WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA
IM. JAROSŁAWA DĄBROWSKIEGO W WARSZAWIE

WYDZIAŁ CYBERNETYKI

Techniki algorytmiczne

Binarny problem plecakowy

Prowadzący: mgr inż. Krzysztof Panufnik

Autorzy :

Małgorzata Filipek

Magdalena Grochowska

Grupa: I7B3S4

1. Teoretyczny opis problemu

Problem plecakowy – zagadnienie załadunkowe, polega na załadowaniu do plecaka odpowiednich przedmiotów posiadających swoją wagę oraz wartość. Celem jest, aby wartość zawartości plecaka była jak największa. Wagi określają ograniczenia, a wartości są współczynnikami funkcji celu. Istnieją różne odmiany zagadnienia załadunku:

- Binarne zagadnienie załadunku
- Uogólnione zagadnienie plecakowe
- Nieliniowe zagadnienie plecakowe

Binarny problem plecakowy wyróżnia się, że rozważamy jedynie decyzję czy określony przedmiot powinien być zapakowany czy też nie, bez uwzględnienia ilości sztuk.

Rozwiązaniem problemu plecakowego jest optymalizacja załadunku z uwagi na jego wartość przy nieprzekroczeniu ładowności plecaka.

Model matematyczny:

Dane problemu plecakowego:
b – ładowność plecaka
n – liczba przedmiotów
a_j – waga j-tego przedmiotu (współczynnik funkcji ograniczającej, liczba całkowita dodatnia), j = 1, 2, …, n
c_j – zysk z zabrania j-tego przedmiotu (współczynnik funkcji celu, liczba całkowita dodatnia), j = 1, 2, …, n
Zmienne:
x_j – zmienne decyzyjne, określające czy j-ty przedmiot ma być zapakowany
Ograniczenia:
$x_j \in \{0, 1\}$ – ograniczenie wartości zmiennej (przyjmuje wartość 1, gdy decydujemy o zabraniu j-tego przedmiotu do plecaka oraz wartość 0 w przeciwnym wypadku)

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow max$$

funkcja celu (zysk)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

ograniczenie ładowności

$$x_j \in \{0, 1, 0/1\}, \text{ gdzie}$$

0 – podejmujemy decyzję o niezabraniu przedmiotu do plecaka
1 – podejmujemy decyzję o zabraniu przedmiotu do plecaka
0/1 - czyli na poprzednim etapie wystąpił przedmiot, po zabraniu którego zyski są takie same jak dla rozpatrywanego przedmiotu. Rozpatrujemy zatem dwie sytuacje – tę, w której podejmujemy decyzję o zabraniu rozpatrywanego przedmiotu do plecaka oraz tę, w której decydujemy o niezabieraniu przedmiotu do plecaka.
Praktyczne zastosowanie problemu plecakowego:

- Załadunek palet
- Sprzedaż wysyłkowa – pakowanie zakupów
- Załadunek w odpowiedniej kolejności paczek na pojazd kurierski
- Załadunek kontenerów na statek
- Spakowanie walizki na wakacje

2. Opis algorytmu dokładnego

Przegląd zupełny jest określany jako algorytm dokładny dla problemu plecakowego. Metoda ta nie jest efektywna obliczeniowo (złożoność - $\theta(2^n)$), jednak znajduje najlepsze rozwiązanie. Przegląd zupełny polega na systematycznym przeglądzie wszystkich możliwych rozwiązań.

Algorytm sprawdza wszystkie możliwe podzbiory zbioru P (ilość takich zbiorów równa jest 2^P), sprawdza podzbiory o liczbie elementów kolejno: 1,2,3,…,n, gdzie n jest liczbą wszystkich przedmiotów.
W i-tej iteracji należy przejrzeć wszystkie podzbiory o długości i. Ilość podzbiorów w i-tej iteracji wyznacza wzór:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Jeżeli dla podzbioru są spełnione ograniczenia zadanie określane jest jako dopuszczalne i zostaje obliczony dla niego zysk, w przeciwnym przypadku podzbiór jest niedopuszczalny.

