

Wycena i analiza opcji w modelu dwumianowym

Dawid Kawalec, Magdalena Potok, Iga Selwat

Maj 2024

Wstęp

Niniejszy projekt skupia się na zastosowaniu dwumianowego modelu rynku do wyceny i analizy opcji europejskich oraz amerykańskich. W tym modelu akcja w chwili t może zmienić swoją wartość w kolejnym kroku na $u \cdot S_t$ albo $d \cdot S_t$, gdzie u i d są zadanymi parametrami. Przyjmujemy, że akcja nie wypłaca dywidendy. Dodatkowo, mamy możliwość inwestycji lub pożyczki ze stałą stopą wolną od ryzyka r w każdym okresie, przy czym oprocentowanie jest ciągłe. Czas pomiędzy kolejnymi krokami w drzewie dwumianowym oznaczamy jako Δt . Głównym celem projektu jest wycena i analiza następujących opcji:

- opcje europejskie *call* i *put* z ceną wykonania K i zapadalnością T lat,
- opcje amerykańskie *call* i *put* z ceną wykonania K i zapadalnością T lat.

Na początek parametry wyjściowe:

- $\Delta t = 1/12$, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $\sigma = 0.3$,
- $S_0 = 50$, $r = 0.02$,
- $K = 48$, $T = 2$.

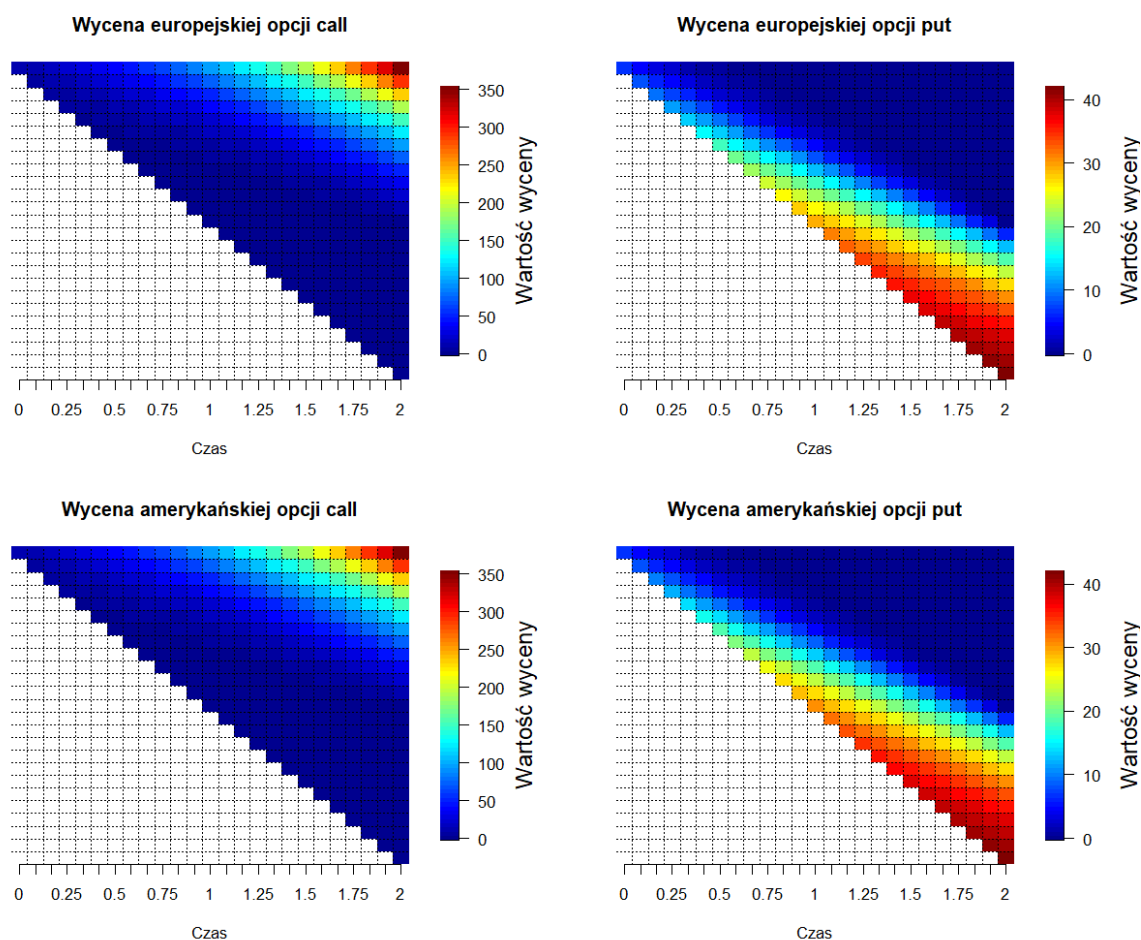
Oprócz samej wyceny wyżej wymienionych opcji zostały również przeanalizowane pod kątem wrażliwości na poszczególne parametry oraz porównane zostały wyniki między opcjami amerykańskimi i europejskimi.

Wyceny opcji dla parametrów wyjściowych

Tabela 1: Wyceny opcji

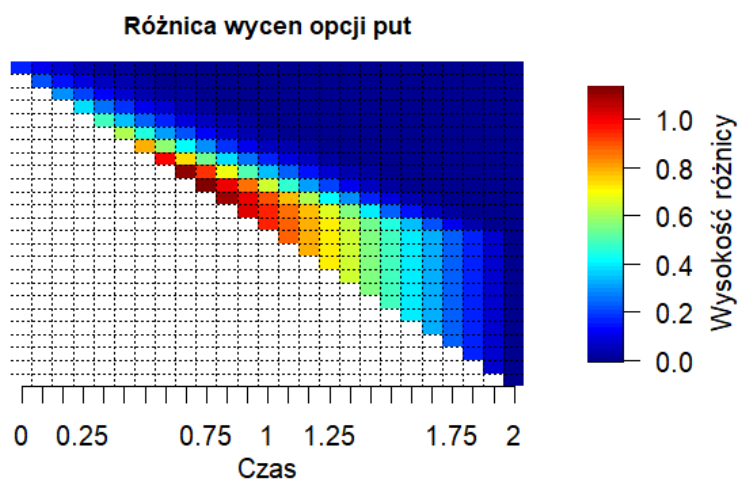
	Europejska	Amerykańska
call	10.191	10.191
put	6.309	6.471

Porównując opcje europejskie i amerykańskie obserwujemy minimalne różnice w ich wycenach. W przypadku opcji typu *call* wartości wycen są identyczne, co sugeruje, że wykonywanie opcji amerykańskiej przed chwilą zapadalności $T = 2$ nie przynosi dodatkowych korzyści. Natomiast w przypadku opcji *put* istnieje pewna różnica w wartościach wycen, co wskazuje na możliwość korzystniejszego wykonania tej opcji przed terminem zapadalności. Niemniej jednak, różnica ta jest minimalna, co sugeruje, że czynnik czasu zapadalności nie odgrywa znaczącej roli w kontekście możliwości wcześniejszego wykonania opcji. Wniosek ten sugeruje, że elastyczność opcji amerykańskich nie jest istotna dla analizowanych parametrów, co może wpływać na decyzję inwestycyjną w zależności od indywidualnych preferencji inwestora oraz specyficznych warunków rynkowych.



