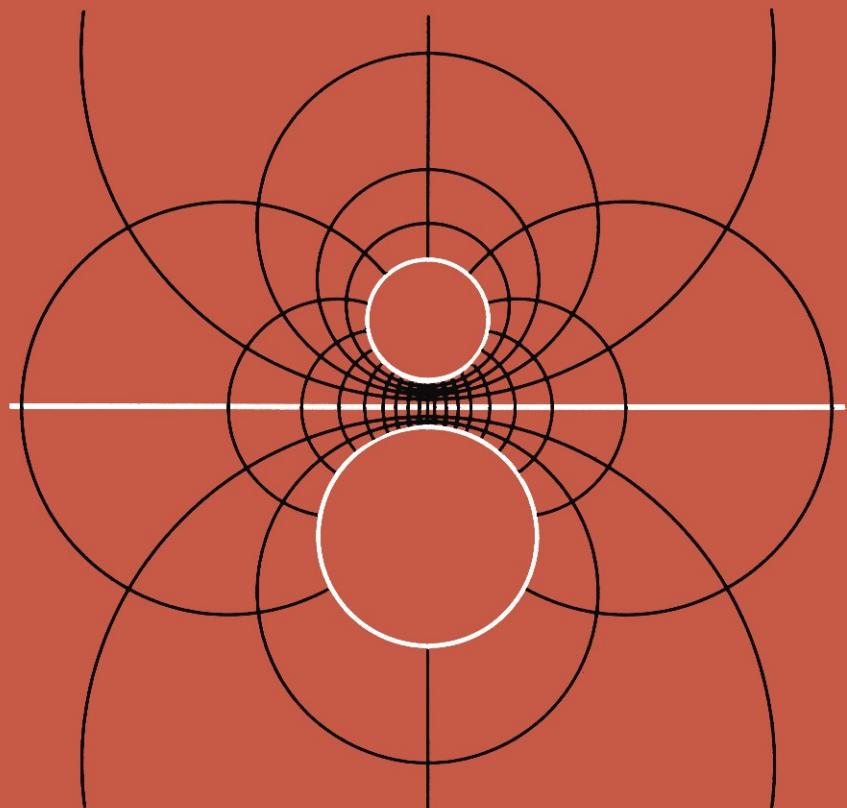


Berber/Kacher/Langer

Physik

in Formeln und Tabellen



B.G. Teubner Stuttgart

Vorwort

In der vorliegenden Formelsammlung findet der Benutzer außer Gleichungen, die allgemeine Gesetze kurz beschreiben, vor allem solche Formeln, welche für Berechnungen unter speziellen Bedingungen gebraucht werden. Derartige Rechnungen sind bei Übungs- und Prüfungsaufgaben durchzuführen, wie sie in Physikvorlesungen und im Physikpraktikum an Hochschulen vorkommen, besonders im praxisbezogenen Bereich. Es wurden daher auch viele Gebiete aus der angewandten Physik berücksichtigt, die zu den entsprechenden technischen Fächern hinführen.

Zu jeder physikalischen Größe wird die Einheit des Internationalen Maßsystems (SI) angegeben. Andere gebräuchliche Einheiten findet man ebenfalls, zusammen mit der Umrechnungsgleichung.

Die Wörterklärung der in den Formeln stehenden Zeichen wird durch zahlreiche Skizzen verdeutlicht. Konsequent wird zwischen Vektorgröße, -betrag und -koordinate, sowie zwischen Momentan-, Scheitel- und Mittelwert, Zustands- und Übergangsgrößen unterschieden. Wichtige Konstanten stehen bei den entsprechenden Formeln oder im Tabellenanhang. Dabei wurde der neueste Datensatz des *CODATA Task Group on Fundamental Constants*, beachtet.

Die differenzierte Gliederung mit den drucktechnisch herausgehobenen Überschriften erleichtert zusammen mit dem ausführlichen Sachverzeichnis das schnelle Auffinden einer gesuchten Größe oder Gleichung.

In der vorliegenden 6. Auflage wurde auf einige Benutzerwünsche eingegangen und eine Harmonisierung der Ausdrucksweise vorgenommen. Bekanntgewordene Druckfehler wurden beseitigt.

Die Autoren

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Berber, Joachim:

Physik in Formeln und Tabellen / von Joachim Berber ; Heinz Kacher ; Rudolf Langer. – 6., überarb. Aufl. – Stuttgart : Teubner, 1992

ISBN 978-3-519-43211-1 ISBN 978-3-322-91839-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-91839-0

NE: Kacher, Heinz; Langer, Rudolf; HST

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt besonders für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© 1986 B.G. Teubner, Stuttgart

Satz: Fotosatz-Service KÖHLER, Würzburg

Einbandgestaltung: M. Koch, Reutlingen

Physik

in Formeln und Tabellen

Von

Prof. Joachim Berber

Prof. Heinz Kacher

Prof. Dr. Rudolf Langer

Fachhochschule Coburg

6., überarbeitete Auflage



B.G. Teubner Stuttgart 1992

Inhaltsverzeichnis

1 Mechanik des Massenpunktes und der festen Körper	5
1.1 Statik	5
1.2 Klassische Kinematik	11
1.3 Klassische Dynamik	15
1.4 Gravitation und Satellitenbewegung	22
1.5 Relativitätsmechanik	25
2 Mechanik der Fluide (Flüssigkeiten und Gase)	29
2.1 Ruhende Fluide	29
2.2 Stationäre Strömungen inkompressibler Fluide	32
3 Mechanische Schwingungen und Wellen. Akustik	35
3.1 Längs- und Drehschwingungen	35
3.2 Sinuswellen	42
3.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit von mechanischen Wellen	45
3.4 Schallfeld in Fluiden	46
3.5 Schallschluckung	49
3.6 Raumakustik	50
3.7 Bauakustik	50
4 Kalorik	52
4.1 Lineare Änderung der Ausdehnung, der Spannung und des Druckes mit der Temperatur	52
4.2 Thermische Zustandsgleichung von Gasen	53
4.3 Hauptsätze der Thermodynamik	55
4.4 Kalorimetrie	57
4.5 Zustandsgrößen und Zustandsänderungen idealer Gase	58
4.6 Ungeordnete (thermische) Bewegung von Molekülen	59
4.7 Stationärer Wärmetransport	61
4.8 Temperaturstrahlung	63
4.9 Nichtstationärer Wärmetransport	64
4.10 Feuchtigkeit	65

5 Elektrik und Magnetik

67

5.1	Elektrische Potentialfelder in homogenen, isotropen Medien	67
5.2	Gleichstrom	72
5.3	Magnetische Felder in homogenen, isotropen Medien	76
5.4	Elektromagnetische Induktion	79
5.5	Wechselstrom	82
5.6	Elektromagnetische Schwingungen	86
5.7	Elektromagnetische Wellen	89
5.8	Teilchen im elektromagnetischen Feld	92
5.9	Stromleitung	94

6 Optik

98

6.1	Reflexion und Brechung	98
6.2	Paraxiale Abbildung	100
6.3	Wellenoptik	104
6.4	Optische Instrumente	108
6.5	Strahlung und Photometrie	109

7 Quantenmechanik und Atombau

112

7.1	Photonentheorie	112
7.2	Wellenmechanik	113
7.3	Atomhülle	114
7.4	Aufbau und Umwandlung des Atomkerns	117
7.5	Wechselwirkung ionisierender Strahlung mit Materie	121
7.6	Systeme freier Teilchen	124

8 Tabellen

125

Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten		125
Tab. 1	Allgemeine Konstanten	125
Tab. 2	Atome und Atombausteine	125
Tab. 3	Astronomische Daten	126
Tab. 4	Planetendaten	126
Tab. 5	Fläche A , Volumen V , Schwerpunkt S , Flächenmoment 2. Grades I und Trägheitsmoment J	127
Tab. 6a	Dichte ϱ fester Stoffe	128
Tab. 6b	Dichte ϱ von Flüssigkeiten	128
Tab. 6c	Dichte ϱ_n von Gasen	128
Tab. 7	Elastizitätsmodul E , Kompressionsmodul K und Poissonzahl μ	128
Tab. 8	Reibungszahlen μ' bzw. μ für Haft- bzw. Gleitreibung	129
Tab. 9	Rollreibungszahlen μ_R	129
Tab. 10	Rollreibungslänge f	129
Tab. 11	Kompressionsmodul K von Flüssigkeiten	129
Tab. 12	Kapillaritätskonstante σ von Flüssigkeiten	129

Tab. 13 Dynamische Viskosität η	129
Tab. 14 Eigenschaften von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur	130
Tab. 15 Widerstandsbeiwerte (Richtwerte) c_w	130
Tab. 16 Schallgeschwindigkeit c	130
Tab. 17 Bewerteter Schallpegel L_A	131
Tab. 18 Schallabsorptionsgrad α von Schallabsorbern	131
Tab. 19 Schallschluckung A' von Schallabsorbern	131
Tab. 20 Raumvolumen V und optimale Nachhallzeit T	131
Tab. 21 Längenausdehnungskoeffizient α von festen Stoffen	132
Tab. 22 Volumenausdehnungskoeffizient γ von Flüssigkeiten	132
Tab. 23 Sättigungsdruck p_s von Dämpfen	132
Tab. 24 Kritische Temperatur T_k , kritischer Druck p_k und kritische Dichte ϱ_k von Fluiden	132
Tab. 25 Kalorimetrische Werte	133
Tab. 26 Baustoffkennwerte	134
Tab. 27 Wärmeübergangswiderstände $1/\alpha$ nach DIN 4108	134
Tab. 28 Wärmedurchlaßwiderstand $1/A$ von Luftsichten	135
Tab. 29 Emissionsgrad ε (Gesamtstrahlung) von Oberflächen bei der Temperatur 9	135
Tab. 30 Absorptionsgrad α von Baustoffen und Anstrichen	135
Tab. 31 Sättigungsdruck (-dichte) $p_s(\varrho_s)$ von Wasserdampf in Abhängigkeit von der Temperatur 9	135
Tab. 32 Relative (statische) Permittivitätszahl ε_r	136
Tab. 33 Spezifischer Widerstand ϱ und Temperaturkoeffizient α	136
Tab. 34 Dichtebezogene magnetische Suszeptibilität χ_m von para- und diamagnetischen Stoffen	136
Tab. 35 Daten einiger Thermoelemente	137
Tab. 36 Ionenbeweglichkeit b in stark verdünnter wäßriger Lösung	137
Tab. 37 Hall-Konstante R_H	137
Tab. 38 Mengenkonstante A_f und Austrittsarbeit ΔW_A der thermischen Elektronenemission	137
Tab. 39 Brechzahl n und Abbezahl v für verschiedene Wellenlängen	137
Tab. 40 Grenzwinkel ε_G der Totalreflexion	138
Tab. 41 Spektrale Hellempfindlichkeit $V(\lambda)$ des menschlichen Auges für Tagsehen	138
Tab. 42 Schwächungskoeffizient μ für Photonenstrahlung	138
Tab. 43 γ -Dosiskonstante K_γ für Punktquellen	138
Tab. 44 Bewertungsfaktor q der Äquivalentdosis	138
Tab. 45 Auswahl an Radionukliden	139
Tab. 46 Natürliche Umwandlungsreihen	140

Sachverzeichnis

141

Periodensystem der Elemente (PSE)

am Schluß

Griechisches Alphabet

$A \alpha$ alpha	$Z \zeta$ zeta	$\Lambda \lambda$ lambda	$\Pi \pi$ pi	$\Phi \phi$ phi
$B \beta$ beta	$H \eta$ eta	$M \mu$ mü	$P \varrho$ rho	$X \chi$ chi
$\Gamma \gamma$ gamma	$\Theta \vartheta$ theta	$N \nu$ nü	$\Sigma \sigma$ sigma	$\Psi \psi$ psi
$\Delta \delta$ delta	$I \iota$ iota	$\Xi \xi$ xi	$T \tau$ tau	$\Omega \omega$ omega
$E \varepsilon$ epsilon	$K \kappa$ kappa	$O \circ$ omikron	$Y \upsilon$ ypsilon	

1 Mechanik des Massenpunktes und der festen Körper

1.1 Statik

1.1.1 Grundgrößen

Länge¹⁾ $l(r, d, \dots)$ einer Strecke oder Kurve

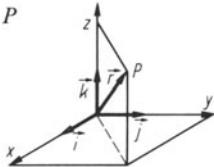
Einheit: 1 Meter m

Ortskoordinaten x, y, z eines Punktes P

Einheit: 1 m

Ortsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

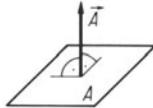


x, y, z Ortskoordinaten (skalare Komponenten)

Flächeninhalt A (Tab. 5)

Einheit: 1 Quadratmeter m²

Gerichtete ebene Fläche \vec{A} :



Volumen (Rauminhalt) V (Tab. 5)

Einheit: 1 Kubikmeter m³

Ebener Winkel $\alpha(\beta, \gamma, \delta, \dots)$

Einheit: 1 m/1 m = 1 Radian rad

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

$$1 \text{ Grad}^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

s Kreisbogen mit dem Zentriwinkel α , r Kreisradius

Winkelkoordinate, Phasenwinkel $\varphi(\psi, \dots)$ eines Strahls

Einheit: 1 m/1 m = 1 rad

Masse¹⁾ (Gewicht) m

Einheit: 1 Kilogramm kg

$$1 \text{ Tonne t} = 10^3 \text{ kg}$$

Kraft \vec{F}

Betragseinheit: 1 kg m s⁻² = 1 Newton N

Speziell: Gewichtskraft \vec{F}_G

$$\begin{aligned} 1 \text{ Kilopond kp} &= 9,81 \text{ N} \\ 1 \text{ dyn} &= 1 \text{ g cm s}^{-2} = 10^{-5} \text{ N} \end{aligned}$$

Dichte ρ (Tab. 6)

Einheit: 1 kg/m³

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$1 \text{ kg/dm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Normalspannung σ

Einheit: 1 N/m² = 1 Pascal Pa

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

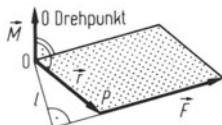
$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$$

F Kraft senkrecht zur Fläche mit dem Inhalt A

Tangentialspannung (Schubspannung) τ

Einheit: 1 N/m² = 1 Pa

$$\tau = \frac{F}{A}$$



F Kraft parallel zur Fläche mit dem Inhalt A

Drehmoment \vec{M}

Betragseinheit: 1 N m

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

\vec{r} Ortsvektor des Angriffspunktes P der Kraft \vec{F}

Speziell: Ein starrer Körper hat eine feste Drehachse, die senkrecht auf der von \vec{r} und \vec{F} aufgespannten Ebene steht:

l Abstand der Kraftwirkungslinie von der Drehachse (Hebelarm)

$$M = l F$$

¹⁾ Basisgröße

1.1.2 Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

Speziell: Wirkungslinien aller Kräfte und Bezugspunkt O liegen in einer Ebene

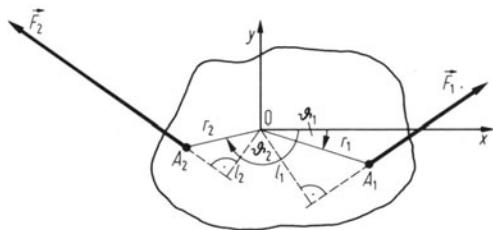
\vec{F}_i Einzelkräfte mit den Angriffspunkten A_i
 $\vec{r}_i = \overrightarrow{OA}_i$ Ortsvektoren der Angriffspunkte
 n Anzahl der Einzelkräfte
 F_1, F_2, \dots , Beträge der Kräfte
 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi$ Winkelkoordinaten der Kraftrichtungen
 r_1, r_2, \dots Beträge der Ortsvektoren
 $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots$ zugehörige Winkelkoordinaten
 F_x, F_y Koordinaten der resultierenden Kraft \vec{F}

Rechtwinklige Koordinaten der Kräfte:

$$F_{1x} = F_1 \cos \varphi_1; \quad F_{1y} = F_1 \sin \varphi_1$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \varphi_2; \quad F_{2y} = F_2 \sin \varphi_2$$

...



Zusammensetzung der Kräfte:

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = F_x; \quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

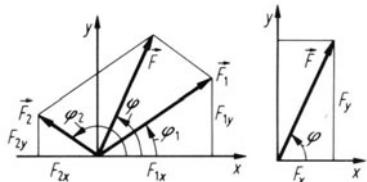
$$F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = F_y; \quad \tan \varphi = F_y/F_x$$

Drehmomente:

$$M_{1z} = r_{1x} F_{1y} - r_{1y} F_{1x}$$

$$M_{2z} = r_{2x} F_{2y} - r_{2y} F_{2x}; \quad M_z = M_{1z} + M_{2z} + \dots$$

...



Gleichgewichtsbedingungen:

$$F_x = 0; \quad F_y = 0; \quad M_z = 0$$

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{pmatrix} \text{ resultierendes Drehmoment}$$

Da die Drehmomentvektoren hier parallele Wirkungslinien haben, kann man sie in rechtsdrehende und linksdrehende Momente einteilen und nur mit Beträgen rechnen.

Rechtsdrehende Momente

$$M_{r1} = l_{r1} \cdot F_{r1}$$

$$M_{r2} = l_{r2} \cdot F_{r2}$$

...

Linksdrehende Momente

$$M_{l11} = l_{l11} \cdot F_{l11}$$

$$M_{l12} = l_{l12} \cdot F_{l12}$$

...

F_{ri} Beträge der rechtsdrehenden Kräfte
 l_{ri} zugehörige Hebelarme

F_{li} Beträge der linksdrehenden Kräfte
 l_{li} zugehörige Hebelarme

Zusammensetzung:

$$M_{r1} + M_{r2} + \dots = M_r$$

$$M_{l11} + M_{l12} + \dots = M_l$$

$$M = |M_r - M_l|$$

M_r Summe der rechtsdrehenden Momente
 M_l Summe der linksdrehenden Momente

M Betrag des resultierenden Drehmoments

Keine Drehung, wenn $M = 0$ oder

$$M_r = M_l \quad (\text{Hebelgesetz})$$

1.1.3 Schwerpunkt

Schwerpunktskoordinaten x_s, y_s, z_s

$$x_s m = \int x dm; \quad y_s m = \int y dm; \quad z_s m = \int z dm$$

x, y, z Koordinaten des Massenelements dm
 m Masse des Körpers

Speziell: Homogene Massenverteilung

$$x_s V = \int_V x dV; \quad y_s V = \int_V y dV; \quad z_s V = \int_V z dV$$

V Körpervolumen

Momentensatz für Körper

$$x_s F_G = x_1 F_{G,1} + x_2 F_{G,2} + \dots$$

$S(x_s|y_s|z_s)$ Körperschwerpunkt (Massenmittelpunkt)

$$y_s F_G = y_1 F_{G,1} + y_2 F_{G,2} + \dots$$

$S_1(x_1|y_1|z_1), S_2(x_2|y_2|z_2), \dots$ Teilkörperschwerpunkte (Tab. 5)

$$z_s F_G = z_1 F_{G,1} + z_2 F_{G,2} + \dots$$

$F_{G,1}, F_{G,2}, \dots$ Beträge der Gewichtskräfte der Teilkörper

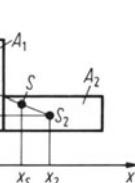
$$F_G = F_{G,1} + F_{G,2} + \dots$$

F_G Betrag der Gewichtskraft des Körpers

Bei einem homogenen Körper kann man in den obigen Formeln die Gewichtskräfte durch die zugehörigen Rauminhale ersetzen.

Momentensatz für Flächen

$$x_s A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots$$



$S(x_s|y_s)$ Flächenschwerpunkt der Gesamtfläche A

$$y_s A = y_1 A_1 + y_2 A_2 + \dots$$

$S_1(x_1|y_1), S_2(x_2|y_2)$ Schwerpunkte der Teillebenen A_1, A_2, \dots (Tab. 5)

$$A = A_1 + A_2 + \dots$$

Flächenmoment 1. Grades H

$$H = \int_A x dA$$

Einheit: 1 m^3

x Abstand des Flächenelements dA von der y -Achse

1.1.4 Elastizität

Relative Längenänderung $\Delta\varepsilon$ eines stabförmigen Körpers

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \Delta l = |l_2 - l_1|$$

l_1 bzw. l_2 Länge bei der Normalspannung σ_1 bzw. σ_2 (senkrecht zur Querschnittsfläche)

$l \approx l_1 \approx l_2$

Normalspannungsänderung $\Delta\sigma$

für die relative Längenänderung $\Delta\varepsilon$

$$\Delta\sigma = E \cdot \Delta\varepsilon; \quad \Delta\sigma = |\sigma_2 - \sigma_1|$$

(Gesetze von Hooke)

Bedingung: $\sigma_1 < \sigma_p; \sigma_2 < \sigma_p$
 σ_p Spannung an der Proportionalitätsgrenze

E Elastizitätsmodul (Tab. 7)

Einheit: 1 N/m^2

Relative Queränderung $\Delta\varepsilon_q$ eines stabförmigen Körpers

$$\Delta\varepsilon_q = \frac{\Delta d}{d}; \quad \Delta d = |d_2 - d_1|$$

d_1 bzw. d_2 Dicke bei der Normalspannung σ_1 bzw. σ_2
 $d \approx d_1 \approx d_2$

Poissonzahl (Querkontraktionszahl) μ eines festen Stoffes

$$\mu = \Delta\varepsilon_q / \Delta\varepsilon \quad (\text{Tab. 7})$$

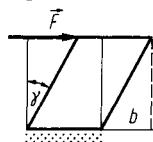
Tangentialspannung τ

zur Aufrechterhaltung der Verscherung eines prismatischen Körpers

$$\tau = G \gamma; \quad \gamma = b/h$$

G Schubmodul oder Torsionsmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



γ Scherung ($b \ll h$)

G Schubmodul

Einheit: 1 N/m²

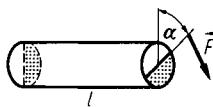
E Elastizitätsmodul

μ Poissonzahl

Drehmoment M

zur Aufrechterhaltung der Verdrillung eines kreiszylindrischen Körpers

$$M = G \frac{\pi r^4}{2l} \cdot \alpha$$



r Radius der Querschnittsfläche

l Länge des Körpers

α Verdrillungswinkel, G Torsionsmodul

Allseitige Normalspannungsänderung $\Delta\sigma$

für die Volumenänderung ΔV

$$\Delta\sigma = K \frac{\Delta V}{V}; \quad \Delta V = |V_2 - V_1|; \quad \Delta\sigma = |\sigma_2 - \sigma_1|$$

V_1 bzw. V_2 Volumen bei der Spannung σ_1 bzw. σ_2
 $V \approx V_1 \approx V_2$

K Kompressionsmodul (Tab. 7)

Einheit: 1 N/m²

Kompressibilität κ

Einheit: 1 m²/N

$$\kappa = \frac{1}{K}; \quad \kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

E Elastizitätsmodul
 μ Poissonzahl

Flächenmoment 2. Grades I

(Flächenträgheitsmoment) von ebenen Flächen

Einheit: 1 m⁴

$$I = \int_A l^2 dA$$

l Abstand des Flächenelements dA von der Bezugssachse in der Flächenebene oder senkrecht dazu

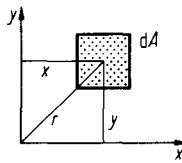
Speziell: Axiale Flächenmomente 2. Grades (Tab. 5)

$$I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_x = \int_A y^2 dA$$

x, y Koordinaten des Flächenelements dA

Speziell: Polare Flächenmomente 2. Grades

$$I_p = \int_A r^2 dA; \quad I_p = I_x + I_y$$



r Abstand des Flächenelements dA vom Schnittpunkt der beiden zueinander senkrechten Bezugssachsen von I_x und I_y

Satz von Steiner:

$$I = I_s + A s^2$$

I_s Flächenmoment 2. Grades für eine Achse durch den Schwerpunkt der Fläche A

I Flächenmoment 2. Grades bezüglich einer zur Schwerpunktachse parallelen Achse im Abstand s

Zentrifugalflächenmoment 2. Grades

$$I_{xy} = \int_A x y dA$$

Trägheitsellipse:

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_1}}; \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_{II}}}$$

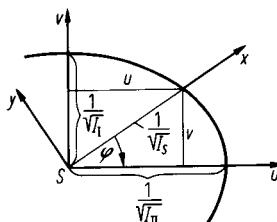
$$I_1 u^2 + I_{II} v^2 = 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{I_s}} = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$I_1 = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$I_{II} = I_x \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi + I_{xy} \sin 2\varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$



a, b Halbachsen der Trägheitsellipse in m^{-2}

I_1, I_{II} Hauptflächenmomente 2. Grades

I_{xy} Zentrifugalflächenmoment 2. Grades

I_s Flächenmoment 2. Grades für eine beliebige Schwerpunktachse

u, v Koordinaten eines Punktes auf der Trägheitsellipse

in m^{-2}

φ Winkel zwischen der x -Achse und der u -Achse

Durchbiegung d von Trägern

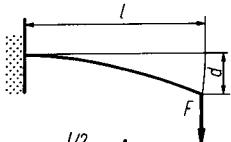
(innerhalb des Gültigkeitsbereichs des Gesetzes von Hooke)

$$d = \frac{1}{3EI} Fl^3$$

$$d = \frac{1}{48EI} Fl^3$$

$$d = \frac{1}{8EI} q l^4$$

$$d = \frac{5}{384EI} q l^4$$

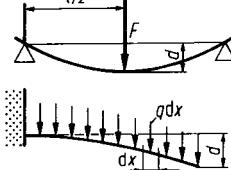


l Trägerlänge, E Elastizitätsmodul

I Flächenmoment 2. Grades des Querschnitts in bezug auf die horizontale Achse durch den Flächenschwerpunkt in der Flächenebene (Tab. 5)

F Einzelkraft

q konstante Streckenlast



Einheit: 1 N/m

dF Kraft auf das Längenelement dx

Längenbezogene Kraft q

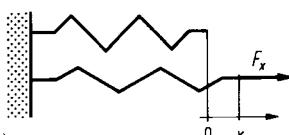
$$q(x) = \frac{dF}{dx}$$



Gesetz von Hooke für Federn

1. Linearauslenkung:

$$F_x = D x$$



D Richtgröße (Federkonstante)

F_x Kraft zur Aufrechterhaltung einer Verformung

x Koordinate des Federendes

Einheit: 1 N/m

Federschaltungen:

$$\text{Hintereinander: } \frac{1}{D} = \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \dots$$

$$\text{Parallel: } D = D_1 + D_2 + \dots$$

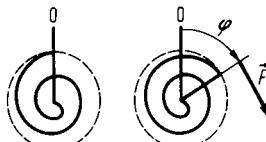
D_1, D_2, \dots Richtgrößen der Einzelfedern

D Gesamtrichtgröße

2. Drehauslenkung:

$$M_z = D * \varphi$$

$D *$ Winkelrichtgröße



M_z Drehmoment zur Aufrechterhaltung der Verformung

φ Winkelkoordinate eines Strahles vom Drehpunkt zum Federende

Einheit: 1 N m

1.1.5 Reibung

Maximale Haftreibungskraft $F'_{R,\max}$:

$$F'_{R,\max} = \mu' F_N; \quad \mu' = \tan \varrho'$$

F_N Normalkraft (L zu den reibenden Flächen)

μ' Haftreibungszahl (Tab. 8)

ϱ' Haftreibungswinkel, bei dem der Körper auf einer schiefen Ebene gerade noch nicht gleitet

Gleitreibungskraft F_R :

$$F_R = \mu F_N; \quad \mu = \tan \varrho$$

μ Gleitreibungszahl (Tab. 8)

ϱ Gleitreibungswinkel, bei dem der Körper auf einer schiefen Ebene gerade noch gleitet

Rollreibungskraft $F_{R,R}$:

$$F_{R,R} = \mu_R F_N; \quad \mu_R = \frac{f}{r}$$

μ_R Rollreibungszahl (Tab. 9)

r Radius des rollenden Körpers (z.B. Rad)

f Rollreibungslänge (Tab. 10)

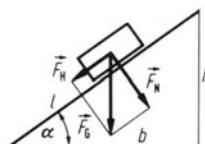
1.1.6 Einfache Maschinen

Schiefe Ebene

Hangabtriebskraft F_H :

$$F_H = F_G \sin \alpha; \quad \sin \alpha = \frac{h}{l}$$

F_G Gewichtskraft, α Steigungswinkel



Normalkraft F_N :

$$F_N = F_G \cos \alpha; \quad \cos \alpha = \frac{l}{\sqrt{h^2 + l^2}}$$

α Steigungswinkel, h Ganghöhe

r mittl. Radius (Flankenradius)

μ Gleitreibungszahl

ϱ Gleitreibungswinkel

Flachgängige Schraube in fester Mutter

$$\tan \alpha = \frac{h}{2\pi r}; \quad \tan \varrho = \mu$$

Theoretische Kraft $F_{1,\text{th}}$ ohne Reibung zur Hebung oder zum Festhalten einer Last mit der Gewichtskraft F_2 :

$$F_{1,\text{th}} = F_2 \frac{h}{2\pi l}$$

l Hebelarm

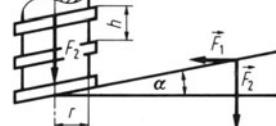
Wirkliche Drehkraft F_1 zur Hebung einer Last mit der Gewichtskraft F_2 :

$$F_1 = F_2 \frac{r}{l} \tan(\alpha + \varrho)$$



Wirkliche Drehkraft F_1 zum Festhalten einer Last mit der Gewichtskraft F_2 :

$$F_1 = F_2 \frac{r}{l} \tan(\alpha - \varrho)$$



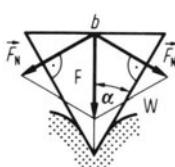
Speziell $\alpha \ll \varrho$: $F_1 = 0$ (Selbsthemmung)

Keil

Spaltkraft F_N :

$$F_N = \frac{F}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$

F Kraft auf den Keilrücken



Theoretische Spaltkraft $F_{N,\text{th}}$ für $\mu = 0$:

$$F_{N,\text{th}} = \frac{F}{2 \sin \alpha} = \frac{w}{b} F$$

Umschlingung eines feststehenden Zylinders

Zugkraft für gleichförmige Aufwärtsbewegung:

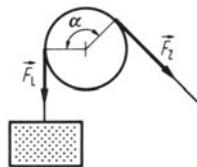
$$F_Z = F_L e^{\mu \alpha}$$

Zugkraft für gleichförmige Abwärtsbewegung:

$$F_Z = F_L e^{-\mu' \alpha}$$

Keine Bewegung des Zugmittels relativ zum Zylinder:

$$F_Z e^{-\mu' \alpha} < F_L < F_Z e^{\mu' \alpha}$$

 F_L Lastkraft, F_Z Zugkraft μ Gleitreibungszahl μ' Haftreibungszahl α Umschlingungswinkel (in rad)**Seilmaschinen** F_Z Zugkraft bei vernachlässigter Reibung, F_L LastkraftRolle fest: $F_Z = F_L$;lose: $F_Z = \frac{1}{2} F_L$ Stufenscheibe (Wellrad): $F_Z = \frac{d}{D} F_L$ d Durchmesser der kleinen ScheibeFaktorenflaschenzug: $F_Z = \frac{1}{2n} F_L$ D Durchmesser der großen ScheibeDifferentialflaschenzug: $F_Z = \frac{D-d}{2D} F_L$ n Anzahl der losen Rollen**1.2 Klassische Kinematik****1.2.1 Grundgrößen****Zeit¹⁾ t** **Einheit: 1 Sekunde s**

1 (siderisches) Jahr a = 365,26 d

Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ **Betragseinheit: 1 m/s**

eines Punktes

1 km/h = (1/3,6) m/s

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

 $\vec{r}(t)$ Ortsvektor des Punktes zur Zeit t (s. S.5)

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k}$$

Beschleunigung $\vec{a}(t)$ **Betragseinheit: 1 m/s²**

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} = \ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j} + \ddot{z} \vec{k}$$

Weg s**Einheit: 1 m**

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

 s Weg zwischen dem Anfangspunkt zur Zeit t_1 und dem Endpunkt zur Zeit t_2 x, y, z Koordinaten des Punktes zur Zeit t **1.2.2 Geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v
(gleichförmige Bewegung)****Weg s****Einheit: 1 m**

$$s = v \cdot t$$

 t Zeit, in der s durchlaufen wird¹⁾ Basisgröße

1.2.3 Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung a

(gleichmäßig beschleunigte bzw. verzögerte Bewegung)

Mittlere Geschwindigkeit \bar{v}

$$\bar{v} = \frac{1}{2} (v_0 + v) = \frac{s}{t}$$

v_0 bzw. v Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit
 t Zeit, in welcher der Weg s durchlaufen wird

1. Zunehmende Geschwindigkeit

$$v = v_0 + at; \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2as}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} at^2; \quad s = \frac{1}{2} (v_0 + v) t$$

Wurf nach unten: $a = g$
g Fallbeschleunigung
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Speziell: $v_0 = 0$

$$v = at; \quad v = \sqrt{2as}$$

$$s = \frac{1}{2} at^2; \quad s = \frac{1}{2} vt$$

Freier Fall: $a = g$

2. Abnehmende Geschwindigkeit

$$v = v_0 - at; \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2as}$$

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} at^2; \quad s = \frac{1}{2} (v_0 + v) t$$

Wurf nach oben: $a = g$

Speziell: $v = 0$

Bremszeit: $t_B = v_0/a$

Steigzeit: $t_{st} = v_0/g$

Bremsweg: $s_B = \frac{1}{2} a t_B^2 = \frac{1}{2} v_0 t_B = \frac{1}{2} v_0^2/a$

Steighöhe: $s_{st} = \frac{1}{2} g t_{st}^2$

1.2.4 Schiefer Wurf (ohne Luftwiderstand)

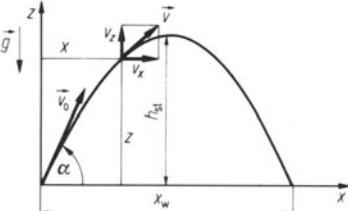
Geschwindigkeitskoordinaten:

$$v_x = v_0 \cos \alpha; \quad v_z = v_0 \sin \alpha - gt$$

v_0 Betrag der Abwurfgeschwindigkeit
 α Winkelkoordinate der Richtung von \vec{v}_0
 g Fallbeschleunigung

Geschwindigkeitsbetrag

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$$



Ortskoordinaten

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad z = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

Gleichung der Wurfparabel

$$z = x \tan \alpha - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Steigzeit t_{st} :

$$t_{st} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Steighöhe h_{st} :

$$h_{st} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

v_0 Anfangsgeschwindigkeit
 α Winkelkoordinate der Richtung von \vec{v}_0
 g Fallbeschleunigung

Wurfzeit t_w :

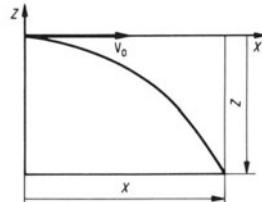
$$t_w = 2 t_{st}$$

Wurfweite x_w :

$$x_w = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Speziell $\alpha = 0$: Horizontaler Wurf

$$x = v_0 t; \quad z = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$$



1.2.5 Drehbewegung eines Strahls

Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$

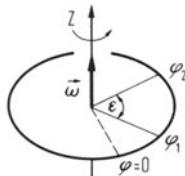
$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t)$$

Betragseinheit: 1 s^{-1} $\varphi(t)$ Winkelkoordinate zur Zeit t **Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}(t)$**

$$\alpha(t) = \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$

Betragseinheit: 1 s^{-2} **Drehwinkel ε**

$$\varepsilon = \varphi_2 - \varphi_1$$

 φ_1 bzw. φ_2 Winkelkoordinate zur Zeit t_1 bzw. t_2

1.2.6 Drehbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω (gleichförmige Drehbewegung)

Drehwinkel ε

Einheit: 1 rad

$$\varepsilon = \omega t; \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

t Zeit, in der sich der Strahl um ε dreht
 T Umdrehungsduer (=Zeit, in der sich der Strahl um 2π rad dreht)

Drehfrequenz f Einheit: $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hertz Hz}$

$$f = \frac{1}{T}; \quad f = \frac{N}{t}$$

 $1 \text{ min}^{-1} = \frac{1}{60} \text{ s}^{-1}$
 N Zahl der Umdrehungen in der Zeit t

1.2.7 Drehbewegung mit konstanter Winkelbeschleunigung α (gleichmäßig beschleunigte bzw. verzögerte Drehbewegung)

Mittlere Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) = \frac{\varepsilon}{t}$$

 ω_0 bzw. ω Anfangs- bzw. Endwinkelgeschwindigkeit
 t Zeit, in der sich der Strahl um den Winkel ε dreht

1. Zunehmende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \omega_0 + \alpha t; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2; \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t$$

 ω_0 Anfangswinkelgeschwindigkeit
 ω Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t

2. Abnehmende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \omega_0 - \alpha t; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha\varepsilon}$$

$$\varepsilon = \omega_0 t - \frac{1}{2} \alpha t^2; \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\omega_0 + \omega) t$$

ε Drehwinkel in der Zeit t
 α Winkelbeschleunigung

Speziell: $\omega = 0$

Bremszeit: $t_B = \frac{\omega_0}{\alpha}$ Bremswinkel: $\varepsilon_B = \frac{1}{2} \alpha t_B^2 = \frac{1}{2} \omega_0 t_B = \frac{1}{2} \omega_0^2 / \alpha$

1.2.8 Kreisbewegung eines Punktes

Weg s

$$s = \varepsilon \varrho = \varepsilon r \sin \gamma$$

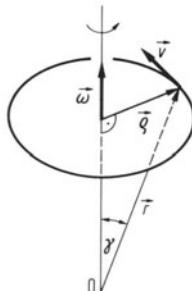
Momentane Geschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Beschleunigung \vec{a}

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_p$$



ε Drehwinkel
 ϱ Abstand des rotierenden Punktes von der Drehachse
 γ Winkel zwischen \vec{r} und $\vec{\omega}$

$\vec{\omega}$ momentane Winkelgeschwindigkeit
 \vec{r} Ortsvektor des rotierenden Punktes

\vec{v} Geschwindigkeit
 $\vec{\alpha}$ Winkelbeschleunigung $\parallel \vec{\omega}$

Tangentialbeschleunigung \vec{a}_t

$$\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}; \quad a_t = \alpha \varrho; \quad \vec{a}_t \parallel \vec{v}$$

$\vec{\alpha}$ Winkelbeschleunigung
 \vec{r} Ortsvektor des rotierenden Punktes

Zentripetalbeschleunigung \vec{a}_p

$$\vec{a}_p = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{\varrho}$$

$\vec{\varrho}$ senkrechte Projektion von \vec{r} auf die Kreisebene

Zentrifugalbeschleunigung \vec{a}_f (im rotierenden Bezugssystem)

$$\vec{a}_f = \omega^2 \vec{\varrho}$$

ω Winkelgeschwindigkeit

Speziell: $\vec{\varrho} = \vec{r}$

r Kreisradius

$$s = r \varepsilon$$

s Weg

$$v = r \omega$$

ε Drehwinkel

$$a_t = r \alpha$$

v Umfangsgeschwindigkeit

$$a_p = a_f = r \omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

ω Winkelgeschwindigkeit

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_p^2}$$

α Winkelbeschleunigung

Speziell: ω konstant (gleichförmige Kreisbewegung)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

T Umlaufdauer (= Zeit, in welcher der Punkt den Kreis einmal umläuft)

f Frequenz

ω Kreisfrequenz

s Weg des Punktes auf dem Kreis mit dem Radius r in der Zeit t

$$s = r \frac{2\pi}{T} t$$

1.3 Klassische Dynamik

1.3.1 Impuls und Kraft

Impuls (Bewegungsgröße) \vec{p}

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$p = \sqrt{2mW_{\text{trans}}}$$