Po zakończeniu algorytmu dostarczane jest rozwiązanie zwracające największy zysk.
Przykład:
Ładowność plecaka*, b = 15*

Lp.	Waga	Wartość
1	5	40
2	4	50
3	3	30
4	6	30

Wszystkie możliwe podzbiory z ich wyceną:

Podzbiór	Waga	Wycena	Dopuszczenie
{1}	5	40	T
{2}	4	50	T
{3}	3	30	T
{4}	6	30	T
{1,2}	5+4=9	40+50=90	T
{1,3}	5+3=9	40+30=70	T
{1,4}	5+6=11	40+30=70	T
{2,3}	4+3=7	50+30=80	T
{2,4}	4+6=10	50+30=80	T
{3,4}	3+6=9	30+30=60	T
{1,2,3}	5+4+3=12	40+30+50=120	T
{1,2,4}	5+4+6=15	40+50+30=120	T
{1,3,4}	5+3+6=14	40+30+30=100	T
{2,3,4}	4+3+6=13	50+30+30=110	T
{1,2,3,4}	5+4+3+6=18	40+50+30+30=150	F

Najlepsze rozwiązanie dla postawionego zadania stanowi podzbiór elementów: 1,2,3, którego waga wynosi 12, co sprawia, że zbiór jest dopuszczony, ponieważ maksymalna ładowność wynosi 15. (12<15), natomiast zysk jest największy dla zadanych ograniczeń i wynosi 120.

3. Opis algorytmu aproksymacyjnego – programowanie dynamiczne

Jednym z rozwiązań aproksymacyjnych problemu załadunku jest zagadnienie programowania dynamicznego. Polega ono na stworzeniu tabeli pokazującej maksymalny zysk dla danego podzbioru elementów o sumarycznym rozmiarze nie większym niż ładowność plecaka.

Wzór pozwalający na obliczenie wartości zysku dla kolejnych pozycji w tabeli V:

$$V[0,s]=0 \text{ dla } 0\leq s\leq b$$
$$V[i,s]=max\{V[i-1,s],V[i-1,s-a_i)]+c_i \text{ dla } 1\leq i\leq n,\ 0\leq s\leq b$$

Gdzie:
V[i-1,s] oznacza najlepsze (poprzednio obliczone i zapamiętane w tabeli) rozwiązanie dla rozważanej aktualnie pojemności plecaka s oraz podzbioru elementów {1, …., i-1}
V[i-1, s-s(a_i)] - oznacza najlepsze (poprzednio obliczone i zapamiętane w tabeli) rozwiązanie dla aktualnie rozważanej pojemności plecaka s pomniejszonej o rozmiar elementu s(a_i), który próbujemy dołożyć do plecaka, dla podzbioru elementów {1, … i-1}

Przykład:

Ładowność plecaka, *b = 15*

Lp.	Waga	Wartość
1	5	40
2	4	50
3	3	30
4	6	30

V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	0	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
2	0	0	0	50	50	50	50	50	90	90	90	90	90	90	90
3	0	0	30	50	50	50	80	80	90	90	90	120	120	120	120
4	0	0	30	50	50	50	80	80	90	90	90	120	120	120	120

V[1,1]=max{V[0,1],V[0,1-5]+40}=max{0,0}=0
V[2,5]=max{V[1,5],V[1,5-4]+50}=max{40,50}=50
V[4,12]=max{V[3,12],V[3,12-6]+30}=max{120,50+30}=max{120,80}=120

Keep	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1
2	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1	1
3	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	**1**	1
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**

Najlepsze rozwiązanie dla postawionego zadania stanowi podzbiór elementów: 1,2,3, którego zysk wynosi 120.