Rysunek 1: Implementacja wyceny w drzewie dwumianowym

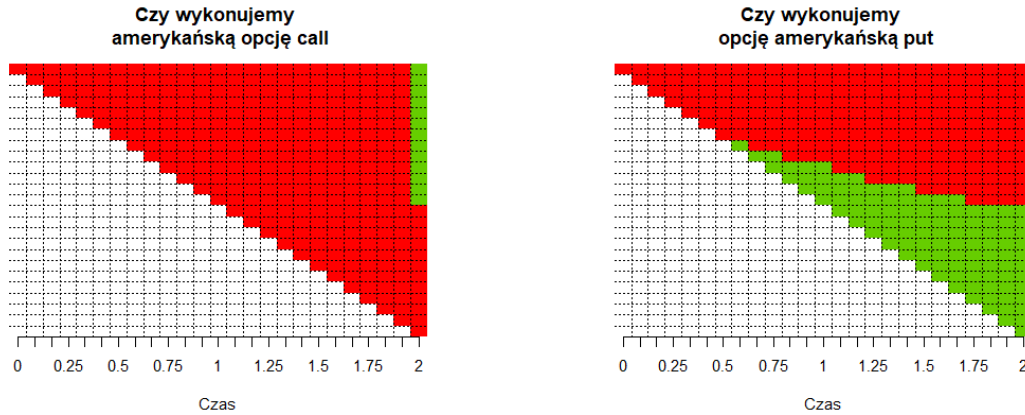
Wizualizacja drzewa dwumianowego na rysunku 1 prezentuje wyceny opcji w różnych momentach czasowych. Kolor ciemno-czerwony symbolizuje najwyższe wartości, natomiast granatowy najniższe. Opcje europejskie i amerykańskie typu *call* prezentują takie same wykresy, gdzie wyceny opcji w poszczególnych momentach nie różnią się, co jest zgodne z ich ostateczną wyceną w chwili 0. W przypadku opcji *put* różnice te są minimalne, co sprawia, że trudno zauważyć istotne różnice między wykresami.



Rysunek 2: Różnica między wyceną opcji amerykańskiej a europejskiej put.

Rysunek 2 przedstawia różnice w wycenach w różnych momentach dla opcji amerykańskiej i europejskiej typu *put*. Największa różnica wynosi około 1.13, co jest stosunkowo niewielką wartością. Dlatego na rysunku 1, przy zastosowanej skali, różnice te nie były widoczne. Wykres różnic wycen opcji *call* został pominięty, ponieważ, jak wcześniej wspomniano, te wykresy się nie różnią.

Zbadanie momentów wykonania opcji amerykańskich

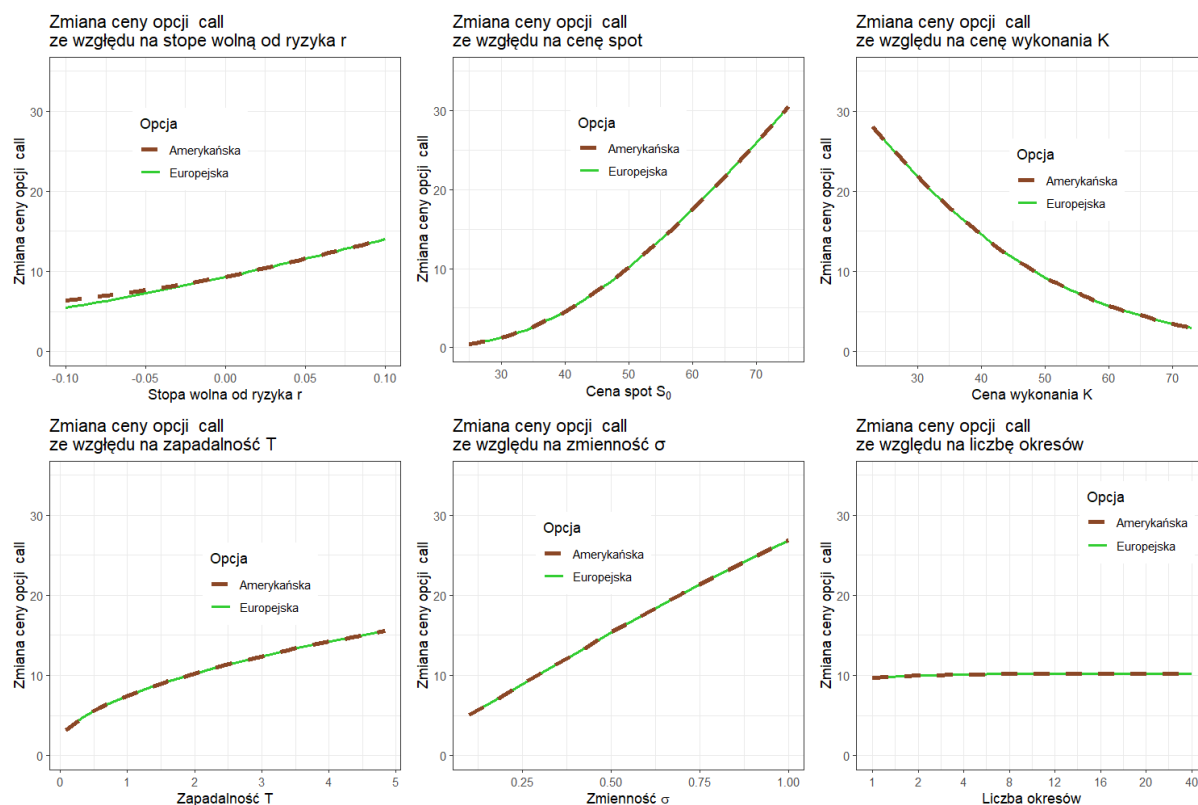


Rysunek 3: Momenty wykonania opcji amerykańskich

Ponieważ opcje amerykańskie mają możliwość wykonania w dowolnym momencie między 0 a T , istotne jest zidentyfikowanie momentów, w których wykonanie opcji jest korzystne dla inwestora. Na rysunku 3 zielony kolor wskazuje wierzchołki drzewa, w których opłaca się wykonać opcję, natomiast czerwonym kolorem zaznaczone są momenty, kiedy wykonanie opcji nie jest korzystne. W przypadku opcji *call* obserwujemy, że opłacalne jest jej wykonanie jedynie w momencie $T = 2$, co jest zgodne z wyceną przedstawioną w tabeli 1. Natomiast dla opcji *put* można zauważyć, że istnieją wcześniejsze momenty niż moment zapadalności $T = 2$, w których wykonanie tej opcji jest opłacalne. To wyjaśnia dlaczego wycena opcji amerykańskiej *put* jest wyższa niż opcji europejskiej *put*.

Jednowymiarowa analiza wrażliwości ceny

Analiza dla opcji call



Rysunek 4: Zmienność parametrów dla opcji call.

Każdy z powyższych sześciu wykresów przedstawia jak różne parametry wpływają na wycenę opcji amerykańskiej i europejskiej *call*.

Wpływ stopy wolnej od ryzyka r (górny lewy wykres)

Wzrost stopy wolnej od ryzyka prowadzi do wzrostu ceny obu opcji. Wykres pokazuje, że wyższe wartości r powodują wyższe ceny opcji zarówno amerykańskiej, jak i europejskiej. Jednak przy ujemnych wartościach r , cena opcji amerykańskiej jest wyraźnie wyższa niż europejskiej, co może wynikać z różnic w możliwości wcześniejszego wykonania opcji amerykańskiej.