Betragseinheit: $1 \text{ kg m s}^{-1} = 1 \text{ N s}$

m momentane Masse

\vec{v} momentane Geschwindigkeit

W_{trans} Translationsenergie

Dynamisches Grundgesetz

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

\vec{F} Kraft, welche die zeitliche Änderung des Impulses \vec{p} bewirkt

Speziell: $m = \text{konstant}$

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

\vec{F} Kraft, welche die Beschleunigung \vec{a} eines Körpers mit der Masse m bewirkt

Speziell: $a = g$

$$F_G = mg$$

F_G Gewichtskraft eines Körpers mit der Masse m
 g Fallbeschleunigung

Trägheitskraft \vec{F}_{tr} :

$$\vec{F}_{\text{tr}} = -m \vec{a}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \vec{F}_{\text{tr}} = \vec{0}$$

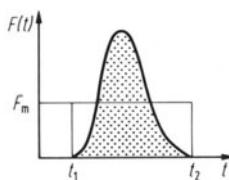
\vec{a} Beschleunigung eines Körpers mit der Masse m

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ Summe aller an diesem Körper angreifenden Kräfte

(Prinzip von d'Alembert)

Kraftstoß \vec{I}

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \vec{F}_m \Delta t$$



Betragseinheit: $1 \text{ N s} = 1 \text{ kg m s}^{-1}$

\vec{F}_m mittlere Kraft in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$

Impulssatz

$$\vec{I} = \Delta \vec{p}$$

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

\vec{I} Kraftstoß, $\Delta \vec{p}$ Impulsänderung

$\vec{p}(t_1)$ bzw. $\vec{p}(t_2)$ Impuls vor bzw. nach dem Stoß

Speziell im abgeschlossenen System:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i(t_1) = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i(t_2)$$

(Impulserhaltungssatz)

Speziell $n = 2$: siehe S. 17

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = M \vec{v}_S = \text{zeitlich konstant}$$

$\vec{p}_i(t_1)$ bzw. $\vec{p}_i(t_2)$ Impuls des i -ten Massenpunktes zur Zeit t_1 bzw. t_2 im abgeschlossenen System von n Massenpunkten

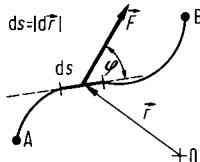
M Gesamtmasse des Systems von n Körpern mit den Einzelimpulsen \vec{p}_i
 \vec{v}_S Geschwindigkeit des Schwerpunktes S (s. S. 7)

1.3.2 Arbeit, Energie, Leistung

Mechanische Arbeit ΔW

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

$$\Delta W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B F \cos \varphi ds$$



Einheit: $1 \text{ N m} = 1 \text{ W s} = \text{Joule J}$

$1 \text{ kp m} = 9,81 \text{ N m}$

$P(t)$ momentane Leistung

\vec{F} Kraft am Ort \vec{r}

$ds = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dt$ Linienelement

Speziell: $\vec{F} = \text{const}$ in Richtung einer geraden Bahn

$$\Delta W = F s$$

s zurückgelegter Weg

Beschleunigungsarbeit ΔW_{kin} :

$$\Delta W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

v_1 Anfangsgeschwindigkeit

v_2 Endgeschwindigkeit

Spannarbeit ΔW_{def} :

$$\Delta W_{\text{def}} = \frac{1}{2} D(x_2^2 - x_1^2); \quad \Delta W_{\text{def}} = \frac{1}{2} D^*(\varphi_2^2 - \varphi_1^2)$$

x_1 Anfangskoordinate der Deformation

x_2 Endkoordinate

D Richtgröße, D^* Winkelrichtgröße (s. S. 9)

φ_1 Anfangsdrillwinkel, φ_2 Enddrillwinkel

Hubarbeit ΔW_{grav} :

$$\Delta W_{\text{grav}} = m g (z_2 - z_1)$$



z_1 Anfangshöhe, z_2 Endhöhe

m Masse, g Fallbeschleunigung (konstant)

Mechanische Energie W

$$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \int F \cos \varphi ds$$

Einheit: $1 \text{ N m} = 1 \text{ W s} = 1 \text{ J}$

$1 \text{ erg} = 1 \text{ dyn} \cdot \text{cm} = 10^{-7} \text{ J}$

$$W = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}}$$

\vec{F} Kraft am Ort \vec{r} , ds Linienelement

φ Winkel zwischen \vec{F} und $d\vec{r}$

W_{pot} potentielle Energie

W_{kin} kinetische Energie (Bewegungsenergie)

Kinetische Energie eines starren Körpers:

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{trans}} + W_{\text{rot}}$$

W_{trans} Translationsenergie

W_{rot} Rotationsenergie (siehe S. 19)

Translationsenergie W_{trans} :

$$W_{\text{trans}} = \frac{1}{2} m v^2; \quad W_{\text{trans}} = \frac{p^2}{2m}$$

m Masse

v momentane Geschwindigkeit

p Impuls

Potentielle Energie eines deformierten Körpers:

$$W_{\text{def}} = \frac{1}{2} D x^2; \quad W_{\text{def}} = \frac{1}{2} D^* \varphi^2$$

D Richtgröße, D^* Winkelrichtgröße

x Dehnung bzw. Stauchung

φ Verdrillungswinkel

Potentielle Energie eines Körpers im homogenen Gravitationsfeld:

$$W_{\text{grav}} = mgz$$

m Masse, g Fallbeschleunigung (konstant)

z Höhe des Massenpunktes

Energieerhaltungssatz

$$\Delta W = W(t_2) - W(t_1)$$

$W(t_1)$ bzw. $W(t_2)$ mechanische Energie eines Körpers zur Zeit t_1 bzw. t_2 ; ΔW Arbeit in der Zeit $t_2 - t_1$, die der Körper verrichtet bzw. die an ihm verrichtet wird

Speziell in einem abgeschlossenen System:

$$\sum_{i=1}^n W_i(t_1) = \sum_{i=1}^n W_i(t_2)$$

$W_i(t_1)$ bzw. $W_i(t_2)$ mechanische Energie des i -ten Massenpunktes in einem abgeschlossenen System von n Massenpunkten zur Zeit t_1 bzw. t_2

Leistung P

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} P dt = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Einheit: $1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \text{ Watt W}$

dW Arbeit in der Zeit dt
 \vec{F} Kraft, \vec{v} Geschwindigkeit

\bar{P} mittl. Leistung in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$
 ΔW Arbeit während der Zeit Δt

Wirkungsgrad η

$$\eta = \left| \frac{\Delta W_{\text{nutz}}}{\Delta W_{\text{ges}}} \right| = \left| \frac{\bar{P}_{\text{nutz}}}{\bar{P}_{\text{ges}}} \right|$$

Einheit: $1 = 100\%$

ΔW_{nutz} Nutzarbeit, ΔW_{ges} Gesamtarbeit
 \bar{P}_{nutz} bzw. \bar{P}_{ges} mittlere Nutz- bzw. Gesamtleistung

1.3.3 Zentraler Stoß (ohne Rotationen)

Die Stoßnormale geht durch die Schwerpunkte S_1 und S_2 der beiden Körper.

Gerader Stoß

Impulserhaltungssatz:

$$m_1 \vec{v}_{1a} + m_2 \vec{v}_{2a} = m_1 \vec{v}_{1e} + m_2 \vec{v}_{2e}$$

m_1, m_2 Massen der Körper
 $\vec{v}_{1a}, \vec{v}_{2a}$ Geschwindigkeiten vor dem Stoß
 $\vec{v}_{1e}, \vec{v}_{2e}$ Geschwindigkeiten nach dem Stoß

Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1a}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2a}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1e}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2e}^2 + \Delta W_f$$

ΔW_f Formänderungsarbeit (hier kann ΔW_f auch eine umgesetzte chemische Energie sein)

Speziell $v_{1a} = v_{2a} = 0$: Rückstoß

$$\text{Stoßzahl } k: k = \frac{|\vec{v}_{1e} - \vec{v}_{2e}|}{|\vec{v}_{2a} - \vec{v}_{1a}|}$$

Speziell Kugeln: $k = \sqrt{h_e/h_a}$

h_e Rückprallhöhe einer Kugel, die aus der Höhe h_a auf eine horizontale, ruhende Platte des gleichen Materials fällt

1. Wirklicher Stoß: $0 < k < 1$

$$\vec{v}_{1e} = (1+k) \frac{m_1 \vec{v}_{1a} + m_2 \vec{v}_{2a}}{m_1 + m_2} - k \vec{v}_{1a}$$

$$\vec{v}_{2e} = (1+k) \frac{m_1 \vec{v}_{1a} + m_2 \vec{v}_{2a}}{m_1 + m_2} - k \vec{v}_{2a}$$

$$\Delta W_f = \frac{1}{2} (1-k^2) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{1a} - \vec{v}_{2a})^2$$

2. Elastischer Stoß: $k = 1$ bzw. $\Delta W_f = 0$

$$\vec{v}_{1e} = 2 \frac{m_1 \vec{v}_{1a} + m_2 \vec{v}_{2a}}{m_1 + m_2} - \vec{v}_{1a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1a} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2a}$$

$$\vec{v}_{2e} = 2 \frac{m_1 \vec{v}_{1a} + m_2 \vec{v}_{2a}}{m_1 + m_2} - \vec{v}_{2a} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1a} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{2a}$$

Speziell $m_1 = m_2$: $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2a}$; $\vec{v}_{2e} = \vec{v}_{1a}$

$$\text{Speziell } \vec{v}_{2a} = \vec{0}: \quad \vec{v}_{1e} = \frac{2m_1 \vec{v}_{1a}}{m_1 + m_2} - \vec{v}_{1a} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1a}; \quad \vec{v}_{2e} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1a}$$

$$\Delta W_{2e} = W_{1a} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = W_{1a} q; \quad q = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

Übertragene Energie nach n Stößen: $\Delta W_{2e} = W_{1a} q^n$

Restenergie des stoßenden Körpers nach n Stößen: $W_{1e} = W_{1a}(1 - q^n)$

W_{1a} Energie des 1. Körpers vor dem Stoß
 ΔW_{2e} Energie, die vom Körper der Masse m_1 auf den mit der Masse m_2 übertragen wird.
 q Stoßparameter

Speziell $m_2 \rightarrow \infty$ und $\vec{v}_{2a} = \vec{0}$ (ruhende Wand):

$$\vec{v}_{1e} = -\vec{v}_{1a}; \quad \vec{v}_{2e} = \vec{0}; \quad \Delta \vec{p} = 2m_1 \vec{v}_{1a}$$

3. Unelastischer Stoß: $k = 0$ bzw. $\vec{v}_{1e} = \vec{v}_{2e} = \vec{v}$

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_{1a} + m_2 \vec{v}_{2a}}{m_1 + m_2}; \quad \Delta W_f = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_{1a} - \vec{v}_{2a})^2$$

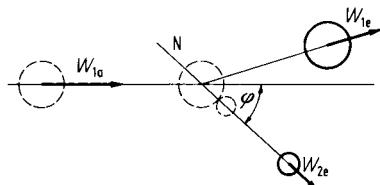
$$\text{Speziell } \vec{v}_{2a} = \vec{0}: \quad \Delta W_f = W_{1a} \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

$\Delta \vec{p}$ übertragener Impuls auf die ruhende Wand

\vec{v} gemeinsame Geschwindigkeit der Körper nach dem Stoß

ΔW_f Verformungsarbeit

W_{1a} kinetische Energie des stoßenden Körpers vor dem Stoß



N Stoßnormale

W_{1a} kinetische Energie der stoßenden Kugel

m_1 Masse der stoßenden Kugel

m_2 Masse der gestoßenen Kugel

Schiefer elastischer Stoß zweier Kugeln

Speziell $\vec{v}_{2a} = \vec{0}$:

$$\text{Übertragene Energie: } \Delta W_{2e} = W_{1a} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \varphi$$

Restenergie der stoßenden Kugel:

$$W_{1e} = W_{1a} \left\{ \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right\}$$

1.3.4 Rakete (ohne Berücksichtigung der Reibung)

Massenstrom \dot{m}

$$\dot{m} = \left| \frac{dm}{dt} \right|$$

Einheit: 1 kg/s

dm Treibstoffmasse, die in der Zeit dt ausgestoßen wird

Brennschlußzeit τ

$$\tau = \frac{m_0 - m_E}{\dot{m}} = \frac{m_{Tr}}{\dot{m}}$$

Einheit: 1 s

m_0 Startmasse, m_E Endmasse (Leermasse)

m_{Tr} Treibstoffmasse, \dot{m} Massenstrom

Schubkraft \vec{F}_s

$$\vec{F}_s = \dot{m} \vec{v}_{Tr}$$

Einheit: 1 N

\vec{v}_{Tr} Ausströmgeschwindigkeit der Treibmittel relativ zur Rakete, \dot{m} Massenstrom

Einstufenrakete bei senkrechtem Aufstieg

Startmasse m_0 : $m_0 = m_E + m_{Tr}$

 m_E Endmasse (Leermasse), m_{Tr} Treibstoffmasse

Massenverhältnis Z : $Z = \frac{m_0}{m_E}$

Endgeschwindigkeit v_E nach der Brennschlußzeit τ : v_{Tr} konstante Ausströmgeschwindigkeit des Treibmittels
 \bar{g} mittlere Fallbeschleunigung
 g Fallbeschleunigung am Abschußort
 r_Z Radius des Zentralkörpers

$v_E = v_{Tr} \ln Z - \bar{g} \tau; \quad \bar{g} = g \frac{r_Z}{r_Z + h_\tau}$

Brennschlußhöhe h_τ : m_E Endmasse (Leermasse), m_{Tr} Treibstoffmasse

$h_\tau = \frac{v_{Tr}}{m_{Tr}} [m_{Tr} - m_E \ln Z] - \frac{1}{2} \bar{g} \tau^2$

Mehrstuferakete bei senkrechtem AufstiegEndgeschwindigkeit v_E nach der Gesamtbrennschlußzeit τ_{ges} : n Anzahl der Stufen,
 $v_{Tr,i}$ Ausströmgeschwindigkeit der i -ten Stufe mit dem
Massenverhältnis Z_i
 \bar{g} mittlere Fallbeschleunigung

$v_E = v_{Tr,1} \ln Z_1 + v_{Tr,2} \ln Z_2 + \dots + v_{Tr,n} \ln Z_n - \bar{g} \tau_{ges}$

Speziell gleiche Ausströmgeschwindigkeit v_{Tr} : Z_{ges} Gesamtmaszenverhältnis

$v_E = v_{Tr} \ln Z_{ges} - \bar{g} \tau_{ges}; \quad Z_{ges} = Z_1 Z_2 Z_3 \dots Z_n$

1.3.5 Kreisbewegung eines Massenpunktes (siehe Bild S. 14)**Drehimpuls \vec{L}**

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}; \quad \vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 m \vec{\omega} - m(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}$

Betragseinheit: $1 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1} = 1 \text{ N m s}$ \vec{r} Ortsvektor des rotierenden Massenpunktes \vec{p} Bahnmoment des Massenpunktes $\vec{\omega}$ WinkelgeschwindigkeitKomponente \parallel Drehachse: $L_\omega = \varrho^2 m \vec{\omega}$ ϱ Abstand des Massenpunktes von der Drehachse
 J Trägheitsmoment bezogen auf die Drehachse

$\vec{L}_\omega = J \vec{\omega}$

 γ Winkel zwischen Ortsvektor \vec{r} und DrehachseKomponente \perp Drehachse: $L_\theta = L_\omega \cot \gamma$ **Einheit:** 1 kg m^2 **Trägheitsmoment J** m Masse ϱ Abstand des Massenpunktes von der Drehachse

$J = \varrho^2 m$

 \vec{M} Drehmoment, \vec{L} Drehimpuls \vec{r} Ortsvektor des Angriffspunktes der Kraft \vec{F} \vec{M}_ω Komponente des Drehmomentes \vec{M} parallel zur Drehachse F_t Betrag der Tangentialkomponente der Kraft $\vec{\alpha}$ Winkelbeschleunigung**Dynamisches Grundgesetz****Einheit:** 1 J

$\vec{M} = \vec{L}; \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

 J Trägheitsmoment ω Winkelgeschwindigkeit

$\vec{M}_\omega = J \vec{\alpha}; \quad M_\omega = F_t \varrho$

Rotationsenergie W_{rot} a_t Zentrifugalbeschleunigung, m Masse

$W_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

 r Kreisradius v Umfangs- oder Bahngeschwindigkeit des Punktes mit der Masse m Zentrifugalkraft \vec{F}_f

$\vec{F}_f = m \vec{a}_t$

$F_f = m r \omega^2 = \frac{m v^2}{r}$

Speziell: $\vec{q} = \vec{r}$

1.3.6 Rotierender starrer Körper mit raumfester Drehachse

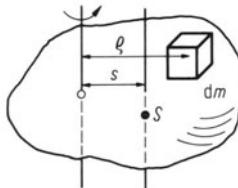
Trägheitsmoment J (Tab. 5)

(Massenträgheitsmoment)

$$J = \int \varrho^2 dm; \quad J = m \varrho^2$$

$$J = J_s + ms^2$$

(Satz von Steiner)



Einheit: 1 kg m^2

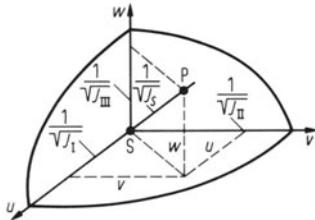
q Abstand des Massenelementes dm von der Drehachse,
 ϱ Trägheitsradius, m Masse des Körpers
 s Abstand der zur Drehachse parallelen Achse durch den
 Körperschwerpunkt S
 J_s Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf diese
 Schwerpunktachse

Trägheitsellipsoid:

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_1}}; \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_{II}}}; \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_{III}}}$$

$$J_1 u^2 + J_{II} v^2 + J_{III} w^2 = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{J_s}} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$



a, b, c Halbachsen des Trägheitsellipsoids in $\text{kg}^{-1/2} \text{ m}^{-1}$
 J_1, J_{II}, J_{III} Hauptträgheitsmomente

u, v, w Koordinaten eines Punktes P auf dem Trägheitsellipsoid in $\text{kg}^{-1/2} \text{ m}^{-1}$

J_s Trägheitsmoment für eine beliebige Schwerpunktachse durch S

x, y, z Ortskoordinaten des Massenelementes dm in bezug auf ein beliebiges körperfestes kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung in S

$$\begin{vmatrix} (J_{xx} - J) & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & (J_{yy} - J) & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & (J_{zz} - J) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{mit den Lösungen:}$$

$$J = J_1 \quad \text{bzw.} \quad J = J_{II} \quad \text{bzw.} \quad J = J_{III}$$

$$J_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm; \quad J_{yy} = \int (x^2 + z^2) dm; \quad J_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm \quad J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} \text{ axiale Trägheitsmomente}$$

$$J_{xy} = \int xy dm; \quad J_{yz} = \int yz dm; \quad J_{xz} = \int xz dm \quad J_{xy}, J_{yz}, J_{xz} \text{ Zentrifugalmomente (Deviationsmomente)}$$

Trägheitsmoment J eines Körpers, der aus den Massenelementen Δm_i zusammengesetzt ist:

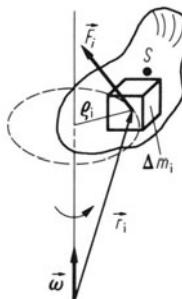
$$J = \sum_i \varrho_i^2 \Delta m_i$$

Drehmoment \vec{M}

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Drehimpuls (Drall) \vec{L}

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



ϱ_i Abstand des Massenelementes Δm_i von der Drehachse

Betragseinheit: 1 N m

\vec{r}_i Ortsvektor des Massenelementes Δm_i
 \vec{F}_i Kraft auf das Massenelement Δm_i

Betragseinheit: $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ N m s}$

\vec{p}_i Impuls des Massenelementes Δm_i

Drehimpulskomponente \vec{L}_ω parallel zur Drehachse:

$$\vec{L}_\omega = J \vec{\omega}$$

J Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse
 $\vec{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit

Speziell Drehung um eine Hauptträgheitsachse:

$$\vec{L} = J_H \vec{\omega}$$

\vec{L} Gesamtdrehimpuls

J_H Hauptträgheitsmoment ($= J_1$ oder J_{II} oder J_{III})

Dynamisches Grundgesetz

$$\vec{M}_\omega = \dot{\vec{L}}_\omega$$

Speziell $J = \text{konstant}$:

$$\vec{M}_\omega = J \vec{\alpha}$$

\vec{M}_ω Drehmomentkomponente parallel zur Drehachse, die die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ eines Körpers mit dem Trägheitsmoment J in bezug auf die (konstante) Drehachse bewirkt

Drehstoß \vec{H}

Betragseinheit: $1 \text{ kg m}^2 \text{s}^{-1} = 1 \text{ N m s}$

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}(t) dt = \vec{M}_m \Delta t$$

\vec{M} Drehmoment
 \vec{M}_m mittl. Drehmoment in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$

Drehimpulssatz

$$\vec{H}_\omega = \Delta \vec{L}_\omega$$

$$\Delta \vec{L}_\omega = \vec{L}_\omega(t_2) - \vec{L}_\omega(t_1)$$

Speziell $\vec{H}_\omega = \vec{0}$:

$$J \vec{\omega} = \text{konstant}$$

\vec{H}_ω Drehstoß

$\Delta \vec{L}_\omega$ Drehimpulsänderung

$\vec{L}_\omega(t_1)$ bzw. $\vec{L}_\omega(t_2)$ Drehimpuls vor bzw. nach dem Drehstoß

$\vec{\omega}$ momentane Winkelgeschwindigkeit

J momentanes Trägheitsmoment in bezug auf die (konstante) Drehachse

In einem abgeschlossenen System ist die Summe der Drehimpulse konstant.

(Drehimpulserhaltungssatz)

Drehleistung P_{rot}

Einheit: 1 W

$$P_{\text{rot}} = \vec{M} \vec{\omega} = M_\omega \cdot \omega$$

\vec{M} Drehmoment, $\vec{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit

Dreharbeit ΔW_{rot}

Einheit: 1 J

$$\Delta W_{\text{rot}} = \int_{t_1}^{t_2} P_{\text{rot}}(t) dt$$

$P_{\text{rot}}(t)$ momentane Drehleistung

$$\Delta W_{\text{rot}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_\omega(\varphi) d\varphi$$

$M_\omega(\varphi)$ ist das bei der Winkelkoordinate φ wirksame Drehmoment in Richtung der Drehachse

Speziell $M_\omega = \text{konstant}$:

$$\Delta W_{\text{rot}} = M_\omega \varepsilon$$

ε Drehwinkel

Speziell Winkelbeschleunigungsarbeit:

$$\Delta W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

J Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse

ω_1 bzw. ω_2 ist die bei der Winkelkoordinate φ_1 bzw. φ_2 vorhandene Winkelgeschwindigkeit

Rotationsenergie W_{rot}

Einheit: 1 J

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

J Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse
 ω Winkelgeschwindigkeit

1.3.7 Kreisel (symmetrisch)

Kräftefreier Kreisel

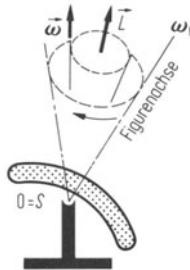
bei kardanischer Lagerung

$$\vec{L} = \vec{L}_K + \vec{L}_Z = \text{konstant}$$

$$\vec{L}_K = J_K \vec{\omega}_K; \quad \vec{L}_Z = J_Z \vec{\omega}_Z$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_K + \vec{\omega}_Z$$

$$\omega_N = \frac{L}{J_Z}$$



\vec{L} raumfester Gesamtdrehimpuls

$\vec{\omega}_K$ Anfangswinkelgeschwindigkeit parallel zur Figurenachse

\vec{L}_K Anfangsdrehimpuls

J_K Hauptträgheitsmoment bezüglich der Figurenachse

$\vec{\omega}_Z$ Winkelgeschwindigkeit parallel zu einer zur Figurenachse senkrechten Achse

\vec{L}_Z Zusatzdrehimpuls

J_Z Hauptträgheitsmoment bezüglich dieser Achse

$\vec{\omega}$ Winkelgeschwindigkeit parallel zur momentanen Drehachse

ω_N Kreisfrequenz der Figurenachse (Nutationsbewegung um die raumfeste Drehimpulsachse)

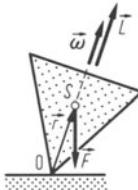
Präzessionsbewegung

unter der Einwirkung einer Kraft \vec{F}

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}}; \quad \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Speziell $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$ und $\vec{M} \perp \vec{L}$:

$$\omega_p = \frac{M}{J\omega}; \quad \vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$



\vec{M} äußeres Drehmoment, \vec{L} momentaner Drehimpuls

ω momentane Winkelgeschwindigkeit

J Massenträgheitsmoment für die Figurenachse

ω_p Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung

der Figurenachse

1.4 Gravitation und Satellitenbewegung

1.4.1 Grundgrößen

Gravitationsfeldstärke (Gravitationsbeschleunigung) \vec{G}

Einheit: $1 \text{ N/kg} = 1 \text{ m/s}^2$

$$\vec{G} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}$$

$\Delta \vec{F}$ Gravitationskraft auf die Probemasse Δm

Gravitationsgesetz von Newton

(Kraft \vec{F} zwischen zwei Massenpunkten)

$$\vec{F}_1(r) = m_1 \vec{G}_2(r); \quad \vec{F}_2(r) = m_2 \vec{G}_1(r)$$

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$f = 6,6726 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

m_1, m_2 Massen

\vec{F}_1 bzw. \vec{F}_2 Kraft auf die 1. bzw. 2. Masse

\vec{G}_1 bzw. \vec{G}_2 Feldstärke der 1. bzw. 2. Masse am Ort der 2. bzw. 1. Masse

r Abstand der Massenpunkte

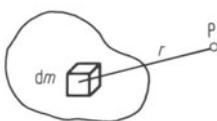
f Gravitationskonstante

Potential φ_{grav} in einem Feldpunkt P

Einheit: $1 \text{ J/kg} = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2$

Kontinuierliche Massenverteilung:

$$\varphi_{\text{grav}}(P) = -f \int \frac{dm}{r}$$



r Abstand des Punktes P vom felderzeugenden Massen-

element dm eines Körpers

f Gravitationskonstante

Flächen, auf denen $\varphi_{\text{grav}} = \text{konstant}$: Äquipotentialflächen

Diskrete Massenverteilung von n kugelsymmetrischen Körpern:

$$\varphi_{\text{grav}}(P) = -f \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$$

r_i Abstand des Punktes P vom Mittelpunkt des i -ten Körpers mit der Masse m_i

Zusammenhang zwischen \vec{G} und φ_{grav} :

$$\varphi_{\text{grav}}(P) = - \int_{P_0}^P \vec{G}(\vec{r}) d\vec{r}$$

\vec{G} Gravitationsfeldstärke

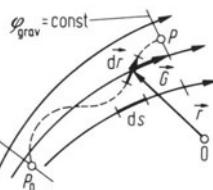
$d\vec{r}$ Differential des Ortsvektors \vec{r}

P_0 Potentialnullpunkt

$d\varphi_{\text{grav}}$ Potentialänderung längs des Feldlinienelements ds

mit $\varphi_{\text{grav}}(P_0) = 0$

$$\vec{G} = -\text{grad } \varphi_{\text{grav}}; \quad G = \left| \frac{d\varphi_{\text{grav}}}{ds} \right|$$



1.4.2 Spezielle Gravitationsfelder

\vec{G} Gravitationsfeldstärke, φ_{grav} Potential, ΔW Arbeit

Homogenes Feld

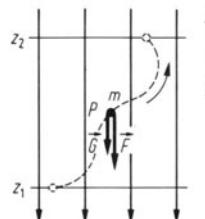
(näherungsweise in einem Radialfeld bei kleinen Niveauunterschieden)

Feldstärke \vec{G} : $\vec{G} = \text{konstant}$

Kraft \vec{F} auf die Masse m : $\vec{F} = m \vec{G}$

Überführungsarbeit ΔW : $\Delta W = m G (z_2 - z_1)$

Potential φ_{grav} im Punkt P: $\varphi_{\text{grav}}(P) = -G(z - z_0)$



z_1 bzw. z_2 Anfangs- bzw. Endkoordinate
 z_0 Koordinate des Potentialnullpunktes

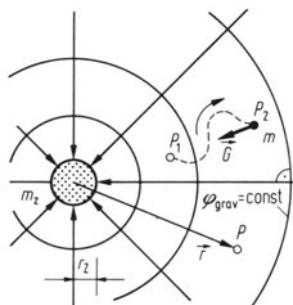
Radialfeld eines Zentralkörpers

Feldstärke \vec{G} : $\vec{G} = f \frac{m_Z}{r^2}$

Kraft \vec{F} auf die Masse m : $\vec{F} = m \vec{G}$

Überführungsarbeit ΔW : $\Delta W = f m m_Z \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$

Potential im Punkt P: $\varphi_{\text{grav}} = f m_Z \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$



r_0 Abstand des Potentialnullpunktes vom Massenmittelpunkt des Zentralkörpers der Masse m_Z

Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}_0(r) = \vec{G}(r)$ im Abstand r vom Mittelpunkt eines Zentralkörpers:

$$g_0(r) = f \frac{m_Z}{r^2}; \quad \vec{g}_0 \downarrow \vec{r}; \quad r \geq r_Z$$

$g_0(r_Z)$ Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche des Zentralkörpers der Masse m_Z und des Radius r_Z

$$g_0(r) = g_0(r_Z) \frac{r_Z^2}{r^2} = g_0(r_Z) \frac{1}{n^2} \quad \text{mit} \quad n = \frac{r}{r_Z}$$

n Entfernungsfaktor

Fallbeschleunigung $\vec{g}(r)$ eines mitrotierenden Körpers im Abstand r von einem rotierenden Zentralkörper:

$$\vec{g}(r) = \vec{g}_0(r) + \vec{a}_f; \quad \vec{a}_f = \omega^2 \vec{q}$$

Gewichtskraft F_G :

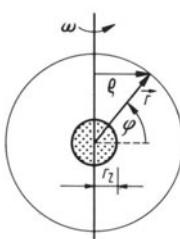
$$F_G = mg$$

Speziell Erde am Normort ($h = 0$; $\varphi = 45^\circ$):

$$g = g_n = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$$

Endgeschwindigkeit v für freien Fall aus der Höhe h :

$$v = \frac{\sqrt{2g_n h}}{1 + \frac{1}{2} \frac{h}{r_E}}$$



\vec{a}_f Zentrifugalbeschleunigung

q Abstand von der Drehachse (= Radius des Breitenkreises für $r = r_Z$)

$\vec{g}_0(r)$ Gravitationsbeschleunigung auf die Masse m im Gravitationsfeld des Zentralkörpers

ω Winkelgeschwindigkeit des Zentralkörpers

φ geographische Breite

h Höhe über dem Meeresspiegel

g_n Normfallbeschleunigung

r_E Erdradius

1.4.3 Satellitenbewegung (im Feld eines Zentralkörpers, ohne Berücksichtigung der Rotation des Zentralkörpers und der Reibung)

Kreisbahnen (Zentralkörper im Mittelpunkt)

Bahn mit dem Radius r bzw. der Höhe $h = r - r_Z$:

$$v_K(r) = \sqrt{r g_0(r)} = \sqrt{\frac{fm_Z}{r}}; \quad v_K(r) = \sqrt{\frac{n}{r}} v_{gr}$$

v_K Kreisbahngeschwindigkeit

T_K Kreisbahnumlaufdauer

$g_0(r)$ Gravitationsbeschleunigung im Abstand r

f Gravitationskonstante,

m_Z Masse des Zentralkörpers

n Entfernungsfaktor

$$T_K(r) = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g_0(r)}} = n \sqrt{n} T_{gr}; \quad n = \frac{r}{r_Z}$$

Grenzbahn $r = r_Z$ bzw. $h = 0$:

$$v_{gr} = \sqrt{r_Z g_0(r_Z)}; \quad T_{gr} = 2\pi \sqrt{\frac{r_Z}{g_0(r_Z)}}$$

v_{gr} Grenzgeschwindigkeit

T_{gr} Grenbahnumlaufdauer

r_Z Radius des Zentralkörpers

h Höhe über der Oberfläche

$g_0(r_Z)$ Gravitationsbeschleunigung

Speziell Erde: $v_{gr} = 7,9 \text{ km/s}$ (1. kosmische Geschwindigkeit)

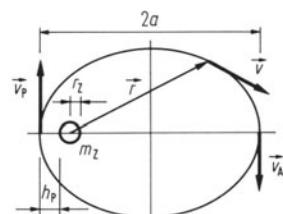
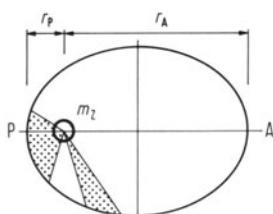
$$T_{gr} = 84,4 \text{ min}$$

Ellipsenbahnen

1. Gesetz von Kepler: Satelliten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt der Zentralkörper steht (Tab. 3 u. 4).

2. Gesetz von Kepler: Der Fahrstrahl \vec{r} vom Zentralkörper zum Satelliten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

$$|\vec{r} \times \vec{v}| = \text{konstant}$$



Speziell Sonne:

P Perihel, A Aphel

Speziell Erde:

P Perigäum, A Apogäum

$$r_P + r_A = 2a; \quad h_P = r_P - r_Z$$

$$r_A \text{ Aphel- bzw. Apogäumsabstand}, \quad r_P \text{ Perihel- bzw. Perigäumsabstand}$$

a große Halbachse der Ellipse

3. Gesetz von Kepler: Die Quadrate der Umlaufzeiten verschiedener Satelliten eines Zentralkörpers verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen ihrer Bahnellipsen.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}; \quad T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{f(m_Z + m)}$$

T Umlaufdauer, a große Halbachse
 m_Z Masse des Zentralkörpers, m Satellitenmasse
 f Gravitationskonstante

Parabelbahn (Zentralkörper im Brennpunkt)

Erforderliche Abschußgeschwindigkeit aus einer Kreisbahn mit dem Radius r um den Zentralkörper:

$$v_F = \sqrt{\frac{2fm_Z}{r}} = v_K \sqrt{2}$$

f Gravitationskonstante
 m_Z Masse des Zentralkörpers
 v_K Kreisbahngeschwindigkeit

Speziell Erde und $r = r_Z$: $v_F = v_{gr} \sqrt{2} = 11,2 \text{ km/s}$

v_{gr} Grenzgeschwindigkeit

(2. kosmische Geschwindigkeit, Fluchtgeschwindigkeit)

Hyperbelbahnen (Zentralkörper im Brennpunkt des Hyperbelastes)

Abschußgeschwindigkeit aus einer Kreisbahn mit dem Radius r um den Zentralkörper:

$$v_H > v_F$$

v_F Abschußgeschwindigkeit aus der gleichen Kreisbahn für Parabelbahn

Speziell Erde und $r = r_Z$: $v_H > 11,2 \text{ km/s}$

1.5 Relativitätsmechanik

1.5.1 Kinematik bei kleinen Geschwindigkeiten

Inertialsysteme

Ein Inertialsystem S' bewegt sich gleichförmig relativ zu einem Inertialsystem S .

Galilei-Transformation: Speziell $\vec{r}' = \vec{r}$ für $t = 0$

Ortsvektor \vec{r}' : $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$

\vec{r} bzw. \vec{u} bzw. \vec{a} Ortsvektor bzw. Geschwindigkeit bzw.

Beschleunigung eines Punktes P im System S

Geschwindigkeit \vec{u}' : $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$

\vec{r}' bzw. \vec{u}' bzw. \vec{a}' Ortsvektor bzw. Geschwindigkeit bzw.

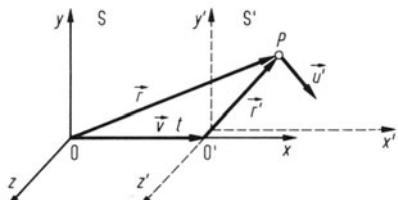
Beschleunigung von P in S'

Beschleunigung \vec{a}' : $\vec{a}' = \vec{a}$

\vec{v} konstante Geschwindigkeit von S' in S

Spezielle Lage der Systeme S, S' (siehe Bild)

$$\begin{array}{lll} x' = x - v_x t; & u'_x = u_x - v_x; & a'_x = a_x \\ y' = y; & u'_y = u_y; & a'_y = a_y \\ z' = z; & u'_z = u_z; & a'_z = a_z \end{array}$$



Beschleunigtes Bezugssystem

Ein Bezugssystem S' (Ursprung O') bewegt sich beschleunigt gegenüber einem Inertialsystem S (Ursprung O).

