Chapitre 2 – Matrices

I. Généralités sur les matrices

Définition : une matrice de **taille** ou **format** ou **dimension** $(\boldsymbol{n};\boldsymbol{p})$ est un tableau rectangulaire constitué de nombres réels avec **n lignes** et **p colonnes.**

Ex : $M = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 10 & 5 \\ 6 & -8 & 0 \\ -1 & 7 & -7 \end{bmatrix}$

M est de taille (4 ;3)

Notation :

On notera m_{ij} le nombre situé à la $i^{ème}$ ligne et à la $j^{ème}$ colonne.

Exemples :

$m_{31} = 6$

$m_{12} = 2$

$m_{44} =$ non défini

Matrices particulières

- Matrice ligne :

  C'est une matrice avec une seule ligne : format $(1;p)$

  Exemple : $A = [2 \quad 4 \quad -1]$

- Matrice colonne

  C'est une matrice avec une seule colonne (format (n ;1))

  Exemple : B=$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

- Matrices carrées

  Ce sont des matières ayant autant de lignes que de colonnes

  Exemple : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, cette matrice est de dimension (3 ;3)

- Matrices identités

  Ce sont les matrices carrées n'ayant que des 1 sur la diagonale principale et des 0 ailleurs.

Exemple : $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. I_3 est une matrice carrée d'ordre 3 (l'ordre correspond au nombre de lignes/colonnes sur la matrice carrée)

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- Matrice nulle

  Matrice constituée uniquement de 0

  Ex : $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ format (2 ;3)

Définition : La transposée d'une matrice M, notée M^t ou t_M est obtenue en inversant les lignes et les colonnes.

Exemple : $E = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$, taille (3 ;2)

$E^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ taille (2 ;3)

Définition : pour que 2 matrices A et B soient égales, il faut que :

- Le format soit le même (même nombre de lignes et colonnes)
- Leurs coefficients de même indice soient égaux 2 à 2 (mêmes nombres à l'intérieur)

Exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

A est une matrice de format (3 ;1), B est une matrice de format (1 ;3)

$A \neq B$ car A et B n'ont pas la même dimension.

II. Opérations sur les matrices

1. Additions et soustractions

Propriété : pour additionner (ou soustraire) deux matrices, il faut que :

- A et B aient la même dimension
- Il faut additionner (ou soustraire) les coefficients situés aux mêmes emplacements.

Exemple :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$A+C=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 6 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A-C=\begin{bmatrix} -4 & 7 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. Multiplication par un nombre réel

Propriété : pour multiplier une matrice par un nombre, il suffit de multiplier tous les coefficients par ce nombre.

Exemple : $A=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$2\times A=\begin{bmatrix} -4 & 8 & 2 \\ 0 & 10 & 16 \\ 20 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{3}I_3-\mathbf{4}A=\mathbf{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\mathbf{4}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \\ 10 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -8 & 16 & 4 \\ 0 & 20 & 32 \\ 40 & -12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 11 & -16 & -4 \\ 0 & -17 & -32 \\ -40 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$