Wpływ ceny spot S_0 (górny środkowy wykres)

Cena obu typów opcji wzrasta wraz ze wzrostem ceny spot. To intuicyjne, ponieważ wyższa cena aktywów bazowych sprawia, że opcje *call* są bardziej wartościowe. Wykres pokazuje niemal identyczne krzywe dla obu opcji, co sugeruje, że cena spot ma taki sam wpływ na wycenę zarówno opcji amerykańskiej, jak i europejskiej.

Wpływ ceny wykonania K (górny prawy wykres)

Wzrost ceny wykonania prowadzi do spadku ceny obu opcji. W miarę jak cena wykonania rośnie, opcja staje się mniej wartościowa, ponieważ jest mniej prawdopodobne, że zostanie wykonana z zyskiem. Wykres pokazuje, że zarówno opcje amerykańskie, jak i europejskie reagują na zmiany K w bardzo podobny sposób.

Wpływy terminu zapadalności T (dolny lewy wykres)

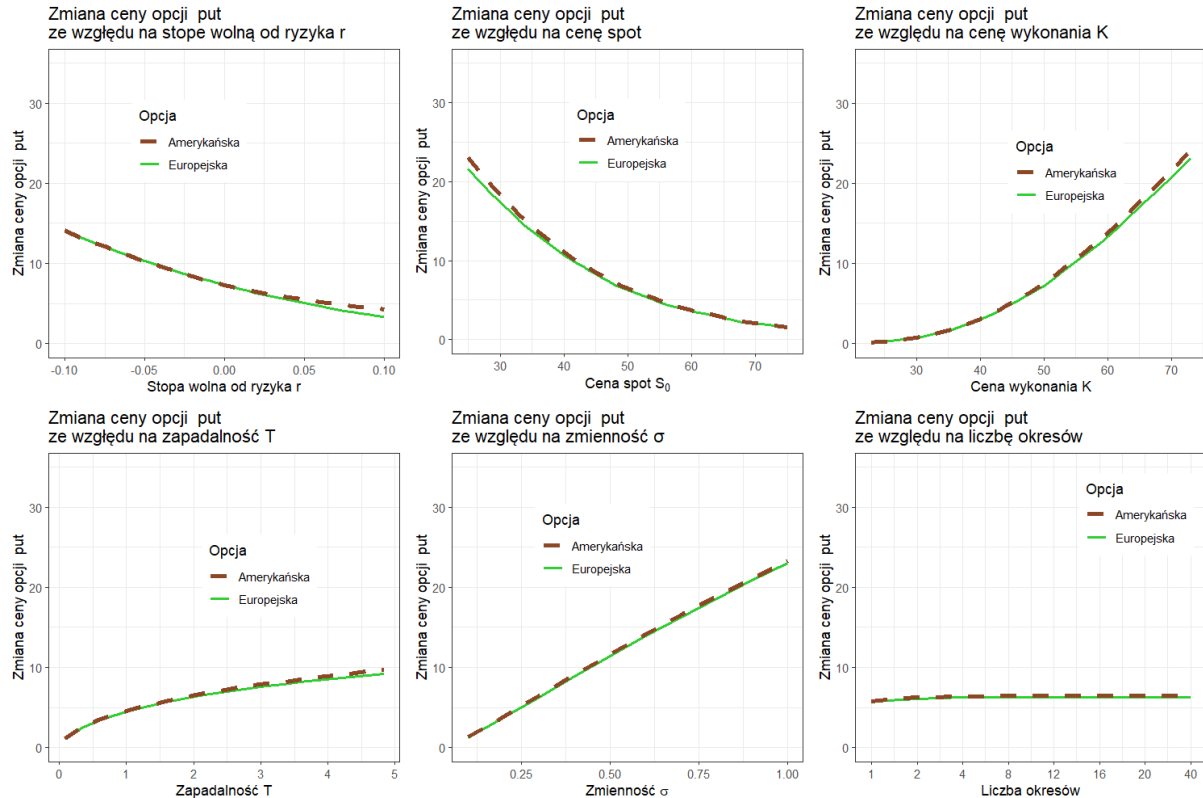
Wydłużenie terminu zapadalności zwiększa cenę obu opcji. Dłuższy czas do wygaśnięcia daje większą elastyczność i szansę na korzystne zmiany ceny aktywa bazowego, co może zwiększać wartość opcji.

Wpływ zmienności σ (dolny środkowy wykres) Wzrost zmienności prowadzi do wzrostu ceny obu opcji. Wyższa zmienność oznacza większą niepewność co do przyszłej ceny aktywa bazowego, co zwiększa wartość opcji ze względu na większe prawdopodobieństwo korzystnych zmian cen. Wykres pokazuje, że ceny obu opcji rosną podobnie wraz ze wzrostem σ , co wskazuje na silny wpływ zmienności na wycenę zarówno opcji amerykańskiej, jak i europejskiej.

Wpływ liczby okresów (dolny prawy wykres)

Wycena utrzymuje się prawie na stałym poziomie. Zwiększenie czy zmniejszenie liczby okresów nie wpływa znacząco na wycenę, sugeruje to, że parametry te nie wpływają znacząco na wycenę opcji.

Analiza dla put



Rysunek 5: Zmienność parametrów dla opcji put.

Wpływ stopy wolnej od ryzyka r (górny lewy wykres)

Wzrost stopy wolnej od ryzyka r powoduje spadek ceny opcji *put* zarówno amerykańskiej, jak i europejskiej. Wyższa stopa powinna zmniejszać obecną wartość przyszłych wypłat z opcji, co obniża jej wartość. Wykresy obu typów opcji są bardzo podobne, ale przy większej stopie procentowej, opcja amerykańska zaczyna być bardziej wartościowa ze względu na możliwość wcześniejszego wykonania.

Wpływ ceny spot S_0 (górny środkowy wykres)

Wzrost ceny spot S_0 skutkuje spadkiem wartości wyceny opcji *put* w obu przypadkach. Jest to spowodowane większym ryzykiem, że opcja *put* będzie wykonywana z zyskiem. Różnice między opcjami są minimalne, ale przy niższej cenie spot opcja amerykańska może być bardziej wartościowa ze względu na możliwość szybszego wykonania.

Wpływ ceny wykonania K (górny prawy wykres)

Wzrost ceny wykonania K powoduje wzrost wartości opcji *put*. Wyższa cena wykonania oznacza, że opcja może mieć większą potencjalną wartość w momencie wykonania. Tutaj ponownie obie opcje zachowują się podobnie, ale opcja amerykańska przy większej cenie wykonania może zacząć być bardziej wartościowa.

Wpływ terminu zapadalności T (dolny lewy wykres)

Wzrost zapadalności T prowadzi do wzrostu wartości opcji *put*. Dłuższy czas do wygaśnięcia oznacza większą niepewność i szansę na to, że opcja będzie warta więcej, co podnosi wartość opcji. Różnice między opcjami amerykańskimi, a europejskimi są minimalne, ale opcje amerykańskie zaczynają się bardziej opłacać przy dużych T ze względu na możliwość wcześniejszego wykonania.