Ortsvektor \vec{r} eines Punktes P in S:

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{r}'$$

\vec{r}_o Ortsvektor von O' in S

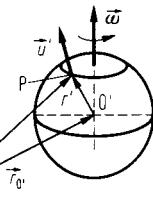
\vec{r}' Ortsvektor von P in S'

Führungsgeschwindigkeit \vec{v}_F (Geschwindigkeit eines fest mit S' verbundenen Punktes in S):

$$\vec{v}_F = \vec{v}_{\text{trans}} + \vec{\omega} \times \vec{r}'; \quad \vec{v}_{\text{trans}} = \frac{d\vec{r}_{o'}}{dt}$$

Geschwindigkeit \vec{u} von P in S:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}_F; \quad \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}$$



\vec{v}_{trans} bzw. $\vec{\omega}$ Translations- bzw. Winkelgeschwindigkeit von S' in S

\vec{u}' Geschwindigkeit von P in S'

Führungsbeschleunigung \vec{a}_F (Beschleunigung eines fest mit S' verbundenen Punktes in S):

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{\text{trans}} + \vec{a}_t - \vec{a}_f; \quad \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a}_{\text{trans}} = \frac{d\vec{v}_{\text{trans}}}{dt}; \quad \vec{a}_f = \vec{\omega} \times (\vec{r}' \times \vec{\omega})$$

\vec{a}_{trans} bzw. $\vec{\alpha}$ Translations- bzw. Winkelbeschleunigung von S' in S

\vec{a}_t Tangentialbeschleunigung

\vec{a}_f Zentrifugalbeschleunigung

Beschleunigung \vec{a} von P in S:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_F - \vec{a}_C$$

$$\vec{a}_C = 2\vec{u}' \times \vec{\omega}; \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{u}'}{dt}$$

\vec{a}' Beschleunigung von P in S'

\vec{a}_C Coriolisbeschleunigung

1.5.2 Kinematik in Inertialsystemen bei Geschwindigkeiten vergleichbar mit c_0

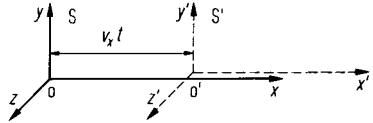
Lorentztransformation

Speziell: $x' = x$ für $t' = t = 0$,
 $v_y = v_z = 0$ für alle Zeiten
und $y' = y, z' = z$ für alle Zeiten

$c_0 = 299\,792\,458$ m/s Vakuumlichtgeschwindigkeit
 (x, y, z, t) bzw. (x', y', z', t') Raumzeitkoordinaten eines
Punktes im Inertialsystem S bzw. S'
 v konstante Geschwindigkeit von S' in S ($v = |\vec{v}| = v_x$)

Ortskoordinate:

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad x = \frac{x' + v_x t}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c_0}$$



Zeitkoordinate:

$$t' = \frac{t - \beta x/c_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t = \frac{t' + \beta x'/c_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Geschwindigkeitskoordinaten:
(Additionstheorem der Geschwindigkeiten)

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v_x}{1 - \beta u_x/c_0}; \quad u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{u'_x + v_x}{1 - \beta u'_x/c_0}$$

(u_x, u_y, u_z) bzw. (u'_x, u'_y, u'_z) Geschwindigkeitskoordinaten eines Punktes in S bzw. S'

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta u_x/c_0}; \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta u_x/c_0}$$

Speziell: Der Beobachter ruht in dem einen der beiden Systeme, der beobachtete Körper im anderen:

Zeitdilatation

Dauer Δt eines Vorganges am beobachteten Körper für den Beobachter:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c_0}$$

v Geschwindigkeit des Körpers relativ zum Beobachter
 Δt_0 Dauer des Vorganges für einen relativ zum Körper ruhenden Beobachter (Eigenzeit)

Längenkontraktion

Länge Δx einer Strecke am beobachteten Körper für den parallel zu ihr bewegten Beobachter:

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \beta^2}; \quad \beta = \frac{v}{c_0}$$

v Geschwindigkeit der Strecke relativ zum Beobachter
 Δx_0 Länge der Strecke für einen relativ zu ihr ruhenden Beobachter (Ruhe- oder Eigenlänge)

1.5.3 Dynamik in Inertialsystemen bei Geschwindigkeiten vergleichbar mit c_0
Dynamische (träge) Masse m

Masse m des beobachteten Körpers für den Beobachter:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c_0}$$

v Geschwindigkeit des Körpers relativ zum Beobachter
 m_0 Masse des Körpers für einen relativ zu ihm ruhenden Beobachter (Ruhemasse)

ϵ relativer Massen- oder Energiezuwachs des Körpers

Impuls \vec{p} eines Körpers

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

\vec{v} Geschwindigkeit des Körpers relativ zum Beobachter
 m dynamische Masse des Körpers

Kraft \vec{F} ,

die einem Körper mit der dynamischen Masse m die Beschleunigung \vec{a} erteilt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \left(\vec{a}_s + \frac{\vec{a}_p}{1 - \beta^2} \right); \quad \beta = \frac{v}{c_0}$$

\vec{a}_s bzw. \vec{a}_p Komponente von \vec{a} senkrecht bzw. parallel zu \vec{v}
 v Geschwindigkeit des Körpers relativ zum Beobachter
 c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$\vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}_p; \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ruheenergie W_0 eines Körpers

$$W_0 = m_0 c_0^2$$

m_0 Ruhemasse des Körpers

Gesamtenergie W

eines gegenüber einem Beobachter bewegten Körpers

$$W = m c_0^2 = W_0 + W_{\text{kin}}$$

m dynamische Masse
 W_{kin} kinetische Energie des Körpers

(Äquivalenzprinzip von Masse und Energie)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c_0}$$

v Geschwindigkeit des Körpers relativ zum Beobachter

$$W = \sqrt{m_0^2 c_0^4 + p^2 c_0^2}$$

p Impuls des Körpers

Relativer Energie- bzw. Massenzuwachs ε

$$\varepsilon = \frac{m - m_0}{m_0} = \frac{W - W_0}{W_0} = \frac{W_{\text{kin}}}{W_0}$$

m bzw. m_0 dynamische bzw. Ruhemasse
 W bzw. W_0 bzw. W_{kin} Gesamt- bzw. Ruhe- bzw.
 kinetische Energie

Geschwindigkeit v eines Körpers

$$v = c_0 \sqrt{1 - 1/(1 + \varepsilon)^2}$$

ε relativer Massen- oder Energiezuwachs

Energieerhaltungssatz

in einem abgeschlossenen System von Teilchen

$$\sum_{i=1}^{n_a} W_{i,a} = \sum_{j=1}^{n_e} W_{j,e}$$

n_a bzw. n_e Anzahl der Teilchen vor bzw. nach der Reaktion
 $W_{i,a}$ bzw. $W_{j,e}$ Gesamtenergie des Teilchens i bzw. j vor bzw. nach der Reaktion

Speziell: Massendefekt Δm und Bindungsenergie W_B bei der Bildung eines stabilen Körpers aus freien Teilchen:

$$\Delta m = \left(\sum_{i=1}^n m_{0,i} \right) - m_0$$

n Anzahl der freien Teilchen
 $m_{0,i}$ Ruhemasse des Teilchens i
 m_0 Ruhemasse des stabilen Körpers
 c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$W_B = -\Delta m c_0^2$$

2 Mechanik der Fluide (Flüssigkeiten und Gase)

2.1 Ruhende Fluide

2.1.1 Druck

Druck p

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

Einheit: $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pascal Pa}$

1 Bar bar = 10^5 Pa ; 1 Torr = $133,322 \text{ Pa}$

1 mm WS = $9,80665 \text{ Pa}$

ΔF Druckkraft senkrecht zur Fläche mit dem Inhalt ΔA

Isotherme Druckänderung Δp

für die relative Volumänderung $\Delta V/V$

$$\Delta p = K \frac{\Delta V}{V}; \quad \Delta V = |V_2 - V_1|; \quad \Delta p = |p_2 - p_1|$$

$$K = 1/\kappa$$

V_1 bzw. V_2 Volumen beim Druck p_1 bzw. p_2

$V \approx V_1 \approx V_2$

K Kompressionsmodul (Tab. 11)

κ Kompressibilität

Speziell ideale Flüssigkeit: $\kappa = 0$

Speziell ideales Gas: $\kappa = 1/p$

p Gasdruck

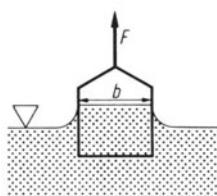
2.1.2 Grenzflächeneffekte

Kapillaritätskonstante σ (Oberflächen-, Grenzflächen-spannung) einer Flüssigkeit (Tab. 12)

Einheit: $1 \text{ N/m} = 1 \text{ J/m}^2 = 1 \text{ kg/s}^2$

ΔW Arbeit zur Vergrößerung der Flüssigkeitsoberfläche um ΔA
 ΔF Kraft auf ein Teilstück Δl der Berandungslinie der Flüssigkeitsoberfläche

Speziell ideale Flüssigkeit: $\sigma = 0$



Kraft F zum Heben eines Drahtbügels:

$$F = F_G + 2b\sigma$$

F Kraft kurz vor dem Abreißen der Lamelle

σ Kapillaritätskonstante

b bzw. F_G Breite bzw. Gewichtskraft des Bügels

Kraft F zum Heben eines Drahtringes:

$$F = F_G + 4\pi r\sigma$$

F Kraft kurz vor dem Abreißen der Lamelle

σ Kapillaritätskonstante

r bzw. F_G Radius bzw. Gewichtskraft des Drahtringes

Kohäsionsdruck p_k auf ein Teilchen

in einer gewölbten Oberfläche (Meniskus)

$$p_k = p_e + \frac{2\sigma}{r} \quad r > 0: \text{konvexer Meniskus}$$

$r < 0: \text{konkaver Meniskus}$

p_e Kohäsionsdruck bei ebener Oberfläche

σ Kapillaritätskonstante der Flüssigkeit

r Krümmungsradius

$p_{D,e}$ Dampfdruck einer Flüssigkeit mit kugelförmiger Oberfläche

$p_{D,k}$ Dampfdruck der gleichen Flüssigkeit bei ebener Oberfläche

ρ_D Dampfdichte, ρ_F Flüssigkeitsdichte

$$p_{D,k} = p_{D,e} + \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_D}{\rho_F}$$

Überdruck Δp in einer kugelförmigen Blase

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{r}$$

σ Kapillaritätskonstante

r Kugelradius

Haftspannung und Kapillarität

(1) Gas, (2) Flüssigkeit, (3) Wand

Haftspannung σ_H : $\sigma_H = \sigma_{1,3} - \sigma_{2,3}$

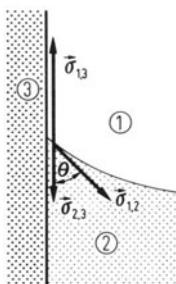
Kapillaritätsgesetz: $\sigma_H = \sigma_{1,2} \cos \theta$

Vollständige Benetzung: $\theta = 0^\circ$ bzw. $\sigma_H \geq \sigma_{1,2}$

Unvollständige Benetzung: $0^\circ < \theta < 90^\circ$ bzw.

$$\sigma_{1,2} > \sigma_H > 0$$

Nichtbenetzung: $\theta > 90^\circ$ bzw. $\sigma_H < 0$



$\sigma_{i,k}$ Grenzflächenspannung zwischen den Medien (i) und (k)

θ Randwinkel

Maximale Steighöhe bzw. Depressionshöhe h_{\max} einer Flüssigkeit in einem kreiszyklindrischen Kapillarrohr:

$$h_{\max} = \frac{2 \sigma_{1,2} \cos \theta}{r \varrho g}$$

r Kapillarrohrradius

ϱ Flüssigkeitsdichte

g Fallbeschleunigung

Speziell Wasser/Glas: $h_{\max} \approx 15 \text{ mm}^2/r$

Speziell Quecksilber/Glas: $h_{\max} \approx -7 \text{ mm}^2/r$

2.1.3 Druck und Kraft in offenen Gefäßen

Hydrostatischer Druck p in einer Flüssigkeit

mit freier Oberfläche

$$p = p_G + p_O = \varrho g h + p_O$$

$$p_G = \varrho g h$$

p_G Schweredruck durch die Flüssigkeit

p_O Druck auf die Flüssigkeitsoberfläche

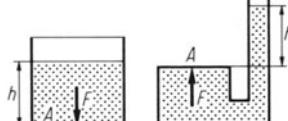
ϱ Flüssigkeitsdichte (Tab. 6), g Fallbeschleunigung

h Flüssigkeitshöhe

Druckkraft F

auf horizontale Boden- bzw. Deckflächen

$$F = A \varrho g h$$



A Boden- bzw. Deckfläche

ϱ Dichte, g Fallbeschleunigung

h Höhe der Flüssigkeitsoberfläche

über der Boden- bzw. Deckfläche

Druckkraft F

auf symmetrische ebene Seitenwand

$$F = A \varrho g h_s$$

$$F = A \varrho g y_s \sin \alpha$$

Angriffspunkt von F
(Druckmittelpunkt D):

$$y_D = y_S + e$$

$$h_D = y_D \sin \alpha$$

A benetzte Seitenfläche

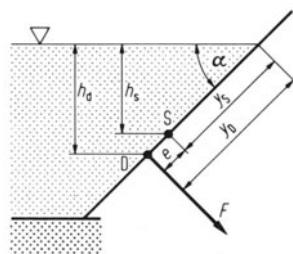
ϱ Dichte

g Fallbeschleunigung

h_s (senkrechter) Abstand des Flächenschwerpunktes S der benetzten Wandfläche vom Flüssigkeitsspiegel

I_S axiales Flächenmoment 2. Grades der benetzten Seitenfläche in bezug auf die horizontale Achse durch S (S. 8 u. Tab. 5)

$$e = \frac{I_S}{A y_S}$$



2.1.4 Druck und Kraft in geschlossenen Gefäßen

Hydraulischer Druck p (ohne Schweredruck)

an jeder Stelle der Flüssigkeit:

$$p = \frac{F}{A}$$



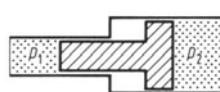
F Kraft auf die Kolbenfläche A

Hydraulische Kraft- bzw. Druckübertragung

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1; \quad s_2 = \frac{A_1}{A_2} s_1$$



$$p_2 = \frac{A_1}{A_2} p_1$$



F_1, F_2 Kolbenkräfte

A_1, A_2 Kolbenflächen

s_1, s_2 Kolbenwege

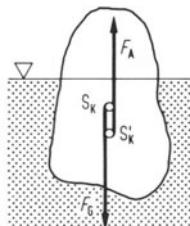
p_1, p_2 hydraulischer Druck der Flüssigkeit in den Zylindern

2.1.5 Auftrieb und Schwimmen

Auftriebskraft F_A

$$F_A = \rho g V'_K$$

(Gesetz von Archimedes)



V'_K Teil des Körpervolumens, der sich in einem Fluid der Dichte ρ befindet

g Fallbeschleunigung

S_K Schwerpunkt des Gesamtkörpers

S'_K Schwerpunkt des eingetauchten Teiles

ρ_K Dichte des Körpers

F_G Gewichtskraft des Gesamtkörpers

Scheinbare Gewichtskraft F'_G eines Körpers in einem Fluid

$$F'_G = F_G - F_A$$

Schwimmbedingung: $F_G = F_A$

F_G (absolute) Gewichtskraft des Körpers
 F_A Auftriebskraft des Körpers im Fluid

Dichtebestimmung mit Hilfe des Auftriebs in einer Flüssigkeit:

$$\rho_K = \frac{F_G}{F_G - F'_G} \cdot \rho$$

F_G Gewichtskraft des Körpers
 F'_G scheinbare Gewichtskraft des Körpers in der Flüssigkeit der Dichte ρ

2.1.6 Luftdruck und Gasdruck

Barometrische Höhenformel für konstante Temperatur

$$p_2 = p_1 \cdot e^{-\frac{\rho_1 g}{p_1} (h_2 - h_1)}; \quad h_2 = h_1 + \frac{p_1}{\rho_1 g} \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

Speziell $\vartheta = 0^\circ\text{C}$: $h_2 - h_1 = 18,4 \text{ km} \cdot \lg \frac{p_1}{p_2}$

Gesetz von Boyle-Mariotte

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (\text{Temperatur konstant})$$

p_1 bzw. p_2 atmosphärischer Luftdruck in der Höhe h_1 , bzw. h_2

ρ_1 Luftdichte in der Höhe h_1

g Fallbeschleunigung

ϑ Celsius-Temperatur

V_1 bzw. V_2 Volumen des Gases beim Druck p_1 bzw. p_2

2.2 Stationäre Strömungen inkompressibler Fluide

2.2.1 Grundgrößen

Volumenstrom (Volumendurchfluß) $\dot{V}(Q)$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = v A = \text{konstant}$$

Einheit: $1 \text{ m}^3/\text{s}$

dV Volumen, das in der Zeit dt senkrecht durch die Querschnittsfläche A fließt
 v Geschwindigkeit des Fluids

Massenstrom (Massendurchfluß) \dot{m}

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \varrho \dot{V} = \text{konstant}$$

Einheit: 1 kg/s

dm Masse, die in der Zeit dt mit der Geschwindigkeit v senkrecht durch die Querschnittsfläche A fließt
 ϱ Dichte des Fluids

Dynamischer Druck (Geschwindigkeitsdruck, Staudruck) p_d

$$p_d = \frac{1}{2} \varrho v^2$$

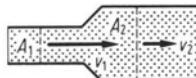
ϱ Dichte, v Strömungsgeschwindigkeit

2.2.2 Ideale Fluide

Kontinuitätsgleichung

$$\dot{V} = v A = \text{konstant}$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$



\dot{V} Volumenstrom, v Geschwindigkeit

A Querschnittsfläche

v_1 bzw. v_2 Strömungsgeschwindigkeit in der Querschnittsfläche A_1 bzw. A_2

Bernoulli'sche Gleichung

$$p_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 + h_1 g = p_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + h_2 g$$

p_1 bzw. p_2 statischer Druck, v_1 bzw. v_2 Strömungsgeschwindigkeit

h_1 bzw. h_2 Ortshöhe an der 1. bzw. 2. Meßstelle im Stromfaden

$$\frac{p_1}{\varrho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\varrho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2$$

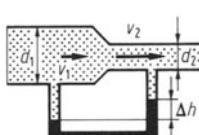
Speziell horizontale Strömung: $h_1 = h_2$:

$$p + \frac{1}{2} \varrho v^2 = p_{\text{ges}} = \text{konstant}$$

p_{ges} Gesamtdruck, p statischer Druck
 v Strömungsgeschwindigkeit an der Meßstelle

ϱ Flüssigkeitsdichte

Venturi-Rohr: $\Delta p = \Delta p_d = \varrho_{\text{fl}} g \Delta h$



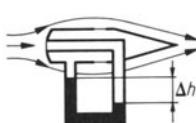
ϱ bzw. ϱ_{fl} Dichte des Fluids bzw. der Manometerflüssigkeit

g Fallbeschleunigung

A_1, A_2 Querschnittsflächen der Rohre mit den Durchmessern d_1, d_2

Prandtl-Rohr: $p_d = \varrho_{\text{fl}} g \Delta h$

$$v = \sqrt{\frac{2p_d}{\varrho}}$$



p_d dynamischer Druck

2.2.3 Reale Fluide

1. Laminare Strömung ($v < v_{\text{krit}}$)

v_{krit} siehe S. 34

Reibungskraft F_R zwischen zwei Fluidschichten

η dynamische Viskosität
 dv/dy Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Berührungsfläche A

$$F_R = \eta A \frac{dv}{dy}$$

Dynamische Viskosität η (Tab. 13 u. 14)

Einheit: $1 \text{ Pa s} = 1 \frac{\text{N s}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$
 $1 \text{ Poise} = 0,1 \text{ Pa s}$

Speziell ideales Gas: siehe Seite 61.

Fluidität φ

$$\varphi = \frac{1}{\eta}$$

Einheit: $1 \frac{\text{m s}}{\text{kg}}$

Kinematische Viskosität v

Einheit: $1 \text{ m}^2/\text{s} (= 10^4 \text{ Stokes St})$

$$v = \frac{\eta}{\varrho}$$

ϱ Fluiddichte, η dynamische Viskosität

Grenzschichtdicke D

$$D = \sqrt{\frac{2 \eta l}{\varrho v}} = \sqrt{\frac{2 v l}{v}}$$

v Geschwindigkeit eines Körpers der Länge l in einer Flüssigkeit der dynamischen Viskosität η bzw. der kinematischen Viskosität v und der Dichte ϱ

Volumenstrom \dot{V} bei einer Rohrströmung

$$\dot{V} = \frac{r^4 \pi \Delta p}{8 \eta l} \quad (\text{Gesetz von Hagen-Poiseuille})$$

r Rohrrinnenradius
 Δp Druckunterschied über die Länge l
 η dynamische Viskosität

Bernoulli'sche Gleichung

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{1}{2} \varrho v_1^2 = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{1}{2} \varrho v_2^2 + \Delta p_R$$

p_1 bzw. p_2 statischer Druck
 v_1 bzw. v_2 Strömungsgeschwindigkeit
 h_1 bzw. h_2 Orts Höhe an der 1. bzw. 2. Meßstelle im Stromfaden
 Δp_R Druckverlust zwischen den Meßstellen durch Reibung

Strömungswiderstandskraft \vec{F}_W auf einen Körper

$$\vec{F}_W = -c \vec{v}$$

\vec{v} Geschwindigkeit des Körpers im Fluid
 c Reibungskoeffizient

Reibungskraft F_R auf ein Rohr

$$F_R = 8 \pi \eta l \bar{v}; \quad \bar{v} = \frac{\dot{V}}{A}$$

η dynamische Viskosität, l Rohrlänge
 \bar{v} mittlere Strömungsgeschwindigkeit

Reibungskraft F_R auf eine Kugel

$$F_R = 6 \pi \eta r v \quad (\text{Gesetz von Stokes})$$

r Kugelradius, v Kugelgeschwindigkeit

Korrektur für die Bewegung einer Kugel in einem Rohr:

$$F_R = 6 \pi \eta r v \left(1 + 2,1 \frac{r}{R} \right)$$

R Rohrradius ($R > r$)

2. Turbulente Strömung ($v > v_{\text{krit}}$)

Reynolds-Zahl Re

$$Re = \frac{v}{\nu} d$$

Laminare Strömung: $Re < Re_{\text{krit}}$

Turbulente Strömung: $Re > Re_{\text{krit}}$

Speziell Rohrströmung bei Kreisquerschnitt:

$$Re_{\text{krit}} \approx 1160; \quad v_{\text{krit}} = Re_{\text{krit}} \frac{v}{d}$$

v_{krit} kritische Geschwindigkeit

Einheit: 1

v Relativgeschwindigkeit eines Körpers zu einem Fluid
 ν kinematische Viskosität

d charakteristische Abmessung
 Re_{krit} kritische Reynolds-Zahl

v_{krit} kritische Geschwindigkeit
 d Innendurchmesser des Rohres

Ähnlichkeitsgesetz für Strömungen

bei geom. ähnlichen räumlichen Abmessungen und mit

$$v_1/v_1 = v_2/v_2$$

$$Re_1 = Re_2$$

Re_1 bzw. Re_2 Reynolds-Zahlen der 1. bzw. 2. Strömung

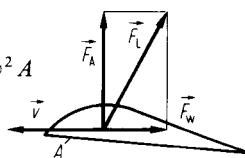
Bernoulli'sche Gleichung siehe S. 33

Strömungswiderstandskraft \vec{F}_W auf einen Körper

$$F_W = c_W \frac{1}{2} \rho v^2 A_o; \quad \vec{F}_W \parallel \vec{v}$$

Luftkraft \vec{F}_L auf einen Tragflügel

$$\vec{F}_L = \vec{F}_W + \vec{F}_A; \quad F_W = c_W \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad F_A = c_A \frac{1}{2} \rho v^2 A$$



A_o wirksame Stirnfläche senkrecht zur Relativgeschwindigkeit v zwischen Körper und Fluid
 ρ Dichte des Fluids
 c_W Widerstandsbeiwert (Tab. 15)

A größte Projektionsfläche des Tragflügels
 v Relativgeschwindigkeit zwischen Tragflügel und Luft
 \vec{F}_A dynamische Auftriebskraft senkrecht zu \vec{v}
 c_A Auftriebsbeiwert, ρ Luftdichte
 c_W Widerstandsbeiwert

$$\text{Gleitzahl } \epsilon: \quad \epsilon = F_W/F_A = c_W/c_A$$

$$\text{Gleitwinkel } \gamma: \quad \gamma = \arctan \epsilon$$

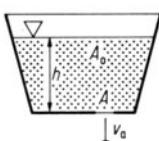
2.2.4 Ausfluß aus Gefäßen

Offenes Gefäß mit konstanter Spiegelhöhe

und Bodenöffnung bzw. kleiner Seitenöffnung

Ausflußgeschwindigkeit v_a :

$$v_a = \varphi \sqrt{2gh} \quad (A: A_o \leq 0,1)$$



A_o Flüssigkeitsspiegelfläche

A Querschnittsfläche der Austrittsöffnung

φ Geschwindigkeitszahl, g Fallbeschleunigung

h Höhe des Flüssigkeitsspiegels über der Ausflußöffnung

Speziell Wasser und dünne Wand:

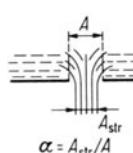
$$\text{scharfkantige Öffnung: } \varphi \approx 0,97$$

$$\text{gerundete Öffnung: } \varphi \approx 0,99$$

Volumenstrom \dot{V} :

$$\dot{V} = v_a A_{\text{str}} = \alpha A \varphi \sqrt{2gh}$$

$$\dot{V} = \mu A \sqrt{2gh}$$



A_{str} Strahlquerschnitt

α Einschnürzahl

$\mu = \alpha \varphi$ Ausflußzahl

Speziell Wasser: scharfkantige kreisförmige Öffnung: $\mu \approx 0,6$

abgerundete Düse: $\mu \approx 1,0$

3 Mechanische Schwingungen und Wellen. Akustik

3.1 Längs- und Drehschwingungen

3.1.1 Grundgrößen

Rückstellende Kraft $F_{r,x}$ bei Längsschwingungen

$$F_{r,x} = -Dx$$

D Richtgröße (Einheit: 1 N/m, S. 9)
 x Elongation (Auslenkung aus der Ruhelage)

Rückstellendes Moment $M_{r,z}$ bei Drehschwingungen

$$M_{r,z} = -D^* \varphi^*$$

D^* Winkelrichtgröße (Einheit: 1 N m, S. 9)
 φ^* Winkelelongation (entspricht der Winkelkoordinate bei der Drehbewegung S. 13)

Frequenz f und Kreisfrequenz ω

$$f = \frac{n}{t}; \quad f = \frac{1}{T}$$

Einheit: $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Hertz Hz}$

n Anzahl der Schwingungen in der Zeit t
 T Schwingungsdauer

$$\omega = 2\pi f; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Schwingungsdauer (Periodendauer) T

Einheit: 1 s

$$T = \frac{1}{f}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

f Frequenz, ω Kreisfrequenz

Schwingungsenergie W_S bei Längsschwingungen

Einheit: 1 J

$$W_S = \frac{1}{2} D x^2 + \frac{1}{2} m v_x^2$$

D Richtgröße, x Elongation, m Masse
 v_x Geschwindigkeit

Schwingungsenergie W_S bei Drehschwingungen

Einheit: 1 J

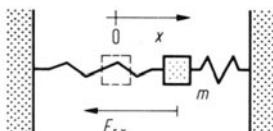
$$W_S = \frac{1}{2} D^* \varphi^*{}^2 + \frac{1}{2} J \omega_z^*{}^2$$

D^* Winkelrichtgröße, φ^* Winkelelongation
 J Trägheitsmoment, ω_z^* Winkelgeschwindigkeit

3.1.2 Freie Längsschwingungen ohne Dämpfung

Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + Dx = 0$$



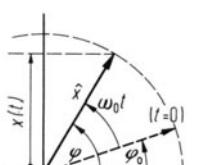
x Elongation, D Richtgröße (S. 9)
 m Masse des Schwingers

Elongation (Auslenkung) $x(t)$

$$x(t) = \hat{x} \sin \varphi = \hat{x} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

\hat{x} (Elongations-)Amplitude (maximale Auslenkung)
 $\varphi(t)$ Phase (Phasenwinkel), φ_0 Nullphasenwinkel
 ω_0 Kennkreisfrequenz

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \varphi_0$$



D Richtgröße
 m Masse des Schwingers

Kennkreisfrequenz ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Geschwindigkeit $v_x(t)$ **Einheit:** 1 m/s

$$v_x(t) = \dot{x} = \hat{v}_x \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \hat{v}_x \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\hat{v}_x = \hat{x} \omega_0$$

\hat{x} Amplitude, ω_0 Kennkreisfrequenz
 φ_0 Nullphasenwinkel, \hat{v}_x Geschwindigkeitsamplitude

Beschleunigung $a_x(t)$ **Einheit:** 1 m/s²

$$a_x(t) = \ddot{x} = \hat{a}_x \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi) = -\hat{a}_x \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\hat{a}_x = \hat{x} \omega_0^2$$

v_x Geschwindigkeit, x Elongation
 ω_0 Kennkreisfrequenz, φ_0 Nullphasenwinkel
 \hat{a}_x Beschleunigungsamplitude, \hat{x} Amplitude

Schwingungsenergie W_S

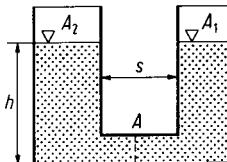
$$W_S = W_{\text{pot}} + W_{\text{trans}} = \text{konstant}$$

$$W_S = \frac{1}{2} D \hat{x}^2 = \frac{1}{2} m \hat{v}_x^2 = \frac{1}{2} m \hat{x}^2 \omega_0^2$$

W_{pot} bzw. W_{trans} potentielle bzw. kinetische Energie des Schwingers
 D Richtgröße, \hat{x} Amplitude, m Masse
 \hat{v}_x Geschwindigkeitsamplitude

Flüssigkeitsschwingungen in kommunizierenden Gefäßen**Schwingungsdauer T_0 :**

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{h + \frac{A_1/A}{1 + A_1/A_2} \cdot s}$$



A, A_1, A_2 Querschnittsflächen
 g Fallbeschleunigung

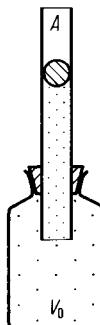
Speziell $A_1 = A_2 = A$ (U-Rohr):

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}; \quad l = 2h + s$$

l Länge der gesamten Flüssigkeitssäule

Gasschwingungen (kleine Amplitude)**Schwingungsdauer T_0 :**

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m V_0}{\kappa p_0 A^2}}$$



V_0 bzw. p_0 Volumen bzw. Druck des idealen Gases bei der Ruhelage des Verschlusses
 m Masse des schwingenden Verschlusses
 κ Isentropenexponent des Gases (Tab. 25)
 A Querschnittsfläche des Rohres

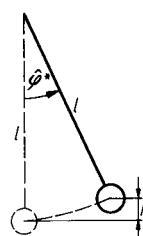
Fadenpendel (mathematisches Pendel)

$\hat{\phi}^* < 5^\circ$:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\sin \hat{\phi}^* \approx \hat{\phi}^*$$

l Fadenlänge, g Fallbeschleunigung
 $\hat{\phi}^*$ Schwingungsamplitude



h Höhe im Umkehrpunkt

Geschwindigkeit im tiefsten Punkt:

$$v = \sqrt{2gh}$$

$\hat{\phi}^* > 5^\circ$:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\hat{\phi}^*}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\hat{\phi}^*}{2}\right) + \dots \right]$$

3.1.3 Freie Längsschwingungen mit konstanter Dämpfung

Dämpfungskraft $F_{d,x}$

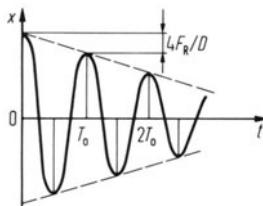
$$F_{d,x} = -\operatorname{sgn}(\dot{x}) F_R; \quad F_R = \text{konstant}$$

Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + Dx + \operatorname{sgn}(\dot{x}) F_R = 0$$

Kennkreisfrequenz ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$



F_R Betrag der Reibungskraft
 $\operatorname{sgn}(\dot{x})$ Vorzeichen von \dot{x}

m Masse des Schwingers
 D Richtgröße (S. 9)

m Masse des Schwingers
 D Richtgröße (S. 9)

Elongation $x(t)$

Anfangsbedingungen: $t = 0; x(0) = \hat{x}_0; v(0) = 0$

$$x(t) = \frac{F_R}{D} + \left(\hat{x}_0 - \frac{F_R}{D} \right) \cos \omega_0 t \quad \text{für } 0 \leq t \leq T_0/2$$

$$x(t) = -\frac{F_R}{D} + \left(\hat{x}_0 - \frac{3F_R}{D} \right) \cos \omega_0 t \quad \text{für } T_0/2 \leq t \leq T_0$$

F_R Reibungskraft, D Richtgröße
 \hat{x}_0 Anfangsauslenkung (Anfangsamplitude)
 ω_0 Kennkreisfrequenz

T_0 Schwingungsdauer

Stillstand im Bereich $|x| < F_R/D$

Amplitudenabnahme pro Schwingung

$$\hat{x}_n - \hat{x}_{n+1} = 4 \frac{F_R}{D}; \quad (\hat{x}_{n+1} > F_R/D)$$

\hat{x}_n und \hat{x}_{n+1} sind zwei aufeinanderfolgender Amplituden im Zeitabstand T_0
 D Richtgröße

3.1.4 Freie Längsschwingungen mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung

Dämpfungskonstante b

Einheit: $1 \text{ N s/m} = 1 \text{ kg/s}$

$$b = 2m\delta = \frac{2m\omega_0\varLambda}{\sqrt{4\pi^2 + \varLambda^2}} = 2\sqrt{mD}\vartheta$$

m Masse des Schwingers, δ Abklingkoeffizient
 ω_0 Kennkreisfrequenz, \varLambda log. Dekrement
 ϑ Dämpfungsgrad, D Richtgröße

Dämpfungskraft $F_{d,x}$

$$F_{d,x} = -b\dot{x} = -bv_x$$

b Dämpfungskonstante (S. 33: Reibungskoeffizient c)
 x Elongation, v_x Momentangeschwindigkeit

Differentialgleichung

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + Dx = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

D Richtgröße, m Masse des Schwingers
 b Dämpfungskonstante, δ Abklingkoeffizient
 ω_0 Kennkreisfrequenz

Abklingkoeffizient δ

Einheit: 1 s^{-1}

$$\delta = \frac{b}{2m} = \frac{\omega_0 \varLambda}{\sqrt{4\pi^2 + \varLambda^2}} = \omega_0 \vartheta$$

b Dämpfungskonstante, m Masse des Schwingers
 ω_0 Kennkreisfrequenz, \varLambda log. Dekrement
 ϑ Dämpfungsgrad

Dämpfungsgrad ϑ

$$\vartheta = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mD}} = \frac{\varLambda}{\sqrt{4\pi^2 + \varLambda^2}}$$

δ Abklingkoeffizient, ω_0 Kennkreisfrequenz
 m Masse des Schwingers, D Richtgröße
 \varLambda logarithmisches Dekrement

Kennkreisfrequenz ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Einheit: 1 s^{-1} D Richtgröße, m Masse des Schwingers**Periodische Fälle:** $0 < \delta < \omega_0$ oder $0 < \vartheta < 1$ Elongation: $x(t) = \hat{x}_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_0)$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 2\pi f_d; \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2}$$

 δ Abklingkoeffizient, ϑ Dämpfungsgrad
 ω_d Eigenkreisfrequenz, ω_0 Kennkreisfrequenz
 φ_0 Nullphasenwinkel, \hat{x}_0 Amplitude für $\delta = 0$ Logarithmisches Dekrement A : $A = \delta T_d$ **Einheit:** 1Dämpfungsverhältnis k :**Einheit:** 1

$$k = \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+1}} = \sqrt[n]{\frac{\hat{x}_i}{\hat{x}_{i+n}}}; \quad k = e^{\delta T_d}$$

 \hat{x}_i, \hat{x}_{i+1} aufeinanderfolgende Amplituden
 \hat{x}_{i+n} Amplitude n Perioden nach \hat{x}_i b Dämpfungskonstante, m Masse des Schwingers
 D Richtgröße, δ Abklingkoeffizient
 ω_0 Kennkreisfrequenz, ϑ Dämpfungsgrad**Aperiodischer Grenzfall:** $\delta = \omega_0$ oder $\vartheta = 1$ Elongation: $x(t) = x_0 e^{-\delta t} (1 + At)$ δ Abklingkoeffizient, ω_0 Kennkreisfrequenz
 ϑ Dämpfungsgrad, x_0 Anfangselongation
 A Integrationskonstante**Aperiodische Fälle (Kriechfälle):** $\delta > \omega_0$ oder $\vartheta > 1$ Elongation: $x(t) = \hat{x}_0 e^{-\delta t} \sinh(\omega'_d t + \varphi_0)$ δ Abklingkoeffizient, ω_0 Kennkreisfrequenz
 ϑ Dämpfungsgrad, \hat{x}_0 Amplitude für $\delta = 0$
 φ_0 Integrationskonstante**3.1.5 Erzwungene Längsschwingungen mit geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung****Anregende Kraft F_x**

$$F_x(t) = \hat{F}_x \sin \omega t$$

Speziell Anregung über eine Feder:

 F_x Kraftkoordinate in Schwingungsrichtung
 \hat{F}_x Kraftamplitude
 ω Anregungskreisfrequenz

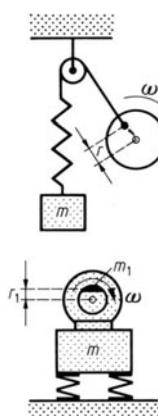
$$\hat{F}_x = Dr = mr\omega_0^2 = \text{konstant}$$

 D Richtgröße, ω_0 Kennkreisfrequenz
 m Masse des Schwingers
 r Amplitude des oberen Federendes

Speziell Fliehkrafterregung:

 r_1 Abstand der Unwuchtmasse m_1 von der Drehachse
 m Schwingermasse

$$\hat{F}_x(\omega) = ms\omega^2; \quad s = \frac{m_1}{m} r_1$$

**Differentialgleichung** $m \ddot{x} + b \dot{x} + Dx = F_x$; $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_x}{m}$ m Masse des Schwingers, D Richtgröße (S. 9)
 δ Abklingkoeffizient (S. 37)
 ω_0 Kennkreisfrequenz
 b Dämpfungskonstante (S. 37)**Elongation $x(t)$ im stationären Zustand** \dot{x} Amplitude, ω Anregungskreisfrequenz
 ψ Phasenverschiebungswinkel zwischen Anregungskraft F_x und Elongation x

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t - \psi)$$

Phasenverschiebungswinkel ψ zwischen Anregungskraft F_x und Elongation x :

$$\tan \psi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{2\vartheta\lambda}{1 - \lambda^2}; \quad \lambda = \frac{\omega}{\omega_0}; \quad 0 \leq \psi \leq \pi$$

Amplitude $\hat{x}(\omega)$

$$\begin{aligned}\hat{x}(\omega) &= \frac{\hat{F}_x}{\sqrt{(D - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \\ &= \frac{\hat{F}_x}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}\end{aligned}$$

Speziell Elongationsresonanz: \hat{x} maximal

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\hat{x}_{\text{max}} = \frac{\hat{F}_x}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}; \quad \psi_{\text{res}} < \pi/2$$

Speziell Anregung über Feder:

$$\frac{\hat{x}}{r} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\vartheta\lambda)^2}}; \quad \frac{\hat{x}_{\text{max}}}{r} = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1 - \vartheta^2}}$$

δ Abklingkoeffizient
 ω Anregungskreisfrequenz
 ω_0 Kennkreisfrequenz
 ϑ Dämpfungsgrad (S. 37)

\hat{F}_x Anregungskraftamplitude, D Richtgröße
 m Masse des Schwingers, b Dämpfungskonstante
 ω Anregungskreisfrequenz, ω_0 Kennkreisfrequenz
 ϑ Abklingkoeffizient

Speziell Fliehkräfterregung

$$\frac{\hat{x}}{s} = \frac{\lambda^2}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\vartheta\lambda)^2}}; \quad \frac{\hat{x}_{\text{max}}}{s} = \frac{1}{2\vartheta\sqrt{1 - \vartheta^2}}$$

 ϑ Dämpfungsgrad**Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}_x(\omega)$**

ω Anregungskreisfrequenz
 \hat{x} Amplitude

$$\hat{v}_x(\omega) = \omega \hat{x}(\omega)$$

Speziell Geschwindigkeitsresonanz: \hat{v}_x maximal

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0; \quad \hat{v}_{x,\text{max}} = \frac{\hat{F}_x}{2\delta m}; \quad \psi_{\text{res}} = \pi/2$$

 \hat{F}_x Anregungskraftamplitude m Masse des Schwingers δ Abklingkoeffizient

ψ_{res} Phasenverschiebungswinkel (zwischen Anregungskraft F_x und Elongation x) bei Resonanz

Relative Halbwertsbreite für die Geschwindigkeitsresonanzkurve:

ω_0 Kennkreisfrequenz
 ϑ Dämpfungsgrad, η_0 Verlustfaktor
 Q_0 Gütefaktor (Resonanzschärfe)

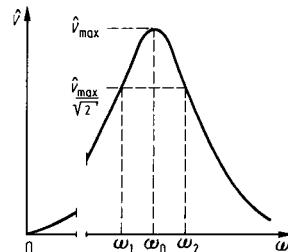
$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{f_2 - f_1}{f_0} = \frac{2\delta}{\omega_0} = 2\vartheta = \eta_0$$

$$Q_0 = \frac{1}{\eta_0}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} - \delta$$

$$\omega_2 = \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} + \delta$$

$$\hat{v}_{x,1} = \hat{v}_{x,2} = \hat{v}_{x,\text{max}}/\sqrt{2}$$



Beschleunigungsamplitude $\hat{a}_x(\omega)$

$$\hat{a}_x(\omega) = \omega^2 \hat{x}(\omega) = \omega \hat{v}_x(\omega)$$

\hat{x} Amplitude, ω Anregungskreisfrequenz
 \hat{v}_x Geschwindigkeitsamplitude

Speziell Beschleunigungsresonanz: \hat{a}_x maximal

$$\omega_{\text{res}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}}$$

$$\hat{a}_{x,\max} = \frac{\hat{F}_x \omega_0^2}{2\delta m \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}; \quad \psi_{\text{res}} > \pi/2$$

ω_{res} Resonanzkreisfrequenz
 \hat{F}_x Anregungskraftamplitude
 m Masse des Schwingers
 δ Abklingkoeffizient
 ψ_{res} Phasenverschiebungswinkel bei Resonanz

3.1.6 Überlagerung paralleler Längsschwingungen

x_1 bzw. x_2 Auslenkung, \hat{x}_1 bzw. \hat{x}_2 Amplitude, φ_1 bzw. φ_2 Phasenwinkel,
 $\varphi_{0,1}$ bzw. $\varphi_{0,2}$ Nullphasenwinkel der 1. bzw. 2. Schwingung

Überlagerung von Schwingungen gleicher Kreisfrequenz ω

\hat{x} Amplitude der resultierenden Schwingung

1. Schwingung: $x_1(t) = \hat{x}_1 \sin \varphi_1 = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_{0,1})$

2. Schwingung: $x_2(t) = \hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_{0,2})$

Resultierende Schwingung: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x(t) = \hat{x} \sin \varphi = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1})}$$

$$\tan \varphi_0 = \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_{0,1} + \hat{x}_2 \sin \varphi_{0,2}}{\hat{x}_1 \cos \varphi_{0,1} + \hat{x}_2 \cos \varphi_{0,2}}$$

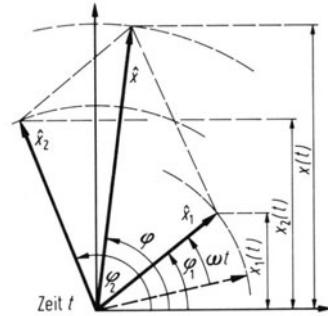
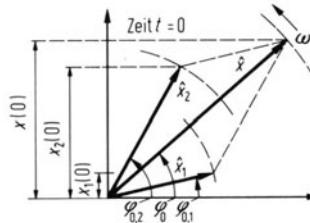
Speziell $\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1} = k 2\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$$

Speziell $\varphi_{0,2} - \varphi_{0,1} = (2k+1)\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\hat{x} = |\hat{x}_1 - \hat{x}_2|$$

Speziell Auslöschung, wenn $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$.