4. Oszacowania

n – wielkość zadania (ilość obiektów)

b – ładowność plecaka

a. Teoretyczna pesymistyczna złożoność

i. Pamięciowa

a) Przegląd zupełny

Teoretyczna pesymistyczna złożoność algorytmu przeglądu zupełnego wynosi

T(1)= 1

T(2)= 2+1=3

T(3)= 3+3+1=7

T(4)=4+6+4+1=15

T(5)=5+10+10+5+1=31

T(n)= 2T(n-1)+1

b=2, c=1, a=1

$$\boldsymbol{a_n = a * b^n + c * \frac{b^n - 1}{b - 1}}$$

$$a_n = 2^n + \frac{2^n - 1}{1}$$

$$a_n = 2^n + 2^n - 1$$

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

b) Programowanie dynamiczne

Teoretyczna pesymistyczna złożoność pamięciowa algorytmu programowania dynamicznego określona jest wzorem b*n.

T(1)=b

T(n)=T(n-1)+b

$$\boldsymbol{a_n = n * b}$$

ii. Obliczeniowa

a) Przegląd zupełny

Teoretyczna pesymistyczna złożoność wynosi 2^n-1.

$\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = (2)^n$-1 => $\theta(2^n)$

b) Programowanie dynamiczne

Teoretyczna pesymistyczna złożoność wynosi n*b

$\theta(n)$

b. Teoretyczna złożoność oczekiwana

i. Obliczeniowa

$$A_\alpha(n) = \sum_{i=1}^{n} p(I) * t(I) = E(X_n)$$

a) Przegląd zupełny

$$A_\alpha(n) = \frac{1}{n} * 2^n \quad \theta(2^n)$$

b) Programowanie dynamiczne

$$A_\alpha(n) = \frac{1}{n} * n(n-1) = n - 1 \;\; \theta(n)$$

ii. Pamięciowa

a) Przegląd zupełny

$$A_\alpha(n) = \frac{1}{n} * (2^{n+1} - 1) \;\; \theta(2^n)$$

b) Programowanie dynamiczne

$$A_\alpha(n) = \frac{1}{n} * (n-1) * n * b$$

$$A_\alpha(n) = (n-1) * b \quad \theta(b)$$

c. Teoretyczna wrażliwość pesymistyczna

$$\Delta_\alpha(n) = max\{t(I_1) - t(I_2) : I_1 I_2 \in D_n\}$$

Obydwa z wybranych algorytmów zarówno przegląd zupełny oraz programowanie dynamiczne są niewrażliwe, ponieważ:

$$\Delta_\alpha(n) = 0$$

d. Teoretyczna wrażliwość oczekiwana

$$\delta(n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p(I) * (t(I) - E(X_n))^2}$$

a) Przegląd zupełny

$$\delta(n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ((2^n - 1) - (\frac{2^n}{n}))^2}$$

b) Programowanie dynamiczne

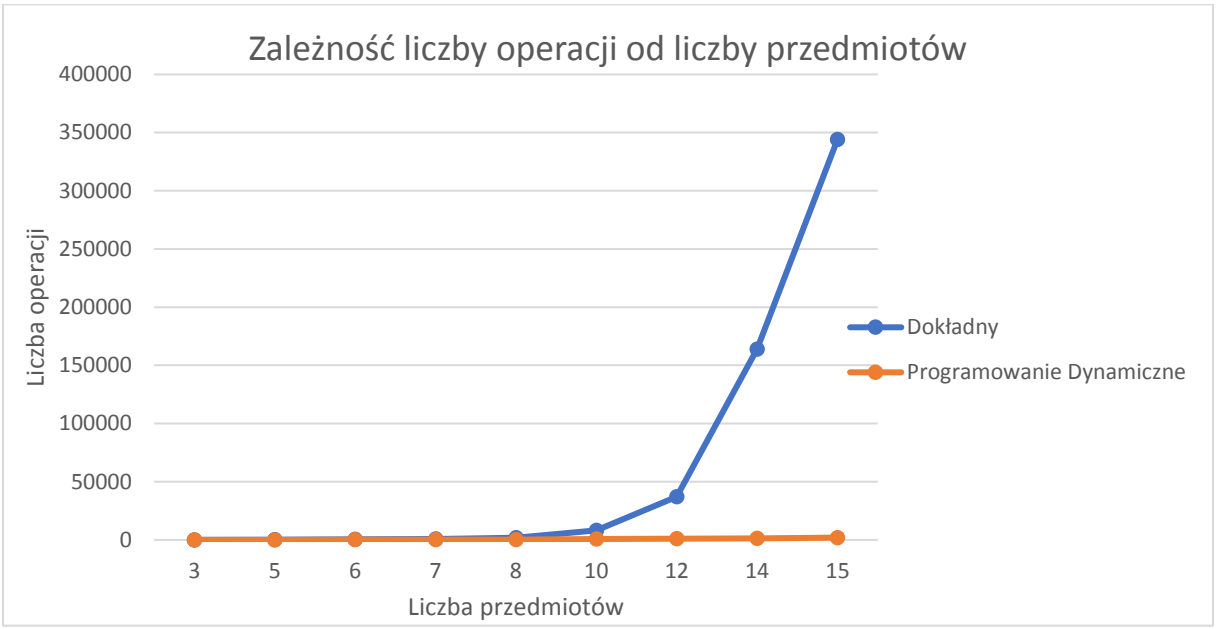
$$\delta(n) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}((n*b)-(n-1))^2}$$