Wpływ zmienności σ (dolny środkowy wykres)

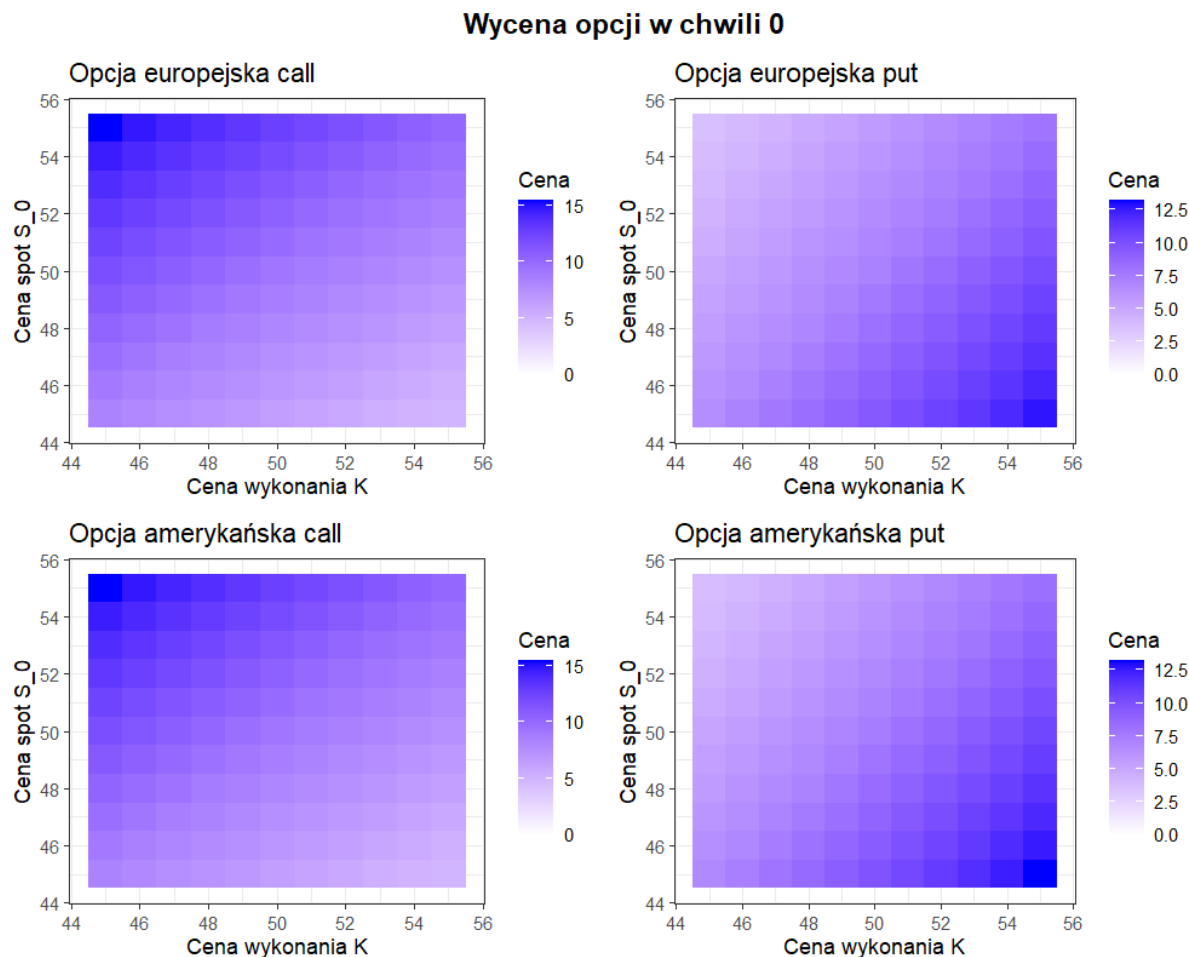
Wzrost zmienności σ zwiększa wartość opcji *put*. Większa zmienność oznacza większe ryzyko, co podnosi wartość opcji. Tutaj już nie widać różnic pomiędzy opcjami.

Wpływ ilości okresów (dolny prawy wykres)

Zwiększenie liczby okresów nie ma znaczącego wpływu na wartość opcji *put*. Nie ma różnicy między opcją amerykańską, a europejską.

Dwuwymiarowa analiza wrażliwości ceny

Analiza względem ceny wykonania K oraz ceny spot S_0

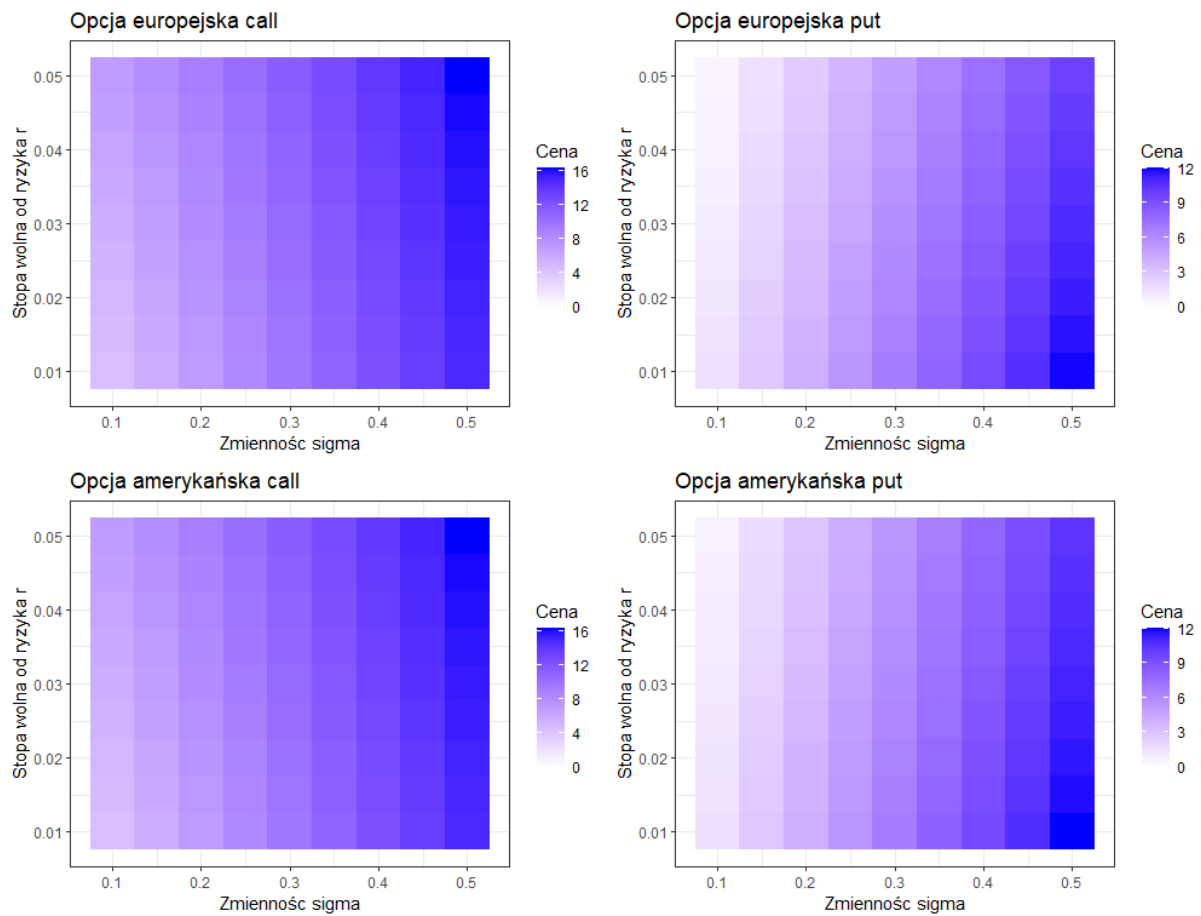


Rysunek 6: Zmienność parametrów K i S_0 .