Überlagerung von Schwingungen gleicher Amplitude $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}$

1. Schwingung: $x_1(t) = \hat{x} \sin \varphi_1 = \hat{x} \sin(\omega_1 t + \varphi_{0,1})$ ω_1 bzw. ω_2 Kreisfrequenz der 1. bzw. 2. Schwingung

2. Schwingung: $x_2(t) = \hat{x} \sin \varphi_2 = \hat{x} \sin(\omega_2 t + \varphi_{0,2})$

Resultierende Schwingung: $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x(t) = 2\hat{x} \cos \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_{0,1} - \varphi_{0,2})] \sin \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2)t + (\varphi_{0,1} + \varphi_{0,2})]$$

Speziell $\omega_1 \approx \omega_2$: Schwebungen

$$\text{Trägerkreisfrequenz: } \omega_t = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2)$$

$$\text{Schwebungskreisfrequenz: } \omega_s = |\omega_1 - \omega_2|$$

3.1.7 Überlagerung zueinander senkrechter Längsschwingungen

Schwingung in der x -Richtung: $x(t) = \hat{x} \sin \varphi_x = \hat{x} \sin(\omega_x t + \varphi_{0,x})$

Schwingung in der y -Richtung: $y(t) = \hat{y} \sin \varphi_y = \hat{y} \sin(\omega_y t + \varphi_{0,y})$

Resultierende Schwingung: **Lissajous-Schwingung**

Speziell $\omega_x = \omega_y = \omega$; $\varphi_{0,x} = \varphi_{0,y}$: **Lineare Schwingung**

$$\frac{y}{x} = \frac{\hat{y}}{\hat{x}}$$

Speziell $\omega_x = \omega_y = \omega$; $\varphi_{0,y} - \varphi_{0,x} = \varphi$: **Elliptische Schwingung**

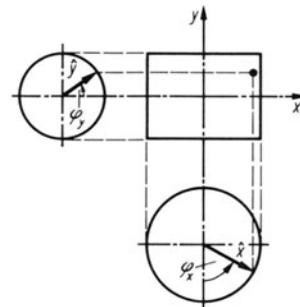
$$x^2 \hat{y}^2 + y^2 \hat{x}^2 - 2xy\hat{x}\hat{y} \cos \varphi - \hat{x}^2 \hat{y}^2 \sin^2 \varphi = 0$$

Winkel ψ der Hauptachse gegen x -Achse:

$$\tan 2\psi = \frac{2\hat{x}\hat{y} \cos \varphi}{\hat{y}^2 - \hat{x}^2}$$

Speziell $\hat{x} = \hat{y}$ und $\varphi = \pm \pi/2$: **Kreisschwingung**

$$x^2 + y^2 = \hat{x}^2$$



3.1.8 Drehschwingungen

Allgemeine Formeln

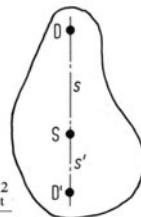
Die Größen der Längsbewegung werden durch die entsprechenden Größen der Drehbewegung ersetzt.

x	v_x	a_x	m	D	F_x	k	b	Linearschwingungen
φ^*	ω_z^*	α_z^*	J	D^*	M_z	k^*	b^*	Drehschwingungen

x Elongation, φ^* Winkelelongation, v_x Geschwindigkeit, ω_z^* Winkelgeschwindigkeit, a_x Beschleunigung, α_z^* Winkelbeschleunigung, m Masse, J Trägheitsmoment, D Richtgröße, D^* Winkelrichtgröße, F_x Kraft, M_z Drehmoment, k Dämpfungsverhältnis, k^* Dämpfungsverhältnis, b Dämpfungskonstante, b^* Dämpfungskonstante (Einheit: 1 N m s)

Torsionspendel

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D^*}}$$



T_0 Schwingungsdauer, D^* Winkelrichtgröße (S. 9)
 J Trägheitsmoment (S. 19)

Physisches Pendel

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg s}}; \quad l = \frac{J}{ms} = \frac{s^2 + r_i^2}{s}$$

$$s = \frac{l}{2} + \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - r_i^2}; \quad s' = \frac{l}{2} - \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - r_i^2}$$

T_0 Schwingungsdauer (für kleine Amplituden)
 J Trägheitsmoment in Bezug auf die Drehachse

m Masse, g Fallbeschleunigung

s Abstand des Schwerpunktes s von der Drehachse
 l reduzierte Pendellänge, r_i Trägheitsradius

s, s' Abstände der beiden Aufhängepunkte von Schwerpunkt mit gleicher Schwingungsdauer (**Reversionspendel**)

Bedingung für Minimum von T_0 : $s = s' = s_{\min}$

$$l_{\min} = 2s_{\min}$$

3.1.9 Gekoppelte ungedämpfte Längsschwingungen

Zwei gekoppelte Schwinger

in symmetrischer Anordnung bei kleinen Auslenkungen

Rückstellende Kraft $F_{r,1}$ auf den Schwinger 1:

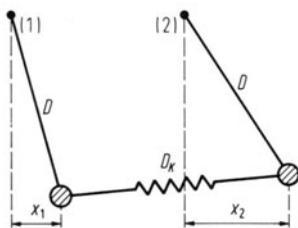
$$F_{r,1} = -Dx_1 + D_K(x_2 - x_1)$$

Rückstellende Kraft $F_{r,2}$ auf den Schwinger 2:

$$F_{r,2} = -Dx_2 - D_K(x_2 - x_1)$$

Speziell Fadenpendel:

$$D = \frac{mg}{l}$$



D Richtgröße der beiden Schwinger

x_1 bzw. x_2 Auslenkung des Schwingers 1 bzw. 2

D_K Richtgröße der Kopplung

m Masse eines Schwingers

g Fallbeschleunigung
 l Fadenlänge

Kopplungsgrad K :

$$K = 2 \frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = 2 \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

W_1, W_2 Schwingungsenergien der Fundamentalschwingungen

ω_1, ω_2 Kreisfrequenzen der Fundamentalschwingungen

Fundamentalschwingungen (kein Energieaustausch):

$$\text{Phasendifferenz } \Delta\phi = 0 \text{ (Gleichakt): } \omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\text{Phasendifferenz } \Delta\phi = \pi \text{ (Gegentakt): } \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2 \frac{D_K}{D}}$$

$$\text{Speziell schwache Kopplung } D_K \ll D: \quad \omega_2 = \omega_0 + \frac{D_K}{m \omega_0}$$

$$\text{Speziell Fadenpendel: } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

3.2 Sinuswellen

3.2.1 Grundgrößen

Frequenz f , Kreisfrequenz ω und Periodendauer T

siehe S. 35

Wellenlänge λ

Einheit: 1 m

Repetenz (Wellenzahl) σ

Einheit: 1 m^{-1}

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

λ Wellenlänge

Kreisrepetenz (Kreiswellenzahl) k

Einheit: 1 m^{-1}

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$$

σ Repetenz

Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) c

Einheit: 1 m/s

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

λ Wellenlänge, f Frequenz

Wellengleichung

Bei Längswellen ist die Auslenkung ξ parallel, bei Querwellen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung x .

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ξ Auslenkung eines Teilchens des Mediums an der Stelle x zur Zeit t
 c Ausbreitungsgeschwindigkeit

Auslenkung $\xi(x, t)$

(zur Zeit $t=0$ bewegt sich das Teilchen am Ort $x=0$ durch die Ruhelage in die positive ξ -Richtung).

$$\xi(x, t) = \hat{\xi} \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \hat{\xi} \sin (\omega t - k x)$$

$$\xi(x, t) = \hat{\xi} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$\hat{\xi}$ Amplitude (Scheitelwert der Auslenkung)
 T Periodendauer
 c Ausbreitungsgeschwindigkeit
 λ Wellenlänge
 ω Kreisfrequenz
 k Kreisrepetenz

Teilchenwechselgeschwindigkeit $\dot{\xi}(x, t)$

$$\dot{\xi}(x, t) = \hat{\xi} \omega \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \hat{\xi} \omega \cos (\omega t - k x)$$

Teilchenwechselbeschleunigung $\ddot{\xi}(x, t)$

$$\ddot{\xi}(x, t) = -\hat{\xi} \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = -\hat{\xi} \omega^2 \sin (\omega t - k x)$$

$\hat{\xi}$ Amplitude (Scheitelwert der Auslenkung)
 ω Kreisfrequenz
 k Kreisrepetenz
 c Ausbreitungsgeschwindigkeit

3.2.2 Überlagerung (Interferenz) zweier Wellen

1. Gleiche Amplituden:

1. Welle: $\xi_1(x, t) = \hat{\xi} \sin (\omega_1 t - k_1 x); \quad k_1 = 2\pi/\lambda_1$
 2. Welle: $\xi_2(x, t) = \hat{\xi} \sin (\omega_2 t - k_2 x); \quad k_2 = 2\pi/\lambda_2$

ξ_1, ξ_2 Elongation der Einzelwellen
 $\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2 = \hat{\xi}$ Amplitude der Einzelwellen
 ω_1, ω_2 Kreisfrequenzen
 k_1, k_2 Kreisrepetenzen
 λ_1, λ_2 Wellenlängen

Überlagerungswelle: $\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t)$

$\xi(x, t)$ Elongation der Überlagerungswelle

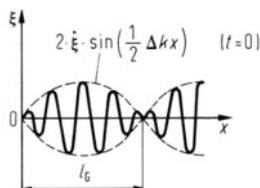
$$\xi(x, t) = 2\hat{\xi} \cos [\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 - k_2)x] \sin [\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x]$$

Speziell $k_1 \approx k_2$ und $\omega_1 \approx \omega_2$; Schwebungswelle

$$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2); \quad \omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta k = k_1 - k_2; \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

$$\xi = 2\hat{\xi} \cos (\frac{1}{2}\Delta\omega t - \frac{1}{2}\Delta k x) \sin (\omega t - k x)$$



Länge l_G einer Wellengruppe: $l_G = 2\pi/\Delta k$

Gruppengeschwindigkeit: Phasengeschwindigkeit:

$$v_G = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

$$c = \frac{\omega}{k}$$

2. Gleiche Frequenzen und Gangunterschied Δx :

1. Welle: $\xi_1(x, t) = \hat{\xi}_1 \sin [\omega t - k x]$

2. Welle: $\xi_2(x, t) = \hat{\xi}_2 \sin [\omega t - k(x + \Delta x)]$

Überlagerungswelle: $\xi(x, t) = \xi_1(x, t) + \xi_2(x, t)$

$$\xi(x, t) = \hat{\xi}^* \sin [\omega t - k(x + \Delta x)]$$

$$\hat{\xi}^* = \sqrt{\hat{\xi}_1^2 + \hat{\xi}_2^2 + 2 \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2 \cos(k \Delta x)}$$

$\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ Amplituden der Einzelwellen

ω Kreisfrequenz der Einzelwellen bzw. der Überlagerungswelle

k Kreisrepetenz der Einzelwellen bzw. der Überlagerungswelle

$\hat{\xi}^*$ Amplitude der Überlagerungswelle

Speziell gleiche Amplituden: $\hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_2 = \hat{\xi}$

$$\hat{\xi}^* = \sqrt{2} \hat{\xi} \sqrt{1 + \cos(k \Delta x)}$$

Maximale Verstärkung: $\Delta x = 2n(\lambda/2)$

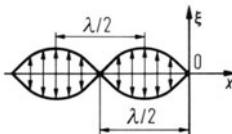
Totale Auslöschung: $\Delta x = (2n+1)(\lambda/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

Speziell stehende Wellen:

a) Reflexion am festen Ende ($\Delta x = -2x$):

$$\xi(x, t) = -2 \hat{\xi} \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$\dot{\xi}(x, t) = 2 \hat{\xi} \omega \sin(kx) \sin(\omega t)$$



x Ort in bezug auf den Nullpunkt im reflektierenden Ende

$\hat{\xi}$ Amplitude der beiden interferierenden Wellen

λ Wellenlänge der beiden interferierenden Wellen

ξ bzw. $\hat{\xi}$ Auslenkung bzw. Teilchenwechselgeschwindigkeit der stehenden Welle

\hat{p} Scheitelwert des Schallwechseldruckes der interferierenden Wellen

$p(x, t)$ Schallwechseldruck der stehenden Welle

k Kreisrepetenz.

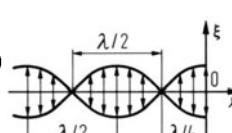
Speziell ebene Schallwellen:

$$p(x, t) = 2 \hat{p} \cos(kx) \cos(\omega t)$$

b) Reflexion am freien Ende ($\Delta x = -2x - \lambda/2$):

$$\xi(x, t) = 2 \hat{\xi} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

$$\dot{\xi}(x, t) = 2 \hat{\xi} \omega \cos(kx) \cos(\omega t)$$



$\hat{\xi}$ Amplitude der beiden interferierenden Wellen

ξ bzw. $\hat{\xi}$ Auslenkung bzw. Teilchenwechselgeschwindigkeit der stehenden Welle

\hat{p} Scheitelwert des Schallwechseldruckes der interferierenden Wellen

$p(x, t)$ Schallwechseldruck der stehenden Welle

k Kreisrepetenz.

Speziell ebene Schallwellen:

$$p(x, t) = 2 \hat{p} \sin(kx) \sin(\omega t)$$

3.2.3 Eigenfrequenzen von begrenzten Medien

Lineares Medium (Seil, Saite, Gassäule)

a) beide Enden sind Bewegungsbäuche bzw. -knoten:

$$f_n = \frac{c}{2l} n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

l Länge des linearen Mediums

c Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im linearen Medium

b) ein Ende ist Bewegungsbäuch, das andere Bewegungsknoten:

$$f_n = \frac{c}{4l} (2n-1); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Quaderförmiges Medium (Quaderraum)

$$f_n^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2 \right]$$

$$n_x + n_y + n_z \geq 1$$

$$n_x = 0, 1, 2, \dots; \quad n_y = 0, 1, 2, \dots; \quad n_z = 0, 1, 2, \dots$$

l_x Länge, l_y Breite, l_z Höhe des Quaderraumes

c Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium des Quaderraumes

3.2.4 Doppler-Effekt

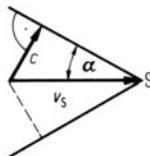
$f_E = f_S \cdot \frac{c + v_E}{c - v_S}$	$f_E = f_S \cdot \frac{c - v_E}{c + v_S}$	$f_E = f_S \cdot \frac{c + v_E}{c + v_S}$	$f_E = f_S \cdot \frac{c - v_E}{c - v_S}$
$v_E = 0$; S nähert sich: $f_E = f_S \cdot \frac{1}{1 - (v_S/c)}$	$v_E = 0$; S entfernt sich: $f_E = f_S \cdot \frac{1}{1 + (v_S/c)}$	$v_S = 0$; E nähert sich: $f_E = f_S \left(1 + \frac{v_E}{c}\right)$	$v_S = 0$; E entfernt sich: $f_E = f_S \left(1 - \frac{v_E}{c}\right)$

f_S abgestrahlte Frequenz des Senders S, f_E gemessene Frequenz beim Empfänger E; v_E Geschwindigkeit des Empfängers und v_S Geschwindigkeit des Senders auf der gleichen Geraden; c Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen.

Mach-Kegel

$$v_S > c: \quad \sin \alpha = \frac{c}{v_S}$$

$$M = \frac{v_S}{c}$$



α halber Öffnungswinkel des Kopfwellenkegels (Mach-Winkel)
 v_S Geschwindigkeit der Schallquelle

M Mach-Zahl

3.3 Ausbreitungsgeschwindigkeit von mechanischen Wellen

Dehnwellen in begrenzten Festkörpern (Längswellen)

$$\text{Stab: } c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (\text{Formel von Newton})$$

$$\text{Platte: } c = \sqrt{\frac{E}{\varrho(1 - \mu^2)}}$$

c Ausbreitungsgeschwindigkeit (Tab. 16)
 E Elastizitätsmodul des Festkörpermaterials (Tab. 7)
 ϱ Dichte (Gleichdichte: Dichte im ungestörten Zustand)
 μ Poissonzahl (Querkontraktionszahl) (Tab. 7)

Dichtewellen in unbegrenzten isotropen Festkörpern (Längswellen)

$$c = \sqrt{\frac{E(1 - \mu)}{\varrho(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} \quad \begin{aligned} E &\text{ Elastizitätsmodul, } \varrho \text{ Dichte (Tab. 6; 26)} \\ \mu &\text{ Poissonzahl} \end{aligned}$$

Schubwellen in unbegrenzten isotropen Festkörpern (Querwellen)

$$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \quad G \text{ Schubmodul (S. 8), } \varrho \text{ Dichte}$$

(die gleiche Formel gilt für Torsionswellen in Stäben mit gleichförmigem Querschnitt)

Biegewellen auf begrenzten Festkörpern (Querwellen)

Stab:

$$c = \sqrt[4]{\frac{B}{m/l}} \cdot \sqrt{\omega}$$

(Phasengeschwindigkeit)

$$B = EI$$

B Biegesteife

m Masse des Stabes, l Länge des Stabes

ω Kreisfrequenz der Wellen

E Elastizitätsmodul des Stabmaterials

I axiales Flächenmoment 2. Grades des Stabquerschnittes (horiz. Achse durch den Flächenschwerpunkt S)

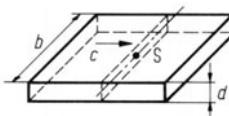
(Phasengeschwindigkeit)

Einheit: 1 N m^2

Platte:

$$c = \sqrt[4]{\frac{B'}{m''}} \cdot \sqrt{\omega}$$

(Phasengeschwindigkeit)



m'' flächenbezogene Masse

ω Kreisfrequenz der Wellen, b Plattenbreite

E Elastizitätsmodul

μ Poissonzahl ($\mu \approx 0,3$)

I axiales Flächenmoment 2. Grades der Querschnittsfläche (Tab. 5)

Einheit: 1 N m

Einheit: 1 kg/m^2

m Masse, A Fläche, ϱ Dichte, d Dicke

B' breitenbezogene Biegesteife

m'' flächenbezogene Plattenmasse

$$m'' = m/A = \varrho d$$

Transversalwellen auf Saiten, Seilen und Membranen (Querwellen)

$$c = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}$$

σ Zugspannung, ϱ Dichte

Druckwellen (Längswellen)

$$\text{Flüssigkeit: } c = \sqrt{K/\varrho}$$

K Kompressionsmodul (S. 29, Tab. 7)

ϱ Dichte

κ Isentropenexponent (S. 57)

p_0 Gasgleichdruck (in Abschn. 4 mit p bezeichnet)

T Temperatur

R_i individuelle Gaskonstante (S. 54)

(Formel von Laplace)

Speziell Luft:

$$c = \left(331,3 + 0,6 \frac{\vartheta}{^\circ\text{C}} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ϑ Lufttemperatur

3.4 Schallfeld in Fluiden

Schalldruck p_{eff} (Effektivwert des Schallwechseldruckes)

Einheit: $1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa}$

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p^2(t) \, dt}$$

$p(t)$ Schallwechseldruck von periodischen Wellen

T Periodendauer

\hat{p} Scheitelwert des Schallwechseldruckes

Speziell Sinuswellen: $p_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \hat{p}$

Schallschnelle $v_{x,\text{eff}}$ (Effektivwert der Schallwechselgeschwindigkeit)

Einheit: 1 m/s

$$v_{x,\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_x^2(t) dt}$$

Speziell Sinuswellen: $v_{x,\text{eff}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \hat{v}_x$

$v_x(t)$ Schallwechselgeschwindigkeit (Teilchenwechselgeschwindigkeit ξ) von periodischen Wellen
 T Periodendauer

Speziell ebene Wellen: $v_{x,\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}}{Z}; \quad Z = \rho c$

\hat{v}_x Scheitelwert der Schallwechselgeschwindigkeit
 p_{eff} Schalldruck, c Ausbreitungsgeschwindigkeit
 ρ Dichte des Mediums

Schallwellenwiderstand (Schallkennimpedanz) Z
für ebene Wellen

Einheit: 1 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$

ρ Dichte des Mediums
 c Ausbreitungsgeschwindigkeit der Schallwellen
 p_{eff} Schalldruck, $v_{x,\text{eff}}$ Schallschnelle

Speziell Luft ($\vartheta = 20^\circ\text{C}$, $p_{\text{atm}} = 980 \text{ hPa}$):

ϑ Lufttemperatur
 p_{atm} atmosphärischer Luftdruck

$$Z_{\text{Luft}} = 400 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$$

Intensität I

Einheit: 1 W/m²

$$I = \frac{\Delta P}{\Delta A}; \quad \Delta P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

ΔP Leistung, die das zur Ausbreitungsrichtung senkrechte Flächenelement ΔA durchsetzt
 ΔW Schallenergie, die in der Zeit Δt das Flächenelement ΔA durchsetzt

Speziell fortschreitende ebene Wellen:

p_{eff} Schalldruck, $v_{x,\text{eff}}$ Schallschnelle
 Z Schallwellenwiderstand

$$I = p_{\text{eff}} v_{x,\text{eff}} = \frac{p_{\text{eff}}^2}{Z} = v_{x,\text{eff}}^2 Z$$

Speziell Sinuswellen:

ρ Dichte des Mediums, ξ Amplitude
 c Schallgeschwindigkeit
 ω Kreisfrequenz der Wellen

$$I = \frac{1}{2} \rho c \xi^2 \omega^2$$

Leistung P eines Senders

Einheit: 1 W = 1 J/s

$$P = \oint_A I dA$$

I Intensität an der Stelle des Flächenelementes dA
 A geschlossene Fläche um den Sender

Energiedichte w

Einheit: 1 J/m³ = 1 N/m²

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

ΔW Schallenergie im Volumen ΔV

Speziell fortschreitende ebene Wellen: $w = I/c$

I Intensität
 c Schallgeschwindigkeit

Schallstrahlungsdruck p_{str}

Einheit: 1 N/m² = 1 Pa

bei vollkommener Absorption: $p_{\text{str}} = w$

w Energiedichte

bei vollkommener Reflexion: $p_{\text{str}} = 2w$

Schallpegel L in Luft

$$L_p = 20 \text{ dB} \cdot \lg \frac{p_{\text{eff}}}{2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}}$$

$$L_I = 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{I}{10^{-12} \text{ W/m}^2} \quad (L_I \approx L_p)$$

$$L_W = 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{P}{10^{-12} \text{ W}}$$

Einheit: 1 Dezibel dB $\equiv 1$ L_p Schalldruckpegel p_{eff} Schalldruck L_I Schallintensitätspegel I Schallintensität $L_W (= L_p)$ Schalleistungspegel P Schalleistung eines Senders**Bewerteter Schallpegel L_A**

$$L_A = L + \Delta L \quad (\Delta L \text{ Tab. 17})$$

Einheit: 1 dB(A) $\equiv 1$ L Schallpegel**Überlagerung von (inkohärenten) Schallwellen**

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{p_1^2, \text{eff} + p_2^2, \text{eff} + \cdots + p_n^2, \text{eff}}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$$

$$L = 10 \text{ dB} \cdot \lg \sum_{i=1}^n g_i$$

Speziell: $I_1 = I_2 = \cdots = I_n = I_e$

$$L = L_e + 10 \text{ dB} \cdot \lg n$$

 $p_{i, \text{eff}}$ bzw. I_i bzw. L_i Schalldruck bzw. Intensität bzw. Schallpegel der i -ten Schallwelle ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) an einer bestimmten Stelle p_{eff} bzw. I bzw. L Gesamtschalldruck bzw. Gesamtintensität bzw. Gesamtschallpegel an dieser Stelle
 $g_i = 10^{0,1 \cdot L_i}$ I_e Einzelintensität, L_e Einzelschallpegel n Zahl der Sender, die an einer Stelle den gleichen Einzelschallpegel L_e verursachen L Gesamtschallpegel an dieser Stelle**Mittelungspegel L_m**

$$L_m = 10 \text{ dB} \cdot \lg \left(\frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot g_i \right)$$

$$T = \sum_{i=1}^n t_i; \quad g_i = 10^{0,1 \cdot L_i}$$

Schallausbreitung im Freien

a) ohne Dämpfung

Ebene Wellen:

$$I_2 = I_1 \quad L_2 = L_1 \quad r_2 > r_1$$

Kreis- und Zylinderwellen:

$$I_2 = \frac{r_1}{r_2} I_1 \quad L_2 = L_1 - 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{r_2}{r_1}$$

Kugelwellen:

$$I_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} I_1 \quad L_2 = L_1 - 20 \text{ dB} \cdot \lg \frac{r_2}{r_1}$$

b) mit Dämpfung

$$I_{2,d} = I_2 e^{-d(r_2 - r_1)} \quad L_{2,d} = L_2 - K(r_2 - r_1)$$

 I_1 bzw. L_1 Intensität bzw. Pegel der Schallwelle im Abstand r_1 vom Zentrum I_2 bzw. L_2 Intensität bzw. Pegel der Schallwelle im Abstand r_2 vom Zentrum (bei Zylinderwellen muß die Senderlänge viel größer sein als Wellenlänge und Abstand; bei Kugelwellen muß die Senderabmessung viel kleiner sein als Wellenlänge und Abstand) d Dissipationskonstante; *Einheit:* 1 m^{-1} K Dämpfungskonstante; *Einheit:* 1 dB/m I_2 bzw. L_2 Intensität bzw. Pegel im Abstand r_2 ohne Dämpfung

3.5 Schallschluckung

Reflexionsgrad ϱ an einer Grenzfläche

$$\varrho = P_r/P_a = I_r/I_a$$

P_a bzw. P_r auftreffende bzw. reflektierte Leistung
 I_a bzw. I_r Intensität der auftreffenden bzw. reflektierten Schallwellen

Speziell ebene Wellen mit dem Einfallswinkel 0° :

$$\varrho = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$$

Z_1, Z_2 Wellenwiderstände der Medien beiderseits der Grenzfläche

Absorptionsgrad (Schluckgrad) α an einer Grenzfläche

(Tab. 18)

$$\alpha = \frac{P_a - P_r}{P_a} = \frac{I_a - I_r}{I_a} = 1 - \varrho$$

ϱ Reflexionsgrad

Äquivalente Absorptionsfläche (Schluckung) A eines Raumes

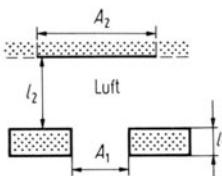
Einheit: 1 m^2

$$A = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \cdots + n_1 A'_1 + n_2 A'_2 + \cdots$$

α_μ Schluckgrad der Fläche S_μ ($\mu = 1, 2, 3, \dots$)
 n_v Anzahl der gleichartigen Objekte mit der Schluckung A_v ($v = 1, 2, 3, \dots$) (Tab. 19)

Eigenfrequenz f_0 eines Helmholtzresonators

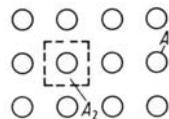
$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A_1/A_2}{l_1^* l_2}}; \quad l_1^* = l_1 + 2\Delta l_1$$



A_1 Fläche der Schalleintrittsöffnung mit der Tiefe l_1
 A_2 Rückfläche des federnden Luftraums mit der Tiefe l_2
 c Schallgeschwindigkeit in Luft
 Δl_1 Mündungskorrektur

Speziell zylindrische Öffnung im quadratischen Muster:

$$\Delta l_1 = 0,8 r_1 \left[1 - 1,47 \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} + 0,47 \left(\sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \right)^3 \right]$$



Speziell eine zylindrische Öffnung:

$$\Delta l_1 = \frac{1}{4}\pi r_1; \quad f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A_1}{l_1^* V_2}}$$

r_1 Öffnungsradius
 V_2 Volumen des federnden Luftraumes

Strömungswiderstand (spez. Schallimpedanz) R einer porösen Schicht:

Einheit: $1 \frac{\text{N s}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}}$

Δp Druckdifferenz beiderseits der Schicht
 v Strömungsgeschwindigkeit vor und hinter der Schicht, wenn durch die Schicht ein gleichförmiger Luftstrom fließt
 d Schichtdicke

Ξ längenspezifischer Strömungswiderstand

Einheit: $1 \frac{\text{N s}}{\text{m}^4} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}}$

3.6 Raumakustik

Nachhallzeit T eines Raumes (Tab. 20)

$$T = 0,163 \frac{s}{m} \frac{V}{A} \quad (\text{Formel von Sabine})$$

A äquivalente Absorptionsfläche des Raumes (Raumschluckung)
 V Raumvolumen

Hallradius r_H in einem Raum

$$r_H = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

A Raumschluckung

Stationäre Intensität I des reflektierten Schalls

$$I = 4 \frac{P}{A}$$

P Leistung der Schallquelle
 A Raumschluckung

Schallpegelminderung $L_1 - L_2$ in einem Raum

$$L_1 - L_2 = 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{T_1}{T_2}$$

T_1 Nachhallzeit bei der Raumschluckung A_1 ,
 T_2 erniedrigte Nachhallzeit durch die erhöhte Raumschluckung A_2 ,
 L_1 bzw. L_2 stationärer Schallpegel bei gleicher Senderleistung vor bzw. nach der Erhöhung der Raumschluckung

$$L_1 - L_2 = 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{A_2}{A_1}$$

3.7 Bauakustik

Transmissionsgrad τ eines Trennbauteils

$$\tau = \frac{P_\tau}{P_a} = \frac{I_\tau}{I_a}$$

P_a bzw. P_τ auffallende bzw. durchgelassene Leistung
 I_a bzw. I_τ Intensität der auffallenden bzw. durchgelassenen Schallwellen

Luftschalldämmaß R

$$R = 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{1}{\tau}$$

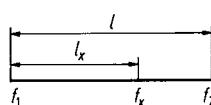
τ Transmissionsgrad, L_s Schallpegel im Senderaum
 L_E Schallpegel im Empfangsraum
 S Fläche des Trennbauteils
 A Schluckung des Empfangsraumes

$$R = L_s - L_E + 10 \text{ dB} \cdot \lg \frac{S}{A}$$

Logarithmisch geteilte Frequenzskala

Zwischenwerte:

$$l_x = l \frac{\lg(f_x/f_1)}{\lg(f_2/f_1)}$$



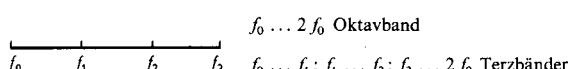
f_1, f_2 Randfrequenzen, f_x Zwischenfrequenz
 l Skalenabstand zwischen f_1 und f_2
 l_x Skalenabstand zwischen f_1 und f_x

Mittenfrequenz f_m : $f_m = \sqrt{f_1 f_2}$

Terzrandfrequenzen:

$$f_1 = f_0 \sqrt[3]{2} = 1,26 f_0$$

$$f_2 = f_0 (\sqrt[3]{2})^2 = 1,59 f_0$$



Theoretisches Massengesetz für biegeweiche Trennwände

Schalleinfall unter dem Einfallswinkel 0° :

$$R_{\text{theor}}(0^\circ) = 20 \text{ dB} \cdot \lg \frac{\omega m''}{2Z}$$

R_{theor} theoretisches Luftschaaldämmmaß
 m'' flächenbezogene Masse der Wand
 Z Schallwellenwiderstand von Luft
 ω Kreisfrequenz der Schallwellen

Schalleinfall unter dem Einfallswinkel 45° :

$$R_{\text{theor}}(45^\circ) = R_{\text{theor}}(0^\circ) - 3 \text{ dB}$$

(entspricht ungefähr allseitig gleichmäßigen Schalleinfall)

Grenzfrequenz f_g einer Platte

$$f_g = \frac{c_L^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m''}{B'}} = \frac{60 \text{ Hz}}{d/\text{m}} \sqrt{\frac{\varrho}{E}} \sqrt{\frac{\text{MN/m}^2}{\text{kg/m}^3}}$$

c_L Schallgeschwindigkeit in Luft
 m'' flächenbezogene Masse der Platte (S. 46)
 B' breitenbezogene Biegsteife (S. 46)
 d Plattendicke, ϱ Dichte, E Elastizitätsmodul der Platte

Eigenfrequenz f_0 eines zweischaligen Bauteils

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{s' \left(\frac{1}{m''_1} + \frac{1}{m''_2} \right)}$$

m''_1, m''_2 flächenbezogene Masse der einzelnen Platten

s' dynamische Steifigkeit der Zwischenschicht

$$s' = E/a$$

Einheit: 1 MN/m^3

Speziell lose eingefüllter Dämmstoff: $s' = \frac{p_{\text{atm}}}{\sigma a}$

E dynamischer Elastizitätsmodul
 a Schichtdicke

p_{atm} atmosphärischer Luftdruck
 σ akustisch wirksame Porosität

Speziell Luft: $s'_L = \frac{\kappa_L p_{\text{atm}}}{a}; \quad \kappa_L = 1,4$

κ_L Isentropenexponent der Luft

Speziell:	$m'' = m''_1 = m''_2$	$m'' = m''_1 \ll m''_2$
	$f_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{2}} \sqrt{\frac{s'}{m''}}$	$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{s'}{m''}}$
federnder Dämmstoff mit der dynamischen Steifigkeit s'	$f_0 = 225 \text{ Hz} \sqrt{\frac{s'}{m''} \cdot \sqrt{\frac{\text{kg/m}^2}{\text{MN/m}^3}}}$	$f_0 = 160 \text{ Hz} \sqrt{\frac{s'}{m''} \cdot \sqrt{\frac{\text{kg/m}^2}{\text{MN/m}^3}}}$
lose eingefüllter Dämmstoff ($\sigma = 0,9$)	$f_0 = \frac{75 \text{ Hz}}{\sqrt{m'' a}} \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \text{ m}}$	$f_0 = \frac{53 \text{ Hz}}{\sqrt{m'' a}} \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \text{ m}}$
Luftschicht (seitlich entkoppelt)	$f_0 = \frac{85 \text{ Hz}}{\sqrt{m'' a}} \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \text{ m}}$	$f_0 = \frac{60 \text{ Hz}}{\sqrt{m'' a}} \sqrt{\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \text{ m}}$

Pegelminderung ΔL durch eine zweischalige Konstruktion

$$\Delta L = 40 \text{ dB} \cdot \lg(f/f_0) \quad (f > f_0)$$

f_0 Eigenfrequenz der Konstruktion
 f Schallsfrequenz

Norm-Trittschallpegel L_n

$$L_n = L_T + 10 \text{ dB} \cdot \lg(A/A_0); \quad A_0 = 10 \text{ m}^2$$

L_T Trittschallpegel im Empfangsraum
 A Schluckung des Empfangsraumes
 A_0 Bezugs-Schallschluckung

4 Kalorik

4.1 Lineare Änderung der Ausdehnung, der Spannung und des Druckes mit der Temperatur

4.1.1 Temperatur

Kelvin-Temperatur¹⁾

(thermodynamische oder absolute Temperatur) $T \geq 0$

Einheit: 1 Kelvin K

Celsius-Temperatur ϑ

Einheit: 1 Grad Celsius °C

$$\vartheta = \left(\frac{T - T_n}{K} \right) ^\circ C; \quad T = \left(\frac{\vartheta}{^\circ C} + \frac{T_n}{K} \right) K$$

$T_n = 273,15 \text{ K}$ Normtemperatur

Fahrenheit-Temperatur ϑ_F

Einheit: 1 Grad Fahrenheit °F

$$\vartheta_F = \left(32 + \frac{9}{5} \frac{\vartheta}{^\circ C} \right) ^\circ F; \quad \vartheta = \frac{160}{9} \left(\frac{\vartheta_F}{32^\circ F} - 1 \right) ^\circ C$$

Temperaturdifferenz ΔT

Einheit: 1 K

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \Delta \vartheta$$

4.1.2 Isobare Ausdehnung (Spannung bzw. Druck konstant)

Längenänderung Δl fester Körper

$$\Delta l = l_1 \propto \Delta T; \quad \Delta l = l_2 - l_1$$

l_1 bzw. l_2 Länge bei der Temperatur T_1 bzw.
 $T_2 = T_1 + \Delta T$

α mittlerer (thermischer) Längenausdehnungskoeffizient im Temperaturintervall ΔT (Tab. 21)

Einheit: 1 K⁻¹

Flächenänderung ΔA fester Körper

$$\Delta A = A_1 2\alpha \Delta T; \quad \Delta A = A_2 - A_1$$

A_1 bzw. A_2 Fläche bei der Temperatur T_1 bzw.
 $T_2 = T_1 + \Delta T$

Volumenänderung ΔV

$$\Delta V = V_1 \gamma \Delta T; \quad \Delta V = V_2 - V_1$$

V_1 bzw. V_2 Volumen bei der Temperatur T_1 bzw.
 $T_2 = T_1 + \Delta T$

γ mittlerer (thermischer) Volumenausdehnungskoeffizient im Temperaturintervall ΔT (Tab. 22)

Einheit: 1 K⁻¹

$$\gamma = 3\alpha$$

α mittlerer Längenausdehnungskoeffizient

Relativer Volumenausdehnungskoeffizient
eines Fluides in einem Gefäß

Einheit: 1 K⁻¹

$$\gamma_{\text{rel}} = \gamma_{\text{Fl}} - 3\alpha_G$$

γ_{Fl} mittlerer Volumenausdehnungskoeffizient des Fluides

α_G mittlerer Längenausdehnungskoeffizient des Gefäß-

materiales

Dichteänderung $\Delta \varrho$

Einheit: 1 kg m⁻³

$$\Delta \varrho = -\varrho_1 \gamma \Delta T; \quad \Delta \varrho = \varrho_2 - \varrho_1$$

ϱ_1 bzw. ϱ_2 Dichte bei der Temperatur T_1 bzw.
 $T_2 = T_1 + \Delta T$

¹⁾ Basisgröße

4.1.3 Isotherme Ausdehnung: S. 29

4.1.4 Isochore Zustandsänderung (Volumen konstant)

Wärmespannungsänderung $\Delta\sigma$

in einem stabförmigen festen Körper

$$\Delta\sigma = \alpha E \Delta T; \quad \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$$

Einheit: $1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ Pa}$

σ_1 bzw. σ_2 Spannung bei der Temperatur T_1 bzw.