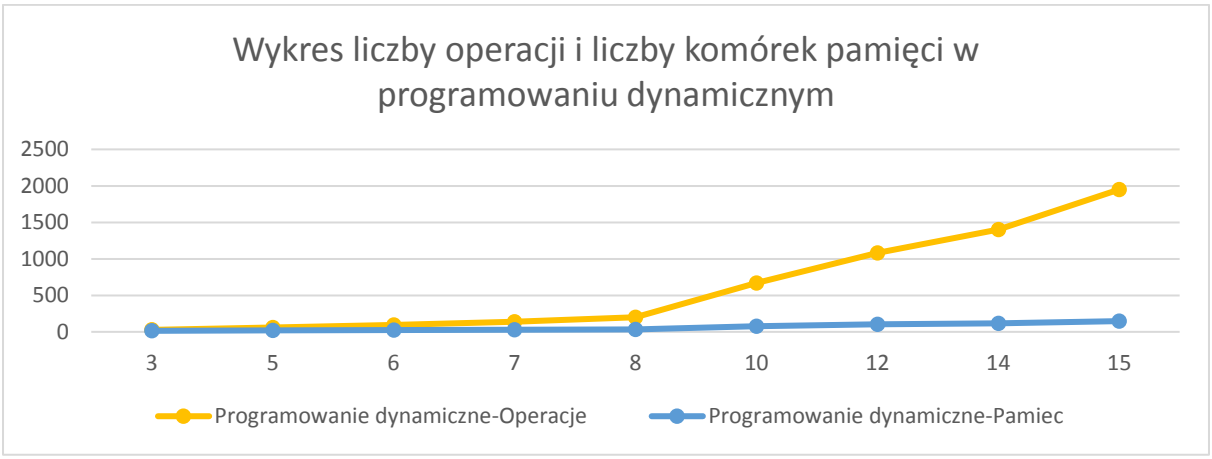
5. Porównanie wyników

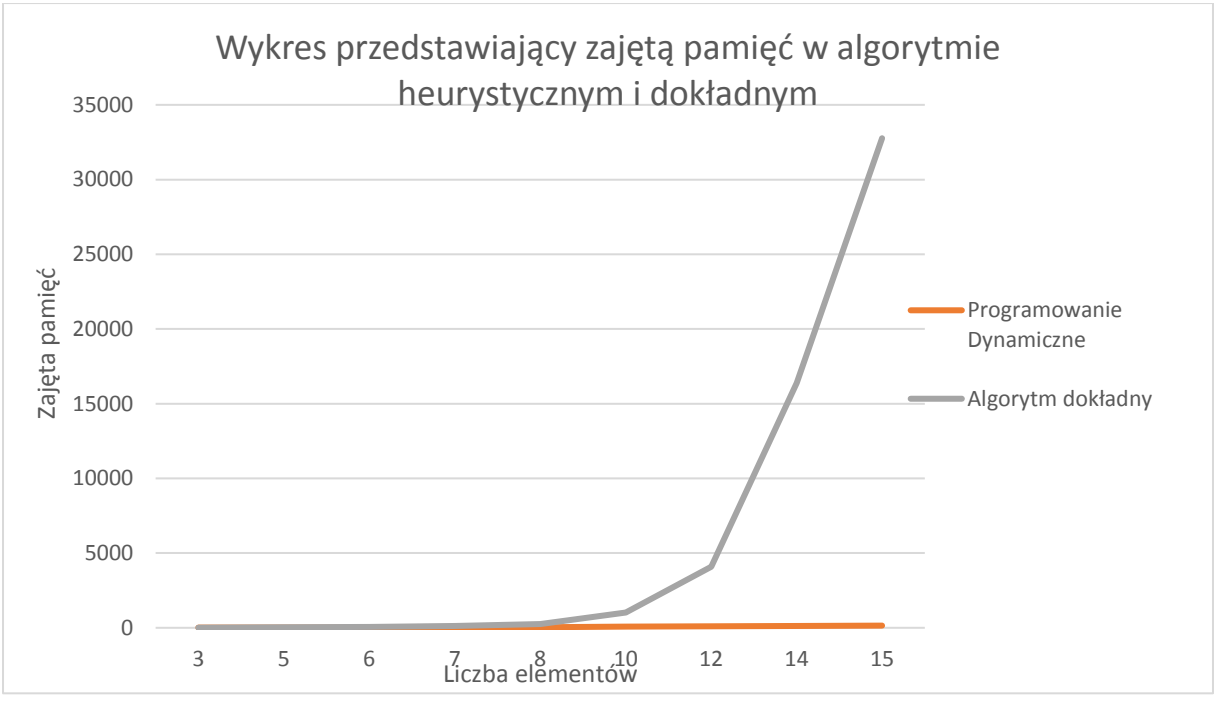
Dane						
	w={1,2,3} Val1={4,5,6} Lad1=4		w={4,11,15,13,12,18} val2={5,3,8,6,1,17,9} lad2=58		w={3,4,7,8,5,6,1,9,10, 11,12,14,16,19} val3={2,3,4,5,6,8,1,9,13, 14,15,11,15,17} lad3=80	