Tak jak widzieliśmy przy jednowymiarowej analizie tych dwóch parametrów, cena wykonania K oraz cena spot S_0 w podobnym stopniu wpływają na cenę akcji. Jak wcześniej zauważyliśmy, dla opcji *call* przy wzroście K cena akcji maleje, a dla opcji *put* rośnie. Dla S_0 sytuacja jest odwrotna. Widzimy więc, że cena pierwszego rodzaju opcji jest największa, gdy cena wykonania jest niska, a cena spot wysoka. Natomiast dla drugiego rodzaju opcji, cena w chwili 0 jest wysoka dla większej wartości K i mniejszej wartości S_0 . Największa i najmniejsza cena znajdują się więc w rogu wykresu. Stąd możemy wyciągnąć wniosek, że oba parametry badane w tej części są ze sobą mocno powiązane.

Analiza względem zmienności σ oraz intensywności oprocentowania r

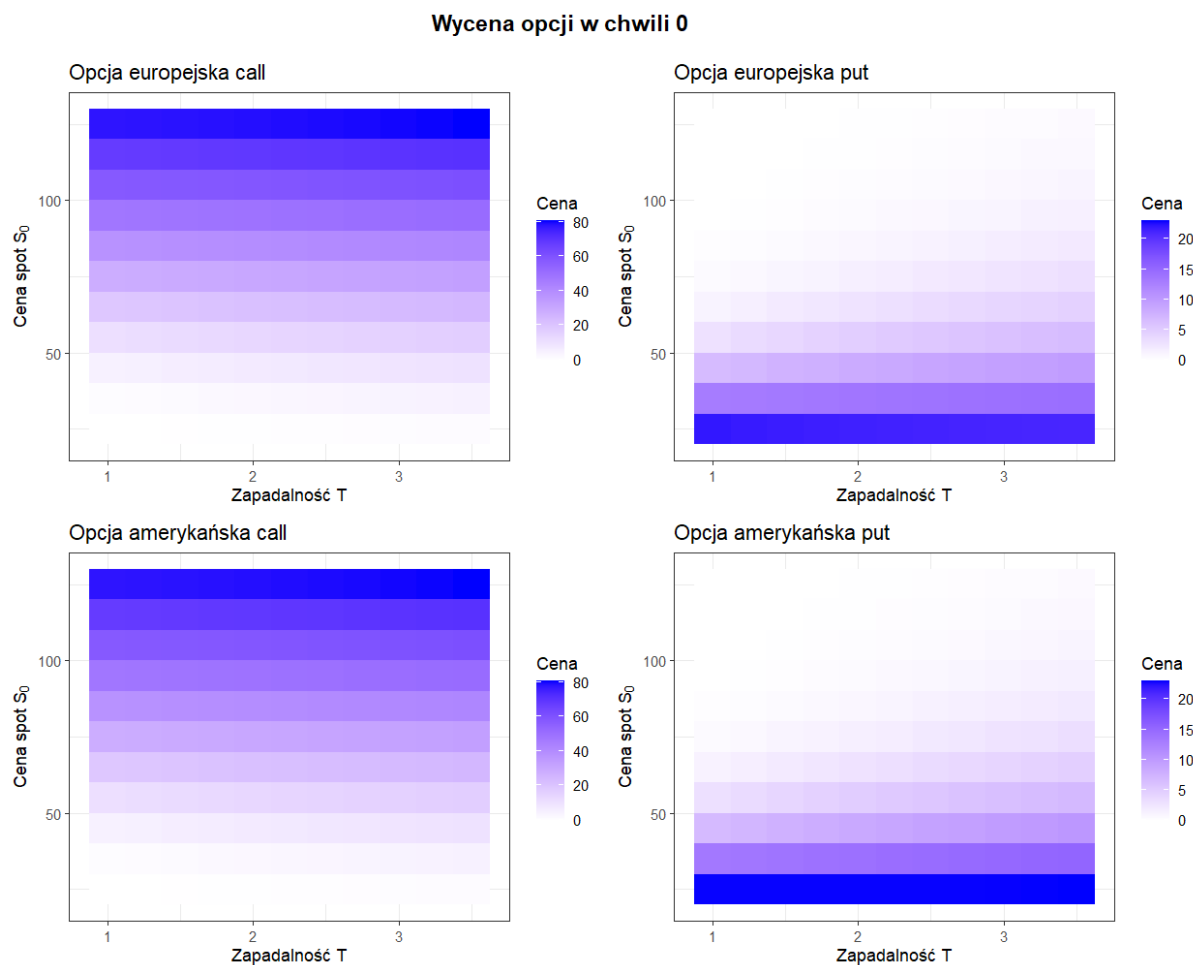
Wycena opcji w chwili 0



Rysunek 7: Zmienność parametrów r i σ .

W przeciwieństwie do poprzednich wykresów, skupienia kolorów w rogach wykresów jest słabsze, a lepiej widoczne są pasma. Zatem parametry σ oraz r nie są ze sobą aż tak bardzo powiązane. Podobnie jak przy jednowymiarowej analizie tych parametrów widzimy, że zmienność ma większy wpływ na cenę akcji niż intensywność oprocentowania.