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

E Elastizitätsmodul (Tab. 7)

Druckänderung Δp

$$\Delta p = \gamma K \Delta T; \quad \Delta p = p_2 - p_1$$

Einheit: 1 Pa

p_1 bzw. p_2 Druck bei der Temperatur T_1 bzw.

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

K Kompressionsmodul (Tab. 7; 11)

4.2 Thermische Zustandsgleichung von Gasen

(Zustandsänderungen siehe auch 4.5)

Normzustand

Normdruck: $p_n = 1013,25 \text{ hPa}$

Normtemperatur: $T_n = 273,15 \text{ K}$; $\vartheta_n = 0^\circ \text{C}$

Normvolumen: $V_n = v V_{m,n}$

v Stoffmenge

Speziell ideales Gas: $V_{m,n} = 22,414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$

$V_{m,n}$ molares Normvolumen

4.2.1 Molare und spezifische Größen

Relative Molekül-(Teilchen-)Masse \bar{M}_r

$$\bar{M}_r = \frac{m_M}{u}; \quad u = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Einheit: 1

m_M Masse eines Durchschnittsmoleküls(-teilchens)

u atomare Masseneinheit

Stoffmenge v ¹⁾

$$v = \frac{m}{\bar{M}_r} \frac{1}{kg} \text{ kmol}$$

Einheit: 1 Kilomol kmol

$$1 \text{ mol} = 10^{-3} \text{ kmol}$$

m Masse des Stoffes mit der Stoffmenge v

\bar{M}_r relative Molekül-(Teilchen-)Masse

Speziell $m = \bar{M}_r \text{ kg}$: $v = 1 \text{ kmol}$

Masse m

$$m = N m_M$$

Einheit: 1 kg

N Anzahl der Moleküle (Teilchen)

Molares Volumen V_m

$$V_m = \frac{V}{v}$$

Einheit: $1 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$

V Volumen der Stoffmenge v

Spezifisches Volumen v

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho}$$

Einheit: $1 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$

V bzw. m bzw. ρ Volumen bzw. Masse bzw. Dichte des Stoffes

¹⁾ Basisgröße

Molare Masse m_m

$$m_m = \frac{m}{v} = \bar{M}_r \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}; \quad m_m = \varrho V_m$$

Einheit: 1 kg kmol⁻¹

m Masse der Stoffmenge v
 \bar{M}_r bzw. ϱ relative Molekülmasse bzw. Dichte des Stoffes
 V_m molares Volumen

Avogadrokonstante N_A

$$N_A = \frac{N}{v} = \frac{1}{u} \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

$$N_A = 6,02214 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$$

Einheit: 1 kmol⁻¹

N Anzahl der Moleküle (Teilchen) in der Stoffmenge v
 u atomare Masseneinheit

Molekül-(Teilchen-)zahldichte n

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{V_m}$$

$$n = \frac{\varrho}{m_M} = \frac{\varrho N_A}{\bar{M}_r} \frac{\text{kmol}}{\text{kg}}$$

Einheit: 1 m⁻³

V bzw. ϱ Volumen bzw. Dichte des Stoffes
 m_M Masse eines Moleküls
 \bar{M}_r relative Molekülmasse
 V_m molares Volumen

Speziell Molekülzahldichte des idealen Gases im Normzustand: $n_n = 2,6868 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$

Universelle (molare) Gaskonstante R

$$R = \frac{p_n V_{m,n}}{T_n} = 8314,5 \text{ J K}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$$

Einheit: 1 J K⁻¹ kmol⁻¹

p_n bzw. T_n bzw. $V_{m,n}$ Druck bzw. Temperatur bzw. molares Volumen im Normzustand

Individuelle Gaskonstante R_i eines Stoffes i

$$R_i = \frac{p_n v_n}{T_n} = \frac{8314,5}{\bar{M}_r} \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1} \quad (\text{Tab. 25})$$

Einheit: 1 J K⁻¹ kg⁻¹

$$R_i = \frac{R}{m_m}; \quad v_n = \frac{1}{\varrho_n}$$

\bar{M}_r relative Molekülmasse des Stoffes
 v_n bzw. ϱ_n spezifisches Volumen bzw. Dichte im Normzustand

m_m molare Masse des Stoffes

(ϱ_n siehe Tab. 6c)

Boltzmannkonstante k

$$k = \frac{R}{N_A} = m_M R_i$$

Einheit: 1 J K⁻¹

N_A Avogadrokonstante
 m_M Masse eines Durchschnittsmoleküls des Stoffes
 R bzw. R_i universelle bzw. individuelle Gaskonstante

$$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$$

4.2.2 Ideales Gas**Thermische Zustandsgleichung**

$$pV = vRT = mR_iT$$

$$pv = R_i T$$

$$p = \varrho R_i T = nkT$$

$$p = p_n \frac{T}{T_n} \frac{\varrho}{\varrho_n}; \quad \varrho = \varrho_n \frac{p}{p_n} \frac{T_n}{T}$$

R bzw. R_i universelle bzw. individuelle Gaskonstante
 p bzw. V bzw. T Druck bzw. Volumen bzw. Temperatur
 ϱ bzw. v bzw. m Dichte bzw. Stoffmenge bzw. Masse
 v bzw. n spezifisches Volumen bzw. Teilchenzahldichte
 k Boltzmannkonstante

p_n bzw. T_n Normdruck bzw. -temperatur
 ϱ_n Normdichte des Stoffes (Tab. 6c)

Mischung idealer Gase

$$v = \sum_{i=1}^l v_i; \quad m = \sum_{i=1}^l m_i$$

$$\varrho_i = \frac{m_i}{V}; \quad p_i = \frac{p v_i}{v}$$

$$p = \sum_{i=1}^l p_i \quad (\text{Gesetz von Dalton})$$

$$R_j = \frac{R v}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^l m_i R_i = \frac{1}{\varrho} \sum_{i=1}^l \varrho_i R_i$$

v_i bzw. m_i Stoffmenge bzw. Masse der Komponente i
 v bzw. m Stoffmenge bzw. Masse des Gemisches
 ϱ_i bzw. p_i Partialdichte bzw. -druck der Komponente i
 V bzw. p Gesamtvolumen bzw. -druck des Gemisches
 $/$ Anzahl der Stoffkomponenten des Gemisches

R_i bzw. R_j individuelle Gaskonstante der Komponente i
 bzw. des Gemisches

Zustandsgleichung

der Komponente i : $p_i V = v_i RT = m_i R_i T$
 des Gemisches: $p V = v RT = m R_j T$

T Kelvintemperatur des Gemisches
 R universelle Gaskonstante

4.2.3 Reales Gas**Van der Waalssche Zustandsgleichung**

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R_i T; \quad v = \frac{1}{\varrho}$$

$$a \approx 3 \frac{p_K}{\varrho_K^2}$$

$$b \approx \frac{1}{3 \varrho_K}$$

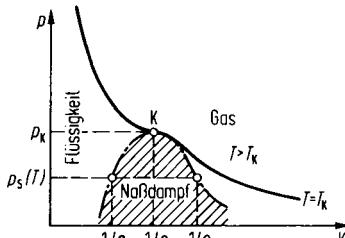
Kritischer Zustand
 (Tab. 24)

$$p = p_K; \quad \varrho = \varrho_K$$

$$T = T_K; \quad p_K \approx \frac{3}{8} \varrho_K R_i T_K$$

a, b van der Waalssche Konstanten
 p bzw. v bzw. T Druck bzw. spezifisches Volumen bzw.
 Temperatur des Stoffes

ϱ_F bzw. ϱ_D Dichte der flüssigen bzw. dampfförmigen
 Phase
 $p_s(T)$ Sättigungsdruck (Tab. 14; 23; 31)



p_K bzw. ϱ_K bzw. T_K Druck bzw. Dichte bzw. Temperatur
 am kritischen Punkt K
 R_i individuelle Gaskonstante des Stoffes

4.3 Hauptsätze der Thermodynamik

Vorzeichenfestlegung: Dem System zugeführte Arbeiten werden negativ gezählt, Wärmemengen positiv.

(Reversible) Volumenänderungsarbeit ΔW

$$\Delta W = \int_{V_1}^{V_2} p dV; \quad dW = p dV$$

Einheit: 1 J

dV Volumenänderung beim Druck p des Systems
 V_1 Anfangsvolumen, V_2 Endvolumen

(Reversible) technische Arbeit ΔW_t

$$\Delta W_t = - \int_{p_1}^{p_2} V dp = p_1 V_1 - p_2 V_2 + \Delta W; \quad dW_t = -V dp$$

Einheit: 1 J

dp Druckänderung des Systems beim Volumen V
 p_1 Anfangsdruck, p_2 Enddruck

Wärmeenergie (Wärmemenge, Wärme) ΔQ

Einheit: 1 J

1 kcal = 4,1868 kJ

Innere Energie U

Änderung: $\Delta U = U_2 - U_1$

Enthalpie H

$$H = U + pV; \quad dH = dU + p dV + V dp$$

Speziell reversible Zustandsänderung:

$$\Delta H = \Delta U + \Delta W - \Delta W_t$$

Entropie S

Änderung:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}; \quad dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$$

Speziell Temperaturänderung eines Stoffes ohne Phasenübergang:

$$\Delta S = m \int_{T_1}^{T_2} \frac{c dT}{T}$$

$$\Delta S = k \ln \frac{w_2}{w_1} \quad (\text{Boltzmannsche Beziehung})$$

Erster Hauptsatz

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W; \quad dU = dQ - dW$$

$$\Delta H = \Delta Q - \Delta W_t; \quad dH = dQ - dW_t$$

Speziell reversible Prozesse:

$$dW = p dV; \quad dW_t = -V dp$$

Einheit: 1 J

U_1 bzw. U_2 innere Energie des Systems am Anfang bzw. am Ende

Einheit: 1 J

p bzw. V Druck bzw. Volumen des Systems

ΔW Volumenänderungsarbeit

ΔW_t technische Arbeit

Einheit: 1 J K⁻¹

dQ_{rev} bei der Temperatur T reversibel übertragene Wärmeenergie
 S_1 bzw. S_2 Entropie des Systems am Anfang bzw. am Ende

c bzw. m spezifische Wärmekapazität bzw. Masse des Stoffes

k Boltzmannkonstante

w_1 bzw. w_2 Wahrscheinlichkeit des Anfangs- bzw. Endzustandes

Nur dU , dH , dV , dp sind vollständige Differentiale der Zustandsgrößen U , H , V und p , nicht dQ , dW und dW_t .

p bzw. V Druck bzw. Volumen des Systems

Zweiter Hauptsatz

Es ist keine periodisch arbeitende Maschine möglich, die nichts weiter bewirkt, als einem Wärmebehälter Wärme zu entziehen und in Arbeit umzuwandeln.

Speziell abgeschlossenes System:

Irreversibler Prozeß: $S_2 > S_1$

S_1 bzw. S_2 Entropie des Systems vor bzw. nach dem Prozeß

Reversibler Prozeß: $S_2 = S_1$

Einheit: 1

Wirkungsgrad η und Leistungszahl ε thermischer Maschinen**Wärmekraftmaschine (WK)**

ΔW insgesamt von WK abgegebene bzw. von KM oder WP aufgenommene Arbeit

ΔQ_1 bei der höheren Temperatur T_1 von WK aufgenommene bzw. von WP abgegebene Wärme

ΔQ_2 bei der tieferen Temperatur T_2 von KM aufgenommene Wärme

Wärmepumpe (WP)

$$\varepsilon_w = \left| \frac{\Delta Q_1}{\Delta W} \right| \leq \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Kältemaschine (KM)

$$\varepsilon_K = \left| \frac{\Delta Q_2}{\Delta W} \right| \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

Die Gleichheitszeichen in den Formeln gelten für reversible Kreisprozesse.

4.4 Kalorimetrie

Spezifische Wärmekapazität $c(T)$ eines Stoffes

$$c(T) = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$$

Speziell c = konstant: $\Delta Q = mc\Delta T$ (Tab. 25)

Wärmekapazität $C(T)$ eines Systems

$$C(T) = \frac{dQ}{dT}$$

Speziell homogener Körper: $C = mc$

$$\text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

m Stoffmasse, ΔQ (bzw. dQ) Wärmeenergie, die bei der Temperaturänderung ΔT (bzw. dT) benötigt oder frei wird (ohne Änderung des Aggregatzustandes und ohne chemische Umwandlung)

$$\text{Einheit: } 1 \text{ J/K}$$

dQ zu- bzw. abgeführt Wärmeenergie bei der Temperatur T

m Masse, c spezifische Wärmekapazität

Mischungsregel

In einem abgeschlossenen System ist die von den Körpern höherer Temperatur abgegebene Wärmeenergie so groß wie die von den Körpern niedriger Temperatur aufgenommene Wärmeenergie.

Speziell: Ein Stoff (m_1, c_1, T_1) wird mit einem anderen Stoff (m_2, c_2, T_2) in einem Kalorimeter der Wärmekapazität C und der Temperatur T_M gemischt (ohne Änderung des Aggregatzustandes und ohne Wärmetönung, etwa durch chemische Reaktionen).

Mischungsgleichung

$$m_1 c_1 (T_1 - T_M) = (m_2 c_2 + C) (T_M - T_2)$$

T_M Mischungstemperatur

Molare Wärmekapazität (Molwärme) c_m

$$c_m = c \frac{m}{v} = c m_m$$

$$\text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}}$$

m Masse, v Stoffmenge, m_m molare Masse

Speziell fester oder flüssiger Stoff aus einem chemischen Element bei hinreichend hoher Temperatur

$$c_m \approx 3R \approx 2,5 \cdot 10^4 \frac{\text{J}}{\text{kmol K}} \quad (\text{Regel von Dulong-Petit})$$

R universelle Gaskonstante

Isentropenexponent κ eines idealen Gases

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V} = \frac{c_{m,p}}{c_{m,V}} \quad (\text{Tab. 25})$$

$$\text{Einheit: } 1$$

c_p bzw. $c_{m,p}$ spezifische bzw. molare Wärmekapazität des Gases bei konstantem Druck

c_V bzw. $c_{m,V}$ spezifische bzw. molare Wärmekapazität des Gases bei konstantem Volumen

$$c_p > c_V; \quad c_{m,p} > c_{m,V}$$

R_i bzw. R individuelle bzw. universelle Gaskonstante
 f Anzahl der Freiheitsgrade der Energiespeicherung pro Molekül (s. 4.6)

$$c_p - c_V = R_i; \quad c_{m,p} - c_{m,V} = R$$

$$c_V = f R_i / 2; \quad c_{m,V} = f R / 2; \quad \kappa = 1 + 2/f$$

Polytropenexponent n eines idealen Gases

$$n = \frac{c_p - \Delta Q / (m \Delta T)}{c_V - \Delta Q / (m \Delta T)} = \frac{\Delta H - \Delta Q}{\Delta U - \Delta Q}; \quad 1 < n < \kappa$$

$$\text{Einheit: } 1$$

ΔQ Wärmemenge, die das Gas mit der Masse m bei der Temperaturänderung ΔT mit seiner Umgebung austauscht

ΔH bzw. ΔU Änderung der Enthalpie bzw. inneren Energie bei der Temperaturänderung ΔT

Spezifische Schmelzwärme (Erstarrungswärme) q_s

$$q_s = \frac{\Delta Q_s}{m} \quad (\text{Tab. 25})$$

Spezifische Verdampfungswärme (Kondensationswärme) q_b

$$q_b = \frac{\Delta Q_b}{m} \quad (\text{Tab. 25})$$

$$q_b = T_b \left(\frac{dp_s}{dT} \right)_{T_b} \left(\frac{1}{\varrho_D} - \frac{1}{\varrho_f} \right)$$

(Gesetz von Clausius-Clapeyron)

Einheit: 1 J/kg

ΔQ_s ist die zum Schmelzen der Masse m bei konstantem Druck und der Schmelztemperatur benötigte (bzw. beim Erstarren freierwerdende) Wärmeenergie

Einheit: 1 J/kg

ΔQ_b ist die zum Verdampfen einer Flüssigkeit der Masse m bei konstantem Druck und bei der Siedetemperatur T_b benötigte (bzw. beim Kondensieren des Dampfes freiwerdende) Wärmeenergie

ϱ_f bzw. ϱ_D Dichte der Flüssigkeit bzw. des Dampfes eines Stoffes der Masse m ; dp_s Änderung des Sättigungsdampfdruckes bei der Temperaturänderung dT an der Stelle der Siedetemperatur T_b

4.5 Zustandsgrößen und Zustandsänderungen idealer Gase

Die spezifischen Wärmekapazitäten c_p bzw. c_V bei konstantem Druck bzw. konstantem Volumen werden als temperaturunabhängig behandelt. Es wird reversible Prozeßführung vorausgesetzt.

Innere Energie U

$$U(T) = m c_V (T - T_0) + U_0$$

Einheit: 1 J

U_0 innere Energie bei der Temperatur T_0
 m Masse des Gases

Enthalpie H

$$H(T) = m c_p (T - T_0) + H_0$$

Einheit: 1 J

H_0 Enthalpie bei der Temperatur T_0

Entropie S

$$S(T, p) = m \left(c_p \ln \frac{T}{T_0} - R_i \ln \frac{p}{p_0} \right) + S_0$$

S_0 Entropie bei der Temperatur T_0 , dem Druck p_0 und dem Volumen V_0

$$S(T, V) = m \left(c_V \ln \frac{T}{T_0} + R_i \ln \frac{V}{V_0} \right) + S_0$$

R_i individuelle Gaskonstante
 c_p bzw. c_V spezifische Wärmekapazität des Gases bei konstantem Druck bzw. Volumen

$$S(p, V) = m \left(c_V \ln \frac{p}{p_0} + c_p \ln \frac{V}{V_0} \right) + S_0$$

Weitere Bezeichnungen: Anfangszustand 1; Endzustand 2; umgesetzte Wärmeenergie ΔQ ; Volumenänderungsarbeit ΔW ; Isentropenexponent $\kappa = c_p/c_V$; Polytopenexponent n .

Isochore Zustandsänderung: $V_1 = V_2 = V$ **Gesetz von Gay-Lussac**

Energie-Austausch

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

$$\Delta Q = m c_V (T_2 - T_1); \quad \Delta W = 0; \quad \Delta U = \Delta Q$$

Isobare Zustandsänderung: $p_1 = p_2 = p$ **Gesetz von Gay-Lussac**

Energie-Austausch

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$\Delta Q = m c_p (T_2 - T_1); \quad \Delta H = \Delta Q$$

$$\Delta W = p (V_2 - V_1) = m R_i (T_2 - T_1)$$

Isotherme Zustandsänderung: $T_1 = T_2 = T$

Gesetz von Boyle-Mariotte Energie-Austausch

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad \Delta Q = m R_i T \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad \Delta W = \Delta Q; \quad \Delta U = \Delta H = 0$$

Isentrope Zustandsänderung: $\Delta Q = 0$

Gleichungen von Poisson Energie-Austausch

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\kappa &= p_2 V_2^\kappa & \Delta W = m c_V (T_1 - T_2); & \Delta U = -\Delta W \\ T_1 V_1^{\kappa-1} &= T_2 V_2^{\kappa-1} & \Delta W = \frac{1}{\kappa-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2); & \Delta S = 0 \\ T_1^\kappa p_1^{1-\kappa} &= T_2^\kappa p_2^{1-\kappa} \end{aligned}$$

Polytrope Zustandsänderung: $0 < |\Delta Q| < |\Delta W|$

Zustandsgleichungen Energie-Austausch

$$\begin{aligned} p_1 V_1^n &= p_2 V_2^n & \Delta Q = \frac{\kappa - n}{n-1} m c_V (T_1 - T_2) \\ T_1 V_1^{n-1} &= T_2 V_2^{n-1} & \Delta W = \frac{m R_i}{n-1} (T_1 - T_2) = \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2) \\ T_1^n p_1^{1-n} &= T_2^n p_2^{1-n} & \Delta S = \frac{\kappa - n}{n-1} m c_V \ln \frac{T_1}{T_2} \end{aligned}$$

4.6 Ungeordnete (thermische) Bewegung von Molekülen

Masse m_M eines Durchschnittsmoleküls

$$m_M = \bar{M}_r u = \frac{m}{N}$$

$$m_M = \frac{m_m}{N_A} = \frac{m}{v N_A}$$

Einheit: 1 kg

\bar{M}_r relative Molekülmasse
 N Anzahl der Moleküle
 m bzw. v Masse bzw. Stoffmenge
 m_m molare Masse des Stoffes
 u, N_A : Tab. 1

Relative Molekülmasse \bar{M}_r

$$\bar{M}_r = z_1 \bar{A}_{r1} + z_2 \bar{A}_{r2} + \dots$$

Einheit: 1

z_i Anzahl der Atome mit der mittleren relativen Atommasse \bar{A}_{ri} im Molekül (PSE: A_{ri})

Mittlere thermische Energie \bar{W}_F pro Freiheitsgrad der Energiespeicherung

$$\bar{W}_F = \frac{1}{2} k T$$

Einheit: 1 J

$1 \text{ eV} = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Boltzmannkonstante $k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
 T absolute Temperatur

Gesamte mittlere thermische Energie \bar{W}_M eines Moleküls

$$\bar{W}_M = f \bar{W}_F = f \frac{k T}{2}$$

Einheit: 1 J

f Anzahl der Freiheitsgrade der Energiespeicherung pro Molekül

Mittlere Translationsenergie $\bar{W}_{\text{trans}, M}$ eines Moleküls

$$\bar{W}_{\text{trans}, M} = \frac{1}{2} m_M \bar{v}^2 = \frac{3}{2} k T = 3 \bar{W}_F$$

Einheit: 1 J

m_M bzw. \bar{v}^2 Masse bzw. mittleres Geschwindigkeitsquadrat des Moleküls
 T absolute Temperatur

Gesamte Translationsenergie W_{trans} eines idealen Gases

$$W_{\text{trans}} = N \bar{W}_{\text{trans}, M} = N \frac{3}{2} kT$$

$$W_{\text{trans}} = \frac{3}{2} pV = \frac{3}{2} v RT$$

Einheit: 1 J

$\bar{W}_{\text{trans}, M}$ mittlere Translationsenergie eines Moleküls
 N Anzahl der Moleküle, v Stoffmenge
 k bzw. R Boltzmannkonstante bzw. universelle Gaskonstante (S. 54)
 p bzw. V Druck bzw. Volumen des Gases

Anzahl f der Freiheitsgrade der Energiespeicherung eines freien Moleküls

starr, einatomig: $f = 3$

starr, linear mehratomig $f = 5$

starr, nicht linear mehratomig: $f = 6$

nicht starr: $f = 3z$

z Anzahl der Atome im Molekül

Boltzmannfaktor

$$\Delta N/N \approx e^{-W_s/kT}$$

W_s Schwellenenergie

N Gesamtzahl der Moleküle

ΔN Anzahl der Moleküle mit einer Energie $W \geq W_s$ aufgrund der Wärmebewegung

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung $g(v)$ eines idealen Gases

$$g(v) = \frac{dN}{N dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_w^3} e^{-(v/v_w)^2}$$

Einheit: 1 s m^{-1}

dN/N Bruchteil der Moleküle mit Geschwindigkeiten im Intervall von v bis $v + dv$

Wahrscheinlichste (häufigste) Geschwindigkeit v_w

$$v_w = \sqrt{\frac{2kT}{m_M}} = \sqrt{2R_i T}$$

Einheit: 1 m s^{-1}

m_M Masse eines Durchschnittsmoleküls
 R_i individuelle Gaskonstante

Mittlere Geschwindigkeit \bar{v}

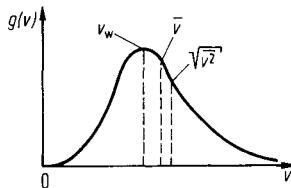
$$\bar{v} = \int_0^\infty g(v) v dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_w \approx 1,128 v_w$$

Einheit: 1 m s^{-1}

Mittleres Geschwindigkeitsquadrat \bar{v}^2

$$\bar{v}^2 = \int_0^\infty g(v) v^2 dv = 3 R_i T = \frac{3 kT}{m_M}$$

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_w \approx 1,225 v_w$$



Mittlere Stoßhäufigkeit \bar{z} eines Gasmoleküls

$$\bar{z} = Z/t$$

$$\bar{z} = \pi \sqrt{2} d^2 n \bar{v}$$

Einheit: 1 s^{-1}

Z Anzahl der Stöße während der Zeit t
 d bzw. \bar{v} mittlerer Durchmesser bzw. mittlere Geschwindigkeit
 n Molekülzahldichte

Mittlere freie Weglänge \bar{l} eines Gasmoleküls

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\pi \sqrt{2} d^2 n}$$

Einheit: 1 m

Viskosität $\eta(T)$ eines idealen Gases

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \varrho \bar{l} = \frac{\bar{v} m_M}{3\pi \sqrt{2} d^2}$$

$$\eta = \eta_0 \sqrt{T/T_0}$$

Einheit: 1 Pa s

ϱ Dichte des Gases
 m_M Masse eines Moleküls
 η_0 Viskosität bei der Temperatur T_0

Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$ eines idealen Gases

$$\lambda = \frac{1}{4} n \bar{v} \bar{l} f k = \frac{\bar{v} f k}{4\pi \sqrt{2} d^2}$$

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{T/T_0}$$

Einheit: 1 W m⁻¹ K⁻¹

n Molekülzahldichte, k Boltzmannkonstante
 f Anzahl der Freiheitsgrade der Energiespeicherung pro Molekül
 d mittlerer Durchmesser der Moleküle
 λ_0 Wärmeleitfähigkeit bei der Temperatur T_0

Stationäre Diffusion (1. Gesetz von Fick)

$$N = D A \left| \frac{dn}{dx} \right| t$$

N Anzahl der in der Zeit t durch die Fläche A transportierten Teilchen
 $|dn/dx|$ Gefälle der Teilchenzahldichte bei konstanter Temperatur

Einheit: 1 m² s⁻¹

b_D Beweglichkeit der Diffusion
 k bzw. T Boltzmannkonstante bzw. absolute Temperatur
 v_D Driftgeschwindigkeit der Moleküle
 F_R Reibungskraft auf ein Molekül
 ϱ bzw. p Gasdichte bzw. -druck
 R_i individuelle Gaskonstante
 d mittlerer Durchmesser der Moleküle

Diffusionskoeffizient D

$$D = b_D k T; \quad b_D = \frac{v_D}{F_R}$$

Speziell ideales Gas:

$$D = \eta/\varrho = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{l} = \frac{2 \sqrt{R_i T}}{3\pi^{3/2} d^2 p} k T$$

Einheit: 1 Pa

v Stoffmenge des gelösten Stoffes im Volumen V_L des Lösungsmittels
 T absolute Temperatur
 R universelle Gaskonstante

Osmotischer Druck p_{osm}

$$p_{\text{osm}} = \frac{v R T}{V_L}$$

4.7 Stationärer Wärmetransport**Wärmestrom \dot{Q}** *Einheit:* 1 J/s = 1 W

\dot{Q} ist die in der Zeit t transportierte Wärmeenergie

Einheit: 1 W/m²

A ist die senkrecht vom Wärmestrom \dot{Q} durchsetzte Fläche

Speziell Wärmeleitung: $q = \lambda |\Delta T/\Delta x|$

ΔT Temperaturgefälle auf der Strecke Δx

λ Wärmeleitfähigkeit (Tab. 25; 26)

Einheit: 1 W/(m K)

Speziell Wärmeübergang zwischen einem Fluid und einem festen Körper:

T_F Fluidtemperatur, T_O Temperatur an der Grenzfläche

Einheit: 1 W/(m² K)

$$q = \alpha |T_F - T_O|$$

α Wärmeübergangskoeffizient

Ebene Wände

Wärmestromdichte q :

$$q = k \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = T_i - T_a = \vartheta_i - \vartheta_a$$

Wärmedurchgangswiderstand $1/k$:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{\alpha_a}$$

Wärmedurchlaßwiderstand $1/\Lambda$:
(Wärmedämmwert)

$$\frac{1}{\Lambda} = \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{s_n}{\lambda_n}$$

Temperaturen an oder in einer mehrschichtigen ebenen Wand:

$$\vartheta_{0,i} = \vartheta_i - q \frac{1}{\alpha_i}$$

$$\vartheta_{1,2} = \vartheta_{0,i} - q \frac{s_1}{\lambda_1}$$

$$\vartheta_{2,3} = \vartheta_{1,2} - q \frac{s_2}{\lambda_2}$$

.....

$$\vartheta_{0,a} = \vartheta_{n-1,n} - q \frac{s_n}{\lambda_n}$$

$$\vartheta_a = \vartheta_{0,a} - q \frac{1}{\alpha_a} \quad (\text{Probe})$$

k Wärmedurchgangskoeffizient (k -Wert)
Einheit: $1 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$

T_i, T_a bzw. ϑ_i, ϑ_a Fluidtemperaturen an den beiden Seiten der Wand

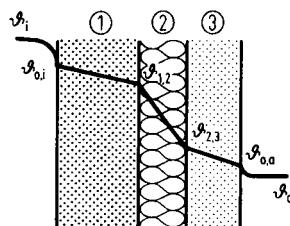
Einheit: $1 \text{ m}^2 \text{ K/W}$

$\frac{1}{\alpha_i}, \frac{1}{\alpha_a}$ Wärmeübergangswiderstände an den beiden Seiten der Wand (Tab. 27)

Einheit: $1 \text{ m}^2 \text{ K/W}$

s_i Dicke der i -ten Schicht mit der Wärmeleitfähigkeit λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$)

q Wärmestromdichte



Mittlerer k -Wert k_m eines Bauteils, das sich aus Teilen mit verschiedenen k -Werten k_I, k_{II}, \dots zusammensetzt:

$$k_m = p_I k_I + p_{II} k_{II} + \dots$$

$$p_I = \frac{A_I}{A_I + A_{II} + \dots}, \quad p_{II} = \frac{A_{II}}{A_I + A_{II} + \dots}, \quad \dots$$

A_I, A_{II}, \dots Flächenanteile an der Gesamtfläche
 $A_I + A_{II} + \dots$ des Bauteils

p_I, p_{II}, \dots prozentuale Flächenanteile

Zylindrische Wände

$$Q = k A_a t (\vartheta_i - \vartheta_a); \quad A_a = 2\pi l r_a$$

a) einschichtig:

$$\frac{1}{k} = r_a \left(\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{r_a \alpha_a} \right)$$

b) zweischichtig:

$$\frac{1}{k} = r_a \left(\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{r_{1,2}}{r_i} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{r_a}{r_{1,2}} + \frac{1}{r_a \alpha_a} \right)$$

Q ist die in der Zeit t durch die Außenfläche A_a strömende Wärmeenergie

l Länge bzw. Höhe des Hohlzylinders

r_i innerer Radius, r_a äußerer Radius

ϑ_i Temperatur des Mediums innen
 ϑ_a Temperatur des Mediums außen

λ bzw. λ_1, λ_2 Wärmeleitfähigkeiten der Schichtmaterialien

$r_{1,2}$ Radius der Zwischengrenzfläche

$1/k$ Wärmedurchgangswiderstand der Wand

4.8 Temperaturstrahlung (siehe auch Abschnitt 6.5)

Strahlungsgesetz von Planck für schwarze Körper

$$M_{fs} = \frac{2\pi hf^3}{c_0^2} \cdot \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

$$M_{ls} = \frac{2\pi c_0^2 h}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{coh/k\lambda T} - 1}$$

M_{fs} bzw. M_{ls} spektrale spezifische Ausstrahlung einer schwarzen Fläche in den Halbraum im Frequenzbereich von f bis $f + \Delta f$ bzw. im Wellenlängenbereich von λ bis $\lambda + \Delta \lambda$ bei der Temperatur T in den Raumwinkel Ω

Einheit: $1 \frac{\text{W/m}^2}{\text{sr}}$ bzw. $1 \frac{\text{W/m}^2}{\text{m}}$

c_0 Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen im Vakuum

h Plancksche Konstante (S. 112)

k Boltzmannkonstante (S. 54)

Gesetz von Lambert für schwarze Körper

(L_s konstant für alle Richtungen des Halbraums)

$$L_s = \frac{M_s}{\Omega_0 \pi}$$

L_s Strahldichte einer schwarzen Fläche; $\Omega_0 = 1 \text{ sr}$
 M_s spez. Ausstrahlung der schwarzen Fläche in den Halbraum

Gesetz von Stefan-Boltzmann

$$M_s = \sigma T^4 = C_s \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c_0^2} = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$C_s = 10^8 \sigma = 5,6705 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

$$M = \varepsilon M_s$$

Speziell schwarzer Körper: $\varepsilon = 1$

M_s spektrale spezifische Ausstrahlung einer schwarzen Fläche in den Halbraum bei der Temperatur T

σ Stefan-Boltzmann-Konstante

k Boltzmannkonstante

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

h Plancksche Konstante

C_s Strahlungskonstante des schwarzen Körpers

ε halbräumlicher Emissionsgrad (Tab. 29)

M spez. Ausstrahlung eines grauen Körpers

Verschiebungsgesetz von Wien

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}}{T}$$

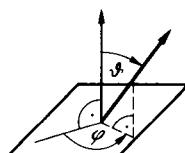
λ_{\max} Wellenlänge des Strahlungsmaximums einer schwarzen Fläche bei der Temperatur T

Spektraler gerichteter Emissionsgrad $\varepsilon_\lambda(\vartheta, \varphi)$

$$\varepsilon_\lambda(\vartheta, \varphi) = \frac{L_\lambda(\vartheta, \varphi)}{L_{ls}}$$

Speziell schwarzer Körper:

$$\varepsilon_\lambda(\vartheta, \varphi) = 1$$



$L_\lambda(\vartheta, \varphi)$ spektrale Strahldichte eines Temperaturstrahlers in der durch den Zenitwinkel ϑ und Azimutwinkel φ gekennzeichneten Richtung

L_{ls} spektrale Strahldichte eines schwarzen Strahlers bei gleicher Temperatur

Speziell $\vartheta = 0$:

$$\varepsilon_{\lambda n} = \frac{L_{\lambda n}}{L_{ls}}$$

$L_{\lambda n}$ spektrale Strahldichte in Richtung der Flächennormalen

Gesetz von Kirchhoff

$$\varepsilon_\lambda(\vartheta, \varphi) = \alpha_\lambda(\vartheta, \varphi)$$

Temperaturstrahlung zwischen zwei parallelen ebenen Flächen

$$q_{1,2} = \alpha_{\text{St}}(\vartheta_1 - \vartheta_2); \quad \vartheta_1 > \vartheta_2$$

$$\alpha_{\text{St}} = C_{1,2} a$$

a Temperaturfaktor

$$a = \frac{\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4}{T_1 - T_2}$$

$$C_{1,2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_s}} = \frac{C_s}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{C_1}{C_s}; \quad \varepsilon_2 = \frac{C_2}{C_s}$$

$\varepsilon_\lambda(\vartheta, \varphi)$ bzw. $\alpha_\lambda(\vartheta, \varphi)$ spektraler Emissionsgrad bzw. Absorptionsgrad eines Temperaturstrahlers für die durch ϑ und φ gekennzeichnete Aus- bzw. Einstrahlungsrichtung bei gleicher Temperatur

$q_{1,2}$ ist die durch die Strahlung bewirkte Wärmestromdichte

α_{St} Wärmeübergangskoeffizient der Strahlung

Einheit: 1 K³

T_1, T_2 bzw. ϑ_1, ϑ_2 (konstante) Temperaturen der Flächen 1 und 2

$C_{1,2}$ Strahlungsaustauschkonstante

C_1 bzw. C_2 Strahlungskonstante der Fläche 1 bzw. 2

C_s Strahlungskonstante des schwarzen Körpers

ε_1 bzw. ε_2 halbräumlicher Emissionsgrad der Fläche 1 bzw. 2

4.9 Nichtstationärer Wärmetransport**Wärmestromdichte q_x in der x -Richtung**

$$q_x = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

Einheit: 1 W/m²

$\partial \vartheta / \partial x$ Temperaturgradient in der x -Richtung

λ Wärmeleitfähigkeit des Mediums

Einheit: 1 m²/s

λ Wärmeleitfähigkeit, ϱ Dichte

c_p spez. isobare Wärmekapazität

Temperaturleitfähigkeit a eines Stoffes

$$a = \frac{\lambda}{c_p \varrho}$$

Gleichung von Fourier (für reine Wärmeleitung)

Zusammenhang zwischen der zeitlichen Temperaturänderung einer Stelle (x, y, z) mit der momentanen räumlichen Temperaturverteilung $\vartheta(x, y, z, t)$ ohne Wärmequellen und Wärmesenken:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right]$$

Temperaturänderung $\Delta \vartheta$ eines Stoffes in einem abgeschlossenen Behälter

$$\Delta \vartheta \approx \Delta \vartheta_0 \cdot e^{-\frac{kA}{mc} t}$$

(Abkühlungsgesetz von Newton)

$\Delta \vartheta$ bzw. $\Delta \vartheta_0$ Temperaturdifferenz zwischen innen und außen zur Zeit t bzw. 0

m Masse des Stoffes

c spez. Wärmekapazität des Stoffes

A Wandmittelfläche

k Wärmedurchgangskoeffizient der Wand

$b = \sqrt{c \varrho \lambda}$

Einheit: 1 $\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{s}^{0,5} \text{K}}$

c spez. Wärmekapazität, λ Wärmeleitfähigkeit

Wärmeeindringkoeffizient b eines Stoffes

$$b = \sqrt{c \varrho \lambda}$$

Kontakttemperatur ϑ_0

$$\vartheta_0 = \frac{b_1 \vartheta_1 + b_2 \vartheta_2}{b_1 + b_2}$$

b_1 bzw. b_2 Wärmeeindringkoeffizienten von zwei sich berührenden halbunendlichen Körpern der Temperaturen ϑ_1 bzw. ϑ_2

4.10 Feuchtigkeit

Absolute Luftfeuchte (Wasserdampfteildichte) ϱ

Einheit: 1 g/m³

$$\varrho = \frac{m}{V}$$

m Wasserdampfmasse im Volumen V

$$\varrho = \frac{p}{R_{\text{H}_2\text{O}} T}$$

p Wasserdampfteildruck

T Temperatur

$R_{\text{H}_2\text{O}}$ Gaskonstante für Wasserdampf (Tab. 25)

Relative Luftfeuchte φ

$$\varphi = \frac{\varrho}{\varrho_s}$$

ϱ Wasserdampfteildichte

ϱ_s Sättigungsdichte bei der gleichen Temperatur T (Tab. 31)

$$\varrho_s = \frac{p_s}{R_{\text{H}_2\text{O}} T}$$

p_s Wasserdampfsättigungsdruck

Wasserdampfteildruck p

Einheit: 1 N/m² = 1 Pa

$$p = \varphi p_s$$

p_s Sättigungsdruck bei der gleichen Temperatur (Tab. 31)

Bestimmung der Taupunkttemperatur ϑ_s

$$p(\vartheta_L) = p_s(\vartheta_s) = \varphi \cdot p_s(\vartheta_L)$$

$p(\vartheta_L)$ Wasserdampfteildruck bei der Lufttemperatur ϑ_L

$$\{\vartheta_s\} = (109,8 + \{\vartheta_L\}) \cdot \varphi^{0,1247} - 109,8$$

$p_s(\vartheta_s)$ Sättigungsdruck bei der Temperatur ϑ_s

φ relative Luftfeuchte

Feuchtegrad x

$$x = \frac{m}{m_L}$$

m Wasserdampfmasse

m_L Masse der trockenen Luft

φ relat. Feuchte der feuchten Luft

p_{ges} Druck der feuchten Luft

R_{Luft} bzw. $R_{\text{H}_2\text{O}}$ Gaskonstante der trockenen Luft bzw. des Wasserdampfes (Tab. 25)