Algorytm	Przegląd zupełny	Programowanie dynamiczne	Przegląd zupełny	Programowanie dynamiczne	Przegląd zupełny	Programowanie dynamiczne
Złożoność czasowa	282	430	141	418	16806	1120
Złożoność pamięciowa	1220	9	912	67	165445	96

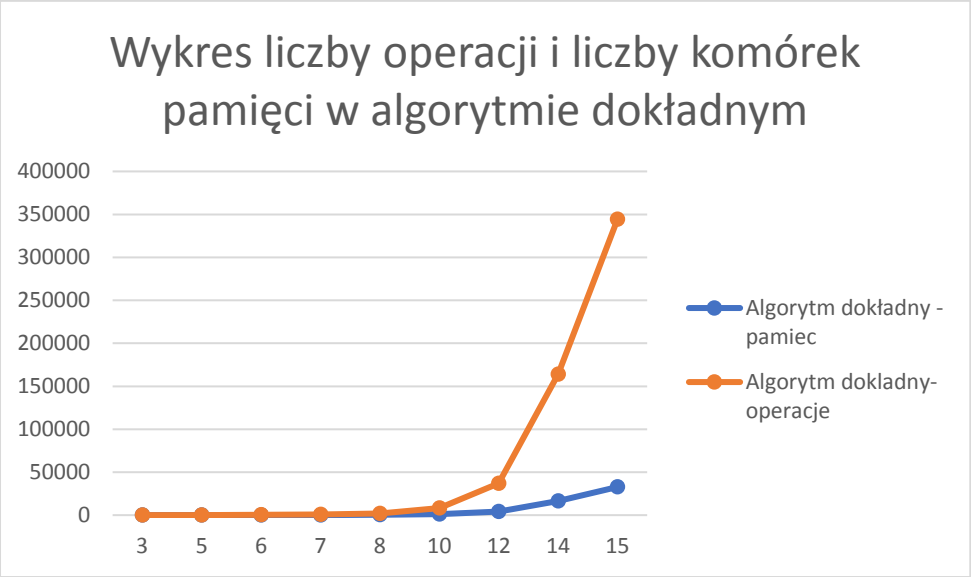
Przeprowadzone badania:

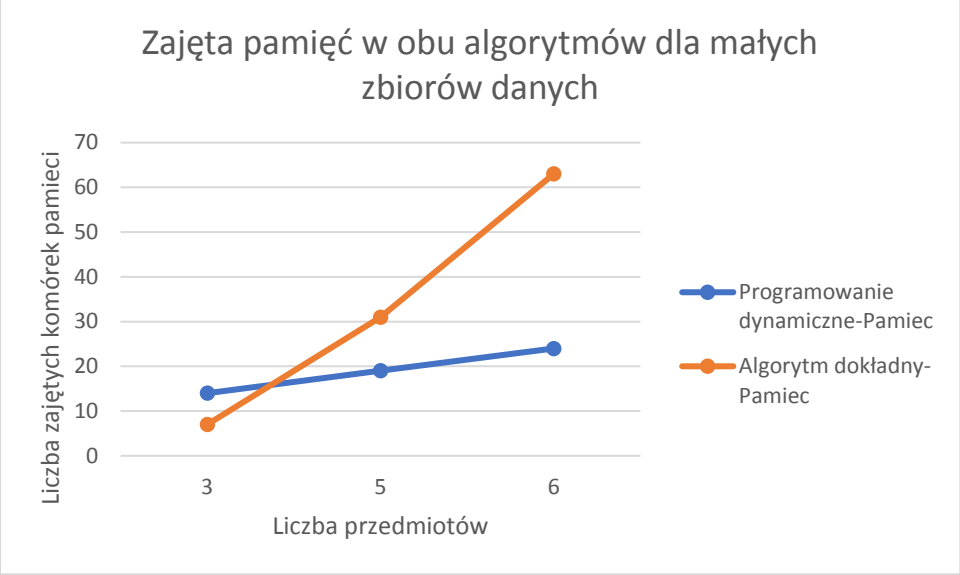
L.przedmiotów	Wagi	Wartości	Ładowność	Programowanie dynamiczne-Operacje	Programowanie dynamiczne-Pamiec	Algorytm dokładny-Operacje	Algorytm dokładny-Pamiec
3	6,8,9	4,5,6	9	27	14	40	7
5	7,9,13,6,4	5,8,3,4,5	12	60	19	189	31
6	7,9,13,6,5,3	5,8,3,4,6,1	16	96	24	403	63
7	7,9,13,6,5,4,11	5,8,3,4,6,2,6	20	140	29	858	127
8	7,9,13,6,5,11,15,12	5,8,3,4,6,3,7,8	25	200	35	1826	255
10	4,5,3,8,14,16,11,17,19,20	4,5,2,7,8,6,10,11,19,20	67	670	79	8245	1023
12	4,5,3,8,14,16,11,17,19,21,23,25	4,5,2,7,8,6,10,11,19,21,23,25	90	1080	104	36940	4095
14	4,5,3,8,14,16,11,17,19,21,23,26,27,29	4,5,2,7,8,6,10,11,19,22,25,26,27,32	100	1400	116	163943	16383
15	4,5,3,8,14,16,11,17,19,21,23,26,27,30,35	4,5,2,7,8,6,10,11,19,22,25,26,27,33,34,45	130	1950	147	344182	32767

