A(H)\cos(\varphi_0) + J_c B(H)\sin(\varphi_0)\Big] = \\ = J_c\max_{\varphi_0}\Big[\sqrt{A(H)^2+B(H)^2}\sin\Big(\arctan\Big[\frac{A(H)}{B(H)}\Big]+\varphi_0\Big)\Big] = \\ = J_c\sqrt{A(H)^2+B(H)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Где введены обозначения

$$\begin{aligned} A(H) = \int_0^L \sin\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}x + \psi(x)\Big)dx \\ B(H) = \int_0^L \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}x + \psi(x)\Big)dx \end{aligned} \tag{3}$$

Для получения конечного выражения в (2) мы также воспользовались условием что

$$\sin\Big(\arctan\Big[\frac{A(H)}{B(H)}\Big] + \varphi_0(H)\Big) = 1 \Rightarrow \varphi_0(H) = \frac{\pi}{2} - \arctan\Big[\frac{A(H)}{B(H)}\Big] \tag{4}$$

Также из условий максимизации китического тока по параметру φ_0 можем сказат

$$\frac{\partial Ic(H)}{\partial\varphi_0} = 0 \Rightarrow J_c\int_0^L \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}x + \psi(x) + \varphi_0(H)\Big)dx = 0 \tag{5}$$

2 Способы решения уравнения

2.1 Фурье

Прежде чем приступить у выведению решения уравнения с помошью фурье преобразавания введем обазначения

$$\begin{aligned} y = \frac{2\pi\alpha}{L}H \quad dy = \frac{2\pi\alpha}{L}dH \\ u(y) = \int_0^L \sin(yh + \psi(h) + \varphi_0)dh = \frac{1}{J_c}I_c\Big(\frac{L}{2\pi\alpha}y\Big) \\ v(y) = \int_0^L \cos(yh + \psi(h) + \varphi_0)dh = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Где u - получается из уравненя (1) а v из уравнения (5) Рассмотрим прямое и обратное преобразавание фурье функции $e^{i\psi(x)}$

$$\begin{aligned} e^{i\psi(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dy \int_0^L e^{iyh} e^{i\psi(h)} dh = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} dy \int_0^L e^{iyh} e^{i\varphi_0(y)} e^{-i\varphi_0(y)} e^{i\psi(h)} dh = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} e^{-i\varphi_0(y)} dy \int_0^L e^{iyh} e^{i\varphi_0(y)} e^{i\psi(h)} dh = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} e^{-i\varphi_0(y)} (v(y) + iu(y)) dy = \\ = \frac{i}{2\pi J_c}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} e^{-i\varphi_0(y)} I_c(y) dy \end{aligned} \tag{7}$$

Рассматривая реальную и мнимую компаненту данного уравнения можно получить два соотношения

$$\cos(\psi(x)) = \frac{d}{J_c\Phi_0}\int_{-\infty}^{\infty} \sin\Big(\frac{2\pi d x}{\Phi_0} H + \varphi_0(H)\Big) I_c(H) dH \tag{8}$$

$$\sin(\psi(x)) = \frac{d}{J_c\Phi_0}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\Big(\frac{2\pi d x}{\Phi_0} H + \varphi_0(H)\Big) I_c(H) dH \tag{9}$$

Заметим что до этого момента мы не пользовались никакими приближениями или условиями на $\psi(x)$. Заметим что при любом симетричном внешнем неизвестным полем относительно центра контакта данное решение превращяется в точное так как $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Это следует из уравнения 4 и из того что интеграл A(H) становится равной 0-у. Далее для полного решения уравнения мне нехватает $\varphi_0(H)$.

2.2 Метод численного решения

Второй метод решения основован на уже полученном уравнении

$$\begin{aligned} I_c = J_c\sqrt{A(H)^2 + B(H)^2} \\ \Big(\frac{I_c}{J_c}\Big)^2 = (A(H))^2 + (B(H))^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Распишем интергал A и B в виде дискретной суммы до N

$$\begin{aligned} A(H)^2 = \Big(\sum_i^N \sin\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_i + \psi(x_i)\Big) h\Big)^2 h^2 = \sum_i^N \sin^2\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_i + \psi(x_i)\Big) h^2 + \\ + \sum_{i\neq j}^N \sin\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_i + \psi(x_i)\Big) \sin\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_j + \psi(x_j)\Big) h^2 \\ B(H)^2 = \Big(\sum_i^N \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_i + \psi(x_i)\Big) h\Big)^2 h^2 = \sum_i^N \cos^2\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_i + \psi(x_i)\Big) h^2 + \\ + \sum_{i\neq j}^N \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_i + \psi(x_i)\Big) \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L} x_j + \psi(x_j)\Big) h^2 \end{aligned} \tag{11}$$

далее суммируая $A^2(H)$ и $B^2(H)$ и имея введу соотношения

$$\begin{aligned} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\ \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} A^2(H) + B^2(H) = N \cdot h^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}(x_j - x_i) + \psi(x_j) - \psi(x_j)\Big) h^2 = \\ N \cdot h^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H}{L}(j-i)h + \psi(x_j) - \psi(x_j)\Big) h^2 \end{aligned} \tag{13}$$

и наконец получаем систему линейных уравнений

$$\Big(\frac{I_c(H_k)}{J_c}\Big)^2 = N \cdot h^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \cos\Big(\frac{2\pi\alpha H_k}{L}(j-i)h + \psi(x_j) - \psi(x_j)\Big) h^2 \tag{14}$$

Далее остается решить систему таких линейных уравнений.