Mindestwert ($1/k$)_{Mind} des Wärmedurchgangswiderstandes

eines Außenbauteiles zur Vermeidung von Oberflächenkondensation

$$\left(\frac{1}{k}\right)_{\text{Mind}} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\vartheta_{L,i} - \vartheta_{L,a}}{\vartheta_{L,i} - \vartheta_{s,i}}$$

$1/\alpha_i$ Wärmeübergangswiderstand innen

$\vartheta_{L,i}$ ($\vartheta_{L,a}$) Lufttemperatur innen (außen)

$\vartheta_{s,i}$ Taupunkttemperatur innen

Mindestwert ($1/A$)_{Mind} des Wärmedurchlaßwiderstandes

$$\frac{1}{A_{\text{Mind}}} = \left(\frac{1}{k}\right)_{\text{Mind}} - \frac{1}{\alpha_i} - \frac{1}{\alpha_a}$$

$1/\alpha_a$ Wärmeübergangswiderstand außen

Einheit: 1 $\frac{\text{m}^2 \text{h Pa}}{\text{kg}}$

Wasserdampfdiffusionsdurchlaßwiderstand $1/A$ einer Schicht

$$\frac{1}{A} = \frac{R_{\text{H}_2\text{O}} T}{D} \mu s = N \mu s$$

μ Wasserdampfdiffusionswiderstandszahl des Schichtmaterials (Tab. 26)

s Schichtdicke, T Schichtmittentemperatur

D Diffusionskoeffizient, N Abkürzung

$$N = \frac{R_{\text{H}_2\text{O}} T}{D} = 1,5 \cdot 10^6 \frac{\text{m h Pa}}{\text{kg}}$$

Diffusionsäquivalente Luftsichtdicke s_d
einer Schicht

$$s_d = \mu s$$

Einheit: 1 m

μ Diffusionswiderstandszahl (Tab. 26)
 s Schichtdicke

Wasser dampf diffusionsdurchlaßwiderstand $1/A$ eines Bauteils

$$\frac{1}{A} = N(s_{d,1} + s_{d,2} + \dots + s_{d,n})$$

$s_{d,i}$ diffusionsäquivalente Luftsichtdicke der i -ten Schicht ($i = 1, 2, \dots, n$)

Stationäre Wasser dampf diffusionsstromdichte i

$$\text{Einheit: } 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{h}}$$

m Dampfmasse, die in der Zeit t durch die ebene Fläche A diffundiert

$$i = \frac{m}{A t}$$

Tauperiode:

$$i_i = \frac{p_i - p_{sw1}}{1/\Delta_i}$$

$p_i = 1170 \text{ Pa}$, $p_a = 208 \text{ Pa}$
 $1/\Delta_i$ bzw. $1/\Delta_a$ Diffusionswiderstand von der Innenoberfläche bis zum Beginn der Tauwasserzone (1) bzw. von ihrem Ende (2) bis zur Außenoberfläche

$$i_a = \frac{p_{sw2} - p_a}{1/\Delta_a}$$

Einheit: 1 kg/m²

W_T flächenbezogene Masse des ausfallenden Wassers

Verdunstungsperiode:

$$i'_i = \frac{p'_{sw} - p'_i}{1/\Delta'_i}$$

$p'_i = 982 \text{ Pa}$, $p'_a = 982 \text{ Pa}$, $p'_{sw} = 1403 \text{ Pa}$
 $1/\Delta'_i$ bzw. $1/\Delta'_a$ Diffusionswiderstand von der Mitte der Tauwasserzone bis zur Innenoberfläche bzw. zur Außenoberfläche

$$i'_a = \frac{p'_{sw} - p'_a}{1/\Delta'_a}$$

Einheit: 1 kg/m²

W_V flächenbezogene Masse des verdunsteten Wassers

Massebezogener Feuchtegehalt u_m

Einheit: 1 = 100 %

$$u_m = \frac{m_w}{m_{tr}}$$

m_w bzw. V_w bzw. ϱ_w Masse bzw. Volumen bzw. Dichte des Wassers in der Materialprobe
 m_{tr} bzw. V_{tr} bzw. ϱ_{tr} Masse bzw. Volumen bzw. Dichte der trockenen Materialprobe

Volumenbezogener Feuchtegehalt u_v

$$u_v = \frac{V_w}{V_{tr}} = u_m \frac{\varrho_{tr}}{\varrho_w}$$

Materialfeuchte ψ

$$\psi = \frac{m_w}{m_{tr} + m_w} = \frac{u_m}{1 + u_m}$$

5 Elektrik und Magnetik

5.1 Elektrische Potentialfelder in homogenen, isotropen Medien

5.1.1 Grundgrößen

Ladung $\pm Q$; $Q > 0$

Einheit: $1 \text{ A s} = 1 \text{ Coulomb C}$

Raumladungsdichte ϱ

Einheit: $1 \text{ C/m}^3 = 1 \text{ A s/m}^3$

$$\varrho = \pm \frac{\Delta Q}{\Delta V} \quad (\Delta V \gg \text{atomare Dimensionen})$$

$\pm \Delta Q$ Teilladung im Teilvolumen ΔV

Flächenladungsdichte σ

Einheit: $1 \text{ C/m}^2 = 1 \text{ A s/m}^2$

$$\sigma = \pm \frac{\Delta Q}{\Delta A} \quad (\Delta A \gg \text{atomare Dimensionen})$$

$\pm \Delta Q$ Teilladung auf der Teilfläche ΔA

Elektrische Feldstärke \vec{E}

Betragseinheit: $1 \text{ N/C} = 1 \text{ V/m}$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{\pm Q}$$

\vec{F} Kraft auf die punktförmige Probeladung $\pm Q$

Potential φ

Einheit: $1 \text{ J/C} = 1 \text{ Volt V}$

$$\varphi(P) = - \int_{P_0}^P \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{mit} \quad \varphi(P_0) = 0$$

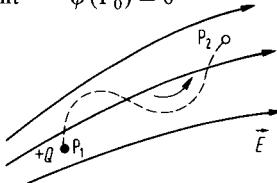
$\varphi(P)$ Potential im Punkt P
 P_0 Potentialnullpunkt

Spannung U

Einheit: 1 Volt V

zwischen zwei Feldpunkten:

$$U = \left| \frac{\Delta W}{Q} \right| = |\Delta \varphi|$$



ΔW Überführungsarbeit der Probeladung Q vom Feldpunkt P_1 zum Feldpunkt P_2 längs eines beliebigen Weges
 $\Delta \varphi$ Potentialdifferenz

Potentielle Energie W_{pot} einer Punktladung

Einheit: 1 J

$$W_{\text{pot}}(P) = \pm Q \varphi(P)$$

$1 \text{ eV} = 1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
 $\pm Q$ Ladung, $\varphi(P)$ Potential im Punkt P

Zusammenhang zwischen φ , \vec{E} und U

φ Potential

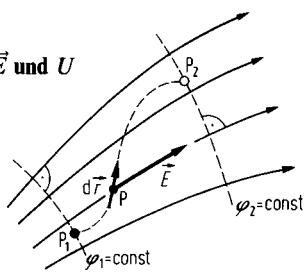
\vec{E} Feldstärke

$d\vec{r}$ Differential des Ortsvektors \vec{r}

$d\varphi$ Potentialänderung längs des Feldlinienelementes

$ds = |d\vec{r}|$

U Spannung zwischen P_1 und P_2 , zwei Punkten mit den Potentialen φ_1 und φ_2



Flächen, auf denen $\varphi = \text{const}$: *Aquipotentialflächen*

Gesamtpotential $\varphi(P)$ im Vakuum

r Abstand des Volumelements dV mit der Raumladungsdichte ϱ bzw. des Flächenelements dA mit der Flächenladungsdichte σ vom Punkt P
 ϵ_0 elektrische Feldkonstante

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \int_V \frac{\varrho}{r} dV + \int_A \frac{\sigma}{r} dA \right\}$$

Kontinuierliche Ladungsverteilung:

Diskrete Ladungsverteilung:

$$\varphi(P) = \sum_i \varphi_i(P)$$

$\varphi_i(P)$ Potential der i -ten Einzelladung $\pm Q_i$

$$\text{Speziell Punktladungen: } \varphi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \left(\frac{\pm Q_i}{r_i} \right)$$

r_i Abstand der i -ten Punktladung $\pm Q_i$ vom Punkt P

Elektrische Fluß-(Flächenladungs-)Dichte \vec{D}

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

$$\epsilon_0 = 8,8541878 \dots \cdot 10^{-12} \text{ CV}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Betragseinheit: 1 C/m^2

E Feldstärke

ϵ_r Permittivitätszahl (Dielektrizitätszahl), Tab. 32

ϵ_0 elektrische Feldkonstante

ϵ Permittivität (Dielektrizitätskonstante)

$$\text{Speziell Luft: } \epsilon_{\text{Luft}} = 8,86 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Elektrische Polarisation \vec{P} eines Dielektrikums

$$\vec{P} = \vec{D} - \vec{D}_0; \quad \epsilon_r = D/D_0$$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_r \vec{E}; \quad \chi = \epsilon_r - 1$$

Betragseinheit: 1 C/m^2

\vec{D} bzw. \vec{D}_0 Flußdichte mit bzw. ohne Dielektrikum bei konstanter Feldstärke \vec{E}

ϵ_r Permittivitätszahl (Tab. 32)

χ elektrische Suszeptibilität

$\epsilon_r \gg 1$: ferroelektrische Stoffe; $\epsilon_r > 1$: parelektrische Stoffe

Elektrischer Fluß ψ

$$\psi_A = \int_A \vec{D} d\vec{A}$$



Einheit: $1 \text{ As} = 1 \text{ C}$

Speziell ebene Fläche und $\vec{D} = \text{const.}$

$$\psi_A = \vec{D} \cdot \vec{A} = D A \cos \alpha$$

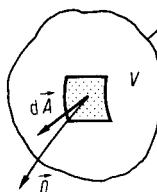
ψ_A Fluß durch die Fläche A (das Vorzeichen hängt von der Wahl der Richtung von $d\vec{A}$ ab)

$d\vec{A}$ gerichtetes Flächenelement

\vec{D} Flußdichte

Fluß durch eine geschlossene Fläche:

$$\psi_{\text{ges}} = \oint_A \vec{D} d\vec{A} = \pm Q$$



ψ_{ges} gesamter Fluß, der von der Ladung $\pm Q$ in dem Volumen V ausgeht und dessen Oberfläche, die geschlossene Fläche A , durchsetzt

Speziell konstanter Fluß in einer ladungsfreien Röhre:

$$\oint_A \vec{D} d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{D} d\vec{A} - \int_{A_2} \vec{D} d\vec{A} = \psi_1 - \psi_2 = 0$$

A_1, A_2 (beliebig geformte) Abschlußflächen einer von Feldlinien gebildeten Röhre

Influienzierte Ladung Q_{infl} auf einer Leiteroberfläche

$$Q_{\text{infl}} = \left| \int_A \vec{D} d\vec{A} \right| = |\psi_A|$$

Einheit: $1 \text{ As} = 1 \text{ C}$

Speziell ebene Fläche A und $\vec{D} = \text{const.}$

$$Q_{\text{infl}} = D A |\cos \alpha| = \sigma_{\text{infl}} A$$

\vec{D} Flußdichte in $d\vec{A}$

$d\vec{A}$ gerichtetes Flächenelement

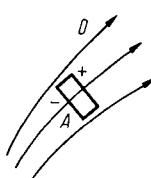
ψ_A Fluß an der Leiteroberfläche

σ_{infl} Betrag der influenzierten Flächenladungsdichte

α Winkel zwischen \vec{D} und \vec{A}

Kapazität C eines Kondensators

$$C = \frac{Q}{U}$$



Einheit: $1 \text{ As/V} = 1 \text{ Farad F} (\mu\text{F}, \text{nF}, \text{pF})$

U Spannung zwischen den Grenzflächen des Feldes

Q Ladung auf einer Grenzfläche

5.1.2 Energie des elektrischen Feldes

Energie W_{el}

$$W_{\text{el}} = \int_V w_{\text{el}} dV > 0$$

Speziell homogenes Feld: $W_{\text{el}} = w_{\text{el}} V$

Speziell elektrische Energie eines Kondensators:

$$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Einheit: $1 \text{ W s} = 1 \text{ J}$

w_{el} Energiedichte des elektrischen Feldes im Volumenelement dV

w_{el} Energiedichte im Volumen V

C Kapazität, U Spannung
 Q Ladung

Energiedichte w_{el}

Einheit: 1 J/m^3

$$w_{\text{el}} = \frac{dW_{\text{el}}}{dV} > 0; \quad w_{\text{el}} = \frac{1}{2} D E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

dW_{el} Teilenergie im Teilverummen dV
 E Feldstärke, D Flußdichte
 ϵ Permittivität des Feldmediums

5.1.3 Spezielle elektrische Felder

\vec{E} Feldstärke, \vec{D} Flußdichte, U Spannung zwischen den Feldgrenzen, φ Potential, Q Ladung, ϵ Permittivität (Dielektrizitätskonstante) des Feldmediums

Homogenes Feld eines Plattenkondensators

$$E = \frac{U}{d}; \quad \varphi(x) = -Ex; \quad D = \frac{Q}{A}$$

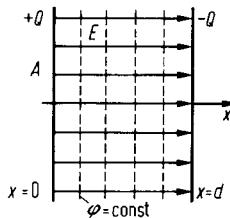
d Abstand

A Fläche einer Platte ($d \ll$ Ausdehnung der Platten)

Anziehungskraft der Platten aufeinander:

$$F = \frac{1}{2} QE; \quad \vec{F} \parallel \vec{E}$$

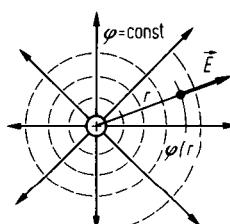
$$F = \frac{1}{2} E D A = \frac{1}{2} \epsilon \frac{U^2}{d^2} A$$



Coulombfeld einer Punktladung (Radialfeld)

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}; \quad D(r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2}$$

$$\varphi(r) = \frac{\pm Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \quad \text{mit } \varphi(\infty) = 0$$



Gesetz von Coulomb (Kraft zwischen zwei Punktladungen)

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

\vec{F}_1 bzw. \vec{F}_2 Kraft auf die Ladung Q_1 bzw. Q_2
 r Abstand der Punktladungen

Zylinderfeld ($l \gg r$)

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \frac{1}{r}; \quad D(r) = \frac{Q}{2\pi l} \frac{1}{r}$$

$$\varphi(r) = \frac{\pm Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_0}{r} \quad \text{mit } \varphi(r_0) = 0$$

l Länge des Zylinders
 r_0 Zylinderradius
 r Abstand von der Zylinderachse

Dipolfeld ($r \gg l$)

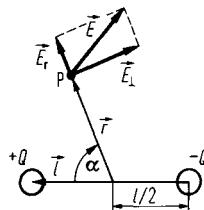
$$\vec{p} = Q \vec{l}$$

\vec{p} elektrisches Dipolmoment

$$E(P) = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3} \sqrt{3 \cos^2 \alpha + 1}$$

$$E_r = \frac{2p \cos \alpha}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3}; \quad E_\perp = \frac{p \sin \alpha}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^3}$$

$$\varphi(P) = \frac{p \cos \alpha}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2} \quad \text{mit } \varphi(\alpha = 90^\circ) = 0$$



5.1.4 Spezielle Kapazitäten

Plattenkondensator

$$C = \epsilon \frac{A}{d}$$

A Plattenfläche
 d Plattenabstand (klein gegenüber der Ausdehnung der Platten)
 ϵ Permittivität des Feldmediums

Kugelkondensator

$$C = 4\pi\epsilon \frac{r_i r_a}{r_a - r_i}$$

r_i Radius der Innenkugel
 r_a Radius der Außenkugel (konzentrisch)

Speziell Kugelkonduktör ($r_a \rightarrow \infty, r_i = R$):

$$C = 4\pi\epsilon R$$

R Kugelradius

Zylinderkondensator ($r_i, r_a \ll l$)

$$C = 2\pi\epsilon \frac{l}{\ln(r_a/r_i)}$$

l Länge des Zylinders
 r_i Radius des Innenzylinders
 r_a Radius des Außenzyinders (konzentrisch)

Paralleleitung ($R, s \ll l$)

$$C = \pi\epsilon \frac{l}{\ln \left[\frac{s}{2R} + \sqrt{\left(\frac{s}{2R} \right)^2 - 1} \right]}$$

l Leiterlänge, R Leiterradius
 s Leiterabstand (Mitte-Mitte)

$$\text{Speziell } R \ll s: \quad C = \pi\epsilon \frac{l}{\ln(s/R)}$$

Leiter-Ebene-System ($R, a \ll l$)

$$C = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(2a/R)}$$

l Leiterlänge, R Leiterradius
 a Abstand Leitermitte-Ebene (Leiter || Ebene)

5.1.5 Kondensatorschaltungen

Hintereinanderschaltung (SerienSchaltung)

Alle Kondensatoren haben die gleiche Ladung Q .

Gesamtkapazität C :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

C_i Kapazität des i -ten Kondensators

Gesamtspannung U :

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

U_i Spannung am i -ten Kondensator ($i = 1, 2, 3, \dots$)

Verhältnis der Teilladungen:

$$U_1 : U_2 : U_3 : \dots = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \frac{1}{C_3} : \dots$$

Parallelschaltung

Alle Kondensatoren haben die gleiche Spannung U .

Gesamtkapazität C :

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Gesamtladung Q :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$

Q_i Ladung des i -ten Kondensators ($i = 1, 2, 3, \dots$)

Verhältnis der Teilladungen:

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 : \dots = C_1 : C_2 : C_3 : \dots$$

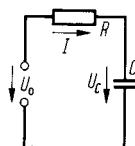
5.1.6 Auf- und Entladung eines Kondensators

Zeitkonstante τ

$$\tau = R C$$

Aufladevorgang

Ladestrom $I(t)$ bei $U_0 = \text{const.}$:



Einheit: 1 s

R Widerstand C Kapazität

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$U_C(t) = U_0 (1 - e^{-t/\tau}); \quad Q_C(t) = C U_C(t)$$

U_0 angelegte Spannung, I_0 Anfangstrom

t Zeit nach Beginn des Ladevorganges

$U_C(t)$ bzw. $Q_C(t)$ Kondensatorspannung bzw. -ladung zur Zeit t

Entladevorgang

Entladestrom $I(t)$:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$U_C(t) = U_{C,0} e^{-t/\tau}; \quad Q_C(t) = C U_C(t)$$

I_0 Anfangstrom

$U_{C,0}$ Kondensatorspannung vor der Entladung

t Zeit nach dem Beginn der Entladung

τ Zeitkonstante

$U_C(t)$ bzw. $Q_C(t)$ Spannung bzw. Ladung des Kondensators zur Zeit t

5.2 Gleichstrom

5.2.1 Grundgrößen

Stromstärke¹⁾ (Strom) I

durch eine Fläche A

$$I = \int_A \vec{J} d\vec{A}; \quad I = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$$

Stromrichtung (technische Definition):

Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger

Speziell $I = \text{const.}$:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Stromstoß Q

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = \bar{I} \Delta t$$

Stromdichte \vec{J}

$$|\vec{J}| = J = \frac{dI}{dA_1}$$

Die Richtung von \vec{J} stimmt mit der Bewegungsrichtung der positiven Ladungen überein.

Speziell $J = \text{const.}$:

$$J = \frac{I}{A_1}$$

Spannung U

siehe S. 67.

Quellenspannung (Urspannung) U_q einer Zweipolquelle

$$U_q = U_1$$



A_1 Querschnittsfläche senkrecht zu der zum Strom I an dieser Stelle gehörenden Stromdichte \vec{J}

Einheit: 1 Volt V

Einheit: 1 V

U_1 Leerlaufspannung der Stromquelle

Richtungssinn von Strom und Spannung (allgemein auch für Wechselstrom)

Ein elektrischer Strom transportiert Energie zwischen zwei Systemen:

Energieabgebendes System: Richtung von I und U_q entgegengesetzt und Leistung $P < 0$,

Energieaufnehmendes System: Richtung von I und U bzw. U_q gleich und Leistung $P > 0$.

(Verbraucher-)Widerstand R

eines stromdurchflossenen Leiters:

$$R = \frac{U}{I}$$

Einheit: 1 V/A = 1 Ohm Ω ($k\Omega$, $M\Omega$)

U bzw. I zeitlich konstante Spannung bzw. Stromstärke

¹⁾ Basisgröße

Leitwert G

$$G = \frac{I}{R} = \frac{U}{I}$$

Einheit: $1 \Omega^{-1} = 1 \text{ Siemens S (mS, } \mu\text{S)}$

R Widerstand

Spezifischer Widerstand ϱ eines Materials

$$\varrho = \frac{E}{J} \quad (\text{Tab. 33})$$

Einheit: $1 \Omega \text{ m} = 10^6 \Omega \text{ mm}^2 \text{ m}^{-1}$

E elektrische Feldstärke im Material (siehe S. 67)
 J Stromdichte im Material

Speziell homogener zylindrischer Leiter (Strom in Richtung der Zylinderachse):

$$\varrho = \frac{RA}{l}; \quad R = \varrho \frac{l}{A}$$

R Widerstand des Leiters
 l bzw. A Länge bzw. Querschnittsfläche

Temperaturabhängigkeit:

$$\varrho_\vartheta = \varrho_{20} + \Delta\varrho$$

ϱ_ϑ bzw. ϱ_{20} spezifischer Widerstand bei der Temperatur ϑ bzw. 20°C

$$\Delta\varrho = \varrho_{20} \alpha \Delta T; \quad \Delta T = \vartheta - 20^\circ\text{C}$$

α Temperaturkoeffizient bei 20°C

Einheit: 1 K^{-1} (Tab. 33)

Elektrische Leitfähigkeit γ eines Materials

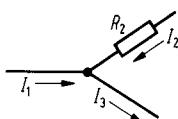
Einheit: $1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$

$$\gamma = \frac{1}{\varrho}$$

ϱ spezifischer Widerstand

5.2.2 Regeln von Kirchhoff für verzweigte Stromkreise**Knotenpunktregel**

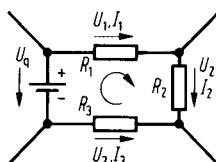
$$\sum_k I_k = 0$$



I_k gerichteter Teilstrom durch den k -ten Leiter

Maschenregel

$$\sum_j U_j + U_q = 0; \quad U_j = R_j I_j$$



U_j gerichtete Teilspannung am j -ten Leiter mit dem Widerstand R_j
 U_q von allen Stromquellen der betrachteten Masche zusammen erzeugte Quellenspannung

5.2.3 Schaltung von Widerständen**Hintereinanderschaltung (Serenschaltung)**

Durch alle Verbraucher fließt der gleiche Strom I .

Gesamtwiderstand R : $R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$

R_i Widerstand des i -ten Verbrauchers

Gesamtspannung U : $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$

U_i Spannungsabfall am i -ten Verbraucher ($i = 1, 2, 3, \dots$)

Verhältnis

der Teilspannungen: $U_1 : U_2 : U_3 : \dots = R_1 : R_2 : R_3 : \dots$

Parallelschaltung

An allen Verbrauchern besteht der gleiche Spannungsabfall U .

Gesamtleitwert G :

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$$

G_i Leitwert des i -ten Verbrauchers

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

R_i Widerstand des i -ten Verbrauchers

Gesamtstromstärke I :

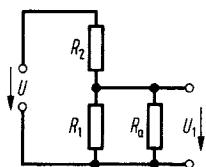
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$$

I_i Strom durch den i -ten Verbraucher ($i = 1, 2, 3, \dots$)

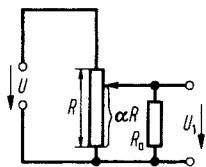
Verhältnis der Teilströme: $I_1 : I_2 : I_3 : \dots = G_1 : G_2 : G_3 : \dots$

Spannungsteilerschaltung

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_1(R_a/R_a)} \cdot U$$



$$\text{Speziell } R_a \gg R_1: \quad U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U$$



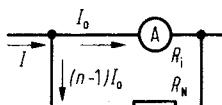
Potentiometer

$$R_a \gg \alpha R: \quad U_1 = \alpha U, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

Meßbereichserweiterung

Strommessung:

$$I = n I_0; \quad R_N = \frac{R_i}{n-1}$$



R_i Instrumenteninnenwiderstand

I_0 Instrumentenstrom

I zu messender Strom

R_N Nebenwiderstand

n Faktor der Bereichserweiterung ($n > 1$)

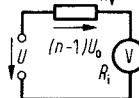
U_0 Instrumentenspannung

U zu messende Spannung

R_V Vorwiderstand

Spannungsmessung:

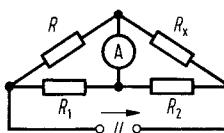
$$U = n U_0; \quad R_V = (n-1) R_i$$



Wheatstonesche Brücke

Bei Stromlosigkeit des Strommessers:

$$R_x = R \frac{R_2}{R_1}$$



R Vergleichswiderstand

R_x zu messender Widerstand

5.2.4 Schaltung von Stromquellen (gleicher Richtungssinn)

Hintereinanderschaltung (Serienenschaltung)

Gesamte Quellenspannung U_q : $U_q = U_{q,1} + U_{q,2} + U_{q,3} + \dots$

$U_{q,1}, U_{q,2}, U_{q,3}, \dots$ bzw. $R_{i,1}, R_{i,2}, R_{i,3}, \dots$ Quellenspannung bzw. Innenwiderstand der Elemente $1, 2, 3, \dots$

Gesamter Innenwiderstand R_i : $R_i = R_{i,1} + R_{i,2} + R_{i,3} + \dots$

Parallelschaltung von m gleichen Elementen ($R_{i,1} = R_{i,2} = \dots$)

Gesamte Quellenspannung U_q : $U_q = U_{q,1} = U_{q,2} = U_{q,3} = \dots$

Gesamter Innenwiderstand R_i : $R_i = R_{i,1}/m$

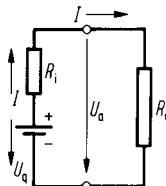
5.2.5 Belastete Stromquelle

Klemmenspannung U_a

$$U_a = U_q - R_i I$$

Speziell $I = 0, R_a \rightarrow \infty$:

$$U_a = U_q = U_l$$



U_q Gesamtquellenspannung
 R_i Gesamtinnennwiderstand
 I Strom
 U_l Leerlaufspannung

Strom I

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_a}$$

U_q Gesamtquellenspannung
 R_i Gesamtinnennwiderstand
 R_a Außenwiderstand

$$\text{Speziell } R_a = 0: \quad I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

I_K Kurzschlußstrom

5.2.6 Stromleistung und Stromarbeit

Stromleistung P

Momentane Stromleistung $P(t)$:

$$P(t) = U(t) I(t)$$

$P(t) > 0$: Energieaufnahme (Verbraucher)

$P(t) < 0$: Energieabgabe (Erzeuger)

Einheit: 1 V A = 1 Watt W

$I(t)$ bzw. $U(t)$ gerichtete Stromstärke bzw. Spannung des Verbrauchers oder Erzeugers der Energie zur Zeit t (S. 72)

Stromarbeit ΔW eines Verbrauchers oder Erzeugers

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt;$$

$\Delta W > 0$: Energieaufnahme (Verbraucher)

$\Delta W < 0$: Energieabgabe (Erzeuger)

Einheit: 1 W s = 1 Joule J

$P(t)$ momentane Stromleistung

Speziell $I(t)$ und $U(t)$ konstant:

$$|\Delta W| = U I \Delta t$$

$\Delta t = t_2 - t_1$ Zeit, in der die Arbeit verrichtet wird

Speziell $I(t)$ und $U(t)$ rein harmonisch: s. 5.5.4, S. 84.

Stromwärme Q in einem Verbraucher

$$Q = \Delta W = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t$$

Einheit: 1 W s = 1 Joule J

I bzw. U konstanter Strom bzw. konstante Spannung in der Zeitspanne Δt
 R Verbraucherwiderstand

5.3 Magnetische Felder in homogenen, isotropen Medien

5.3.1 Grundgrößen

Magnetische Feldstärke (magnetische Erregung) \vec{H}

Betragseinheit: 1 A m^{-1}

$$1 \text{ Oersted Oe} = (10^3/4\pi) \text{ A m}^{-1} \\ = 79,577 \text{ A m}^{-1}$$

Die Richtung von \vec{H} ist die Einstellrichtung eines Magnetnadelnordpols.

Magnetische Spannung U_m

zwischen zwei Punkten P_1 und P_2

Einheit: 1 A

$$1 \text{ Gilbert Gb} = (10/4\pi) \text{ A} = 0,79577 \text{ A}$$

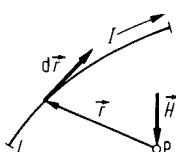
\vec{H} Feldstärke am Ort des Linienelementes $d\vec{r}$

Speziell Durchflutungsgesetz:

$$\left| \oint_l \vec{H} d\vec{r} \right| = NI$$

Gesetz von Biot-Savart-Laplace

$$\vec{H}(P) = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{1}{r^3} \vec{r} \times d\vec{r}$$

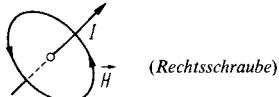


I Stromstärke, die das Magnetfeld der Stärke \vec{H} erzeugt
 N Anzahl der vom geschlossenen Integrationsweg l umschlungenen Stromfäden (z.B. Spulenwindungen)

\vec{H} Feldstärke, die der Stromfaden mit der Länge l und der Stromstärke I in einem Punkt P erzeugt
 $d\vec{r}$ Linielement des Stromfadens

Richtungssinn von Strom und magnetischen Feldlinien

Schraubenregel:



(Stromrichtung S. 72)

Magnetische Flußdichte (Induktion) \vec{B}

$$\vec{B} = \mu \vec{H}; \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

Betragseinheit: $1 \text{ V s/m}^2 = 1 \text{ Tesla T}$

$$1 \text{ Gauß G} = 10^{-4} \text{ T}$$

\vec{H} Feldstärke

μ Permeabilität des Feldmediums

μ_r Permeabilitätszahl

μ_0 magnetische Feldkonstante (Induktionskonstante)

Magnetische Polarisation \vec{J} eines Stoffes

Betragseinheit: 1 T

$$\vec{J} = \vec{B} - \vec{B}_0; \quad \mu_r = \frac{B}{B_0}$$

\vec{B} bzw. \vec{B}_0 Flußdichte mit bzw. ohne Feldmedium bei konstanter Feldstärke \vec{H}

$$\vec{J} = \chi_m \mu_0 \vec{H}; \quad \chi_m = \mu_r - 1$$

χ_m magnetische Suszeptibilität

χ_m dichtebezogene magnetische Suszeptibilität

(Einheit: $1 \text{ m}^3/\text{kg}$)

ρ Dichte

μ_r Permeabilitätszahl

$$\chi_m = \frac{\chi_m}{\rho} \quad (\text{Tab. 34})$$

$\mu_r < 1$: diamagnetische Stoffe

$\mu_r > 1$: paramagnetische Stoffe

$\mu_r \gg 1$: ferromagnetische Stoffe

Magnetisierung (Magnetisierungsstärke) \vec{M}

Betragseinheit: 1 A/m

$$\vec{M} = \frac{\vec{J}}{\mu_0}$$

\vec{J} magnetische Polarisation

μ_0 magnetische Feldkonstante

Magnetischer Fluß ϕ durch eine Fläche A

$$\phi_A = \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Speziell ebene Fläche und $\vec{B} = \text{konstant}$:

$$\phi_A = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA \cos \varphi$$

Speziell geschlossene Fläche:

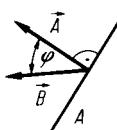
$$\phi = \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

Speziell konstanter Fluß in einer Röhre:

$$\oint_A \vec{B} d\vec{A} = \int_{A_1} \vec{B} d\vec{A} - \int_{A_2} \vec{B} d\vec{A} = \phi_1 - \phi_2 = 0$$

Gesamtfluß ϕ_{ges} (Polstärke p)

von Permanentmagnet, Stromschleife oder Elektromagnet



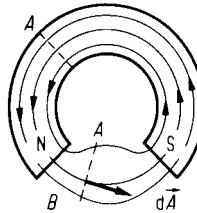
Einheit: 1 Vs = 1 Weber Wb

1 Maxwell Mx = 10^{-8} Vs

\vec{B} Flußdichte in der Fläche $d\vec{A}$

\vec{B} Flußdichte in der ebenen Fläche \vec{A}

\vec{B} Flußdichte in $d\vec{A}$



A_1, A_2 (beliebig geformte) Abschlußflächen einer von den Feldlinien aufgespannten Röhre

Einheit: 1 Wb

A Fläche, die alle Feldlinien einmal schneidet
 $d\vec{A}$ gerichtetes Flächenelement von A
 \vec{B} Flußdichte in $d\vec{A}$

5.3.2 Magnetische Dipole

Coulombsches magnetisches (Dipol-)Moment \vec{j}_c

$$\text{magnetisierter Körper: } \vec{j}_c = \int_V \vec{J} dV$$

Betragseinheit: 1 T m³ = 1 Vs m

\vec{J} Polarisierung des Stoffes
 V Volumen des Körpers

Amperesches magnetisches (Dipol-)Moment \vec{m}

$$\text{magnetisierter Körper: } \vec{m} = \int_V \vec{M} dV$$

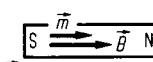
Betragseinheit: 1 A m²

\vec{M} Magnetisierung des Stoffes
 V Volumen des Körpers
 μ_0 magnetische Feldkonstante

$$\text{Speziell } \vec{M} = \text{konstant: } \vec{m} = \vec{M} V$$

Speziell Stabmagnet oder Spule der Länge l :

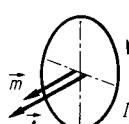
$$\vec{m} = \frac{p \vec{l}}{\mu_0}$$



p Polstärke, ϕ_{ges} gesamter Fluß
 \vec{H} Feldstärke im Magneten bzw. der Spule
 V Volumen des Magneten bzw. der Spule

Speziell ebener Stromfaden:

$$\vec{m} = \mu_r I \vec{A}$$



μ_r Permeabilitätszahl
 I Stromstärke
 A (ebene) vom Stromfaden berandete Fläche

Drehmoment \vec{M}_D auf einen magnetischen Dipol

$$\vec{M}_D = \vec{m} \times \vec{B} = \vec{j}_c \times \vec{H}$$

Betragseinheit: 1 N m

\vec{j}_c bzw. \vec{m} Coulombsches bzw. Amperesches magnetisches Moment des Dipoles
 \vec{H} bzw. \vec{B} Feldstärke bzw. Induktion des äußeren Feldes

5.3.3 Energie des magnetischen Feldes

Energie W_m

$$W_m = \int_V w_m \, dV > 0$$

Speziell homogenes Feld: $W_m = w_m V$

Speziell Feld eines Stromes I :

$$W_m = \int_0^I L(I) I \, dI = \frac{1}{2} \phi_{\text{ges}}$$

Einheit: $1 \text{ J} = 1 \text{ W s}$

w_m Energiedichte des magnetischen Feldes im Volumen dV

Speziell $L = \text{konstant}$: $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

L Induktivität des Stromleiters (S. 81)
 ϕ_{ges} gesamter vom Leiterstrom I erzeugter Fluß

Energiedichte w_m

Einheit: 1 J/m^3

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} > 0$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} = \frac{1}{2} \mu H^2$$

dW_m Teilenergie im Teilvolumen dV
 \vec{H} Feldstärke
 \vec{B} Flußdichte
 μ Permeabilität

5.3.4 Spezielle Magnetfelder

Langgestreckter gerader Stromleiter mit konstanter Stromdichte

$$\text{Feldstärke im Außenraum } (r \gg R): H(r) = \frac{I}{2\pi r}$$

r Abstand von der Leiterachse
 R Leiterradius, I Leiterstrom

$$\text{Feldstärke im Innenraum } (r \ll R): H(r) = \frac{I}{2\pi R^2} r$$

Kraft auf den Leiter im homogenen Magnetfeld:

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}$$

I Leiterstrom, B Flußdichte des Feldes
 \vec{l} dem Strom gleichgerichtete Leiterlänge

Speziell Kraft zwischen zwei parallelen Leitern:

$$F = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l$$

I_1, I_2 Leiterströme
 d Abstand der beiden Leiter ($d \ll l$)
 μ Permeabilität

(Anziehung bei gleicher, Abstoßung bei entgegengesetzter Stromrichtung)

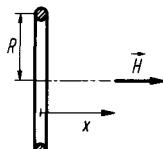
Kreisförmiger Stromleiter

Feldstärke auf der Mittelachse:

$$H(x) = \frac{IR^2}{2\sqrt{(R^2+x^2)^3}}$$

Speziell Ringmitte ($x=0$): $H = I/(2R)$

Speziell $x \gg R$: $H(x) = \frac{IR^2}{2} \frac{1}{x^3}$



R mittlerer Radius des Stromleiters
 I Leiterstrom

Ringspule (Toroid)

Feldstärke innerhalb der Ringspule:

$$H = \frac{N I}{u}$$

N Windungszahl, *I* Leiterstrom
u mittlerer Ringumfang

Kreiszylinderspule (Solenoid)

Feldstärke auf der Spulenachse:

$$H(x) = \frac{N I}{2l} \left[\frac{x+l}{\sqrt{R^2 + (x+l)^2}} - \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right]$$

Speziell Spulenmittelpunkt ($x = -l/2$):

$$H_M = \frac{N I}{l \sqrt{1 + (2R/l)^2}}$$

N Windungszahl, *I* Spulenstrom
x Abstand von einem Spulenende (Punkte außerhalb der Spule: $x > 0$; innerhalb: $x < 0$)
l Spulenlänge, *R* Spulenradius

Speziell langgestreckte Spule ($R \ll l$):

$$H_M = \frac{N I}{l}$$

Speziell Spulenende ($x = 0$):

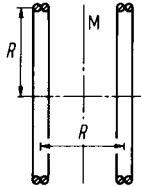
$$H_E \approx \frac{1}{2} H_M$$

Spulen mit bifilarer Wicklung:

$$H \approx 0$$

Heimholz-SpulenpaarFeldstärke im Mittelebenenstück *M*:

$$H = \left(\frac{4}{5}\right)^{1,5} \frac{N I}{R} \approx 0,716 \frac{N I}{R}$$



N Windungszahl einer Spule
R Spulenradius = Spulenabstand
I Spulenstrom

5.4 Elektromagnetische Induktion**5.4.1 Induktionsgesetz****Induzierte Spannung u_i längs eines Weges *l*****Einheit: 1 V**

$$u_i = \int_l \vec{E}_i(\vec{r}) d\vec{r}$$

 $\vec{E}_i(\vec{r})$ induzierte elektrische Feldstärke am Ort \vec{r} **Zusammenhang zwischen induzierter (Ring-)Spannung und magnetischem Fluß ϕ_A :**

\dot{u}_i gesamte induzierte Spannung längs eines geschlossenen Weges *l*;
 ϕ_A Fluß (vgl. S. 77) durch die Fläche *A*, die von dem geschlossenen Weg *l* einmal umrandet wird

$$\dot{u}_i = - \frac{d\phi_A}{dt}$$

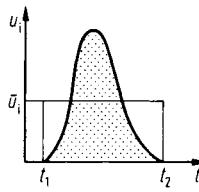
Die Flußänderung $d\phi_A$ erfolgt durch eine Änderung $d\vec{B}$ der Flußdichte \vec{B} des bestehenden Feldes oder durch eine Änderung der Fläche *A* nach Form, Größe oder Lage bei Verschiebung des geschlossenen Weges *l*.**Regel von Lenz**Der induzierte Strom *I_i* in einem Leiter ist so gerichtet, daß sein Magnetfeld mit der Flußdichte \vec{B}_i die Ursache seiner Entstehung, d.h. die Änderung $d\vec{B}$ der Flußdichte \vec{B} des bestehenden Feldes zu verhindern sucht bzw. die Verschiebung des Leiters zu hemmen sucht.