Analiza względem zapadalności T oraz ceny spot S_0

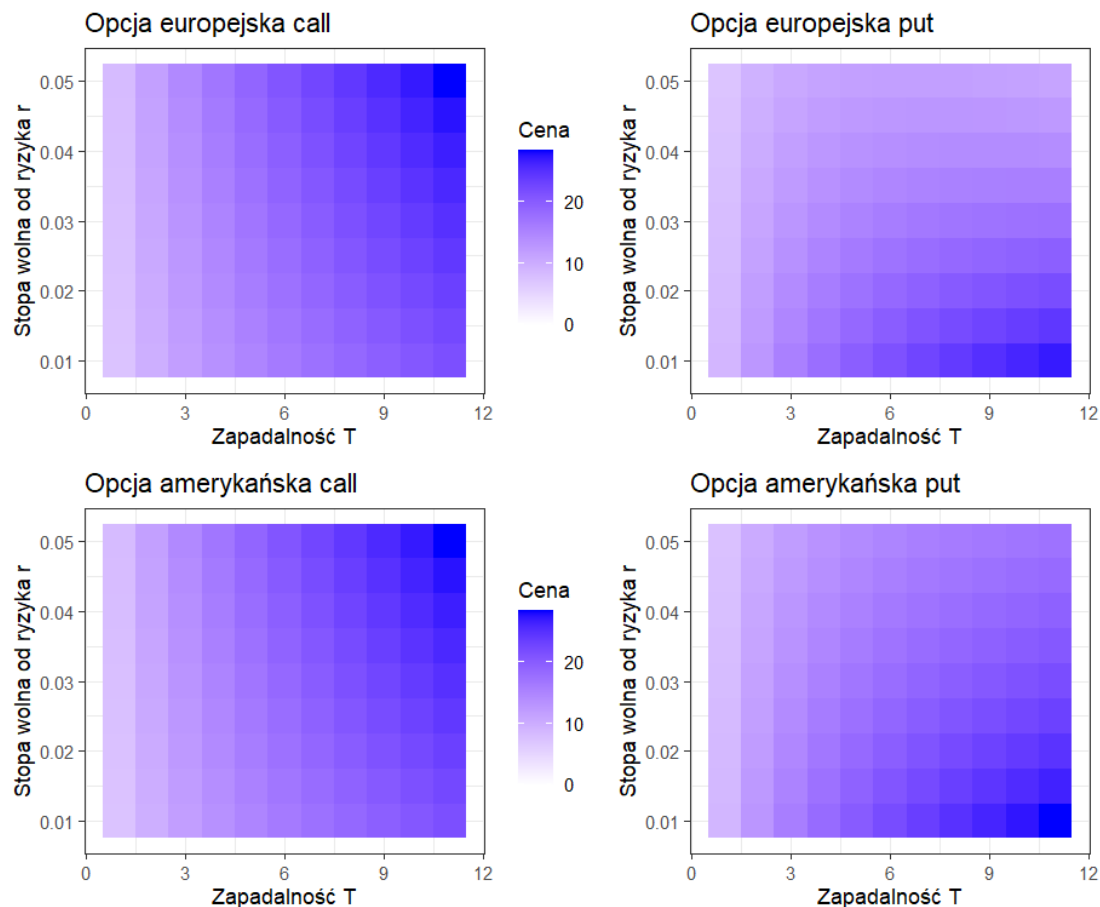


Rysunek 8: Zmienność parametrów T i S_0 .

W wypadku zapadalności oraz ceny spot wyraźnie widzimy, że badane dwa parametry nie są ze sobą powiązane. Zapadalność T ma mniejszy wpływ na zmianę ceny niż cena spot S_0 . Widzimy jednak, że w wypadku opcji *put* przy odpowiednio dużej cenie spot, cena opcji nie zmienia swojej wartości aż tak mocno.

Analiza względem zapadalności T oraz intensywności oprocentowania r

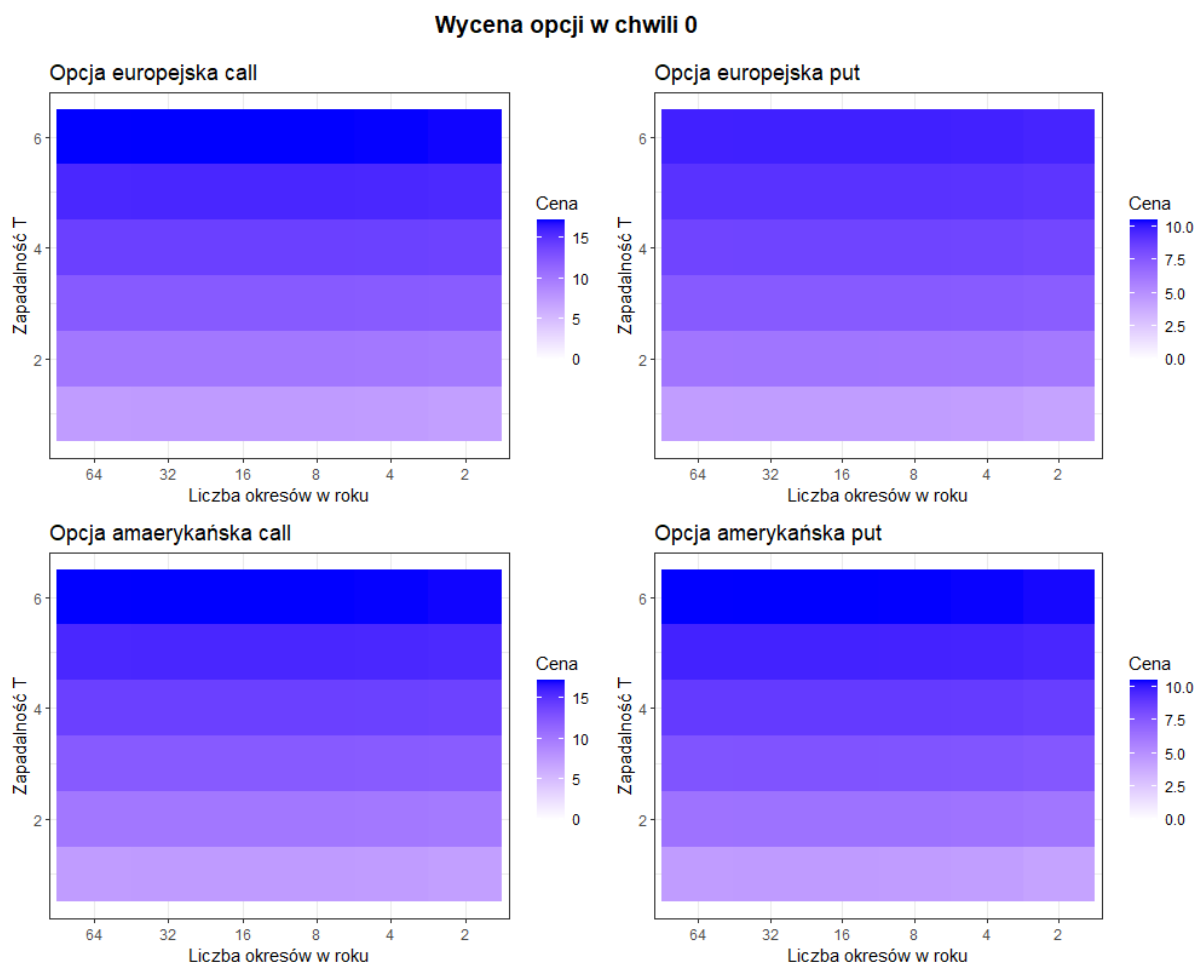
Wycena opcji w chwili 0



Rysunek 9: Zmienność parametrów T i r .

Ciekawą rzeczą, którą możemy zaobserwować na powyższych wykresach jest to, że dla opcji *put* przy większych z rozważanych wartości r , zapadalność T ma mniejszy wpływ na cenę akcji niż przy intensywności oprocentowania bliższej zera. Natomiast dla opcji *call* sytuacja jest odwrotna i przy mniejszej wartości parametru r zapadalność mniej wpływa na cenę opcji. W oby wypadkach widzimy jednak, że przy małej wartości T intensywność oprocentowania nie ma większego znaczenia jeśli chodzi o wycenę opcji.