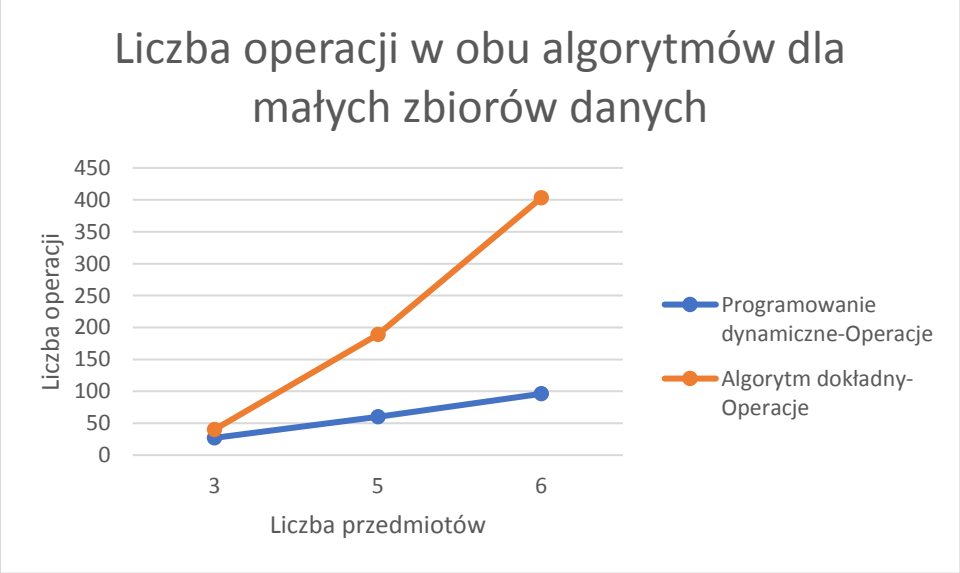

Zależność liczby operacji od liczby przedmiotów
400000
350000
300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
Liczba operacji
3
5
6
7
8
10
12
14
15
Liczba przedmiotów
Dokładny
Programowanie Dynamiczne


Wykres liczby operacji i liczby komórek pamięci w programowaniu dynamicznym
2500
2000
1500
1000
500
0
3
5
6
7
8
10
12
14
15
Programowanie dynamiczne-Operacje
Programowanie dynamiczne-Pamiec


Wykres przedstawiający zajętą pamięć w algorytmie heurystycznym i dokładnym
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
Zajęta pamięć
3
5
6
7
8
10
12
14
15
Liczba elementów
Programowanie Dynamiczne
Algorytm dokładny


Wykres liczby operacji i liczby komórek pamięci w algorytmie dokładnym
400000
350000
300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
3
5
6
7
8
10
12
14
15
Algorytm dokładny - pamiec
Algorytm dokladny- operacje


Zajęta pamięć w obu algorytmów dla małych zbiorów danych
Liczba zajętych komórek pamieci
70
60
50
40
30
20
10
0
3
5
6
Liczba przedmiotów
Programowanie dynamiczne-Pamiec
Algorytm dokładny- Pamiec


Liczba operacji w obu algorytmów dla małych zbiorów danych
Liczba operacji
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
3
5
6
Liczba przedmiotów
Programowanie dynamiczne-Operacje
Algorytm dokładny- Operacje

6. Wnioski

Na podstawie przeprowadzonych badań możemy zauważyć, że programowanie dynamiczne jest algorytmem lepiej sprawdzającym się przy większych zbiorach danych, natomiast przegląd zupełny nadaje się lepiej do bardzo małych zbiorów danych.

Dzięki przeprowadzonym testom potwierdzone zostały wyniki oszacowań przeprowadzone w punkcie 4. Złożoność obliczeniowa wyboru przedmiotów do plecaka pokryła się z oszacowaniami, gdyby uwzględnić czynności przygotowujące w algorytmie dokładnym generowałyby one znaczną ilość operacji. Rząd złożoności pamięciowej zgadza się z oszacowanym rzędem oczekiwanej złożoności pamięciowej.