Induzierter Spannungsstoß Σ_i

$$\Sigma_i = \int_{t_1}^{t_2} u_i dt; \quad \bar{u}_i = \bar{u}_i \Delta t$$

Speziell Ringspannung \dot{u}_i :

$$\Sigma_i = \phi_1 - \phi_2 = \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_i dt$$

**Einheit:** 1 V s

$u_i(t)$ momentane induzierte Spannung
 \bar{u}_i mittlere induzierte Spannung in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$

\dot{u}_i momentane induzierte Spannung längs eines geschlossenen Weges

ϕ_1 bzw. ϕ_2 magn. Fluß zur Zeit t_1 bzw. t_2 durch die Fläche, die der geschlossene Weg einmal umrandet

5.4.2 Fremdinduktion

(Induktion durch leiterfremdes Magnetfeld)

Induktionsspule

Induzierte (Ring-)Spannung: $\dot{u}_i = -N \frac{d\phi}{dt}$

ϕ momentaner Fluß durch die Spulenfläche
 N Windungszahl der Spule

Induzierter Spannungsstoß: $\Sigma_i = N(\phi_1 - \phi_2)$

ϕ_1 bzw. ϕ_2 Fluß durch die Spule zur Zeit t_1 bzw. t_2

Speziell homogenes Magnetfeld und $|\phi_2 - \phi_1| = \phi$

(Ein- oder Ausschalten des Magnetfeldes oder Drehung der Spule um 90°):

$$\Sigma_i = N\phi = NBA$$

ϕ Fluß durch die Spulenfläche A
 B Flußdichte am Ort der Spule

Gerader bewegter Leiter im homogenen MagnetfeldInduzierte Spannung u_i zwischen den Leiterenden:

\vec{B} Flußdichte
 \vec{v} Geschwindigkeit des Leiters
 \vec{l} gerichtete Leiterlänge (gleiche Richtung wie die induzierte Feldstärke \vec{E}_i)

5.4.3 Selbstinduktion

(Induktion durch das leitereigene Magnetfeld)

Selbstinduktivität L eines Leiters**Einheit:** 1 V s/A = 1 Henry H

$$L = N \frac{|\phi|}{i}$$

i momentaner Leiterstrom, der den momentanen Fluß ϕ seines Magnetfeldes N -mal umschlingt (N muß nicht ganzzahlig sein)

Speziell Feldmedium mit $\mu_r = \text{konstant}$:

μ_r Permeabilitätszahl

Einheit: 1 V**Selbstinduktionsspannung u_i in einem Leiter**

L Induktivität des Leiters
 i Leiterstrom, der den Fluß ϕ seines Magnetfeldes N -mal umschlingt

$$u_i = - \frac{d}{dt} (L i) = - \frac{d}{dt} (N \phi)$$

Speziell $L = \text{konstant}$: $u_i = -L \frac{di}{dt}$ **Selbstinduzierter Spannungsstoß Σ_i**

i_1 bzw. i_2 Leiterstrom zur Zeit t_1 bzw. t_2
 L_1 bzw. L_2 Induktivität des Leiters beim Strom i_1 bzw. i_2
 \bar{u}_i mittl. selbstinduzierte Spannung in der Zeit
 $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Sigma_i = L_1 i_1 - L_2 i_2 = \bar{u}_i \Delta t$$

Speziell $L = \text{konstant}$: $\Sigma_i = L(i_1 - i_2)$

5.4.4 Spezielle Induktivitäten

(für Feldmedien mit konstanter Permeabilität μ)

Kreis-Zylinderspule

$$L = \mu N^2 (\sqrt{l^2 + R^2} - R) \frac{A}{l^2}$$

N Windungszahl, l Länge der Spule
 A Querschnittsfläche, R Radius der Spule

Speziell $l \gg R$: $L = \mu N^2 \frac{A}{l}$

Ringspule (Toroid)

$$L = \mu N^2 \frac{A}{u}$$

N Windungszahl, u mittlerer Ringumfang
 A Querschnittsfläche

Gerader zylindrischer Leiter

$$L = \mu \frac{l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{R} - \frac{3}{4} \right)$$

l Länge des Leiters, R Radius des Leiters

Symmetrische Parallelleitung

$$L \approx \mu \frac{l}{\pi} \left(\ln \frac{s}{R} + \frac{1}{4} \right)$$

l Länge, R Leiterradius
 s Abstand der Leiter

5.4.5 Schaltung von Induktivitäten

(ohne gegenseitige Beeinflussung der Einzelinduktivitäten)

Hintereinanderschaltung

Gesamtinduktivität L :

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$$

L_1, L_2, L_3, \dots Einzelinduktivitäten

Parallelschaltung

Gesamtinduktivität L :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots$$

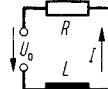
Für das Verhältnis der Teilspannungen an bzw. der Teilströme in den einzelnen Induktivitäten gilt dasselbe wie bei der Schaltung von Widerständen (S. 73).

5.4.6 Auf- bzw. Abbau eines Magnetfeldes

Zeitkonstante τ

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Einheit: 1 s



R Widerstand, L Induktivität

Aufbau des Feldes

Momentane Stromstärke $I(t)$ in der Spule bei $U_0 = \text{konstant}$:

$$I(t) = I_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{mit} \quad I_\infty = U_0/R$$

U_0 angelegte Spannung, R Widerstand
 t Zeit nach dem Anlegen der Spannung U_0
 τ Zeitkonstante

I_∞ Stromstärke nach Beendigung des Feldaufbaues

Feldstärke $H(t)$ der Spule:

$$H(t) = H_\infty (1 - e^{-t/\tau})$$

H_∞ Feldstärke nach Beendigung des Feldaufbaus

Abbau des Feldes

Momentane Stromstärke $I(t)$ in der Spule:

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

I_0 Strom zur Zeit 0
 t Zeit nach Beginn des Feldabbaus
 τ Zeitkonstante

Feldstärke $H(t)$ der Spule:

$$H(t) = H_0 e^{-t/\tau}$$

H_0 Feldstärke zur Zeit 0

5.5 Wechselstrom

5.5.1 Grundgrößen

Momentanwerte u und i von Spannung und Strom (sinusförmig)

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_{u,0}); \quad i = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_{i,0})$$

\hat{u} Scheitelwert der Wechselspannung (Spannungsamplitude)
 \hat{i} Scheitelwert des Wechselstromes (Stromamplitude)
 ω Kreisfrequenz, t Zeit

Phasenwinkel $\varphi_u(t)$ und $\varphi_i(t)$ von Spannung und Strom

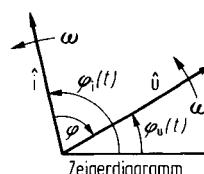
$$\varphi_u(t) = \omega t + \varphi_{u,0}; \quad \varphi_i(t) = \omega t + \varphi_{i,0}$$

$\varphi_{u,0}$ Nullphasenwinkel der Spannung
 $\varphi_{i,0}$ Nullphasenwinkel des Stromes

Phasenverschiebungswinkel φ

$$\varphi = \varphi_u(t) - \varphi_i(t) = \varphi_{u,0} - \varphi_{i,0}$$

$$\varphi = \text{konstant}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$



Effektivwerte U und I von Spannung und Strom (allgemein periodisch)

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

T Dauer einer Periode
 u, i Momentanwerte von Spannung und Strom

Speziell sinusförmiger Wechselstrom und doppelweggleichgerichteter Wechselstrom:

$$U = \frac{1}{2} \sqrt{2} \hat{u}; \quad I = \frac{1}{2} \sqrt{2} \hat{i}$$

\hat{u}, \hat{i} Scheitelwerte von Spannung und Strom

Mittelwerte \bar{u} und \bar{i} von Spannung und Strom (allgemein periodisch)

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt; \quad \bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$$

Speziell sinusförmiger Wechselstrom:

$$\bar{u} = 0; \quad \bar{i} = 0$$

Speziell doppelweggleichgerichteter Wechselstrom:

$$\bar{u} = \frac{2}{\pi} \hat{u}; \quad \bar{i} = \frac{2}{\pi} \hat{i}$$

5.5.2 Widerstand und Leitwert

Scheinwiderstand (Impedanz) Z

$$Z = \frac{U}{I}$$

Scheinleitwert (Admittanz) Y

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{U}$$

Speziell: Sinusförmiger Wechselstrom mit der Kreisfrequenz ω

$$Z = \frac{\hat{U} e^{j(\omega t + \varphi_{u,0})}}{\hat{I} e^{j(\omega t + \varphi_{i,0})}} = Z e^{j\varphi}; \quad Z = R + jX; \quad Z = |Z|$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \tan \varphi = \frac{X}{R}$$

$$R = Z \cos \varphi$$

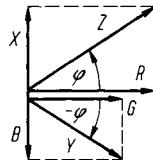
$$X = Z \sin \varphi$$

$$Y = \frac{1}{Z} = Y e^{-j\varphi}; \quad Y = G + jB$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}; \quad \tan \varphi = -\frac{B}{G}$$

$$G = Y \cos(-\varphi) = \frac{\cos^2 \varphi}{R} = \frac{R}{Z^2}$$

$$B = Y \sin(-\varphi) = -\frac{\sin^2 \varphi}{X} = -\frac{X}{Z^2}$$



Einheit: 1Ω

U Effektivwert der Wechselspannung

Einheit: $1 \Omega^{-1} = 1 S$

I Effektivwert des Wechselstromes

φ Phasenverschiebungswinkel

Z komplexe Impedanz

j imaginäre Einheit ($j^2 = -1$)

Z Scheinwiderstand (Impedanz)

R Wirkwiderstand (Resistanz)

X Blindwiderstand (Reaktanz)

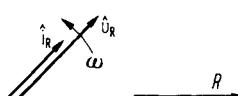
5.5.3 Passive lineare Schaltelemente

Verbraucherwiderstand

$$u_R = R i_R; \quad \varphi_R = 0$$

$$X_R = 0; \quad B_R = 0$$

$$Z = R; \quad Y = \frac{1}{R} = G$$



R bzw. G Widerstand bzw. Leitwert des Verbrauchers

u_R bzw. i_R momentane Spannung am bzw. momentaner Strom im Verbraucher

φ_R Phasenverschiebungswinkel zwischen u_R und i_R

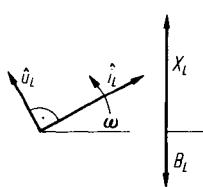
Z bzw. Y Scheinwiderstand bzw. Scheinleitwert

Induktionsspule (ohne Wärmeverluste)

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad \varphi_L = +\pi/2$$

$$X_L = \omega L; \quad B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

$$Z = \omega L; \quad Y = \frac{1}{\omega L}$$



L Induktivität der Spule (vgl. S. 80)

u_L bzw. i_L momentane Spannung an bzw. Strom in der Spule

X_L bzw. B_L Blindwiderstand bzw. Blindleitwert

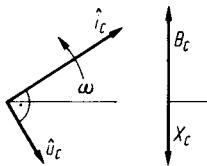
φ_L Phasenverschiebungswinkel zwischen u_L und i_L

Kondensator (ohne Wärmeverluste)

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad \varphi_C = -\pi/2$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C}; \quad B_C = \omega C$$

$$Z = \frac{1}{\omega C}; \quad Y = \omega C$$



C Kapazität des Kondensators
i_C bzw. *u_C* (Verschiebungs-)Strom im bzw. Spannung am Kondensator
X_C bzw. *B_C* Blindwiderstand bzw. Blindleitwert des Kondensators
φ_C Phasenverschiebungswinkel zwischen *u_C* und *i_C*
Z bzw. *Y* Scheinwiderstand bzw. Scheinleitwert

5.5.4 Wechselstromkreis mit passiven linearen Schaltelementen

Gesetz von Ohm

Die Stromstärke *I* ist bei konstanter Temperatur proportional zur Spannung *U*.

$$I = YU$$

$$U = ZI$$

Y Scheinleitwert, *Z* Scheinwiderstand
U, I Effektivwerte von Spannung und Strom

Wechselstromleistung

Einheit: 1 VA = 1 W

p momentane Leistung

u, i Momentanwerte von Spannung und Strom

\bar{p} mittlere Leistung in der Periode *T*

P Wirkleistung

P Wirkleistung

$$U = U e^{j\varphi_{u,o}}, \quad I^* = I e^{-j\varphi_{i,o}}$$

Re Realteil, Im Imaginärteil

φ Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom (S. 82)

$\cos \varphi$ Leistungsfaktor, *R* Wirkwiderstand

G Wirkleitwert, *Q* Blindleistung

X Blindwiderstand, *B* Blindleitwert

S Scheinleistung

Speziell sinusförmiger Wechselstrom:

$$P = UI \cos \varphi = \operatorname{Re}(U I^*)$$

$$P = I^2 R = U^2 G$$

$$Q = UI \sin \varphi = \operatorname{Im}(U I^*)$$

$$Q = I^2 X = U^2 B$$

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Serienschaltung von Verbraucher, Spule und Kondensator

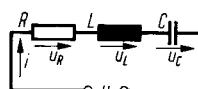
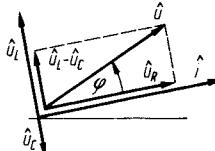
(vgl. Serienschwingkreis, S. 87, 88)

$$u = u_R + u_L + u_C$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$X = X_L + X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$



u_R, u_L, u_C Spannung am Verbraucher mit dem Widerstand *R* (hier gleich Wirkwiderstand der Schaltung), der Spule mit der Induktivität *L* und dem Kondensator mit der Kapazität *C*

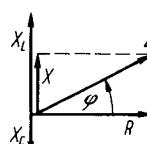
Z Scheinwiderstand

X Blindwiderstand

X_L bzw. *X_C* Blindwiderstand von Spule bzw. Kondensator

Speziell Maximum von \hat{i} :

$$\varphi = 0; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad Z = R$$



φ Phasenverschiebungswinkel zwischen Gesamtspannung *u* und Gesamtstrom *i*

Parallelschaltung von Verbraucher, Spule und Kondensator

$$i = i_R + i_L + i_C$$

$$Y = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

$$\tan(-\varphi) = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}$$

$$B = B_C + B_L = \omega C - \frac{1}{\omega L}$$

Speziell Minimum von \hat{i} :

$$\varphi = 0; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad Y = G$$

Sperrkreis

$$Y = \sqrt{\omega^2 C^2 - \frac{2\omega^2 LC - 1}{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

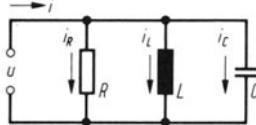
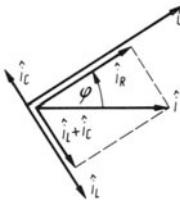
$$\tan \varphi = \frac{\omega L - (R^2 + \omega^2 L^2) \omega C}{R}$$

Speziell $\varphi = 0$:

$$Y = \frac{RC}{L}; \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

Speziell Minimum von \hat{i} :

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{L^2 C^2 + 2LC^3 R^2} - C^2 R^2}{L^2 C^2}}$$



i_R, i_L, i_C Strom durch den Verbraucher mit dem Widerstand R , der Spule mit der Induktivität L und dem Kondensator mit der Kapazität C

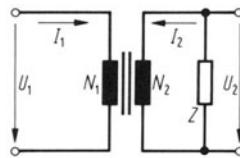
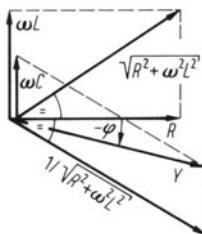
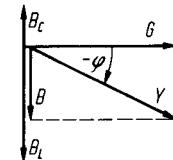
Y Scheinleitwert der Schaltung

G Leitwert des Verbrauchers (hier gleich Wirkleitwert der Schaltung)

B Blindleitwert

B_C bzw. B_L Blindleitwert von Kondensator bzw. Spule

φ Phasenverschiebungswinkel zwischen Gesamtspannung u und Gesamtstrom i



R Widerstand des Verbrauchers im Spulenzweig

C Kapazität des Kondensators

L Induktivität der Spule

Y Scheinleitwert der Schaltung

\hat{i} Scheitelwert des Gesamtstroms

φ Phasenverschiebungswinkel zwischen Gesamtspannung u und Gesamtstrom i

5.5.5 Transformator (Umspanner)

mit fester Kopplung und ohne Verluste

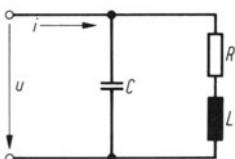
Kennzeichen

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_{\text{ges}}$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1$$

$$P_2 = U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

$$P_1 = P_2$$



Index 1: Primärkreis (Primärschlange)

Index 2: Sekundärkreis (Sekundärschlange)

ϕ magn. Fluß, P Wirkleistung

U bzw. I Effektivwert der Spannung bzw. des Stromes

φ Phasenverschiebungswinkel zwischen Spannung und Strom

Übersetzungsverhältnis \dot{u}

$$\dot{u} = U_1 : U_2 = N_1 : N_2$$

N_1, N_2 Windungszahlen der Spulen

Unbelasteter Transformator

$$Z \rightarrow \infty; \quad I_2 = 0; \quad \varphi_1 = \pi/2$$

Z Scheinwiderstand im Sekundärkreis

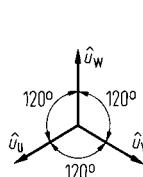
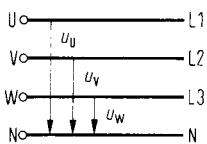
Stark belasteter Transformator

$$Z \rightarrow 0; \quad \varphi_1 = \varphi_2; \quad I_2 : I_1 = U_1 : U_2 = \dot{u}$$

\dot{u} Übersetzungsverhältnis

5.5.6 Dreiphasensystem (symmetrisch) mit gleichmäßiger Belastung

$$u_U + u_V + u_W = 0$$

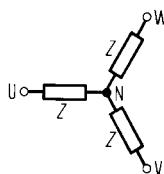


u_U, u_V, u_W Quellenspannungen an den Strangwicklungen U, V, W

Sternschaltung

$$I = I_{\text{Str}}$$

$$U = \sqrt{3} U_{\text{Str}}$$



Z Scheinwiderstand in den einzelnen Strängen

$U_{\text{Str}}, I_{\text{Str}}$ Effektivwert von Spannung an und Strom in Z (Strangspannung, Strangstrom)

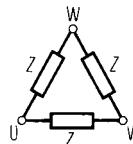
I Effektivwert des Stroms in den Außenleitern (Leiterstrom)

U Effektivwert der Spannung zwischen zwei Außenleitern (Leiterspannung)

Dreiecksschaltung

$$I = \sqrt{3} I_{\text{Str}}$$

$$U = U_{\text{Str}}$$



Drehstromleistung in Dreieck- und Sternschaltung

Wirkleistung im einzelnen Strang:

$$P_{\text{Str}} = U_{\text{Str}} I_{\text{Str}} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} U I \cos \varphi$$

$$\text{Gesamte Blindleistung: } Q = \sqrt{3} U I \sin \varphi$$

$$\text{Gesamte Scheinleistung: } S = \sqrt{3} U I$$

Gesamte Wirkleistung:

$$P = 3 P_{\text{Str}} = \sqrt{3} U I \cos \varphi$$

φ Phasenverschiebungswinkel zwischen Strangspannung und Strangstrom

5.6 Elektromagnetische Schwingungen

5.6.1 Grundgrößen

Ladung q , Strom i und Spannung u sind zeitabhängige skalare Größen.

Kreisfrequenz ω , Frequenz f , Schwingungsdauer T (S.35)

Spannung u_C am Kondensator

$$u_C = \frac{1}{C} q$$

C Kapazität des Kondensators
 q Ladung des Kondensators

Spannung u_R am Verbraucherwiderstand

$$u_R = R i$$

R Ohmscher Widerstand des Verbrauchers
 i Strom durch den Verbraucher

Spannung u_L an der Spule

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

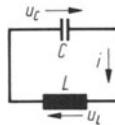
i Strom durch die Spule
 L Induktivität der Spule

5.6.2 Freie Schwingungen ohne Dämpfung

Differentialgleichung

$$L \ddot{q} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$$



q Ladung des Kondensators

i Stromstärke

L Induktivität, C Kapazität

ω_0 Kennkreisfrequenz

Einheit: 1 s^{-1}

Kennkreisfrequenz ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Schwingungsdauer T_0

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC} \quad (\text{Gleichung von Thomson})$$

L Induktivität, C Kapazität

Einheit: 1 s

L Induktivität, C Kapazität

Stromstärke i

$$i = \hat{i} \sin(\omega_0 t + \varphi_{i,0})$$

\hat{i} Scheitelwert der Stromstärke (Stromstärkeamplitude)
 $\varphi_{i,0}$ Nullphasenwinkel des Stromes

Energie des Magnetfeldes W_m

$$W_m = \frac{1}{2} L \hat{i}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_{i,0})$$

ω_0 Kennkreisfrequenz, L Induktivität

\hat{i} Scheitelwert des Stromes

$\varphi_{i,0}$ Nullphasenwinkel des Stromes

Energie des elektrischen Feldes W_e

$$W_e = \frac{1}{2} C \hat{u}^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_{i,0})$$

ω_0 Kennkreisfrequenz, C Kapazität

\hat{u} Scheitelwert der Kondensatorspannung

$\varphi_{i,0}$ Nullphasenwinkel des Stromes

Elektromagnetische Schwingungsenergie W_s

$$W_s = W_m + W_e = \text{konstant}$$

C Kapazität, L Induktivität

$$W_s = \frac{1}{2} L \hat{i}^2 = \frac{1}{2} C \hat{u}^2 = \frac{1}{2} \frac{\hat{q}^2}{C} = \frac{1}{2} \hat{q} \hat{u}$$

\hat{i} , \hat{u} und \hat{q} Scheitelwerte von Strom, Kondensatorspannung und -ladung

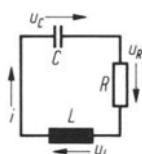
5.6.3 Freie Schwingungen mit Dämpfung im Serienschwingkreis

Differentialgleichung

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = 0$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$



q Ladung des Kondensators

i Stromstärke

R Ohmscher Widerstand, L Induktivität

C Kapazität

δ Abklingkoeffizient, ω_0 Kennkreisfrequenz

Einheit: 1 s^{-1}

Kennkreisfrequenz ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

L Induktivität, C Kapazität

Einheit: 1 s^{-1}

Abklingkoeffizient δ

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

R Ohmscher Widerstand, L Induktivität

Gütfaktor (Resonanzschärfe) Q_0

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{2\vartheta}$$

δ Abklingkoeffizient, ω_0 Kennkreisfrequenz
 ϑ Dämpfungsgrad (S. 37)

Periodische Fälle: $0 < \delta < \omega_0$

Stromstärke: $i = \hat{i} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_{i,0})$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 2\pi f_d$$

\hat{i} Scheitelwert der Stromstärke für $\delta = 0$
 $\varphi_{i,0}$ Nullphasenwinkel des Stromes
 ω_d Eigenkreisfrequenz
 ω_0 Kennkreisfrequenz, δ Abklingkoeffizient
 T_d Schwingungsdauer, f_d Frequenz

Logarithmisches Dekrement Λ
Dämpfungsverhältnis k

siehe 3.1, S. 38

Aperiodischer Grenzfall: $\delta = \omega_0$

Stromstärke: $i = i_0 e^{-\delta t}(1 + c t)$

i_0 Anfangstromstärke
 δ Abklingkoeffizient
 c Integrationskonstante

Aperiodische Fälle (Kriechfälle): $\delta > \omega_0$

Stromstärke: $i = i_0 e^{-\delta t} \sinh(\omega'_d t + \varphi'_{i,0})$

$$\omega'_d = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

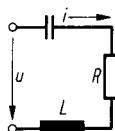
i_0 Scheitelwert des Stromes für $\delta = 0$
 δ Abklingkoeffizient
 $\varphi'_{i,0}$ Argument für $t = 0$
 ω_0 Kennkreisfrequenz

5.6.4 Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung im Serienschwingkreis (stationärer Zustand)

Anregende Spannung u

$$u = \hat{u} \sin \omega t$$

Differentialgleichung



\hat{u} Scheitelwert der anregenden Spannung
 ω Kreisfrequenz der anregenden Spannung

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = u$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt}$$

q Ladung des Kondensators, i Stromstärke
 L Induktivität, C Kapazität
 R Ohmscher Widerstand
 u anregende Spannung

Ladung q des Kondensators

$$q = \hat{q} \sin(\omega t - \psi)$$

\hat{q} Scheitelwert der Ladung
 ω Anregungskreisfrequenz
 ψ Phasenverschiebungswinkel zwischen Anregungsspannung und Kondensatorladung

Stationärer Strom i

$$i = \hat{i}(\omega) \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\varphi = \psi - \pi/2$$

$\hat{i}(\omega)$ Scheitelwert der Stromstärke
 φ Phasenverschiebungswinkel zwischen anregender Spannung und Strom

Phasenverschiebungswinkel φ zwischen Anregungsspannung und Strom

$$\cot \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

δ Abklingkoeffizient, ω_0 Kennkreisfrequenz (S. 87)
 ω Kreisfrequenz der anregenden Spannung

Amplitude $\hat{u}_C(\omega)$ der Kondensatorspannung

$$\hat{u}_C(\omega) = \frac{\hat{u}\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

Speziell Spannungsresonanz: \hat{u}_C maximal

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}; \quad \hat{u}_{C,\text{max}} = \frac{\hat{u}\omega_0^2}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}; \quad \varphi_{\text{res}} < 0$$

Resonanzüberhöhung Q_0 :

$$Q_0 = \frac{\hat{u}_{C,\text{max}}}{\hat{u}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q_0^2}}}$$

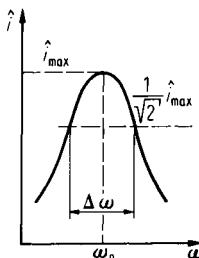
Amplitude $\hat{i}(\omega)$ des Stromes

$$\hat{i}(\omega) = \omega C \hat{u}_C(\omega)$$

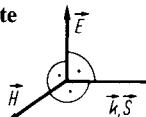
Speziell Stromresonanz: \hat{i} maximal

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0; \quad \hat{i}_{\text{max}} = \frac{\hat{u}}{R}; \quad \varphi_{\text{res}} = 0$$

$$\text{Bandbreite } \Delta\omega: \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q_0} = 2\delta$$

 \hat{u} Scheitelwert der Anregungsspannung ω_0 Kennkreisfrequenz ω Anregungskreisfrequenz δ Abklingkoeffizient \hat{u}_C Scheitelwert der Kondensatorspannung ω_{res} Resonanzkreisfrequenz φ_{res} Phasenverschiebungswinkel zwischen Anregungsspannung und Strom bei Resonanz Q_0 Gütefaktor (S. 88) ω Anregungskreisfrequenz, C Kapazität $\hat{u}_C(\omega)$ Scheitelwert der Kondensatorspannung \hat{u} Scheitelwert der Anregungsspannung ω_0 Kennkreisfrequenz R Verbraucherwiderstand δ Abklingkoeffizient φ_{res} Phasenverschiebungswinkel zwischen Anregungsspannung und Strom bei Resonanz Q_0 Gütefaktor**5.7 Elektromagnetische Wellen** (siehe auch Kapitel 3 und Abschn. 6.3)**5.7.1 Grundgrößen****Poyntingscher Vektor \vec{S} der Energiestromdichte**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Betragseinheit: 1 W/m² \vec{E} elektrische Feldstärke \vec{H} magnetische Feldstärke**Frequenz f , Kreisfrequenz ω , Wellenlänge λ** **Ausbreitungsvektor \vec{k}**

$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} = k; \quad \vec{k} \uparrow \uparrow \vec{S}$$

Ausbreitungs-(Phasen-)geschwindigkeit c

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\text{Speziell Vakuum: } c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Gruppengeschwindigkeit v_G einer Wellengruppe

$$v_G(\bar{k}) = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k=\bar{k}}; \quad \omega(k) = k \cdot c(k)$$

$$v_G(\bar{\lambda}) = c(\bar{\lambda}) - \bar{\lambda} \left(\frac{dc(\lambda)}{d\lambda} \right)_{\lambda=\bar{\lambda}}; \quad v_G(\bar{f}) = \frac{c(\bar{f})}{1 - \frac{\bar{f}}{c(\bar{f})} \left(\frac{dc(f)}{df} \right)_{f=\bar{f}}}$$

Speziell Wellen ohne Dispersion: $v_G = c$

siehe S. 35; 42

Betragseinheit: 1 m⁻¹ k Kreisfrequenz, λ Wellenlänge

Einheit: 1 m/s

 ϵ Permittivität des Mediums μ Permeabilität des Mediums ϵ_0 elektrische Feldkonstante μ_0 magnetische Feldkonstante c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit \bar{k} bzw. $\bar{\lambda}$ bzw. \bar{f} mittlere Kreisfrequenz bzw. Wellenlänge bzw. Frequenz des Spektrums der Wellengruppe $\omega(k)$ Kreisfrequenz $c(k)$ bzw. $c(\lambda)$ bzw. $c(f)$ Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von k bzw. λ bzw. f

Wellenwiderstand Z im Nichtleiter

$$Z = \frac{E_{\text{eff}}}{H_{\text{eff}}} = \sqrt{\mu/\epsilon}$$

Speziell Vakuum:

$$Z = Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376,73 \dots \Omega$$

Einheit: 1Ω

ϵ Permittivität

μ Permeabilität

$E_{\text{eff}}, H_{\text{eff}}$ Effektivwerte der Feldstärken

Energiedichte w

$$w = w_{\text{el}} + w_{\text{m}}$$

zeitliche Mittelwerte:

$$\bar{w}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \epsilon E_{\text{eff}}^2; \quad \bar{w}_{\text{m}} = \frac{1}{2} \mu H_{\text{eff}}^2; \quad \bar{w}_{\text{el}} = \bar{w}_{\text{m}}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_{\text{el}} + \bar{w}_{\text{m}} = \sqrt{\epsilon \mu} E_{\text{eff}} H_{\text{eff}}$$

ϵ_0 elektrische Feldkonstante
 μ_0 magnetische Feldkonstante

Einheit: 1 J/m^3

w_{el} Energiedichte des elektrischen Feldes (S. 69)

w_{m} Energiedichte des magnetischen Feldes (S. 78)

Intensität I einer fortlaufenden Welle

$$I = c \bar{w} = E_{\text{eff}} H_{\text{eff}} = E_{\text{eff}}^2 / Z = H_{\text{eff}}^2 Z$$

$E_{\text{eff}}, H_{\text{eff}}$ Effektivwerte der Feldstärken
 ϵ Permittivität des Mediums
 μ Permeabilität des Mediums

Einheit: 1 W/m^2

c Phasengeschwindigkeit
 Z Wellenwiderstand

5.7.2 Maxwellsche Gleichungen

Magnetische und induzierte Ringspannung \dot{u}_m und \dot{u}_i auf einem geschlossenen Weg s :

$$\dot{u}_m = \oint_s \vec{H} d\vec{s}; \quad \dot{u}_i = \oint_s \vec{E} d\vec{s}$$

\vec{H} bzw. \vec{E} magnetische bzw. elektrische Feldstärke

Magnetischer Fluss ϕ_A , Leitungsstrom i und Verschiebungsstrom i_D durch die von s umrandete Fläche A :

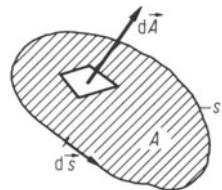
$$\phi_A = \int_A \vec{B} d\vec{A}; \quad i = \int_A \vec{S} d\vec{A}; \quad i_D = \frac{\partial}{\partial t} \int_A \vec{D} d\vec{A}$$

\vec{B} bzw. \vec{D} magnetische bzw. elektrische Flussdichte
 \vec{S} bzw. t Stromdichte bzw. Zeit

Materialgleichungen: $\vec{B} = \mu \vec{H}$; $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

μ bzw. ϵ Permeabilität bzw. Permittivität

1. Gleichung: $\dot{u}_m = i + i_D \Leftrightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{S} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$



2. Gleichung: $\dot{u}_i = -\frac{\partial}{\partial t} \phi_A \Leftrightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\pm Q$ bzw. ϱ Ladung bzw. Raumladungsdichte

Magnetischer und elektrischer Fluss ϕ und ψ_{ges} durch eine geschlossene Fläche A ($d\vec{A}$ zeigt nach außen):

$$\phi = \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\psi_{\text{ges}} = \oint_A \vec{D} d\vec{A} = \pm Q \Leftrightarrow \text{div } \vec{D} = \varrho$$

5.7.3 Freie ebene harmonische Wellen

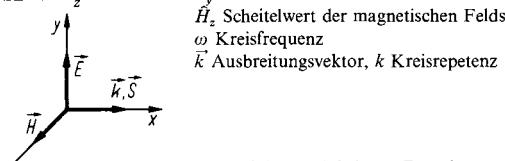
Elektrische bzw. magnetische Feldstärke E_y bzw. H_z

$$E_y(x, t) = \hat{E}_y \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

\hat{E}_y Scheitelwert der elektrischen Feldstärke

$$H_z(x, t) = \hat{H}_z \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$$

\hat{H}_z Scheitelwert der magnetischen Feldstärke



Energiestromdichte S_x

$$S_x(x, t) = E_y H_z \sin^2(\omega t - kx + \varphi_0)$$

ω Kreisfrequenz

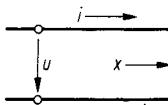
k Ausbreitungsvektor, k Kreisrepetenz

φ_0 Nullphasenwinkel von E_y und H_z

5.7.4 Parallelleitung ohne Dämpfung ($R \ll s \ll \lambda$)

Wellen(Telegraphen-)gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$



R Leiterradius, s Leiterabstand (Mitte-Mitte)

λ Wellenlänge, t Zeit

u bzw. i Spannung bzw. Strom an der Stelle x zur Zeit t

c Ausbreitungsgeschwindigkeit

Einheit: 1 m/s

Phasengeschwindigkeit c

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{L' C'}}$$

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

ϵ_r bzw. μ_r Permittivitätszahl bzw. Permeabilitätszahl des den Leiter umgebenden Stoffes

L' Leiterlänge

C' Kapazität (S. 70), L' Induktivität (S. 81)

$$L' = L/l; \quad C' = C/l$$

L' längenbezogene Induktivität

Einheit: 1 H/m

C' längenbezogene Kapazität

Einheit: 1 F/m

Wellenwiderstand Z

$$Z = \frac{U}{I} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Einheit: 1 Ω

U bzw. I Effektivwerte von Spannung bzw. Strom

Harmonische Wellen auf einer endlosen Leitung

\hat{u} bzw. \hat{i} Scheitelwerte von Spannung bzw. Strom

ω Kreisfrequenz, k Kreisrepetenz

$$u = \hat{u} \cos(\omega t - k x); \quad i = \hat{i} \cos(\omega t - k x)$$

Längenbezogener zeitlicher Mittelwert \bar{W}' der elektromagnetischen Energie:

Einheit: 1 J/m

$$\bar{W}' = \frac{1}{2} C' U^2 = \frac{1}{2} L' I^2$$

C' bzw. L' längenbezogene Kapazität bzw. Induktivität

Zeitlicher Mittelwert P der transportierten Leistung:

Einheit: 1 W

$$P = c \bar{W}' = \frac{1}{2} \frac{U^2}{Z} = \frac{1}{2} I^2 Z$$

c Phasengeschwindigkeit, Z Wellenwiderstand

Stehende harmonische Wellen auf einem Leitersystem

(Leiterende $x = 0$ ist Reflexionsstelle)

\hat{u} bzw. \hat{i} Scheitelwerte von Spannung bzw. Strom der ankommenden und reflektierten Welle

k Kreisrepetenz, ω Kreisfrequenz

Reflexion am offenen Ende:

$$u = 2\hat{u} \cos(k x) \cos(\omega t); \quad i = 2\hat{i} \sin(k x) \sin(\omega t)$$

\hat{u} bzw. \hat{i} Scheitelwerte von Spannung bzw. Strom der ankommenden und reflektierten Welle

Reflexion am kurzgeschlossenen Ende:

$$u = 2\hat{u} \sin(k x) \sin(\omega t); \quad i = 2\hat{i} \cos(k x) \cos(\omega t)$$

k Kreisrepetenz, ω Kreisfrequenz

Eigenfrequenzen f_n :

$$\text{beidseitig offen bzw. geschlossen: } f_n = \frac{c}{2l} n$$

l Länge der Leitung, c Phasengeschwindigkeit

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{einseitig offen: } f_n = \frac{c}{2l} \left(n - \frac{1}{2} \right)$$

5.8 Teilchen im elektromagnetischen Feld

5.8.1 Dynamische Grundgrößen für eine Punktladung

Positives Teilchen: Ladung $q > 0$; negatives Teilchen: Ladung $q < 0$. Betrag der Ladung: Q .