Analiza względem zapadalności T oraz liczby okresów w roku



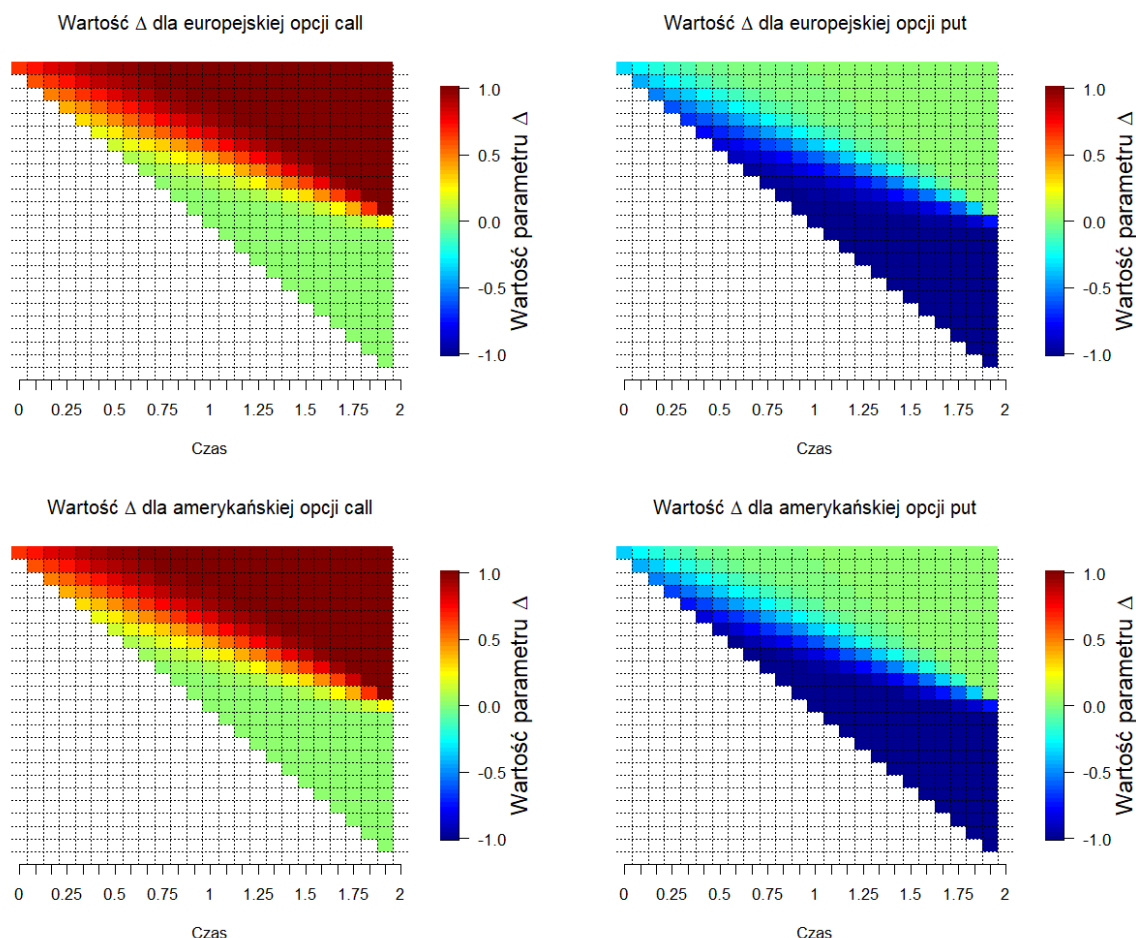
Rysunek 10: Zmienność parametrów T i Δt .

Na powyższych wykresach wyraźnie widzimy, że badane dwa parametry nie są ze sobą powiązane. Ponownie widzimy, że zapadalność T ma większy wpływ na zmianę ceny niż liczba okresów w roku, która jest związana z długością tych okresów czyli Δt . Naturalnie widzimy, że jeśli mamy 2 okresy w ciągu roku i rozważamy zapadalność 2 lata, to cena opcji jest większa niż gdy rozważamy 4 okresy w ciągu roku i zapadalność 1 rok. Widzimy, że wraz ze wzrostem wartości T cena opcji rośnie.

Portfel zabezpieczający

Oczywiste jest to, że w pewien sposób chcielibyśmy zabezpieczyć nasze inwestycje związane z opcjami. W każdym z wierzchołków skonstruujemy portfel z pewnej ilości aktywa bazowego oraz gotówki bądź obligacji, ogólnie mówiąc – inwestycji wolnej od ryzyka. Wartość tego portfela po jednym okresie ma zmieniać się tak samo, jak wartość opcji, niezależnie od stanu rynku. W każdym z wierzchołków będziemy musieli zmienić skład tego portfela. Będziemy korzystać z *delta hedgingu*, metody przedstawionej na wykładzie. Będziemy wyliczać wartości Δ oraz α w każdym wierzchołku naszego drzewa poza ostatnią kolumną. Ta kolumna odpowiada momentowi zapadalności T .

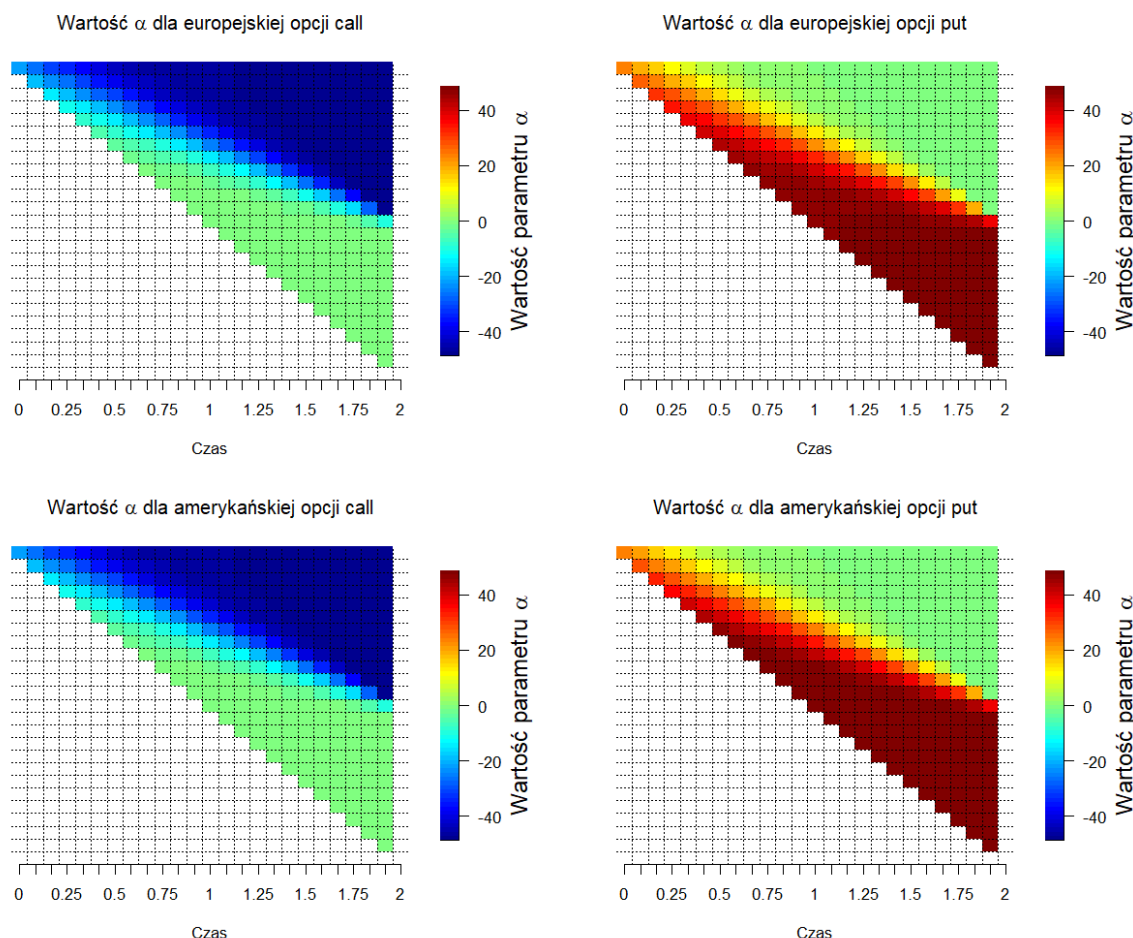
Δ to zmiana ceny opcji podzielona przez zmianę ceny akcji, z którą zabezpieczana opcja jest związana. Parametr ten mówi nam, ile aktywa bazowego powinniśmy mieć w portfelu. Spójrzmy na wartości tego parametru dla kolejnych wierzchołków i różnych rodzajów opcji.



Rysunek 11: Zabezpieczenie dla Δ .

Widzimy, że w przypadku opcji *call* wartości Δ są między 0 a 1, natomiast dla opcji *put* między -1 a 0, co jest dość oczywiste – w wypadku zabezpieczania jednej opcji możemy mieć maksymalnie jedno aktywo bazowe bądź shortować maksymalnie jedno aktywo bazowe. Wykresy dla opcji europejskich wyglądają bardzo podobnie do wykresów opcji amerykańskich. Większą różnicę widzimy w wypadku opcji *put* – dla opcji amerykańskiej wyżej osiągamy wartości bliższe bądź równe -1. Jest to związane z tym, że w wypadku opcji *put* opłaca nam się wykonać ją przed momentem zapadalności. Warto wspomnieć, że chociaż w każdym wierzchołku zmieniamy skład portfela, to nie musimy cały czas na nowo kupować bądź shortować daną część aktywa, a jedynie różnicę między tym, co już znajduje się w portfelu, a co powinniśmy mieć biorąc pod uwagę kolejne wartości Δ oraz α .

Spójrzmy również na wykresy wartości α , aby zobaczyć ile gotówki powinniśmy mieć bądź pożyczyć w kolejnych wierzchołkach.



Rysunek 12: Zabezpieczenie dla α .

Wartości α dla opcji *call* są między około -40 a 0, a dla opcji *put* pomiędzy 0 a około 40. Dla drugiego rodzaju opcji widzimy, że w przypadku opcji amerykańskiej osiągamy wartości bliższe 40 wyżej i bardziej na lewo w porównaniu do opcji europejskiej. Ponownie jest to związane z opłacalnością wykonania opcji *put* przed końcem czasu zapadalności.

W przypadku obu tych parametrów oczywiste jest to, że jeśli payoff w danym wierzchołku wynosi 0, to $\Delta = \alpha = 0$. W wypadku opcji *call* chcemy posiadać w portfolio akcję związaną z tą opcją i musimy to aktywo bazowe kupić za gotówkę. Dlatego też $\Delta > 0$, a $\alpha < 0$. Warto zauważyć, że chociaż cena akcji w górnych końcowych wierzchołkach drzewa wynosi ponad 300, to nie musimy w każdym z wierzchołków kupować całej akcji na nowo, a jedynie brakującą nam część, co wychodzi taniej. Z tego powodu maksymalna wartość pożyczki wynosi około -40. Analogiczna sytuacja jest dla opcji *put*, z tym, że zamiast kupować aktywo, to je sprzedajemy i zyskujemy gotówkę zamiast ją pożyczać.

Podumowanie

- Przy wyjściowych wartościach parametrów cena opcji *call* europejskiej i amerykańskiej jest taka sama i wynosi 10.191. Cena opcji *put* europejskiej wynosi 6.309 i jest niższa niż *put* amerykańskiej, która wynosi 6.471. Na różnicę w cenie ma wpływ opłacalność wykonania opcji.
- Opcję amerykańską *call* opłaca się nam wykonać tylko w niektórych wierzchołkach na końcu czasu zapadalności. Opcję amerykańską *put* opłaca nam się wykonać w niektórych wierzchołkach poprzedzających czas zapadalności.
- Największy wpływ na cenę opcji mają cena wykonania K , cena spot S_0 oraz zmienność σ .
- Wzrost parametrów: stopa wolna od ryzyka r , cena spot S_0 , zapadalność T oraz zmienność σ powodują wzrost wyceny opcji *call* w taki sam sposób amerykańskiej, jak i europejskiej. Najszybszy

wzrost obu tych wycen następuje przy zwiększaniu ceny spot, a najwolniejszy przy zwiększaniu okresu zapadalności. Zwiększanie ceny wykonania K powoduje zmniejszenie wyceny zarówno europejskiej, jak i amerykańskiej opcji *call*.

- Wycena opcji *put*, zarówno europejskiej, jak i amerykańskiej, rośnie ze wzrostem parametrów: cena wykonania K , zmienność σ oraz zapadalność T . Te same wyceny maleją przy zwiększaniu stopy wolnej od ryzyka r oraz ceny spot S_0 . Największy wzrost wycen występuje przy wzroście ceny wykonania K , a największy spadek przy wzroście ceny spot S_0 .
- Przy zmniejszeniu Δt cena opcji zarówno *call* jak i *put* rośnie, a następnie się stabilizuje. Jest to jedyny *techniczny* parametr w modelu, który nie jest narzucany przez rynek. Pokazuje to więc, że od pewnego momentu nie opłaca nam się zmniejszać wartości Δt , ponieważ otrzymamy wartości bardzo zbliżone do tych przy większej wartości, a symulacje dla coraz mniejszej wartości tego parametru zajmują coraz więcej czasu.
- Parametry K i S_0 oraz T i r są ze sobą dość mocno powiązane. Zmienność σ oraz intensywność oprocentowania r nie są już ze sobą aż tak mocno powiązane. Pary T i Δt oraz T i S_0 nie są od siebie zależne.
- Wartości Δ dla opcji *call* wynoszą od 0 do 1, a dla opcji *put* od -1 do 0, co oznacza, że przy zabezpieczaniu jednej opcji można mieć maksymalnie jedno aktywo bazowe lub shortować jedno aktywo bazowe.
- Dla opcji *call* wartości α wynoszą od około -40 do 0, a dla opcji *put* od 0 do około 40, co odzwierciedla ilość gotówki potrzebnej do kupna lub pożyczki aktywa bazowego. Wartości te są bardziej ekstremalne dla opcji amerykańskich niż dla europejskich, co wiąże się z tym, że w niektórych wierzchołkach drzewa dwumianowego opłaca nam się wykonać amerykańską opcję *put*.

Czas wykonania poszczególnych funkcji

Wywołana funkcja tworząca wykres	Czas wykonania (s)
wyceny_opcji_wykres()	0.00
czy_wykonujemy_amerykanska_wykres()	0.09
wykresy_wrazliwosci_jednowymiarowe()	1.99
wykresy_wrazliwosci_jednowymiarowe(opcja = 'put')	4.53
wykres_wrazliwosci_K_S_0()	2.65
wykres_wrazliwosci_sigma_r()	1.96
wykres_wrazliwosci_T_S_0()	9.55
wykres_wrazliwosci_T_r()	11.95
wykres_wrazliwosci_T_delta_t()	7.35
porfel_zabezpieczajacy_delta()	0.08
porfel_zabezpieczajacy_alpha()	0.81

Tabela 2: Czasy wykonania funkcji w poszczególnych podmodułach.