Lorentzkraft \vec{F}_L

$$\vec{F}_L = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_E = q\vec{E}; \quad \vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Betragseinheit: 1 N

\vec{E} bzw. \vec{B} elektrische Feldstärke bzw. magnetische Flussdichte

\vec{v} bzw. q Geschwindigkeit bzw. Ladung des Teilchens

\vec{F}_E bzw. \vec{F}_B Kraft im elektrischen bzw. magnetischen Feld

Bewegungsgleichung

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{p}}{dt}; \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

m dynamische (relativistische) Masse

\vec{p} (relativistischer) Impuls

m_0 Ruhemasse

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c_0}$$

Speziell $m = m_0 (v \ll c_0)$:

$$\vec{a} = \frac{q}{m_0} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

\vec{a} Beschleunigung des Teilchens

Speziell $\vec{E} = \vec{0}$: $m, v, p = \text{konstant}$

v Geschwindigkeit des Teilchens

Speziell $\vec{B} = \vec{0}$ oder $\vec{B} \parallel \vec{v}$: $\vec{F} = q\vec{E}$

\vec{E} elektrische Feldstärke

\vec{B} magnetische Flussdichte

q Ladung des Teilchens

Überführungsarbeit ΔW zwischen zwei Punkten des elektromagnetischen Feldes

$$\Delta W = q \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Einheit: 1 J

1 eV = $1,60219 \cdot 10^{-19}$ J

\vec{E} elektr. Feldstärke

\vec{r} Ortsvektor des Linienelementes $d\vec{r}$

Speziell elektrisches Potentialfeld, Magnetfeld beliebig:

$$\Delta W = q(\varphi_1 - \varphi_2); \quad |\Delta W| = Q U$$

φ_1 bzw. φ_2 elektrisches Potential im Feldpunkt P_1 bzw. P_2

U Spannung zwischen den Feldpunkten P_1 und P_2

Relativer Energiezuwachs ε

$$\varepsilon = \frac{W - W_0}{W_0} = \frac{Q U_b}{W_0}; \quad W = m c_0^2; \quad W_0 = m_0 c_0^2$$

W Gesamtenergie des Teilchens

W_0 Ruheenergie des Teilchens

U_b Spannung zur Beschleunigung des Teilchens aus der Ruhe bis zur Gesamtenergie W

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

Relativistischer Impuls p

$$p = m v = \sqrt{2 Q U_b m_0 (1 + \varepsilon/2)}$$

m Masse, v Geschwindigkeit des Teilchens (S. 28)

m_0 Ruhemasse

U_b Beschleunigungsspannung

ε relativer Energiezuwachs

Speziell $v \ll c_0$ bzw. $\varepsilon \ll 1$:

$$m = m_0; \quad v = \sqrt{\frac{2 Q U_b}{m_0}}; \quad p = \sqrt{2 Q U_b m_0}$$

5.8.2 Punktladungen im elektrischen Feld ($v \ll c_0$)

Bewegung im homogenen Feld $\vec{E} = \text{konstant}$

Beschleunigung \vec{a} : $\vec{a} = \frac{q}{m_0} \vec{E} = \text{konstant}$ q bzw. m_0 Ladung bzw. Ruhemasse des Teilchens

Geschwindigkeit \vec{v} : $\vec{v}(t) = \vec{a} t + \vec{v}_0$

Ort \vec{r} : $\vec{r}(t) = \frac{1}{2} \vec{a} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$

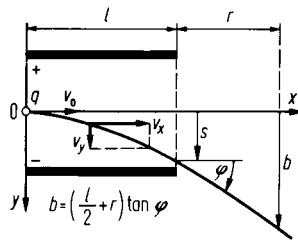
\vec{v}_0 bzw. \vec{r}_0 Geschwindigkeit bzw. Ort des Teilchens zur Zeit $t = 0$

Speziell Ablenk kondensator:

$$v_x = v_0 = \sqrt{\frac{2qU_b}{m_0}}; \quad x = v_0 t$$

$$v_y = \frac{qU}{m_0 d} t; \quad y = \frac{qU}{2m_0 d} t^2$$

$$s = \frac{q l^2}{2m_0 v_0^2 d} U; \quad \tan \varphi = \frac{q l}{m_0 d v_0^2} U$$



m_0 Ruhemasse,
 v_0 Eintrittsgeschwindigkeit des Teilchens
 U_b bzw. U Beschleunigungs- bzw. Platten Spannung
 d bzw. l Plattenabstand bzw. Feldlänge

Bewegung im Coulombfeld

(felderzeugende Ladung q_0 im Zentrum $r = 0$; vgl. Satellitenbewegung S. 24, 25)

Gesamtenergie W : $W = \frac{1}{2} m_0 v^2 + q \frac{q_0}{4\pi \epsilon_0 r} = \text{konstant}$

ϵ_0 elektrische Feldkonstante
 m_0 bzw. v Ruhemasse bzw. Geschwindigkeit des Teilchens mit der Ladung q
 r Abstand des Teilchens vom Zentrum
 ω momentane Winkelgeschwindigkeit des Teilchens

Drehimpuls L : $L = m_0 r^2 \omega = \text{konstant}$

5.8.3 Punktladungen im Magnetfeld

Speziell: homogenes Feld mit der Flußdichte $\vec{B} = \text{konstant}$ und Teilchengeschwindigkeit $\vec{v} \perp \vec{B}$. Die Teilchen durchlaufen Kreisbahnen.

Kreisradius R

$$R = \frac{p}{Q B}$$

p relativistischer Impuls des Teilchens
 Q Ladung des Teilchens

Umlaufdauer T

$$T = 2\pi \frac{m}{Q B}$$

m relativistische Masse des Teilchens

Zyklotronkreisfrequenz ω_c

$$\omega_c = \frac{Q B}{m} = \frac{2\pi}{T}$$

T Umlaufdauer
 m relativistische Masse des Teilchens

Geschwindigkeit v

$$v = \left[\left(\frac{m_0}{Q R B} \right)^2 + \left(\frac{1}{c_0} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit
 R Kreisradius
 m_0 Ruhemasse des Teilchens

5.9 Stromleitung

5.9.1 Stromstärke und Stromdichte bewegter geladener Teilchen

Strom I durch eine Fläche

$$I = \left| q_+ \frac{\Delta N_+}{\Delta t} \pm q_- \frac{\Delta N_-}{\Delta t} \right|$$

(+ Zeichen bei gleicher, - Zeichen bei entgegengesetzter Durchtrittsrichtung der Ladungsträger)

Anzahldichte n der Ladungsträger

$$n_+ = \frac{\Delta N_+}{\Delta V} > 0; \quad n_- = \frac{\Delta N_-}{\Delta V} > 0$$

Speziell n_+ bzw. n_- = konstant:

$$n_+ = \frac{N_+}{V}; \quad n_- = \frac{N_-}{V}$$

Raumladungsdichte ϱ

$$\varrho = \varrho_+ + \varrho_-$$

$$\varrho_+ = n_+ q_+ > 0$$

$$\varrho_- = n_- q_- < 0$$

Stromdichte \vec{J} (vgl. S. 72)

$$\vec{J} = \varrho_+ \vec{v}_+ + \varrho_- \vec{v}_-$$

Einheit: 1 A

ΔN_+ bzw. ΔN_- Anzahl der positiven bzw. negativen Ladungsträger, die in der Zeit Δt durch die Fläche treten
 $q_+ > 0$ bzw. $q_- < 0$ Ladung eines positiven bzw. negativen Ladungsträgers

Einheit: 1 m⁻³

ΔN_+ bzw. ΔN_- Anzahl der positiven bzw. negativen Ladungsträger im Volumen ΔV

N_+ bzw. N_- Anzahl der positiven bzw. negativen Ladungsträger im Volumen V

Einheit: 1 C/m³

ϱ_+ bzw. ϱ_- Raumladungsdichte der positiven bzw. negativen Ladungsträger
 n_+ bzw. n_- Anzahldichte der positiven bzw. negativen Ladungsträger

Betragseinheit: 1 A/m²

\vec{v}_+ bzw. \vec{v}_- Geschwindigkeit, ϱ_+ bzw. ϱ_- Raumladungsdichte der positiven bzw. negativen Ladungsträger

5.9.2 Modell der Stromleitung in Materie

Beweglichkeit b (Tab. 36)

Einheit: 1 m² V⁻¹ s⁻¹

$$b = \frac{v_D}{E} \geq 0$$

v_D Driftgeschwindigkeit des Ladungsträgers
 E elektrische Feldstärke

Stromdichte \vec{J}

Betragseinheit: 1 A/m²

$$\vec{J} = \varrho_+ v_{D+} + \varrho_- v_{D-}$$

ϱ_+ bzw. ϱ_- Raumladungsdichte der positiven bzw. negativen Ladungsträger

$$\vec{J} = (\varrho_+ b_+ - \varrho_- b_-) \vec{E}$$

γ elektrische Leitfähigkeit

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

\vec{E} (äußere) elektrische Feldstärke

(Gesetz von Ohm für γ = konstant)

v_{D+} bzw. v_{D-} Driftgeschwindigkeit der positiven bzw.

negativen Ladungsträger

Elektrische Leitfähigkeit γ

Einheit: 1 Ω⁻¹ m⁻¹

$$\gamma = \varrho_+ b_+ - \varrho_- b_-$$

$$1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1} = 10^{-6} \Omega^{-1} \text{ m}^1 \text{ mm}^{-2}$$

b_+ bzw. b_- Beweglichkeit der positiven bzw. negativen Ladungsträger

5.9.3 Stromleitung in Elektrolyten

Elektrische Leitfähigkeit γ

$$\gamma = e(z_+ n_+ b_+ + z_- n_- b_-)$$

$$z_+ n_+ = z_- n_-$$

e Elementarladung

z_+ bzw. z_- Wertigkeit, n_+ bzw. n_- Anzahldichte, b_+ bzw. b_- Beweglichkeit der positiven bzw. negativen Ladungsträger (alle Größen positiv)

1. Gesetz von Faraday

Masse m des an einer Elektrode umgesetzten Stoffes:

$$m = \ddot{A} I t$$

$$\ddot{A} = \frac{M_r u}{z e} = 1,03643 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg}}{\text{As}} \frac{M_r}{z}$$

\ddot{A} elektrochemisches Äquivalent des umgesetzten Stoffes
 I Stromstärke, t Zeit, e Elementarladung

z Wertigkeit des umgesetzten Ions mit der relativen Molekülmasse M_r

u atomare Masseneinheit

2. Gesetz von Faraday

Transportierte Ladung Q zu einer Elektrode:

$$Q = F z v; \quad F = N_A e = 9,64853 \cdot 10^7 \frac{\text{A s}}{\text{kmol}}$$

F Faradaykonstante, N_A Avogadrokonstante

v Stoffmenge des an einer Elektrode umgesetzten Stoffes

z Wertigkeit der Ionen des umgesetzten Stoffes

e Elementarladung

5.9.4 Stromleitung in Halbleitern

Temperaturspannung U_T

$$U_T = \frac{k T}{e} = 0,8617 \cdot 10^{-4} \frac{\text{V}}{\text{K}} T$$

Einheit: 1 V

k Boltzmannkonstante
 T absolute Temperatur
 e Elementarladung

Einheit: 1 m²/s

b Beweglichkeit, U_T Temperaturspannung

Diffusionskoeffizient D beweglicher Ladungsträger

$$D = b U_T$$

Einheit: 1 m

Diffusionslänge L

$$L = \sqrt{D \tau}$$

Einheit: 1 m⁻³ (cm⁻³)

Intrinsidichte n_i

(Konzentration der Eigenleitungselektronen)

$$n_i = \sqrt{n_+ n_-} = 2 \left(\frac{2\pi k T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} (m_+^* m_-^*)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\Delta W_0}{2kT}}$$

n_- bzw. n_+ Anzahldichte der Leitungs- bzw. Defektelektronen

k Boltzmannkonstante, h Wirkungsquantum

m_+^* bzw. m_-^* effektive Masse eines Leitungs- bzw. Defektelektrons

ΔW_0 Energiefülke zwischen Valenz- und Leitfähigkeitsband

Speziell bei 300 K:

$$\text{Germanium: } n_i = 2,4 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$

$$\text{Silicium: } n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

U_T Temperaturspannung

n_A bzw. n_D Anzahldichte der Akzeptoren bzw. Donatoren

n_i Intrinsidichte

C_D , C_F temperaturabhängige Konstanten

ΔW_0 Energiefülke zwischen Valenz- und Leitfähigkeitsband

Abrupter (nicht entarteter) pn-Übergang

$$\text{Diffusionsspannung } U_D: \quad U_D = U_T \ln \frac{n_A n_D}{n_i^2}$$

$$\text{Diffusionsstrom } I_D: \quad I_D = C_D e^{-U_D/U_T}$$

$$\text{Feldstrom } I_F: \quad I_F = C_F e^{-\Delta W_0/kT}$$

5.9.5 Stromleitung in Metallen und Legierungen

Elektrische Leitfähigkeit γ (S. 73; 94)

$$\gamma = e n b; \quad n = \text{konstant}$$

$$\frac{\lambda}{\gamma} = A \cdot T;$$

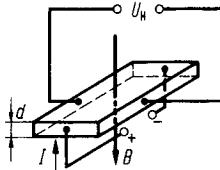
(Gesetz von Wiedemann-Franz)

Supraleitung bei $T < T_s$: $\gamma \rightarrow \infty$ bzw. $\varrho \rightarrow 0$

Hall-Spannung U_H

$$U_H = |R_H| \frac{I}{d} B$$

$$R_H \approx -\frac{1}{e n}$$



Einheit: $1 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$

e Elementarladung

n bzw. b Anzahldichte bzw. Beweglichkeit der freien Leitungselektronen

A Konstante

λ Wärmeleitfähigkeit (S. 61, Tab. 25)

T absolute Temperatur

T_s Sprungtemperatur

Thermospannung U_{th}

$$U_{th} = a \Delta T + b (\Delta T)^2$$

(Seebeck-Effekt)

Thermokraft $U_{th}/\Delta T$

$$\frac{U_{th}}{\Delta T} \approx a$$

Einheit: 1 V

R_H Hall-Konstante (Tab. 37)

B magnetische Flussdichte

I Querstromstärke, e Elementarladung

n Anzahldichte der Ladungsträger

d Plattendicke

Einheit: 1 V

ΔT Temperaturdifferenz der Kontaktstellen der beiden Leiter

a, b Materialkonstanten für das Leiterpaar

Einheit: 1 VK^{-1}

5.9.6 Elektronenemission aus Festkörpern

Glühelektrischer Effekt

Stromdichte J der austretenden Glühelektronen:

$$J = A_r T^2 e^{-\Delta W_A/kT}$$

(Gesetz von Richardson)

Äußerer Photoeffekt: siehe S. 112

T absolute Temperatur der Glühelektrode

A_r Mengenkonstante, k Boltzmannkonstante

ΔW_A thermische Austrittsarbeit (Tab. 38)

5.9.7 Nichtlineare passive Schaltelemente

Differentieller (Innen-)Widerstand r eines Zweipols

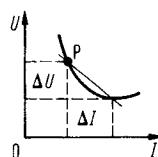
$$r(P) \approx \frac{\Delta U}{\Delta I} \leqslant 0$$

Einheit: 1Ω

U Spannungsabfall am Leiter

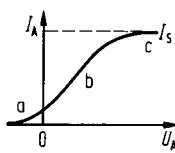
I Strom durch den Leiter

P Arbeitspunkt



Röhrendiode

a) Anlaufstrom: $I_A = I_s e^{U_A/U_T}$

 I_A Anodenstrom, U_A Anodenspannung U_T Temperaturspannung I_s Sättigungsstrom K Konstante

a, b, c Arbeitsbereiche

b) Raumladungsstrom: $I_A = K U_A^{3/2}$

(Gesetz von Schottky-Langmuir)

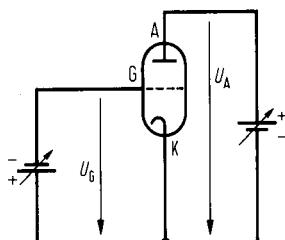
c) Sättigungsstrom: $I_A = I_s$ (ohne Schottky-Effekt)

Statische Kenngrößen der TriodeInnenwiderstand R_i :

$$R_i = \left| \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} \right|_{U_G}$$

Steilheit S :

$$S = \left| \frac{\Delta I_A}{\Delta U_G} \right|_{U_A}$$



A Anode, G Gitter, K Kathode

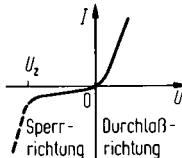
Durchgriff D :

$$D = \left| \frac{\Delta U_G}{\Delta U_A} \right|_{I_A}$$

 I_A Anodenstrom
 U_A Anodenspannung, U_G GitterspannungErläuterung: z.B. $|\Delta I_A / \Delta U_G|_{U_A}$: ΔI_A Anodenstromänderung, die durch die Gitterspannungsänderung ΔU_G bewirkt wird bei $U_A = \text{const}$ Formel von Barkhausen: $SD R_i = 1$ **Halbleiterdiode**

$I = I_{sp} (e^{gU/U_T} - 1) \quad \text{für } U > U_z$

$I_{sp} \approx I_F; \quad 0,5 \lesssim g \leq 1,0$

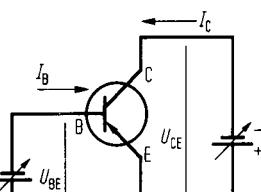
 U_z Durchbruchspannung (Zenerspannung)
 U_T Temperaturspannung (S. 95) I_{sp} Sperrsättigungsstrom I_F Feldstrom (S. 95)**Statische Kenngrößen des bipolaren Transistors (pnp) bei Emitterschaltung**Steilheit S :

$$S = \left| \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{BE}} \right|_{U_{CE}}$$

E Emitter, B Basis, C Kollektor

Kurzschluß-Stromverstärkung β :

$$\beta = \left| \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B} \right|_{U_{CE}}$$

 I_B bzw. I_C Basis- bzw. Kollektorstrom
 U_{BE} bzw. U_{CE} Basis-Emitter- bzw. Kollektor-Emitter-SpannungEingangsleitwert G_{ein} :

$$G_{ein} = \left| \frac{\Delta I_B}{\Delta U_{BE}} \right|_{U_{CE}}$$

Erläuterung: z.B. $|\Delta I_B / \Delta U_{BE}|_{U_{CE}}$: ΔI_B Basisstromänderung, die durch die Änderung ΔU_{BE} der Basis-Emitterspannung bewirkt wird bei $U_{CE} = \text{const}$ Ausgangsleitwert G_{aus} bzw. G_{aus}^* :

$$G_{aus} = \left| \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}} \right|_{U_{BE}}; \quad G_{aus}^* = \left| \frac{\Delta I_C}{\Delta U_{CE}} \right|_{I_B}$$

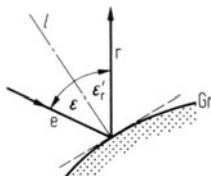
6 Optik

6.1 Reflexion und Brechung

Reflexionsgesetz

$$\varepsilon'_r = -\varepsilon$$

Einfallender Strahl e , Flächenlot l und reflektierter Strahl r liegen in einer Ebene.
Winkelvorzeichen siehe Abschn. 6.2.



Gr Grenzfläche zwischen den Medien

ε Einfallswinkel

ε'_r Reflexionswinkel bei gerichteter (regelmäßiger) Reflexion

Brechzahl n eines Stoffes (Tab. 39)

1. Absolute Brechzahl n_{abs} :

Einheit: 1

$$n_{abs} = \frac{c_0}{c} = \frac{\lambda_0}{\lambda}; \quad c_0 = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

λ_0 bzw. λ Wellenlänge des Lichtes im Vakuum bzw. im Stoff

c_0 bzw. c Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bzw. im Stoff

Speziell Luft bei 20 °C und 1013 hPa:

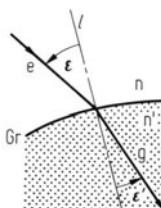
$$n_{abs, L} \approx 1,0003; \quad c_L \approx 299\,700 \text{ km/s}$$

2. Auf Luft bezogene Brechzahl n :

c_L Lichtgeschwindigkeit in Luft
 λ_L Wellenlänge des Lichtes in Luft
 n_{abs} absolute Brechzahl des Stoffes

$$n = \frac{c_L}{c} = \frac{\lambda_L}{\lambda} = \frac{n_{abs}}{n_{abs, L}}; \quad n \approx n_{abs}$$

Speziell Luft: $n = 1$



ε Einfallswinkel

ε' Brechungswinkel bei gerichteter Brechung

n bzw. n' Brechzahl des Stoffes vor bzw. hinter der brechenden Grenzfläche Gr

c bzw. c' Lichtgeschwindigkeit vor bzw. hinter Gr

Brechungsgesetz ($0^\circ < \varepsilon < 90^\circ$)

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{n'}{n} = \frac{c}{c'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

Einfallender Strahl e , Flächenlot l und gebrochener Strahl g liegen in einer Ebene.

Speziell Grenzfläche Luft → Stoff: $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = n'$

ε Einfallswinkel

ε' Brechungswinkel bei gerichteter Brechung

n bzw. n' Brechzahl des Stoffes vor bzw. hinter der brechenden Grenzfläche Gr

c bzw. c' Lichtgeschwindigkeit vor bzw. hinter Gr

Grenzfläche Stoff → Luft: $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{1}{n}$

λ bzw. λ' Wellenlänge des Lichtes vor bzw. hinter Gr

ε bzw. ε' Einfalls- bzw. Brechungswinkel

Totalreflexion ($\varepsilon \geq \varepsilon_G$; $n > n'$)

$$\sin \varepsilon_G = \frac{n'}{n}$$

Speziell Grenzfläche Stoff → Luft: $\sin \varepsilon_G = \frac{1}{n}$

ε Einfallswinkel

ε_G Grenzwinkel der Totalreflexion (Tab. 40)

n bzw. n' Brechzahlen vor bzw. hinter der brechenden Fläche

Reflexions- und Transmissionsgrad

der Grenzfläche zweier nicht absorbierender Stoffe bei senkrechtem Einfall und gerichteter Reflexion

Reflexionsgrad ϱ

Einheit: 1

$$\varrho = \left(\frac{n - n'}{n + n'} \right)^2$$

n bzw. n' Brechzahlen der Stoffe

Transmissionsgrad τ

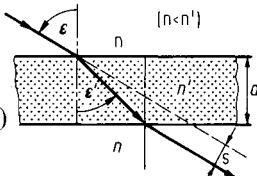
Einheit: 1

$$\tau = 1 - \varrho = \frac{4nn'}{(n+n')^2}$$

n bzw. n' Brechzahlen der Stoffe

Planparallele Platte

Parallelverschiebung s :



d Plattendicke

ε bzw. ε' Einfalls- bzw. Brechungswinkel
 n bzw. n' Brechzahlen der beiden Medien

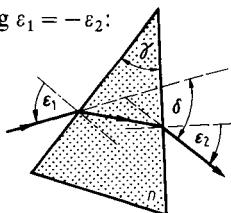
$$s = \frac{d \sin |\varepsilon - \varepsilon'|}{\cos \varepsilon}; \quad (\varepsilon \neq 90^\circ)$$

$$s = d \sin \varepsilon \left(1 - \frac{\cos \varepsilon}{\sqrt{(n'/n)^2 - \sin^2 \varepsilon}} \right)$$

Prisma

Speziell symmetrischer Strahlengang $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$:

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\gamma + \delta)}{\sin(\gamma/2)}; \quad \delta \text{ minimal}$$



ε_1 bzw. ε_2 Einfalls- bzw. Ausfallswinkel

γ brechender Winkel des Prismas

δ Ablenkungswinkel

n Brechzahl des Prismas

Speziell $\varepsilon_1 \ll 1$; $\gamma \ll 1$:

$$\delta \approx (n - 1) \gamma$$

Dispersion d eines Stoffes

Frequenzbezogene Dispersion d_f

Einheit: 1 s

$$d_f = \frac{dn}{df}$$

n (auf Luft bezogene) Brechzahl

f Frequenz des Lichtes

Einheit: 1 m^{-1}

Wellenlängenbezogene Dispersion d_λ

λ_L Wellenlänge des Lichtes in Luft

dn Änderung der Brechzahl n im Wellenlängen- bzw. Frequenzintervall von λ bis $\lambda + d\lambda$ bzw. von f bis $f + df$

Normale Dispersion: $d_f > 0$; $d_\lambda < 0$

n_C Brechzahl für $\lambda_C = 656,3 \text{ nm}$

Anormale Dispersion: $d_f < 0$; $d_\lambda > 0$

n_F Brechzahl für $\lambda_F = 486,1 \text{ nm}$

Mittlere Dispersion ϑ_m : $\vartheta_m = n_F - n_C$

n_D Brechzahl für $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$

Relative Dispersion ϑ_{rel} : $\vartheta_{rel} = \frac{\vartheta_m}{n_D - 1}$

Abbe-Zahl v :

$$v = \frac{1}{\vartheta_{rel}}$$

6.2 Paraxiale Abbildung

6.2.1 Allgemeines

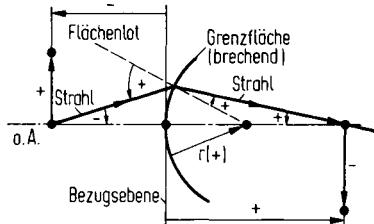
Optische Achse:

Verbindungsline der Krümmungsmittelpunkte der Grenzflächen des abbildenden Systems. Abkürzung: o.A.; in der Zeichnung:

Vorzeichen: Strecken parallel zur o.A. werden in Strahlrichtung, das ist von links nach rechts, positiv gezählt und zwar vom Scheitelpunkt des Spiegels bzw. der brechenden Einzelfläche und von den Haupt- und Brennebenen der Linsen aus. Strecken senkrecht zur o.A. werden nach oben positive gezählt und zwar von der o.A. aus. Winkel von Strahlen sind positiv, wenn entgegen dem Uhrzeigersinn gedreht wird; Bezugsschenkel ist in Objekt- und Bildraum der Strahl selbst, an reflektierender und brechender Fläche das Flächenlot.

Krümmungsradius r abbildender Flächen

$r > 0$: konvexe Fläche; $r < 0$: konkave Fläche; $|r| = \infty$: ebene (plane) Fläche



Konjugierte Größen

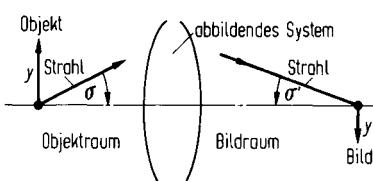
Das sind Größenpaare in Objekt- und Bildraum, die durch Abbildung auseinander hervorgehen. Sie werden mit gleichem Buchstaben bezeichnet; die Größe im Bildraum erhält ein zusätzliches „'“, z.B. y, y' oder σ, σ' . (Ausnahme: Objekt- und bildseitige Brennweite f und f' sind nicht konjugiert zueinander.)

Winkelverhältnis γ

$$\gamma = \frac{\sigma'}{\sigma}$$

Abbildungsmaßstab β

$$\beta = \frac{y'}{y}$$



Einheit: 1

σ, σ' objekt- bzw. bildseitiger Strahlwinkel

Einheit: 1

y, y' Objekt- bzw. Bildgröße

Reelles Bild: $\beta < 0$; virtuelles Bild: $\beta > 0$

Speziell: Konvexspiegel, brechende Einzelfläche mit $f' < 0$ und Zerstreuungslinse:

$0 < \beta < 1$ für alle Objektlagen

6.2.2 Spiegel und brechende Einzelflächen

Geometrische Kenngrößen einer Grenzfläche

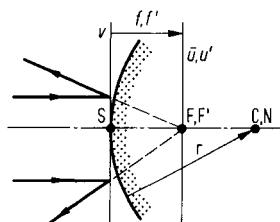
r bzw. C Krümmungsradius bzw. -mittelpunkt der Grenzfläche

v bzw. S Scheitelebene bzw. -punkt; N Knotenpunkt

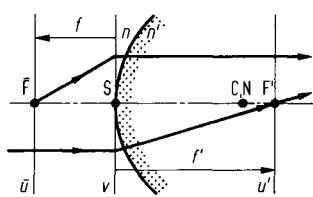
\bar{F}, F' bzw. f, f' objekt- und bildseitiger Brennpunkt bzw. Brennweite

\bar{u}, u' objekt- und bildseitige Brennebene

n, n' Brechzahl des Mediums in Objekt- und Bildraum



Kenngrößen eines Konvexspiegels



Kenngrößen einer brechenden Konvexfläche (sammelnd)

Bild- und objektseitige Brennweite f' und f **Einheit:** 1 m

Sphärischer Spiegel	ebener Spiegel	sphärische brechende Fläche	ebene brechende Fläche
$f' = f = \frac{r}{2}$	$f' = f = \pm \infty$	$f' = \frac{r}{1 - n/n'} = -\frac{n'}{n} f$	$f' = -f = \pm \infty$

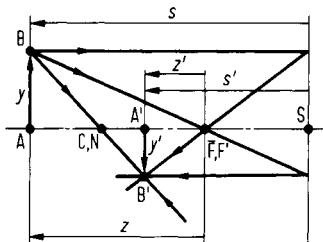
Konkavspiegel: $f' < 0$; Konvexspiegel: $f' > 0$ **Bildkonstruktion**

A, A' bzw. B, B' axialer bzw. außeraxialer Objekt- und Bildpunkt

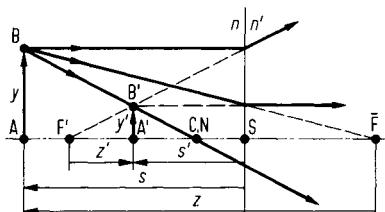
y, y' Objekt- und Bildgröße, s, s' objekt- und bildseitige Schnittweite

z, z' brennebenenbezogene Objekt- und Bildweite, n, n' objekt- und bildseitige Brechzahl

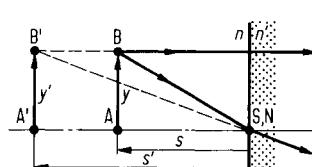
S Scheitelpunkt, N Knotenpunkt, C Krümmungsmittelpunkt



Konkavspiegel, reelles Bild



brechende Konkavfläche, virtuelles Bild

brechende ebene Fläche, virtuelles Bild ($s' = (n'/n)s$)**Abbildungsgleichungen und Maßstäbe der Abbildung**

abbildende Fläche	scheitelbezogene Abbildungsgleichung	Abbildungsmaßstab β	Winkelverhältnis γ
sphärische Grenzfläche	$f/s + f'/s' = 1$	$\beta = -f/z = -z'/f'$	$\gamma = z/f' = f/z'$
ebener Spiegel	$s' = -s$	$\beta = 1$	$\gamma = -1$
ebene brechende Fläche	$n/s - n'/s' = 0$	$\beta = 1$	$\gamma = n/n'$

Newton'sche Abbildungsgleichung für sphärische Grenzflächen: $z z' = ff'$

6.2.3 Linsen

Kardinalgrößen und -punkte

r_1 bzw. C_1 bzw. S_1 Krümmungsradius bzw. -mittelpunkt bzw. Scheitelpunkt der objektseitigen Linsenfläche
 r_2 bzw. C_2 bzw. S_2 Krümmungsradius bzw. -mittelpunkt bzw. Scheitelpunkt der bildseitigen Linsenfläche

H, H' bzw. h, h' objekt- und bildseitige Hauptpunkte bzw. -ebenen

\bar{F}, F' bzw. \bar{u}, u' objekt- und bildseitige Brennpunkte bzw. -ebenen

f, f' objekt- und bildseitige Brennweite, N, N' objekt- und bildseitiger Knotenpunkt

n_1, n_2' Brechzahl des Mediums in Objekt- und Bildraum, n Brechzahl des Linsenmaterials, d Linsendicke

Schnittweiten s_{1H} und $s_{2H'}$ der Hauptpunkte H und H'

$$s_{1H} = \left(1 - \frac{n_2'}{n}\right) \frac{df}{r_2} \quad d = \overline{S_1 S_2} > 0$$

$$s_{2H'} = -\left(1 - \frac{n_1}{n}\right) \frac{df'}{r_1}$$

Brennpunktbezogene Weiten z_N und $z_{N'}$ der Knotenpunkte N und N'

$$z_N = f'; \quad z_{N'} = f$$

Brechkraft D

$$D = \frac{1}{f'}$$

Bild- und objektseitige Brennweite f' und f

$$f' = \frac{n_2' r_1 r_2}{r_2(n-n_1) - (n-n_2') \left[r_1 - \left(1 - \frac{n_2'}{n}\right) d \right]}; \quad f = -\frac{n_1}{n_2'} f'$$

Sammellinse: $f' > 0$; Zerstreuungslinse: $f' < 0$

Speziell Linse in Luft: $n_1 = n_2' = 1$

$$f' = \frac{r_1 r_2}{(n-1) \left[r_2 - r_1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) d \right]}; \quad f = -f'; \quad N = H; \quad N' = H'$$

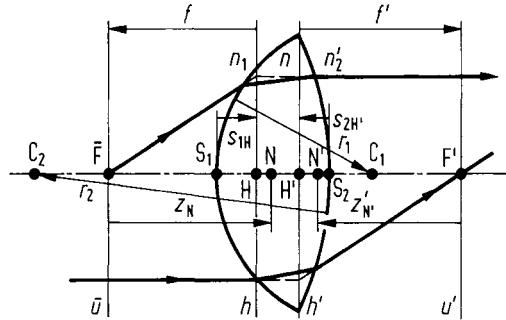
Speziell Dünne Linse in Luft: $d \approx 0$

$$f' \approx \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)}; \quad f = -f'; \quad H \approx H' \approx N \approx N' \approx S_1 \approx S_2$$

Bildkonstruktion

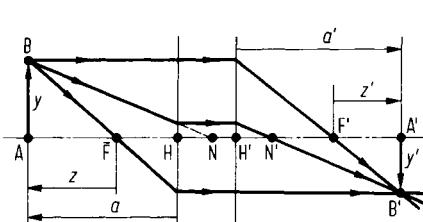
A, A' bzw. B, B' axialer bzw. außeraxialer Objekt- und Bildpunkt

a, a' bzw. z, z' haupt- bzw. brennebenenbezogene Objekt- und Bildweite, y, y' Objekt- und Bildgröße

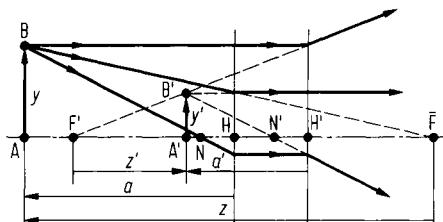


Konstruktion der Kardinalpunkte, Sammellinse

Einheit: 1 Dioptrie dpt
 $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$



Sammellinse mit reellem Bild



Zerstreuungslinse mit virtuellem Bild

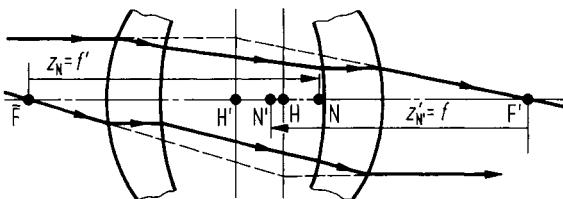
Abbildungsgleichungen und Maßstäbe der Abbildung

hauptebenenbezogene Abbildungsgleichung	Newton'sche Abbildungsgleichung	Abbildungsmaßstab β	Winkelverhältnis γ
$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1$	$z z' = f f'$	$\beta = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}$	$\gamma = \frac{z}{f'} = \frac{f'}{z'}$

6.2.4 Linsen- und/oder Spiegelsysteme

Zwischen Objekt und Endbild liegen i. a. Zwischenbilder; für jede Einzelabbildung von einem Zwischenbild zum nächsten gelten dieselben Beziehungen wie bei einer Einzellinse.

Es lassen sich stets zwei Hauptpunkte H, H', Brennpunkte F, F' und Knotenpunkte N, N' angeben, mit denen das Endbild direkt aus dem Objekt konstruiert werden kann. Die zugehörigen Abbildungsgleichungen und Maßstäbe der Abbildung entsprechen denen der Einzellinse.



Konstruktion der Kardinalpunkte eines zweilinsigen Systems

Speziell zwei Linsen 1,2 in Luft:

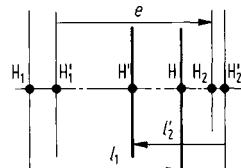
Bild- und objektseitige Brennweite f' und f des Systems

$$f' = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}; \quad f = -f'; \quad \overrightarrow{H_1 H_2} = e$$

Lage der Hauptpunkte H, H' des Systems

$$\overrightarrow{H_1 H} = l_1 = e \frac{f'}{f_2}; \quad \overrightarrow{H_2 H'} = l_2' = e \frac{f'}{f_1}$$

Einheit: 1 m



Speziell dünne Linsen 1, 2, 3, ... mit geringem Abstand in Luft:

Brechkraft D des Systems

$$D \approx D_1 + D_2 + D_3 + \dots = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_3'} + \dots$$

Einheit: 1 m^{-1}

Bild- und objektseitige Brennweite f' und f des Systems

$$f' \approx \frac{1}{D}; \quad f = -f'$$

Einheit: 1 m

D Brechkraft des Systems

6.3 Wellenoptik

(siehe auch elektromagnetische Wellen 5.7)

6.3.1 Grundgrößen

Wellenlänge λ in einem Stoff

$$\lambda = \frac{c}{f}; \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Einheit: 1 m

c Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Stoff mit der Brechzahl n
 f Frequenz, λ_0 Wellenlänge im Vakuum (bzw. Luft)

Repetenz (Wellenzahl) σ

$$\sigma = 1/\lambda$$

Einheit: 1 m^{-1}

λ Wellenlänge

Optischer Weg s_{opt} in einem Stoff

Ohne Reflexion am optisch dichteren Stoff:

$$s_{\text{opt}} = s_{\text{geom}} n$$

Einheit: 1 m

s_{geom} geometrischer Weg des Strahles im Stoff mit der Brechzahl n

Mit Reflexion am optisch dichteren Stoff:

$$s_{\text{opt}} = s_{\text{geom}} n \pm \frac{1}{2} \lambda_0$$

λ_0 Wellenlänge im Vakuum (bzw. Luft)

Gangunterschied Δs_{opt} zweier Strahlen 1 und 2

$$\Delta s_{\text{opt}} = s_{\text{opt}, 1} - s_{\text{opt}, 2}$$

Einheit: 1 m

$s_{\text{opt}, 1}$ bzw. $s_{\text{opt}, 2}$ optischer Weg des Strahles 1 bzw. 2

6.3.2 Kohärenz

Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zweier Strahlen 1 und 2

bei gleichzeitiger Emission aus einer Quelle

Einheit: 1

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta s_{\text{opt}}}{\lambda_0}$$

Δs_{opt} Gangunterschied der Strahlen
 λ_0 Wellenlänge im Vakuum

Speziell Überlagerung:

$$\text{Auslöschung: } \Delta\varphi = (2k + 1)\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Verstärkung: } \Delta\varphi = 2k\pi$$

Strahlung einer punktförmigen Quelle

Kohärenzzeit τ :

$$\tau \approx \frac{1}{\Delta f}$$

Δf Halbwertsbreite der Spektralverteilung der Quelle

Kohärenzlänge l :

$$l = c\tau$$

c Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlung

Bedingung für die Beobachtbarkeit von Interferenzen:

$$\Delta s_{\text{opt}} < l \quad (\text{Koinzidenzbedingung})$$

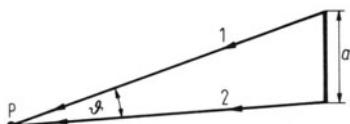
Δs_{opt} Gangunterschied zwischen den interferierenden Strahlen der Quelle

Strahlung einer ausgedehnten Quelle (monochromatisch, inkohärent)

Kohärenzbedingung: $a \sin \vartheta \ll \frac{\lambda}{2}$

1. Bedingung für die Beobachtbarkeit von Interferenzen:

$$\Delta s_{\text{opt}} \approx a_Q \sin \vartheta < \frac{\lambda}{2}$$



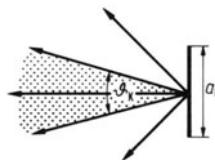
a Durchmesser des Strahlers bzw. des bestrahlten Bereichs

λ Wellenlänge der Strahlung

ϑ Öffnungswinkel des Strahlenkegels

2. Kohärenzwinkel ϑ_K :

$$\sin \vartheta_K \approx \frac{\lambda}{2 a_Q}$$

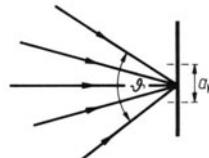


λ Wellenlänge der Strahlung

a_Q Durchmesser der Quelle

3. Durchmesser a_K kohärent ausgeleuchteter Bereiche einer bestrahlten Fläche:

$$a_K \approx \frac{\lambda}{2 \sin \vartheta}$$



ϑ Öffnungswinkel der einfallenden Strahlung

6.3.3 Interferenz durch Reflexion

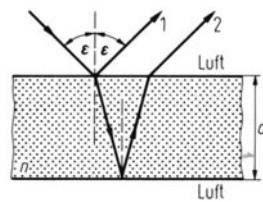
Dünne Parallelschicht

Gangunterschied zwischen den Teilstrahlen 1 und 2:

$$\Delta s_{\text{opt}} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \varepsilon} \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

Speziell senkrechter Einfall $\varepsilon = 0^\circ$:

$$\Delta s_{\text{opt}} = 2dn \pm \frac{\lambda_0}{2}$$

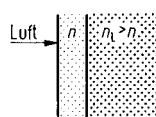


d Schichtdicke des Stoffes mit der Brechzahl n
 λ_0 Wellenlänge im Vakuum (bzw. Luft)

Optische Vergütungsschicht auf Linsen

$$\text{Dicke } d: \quad d = \frac{\lambda_0}{4n}$$

$$\text{Brechzahl } n: \quad n = \sqrt{n_L}$$



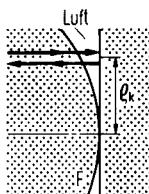
λ_0 Wellenlänge im Vakuum (bzw. Luft)
 n_L Brechzahl der Linse

Newton'sche Ringe

Radius ρ_k des k -ten dunklen Rings in Reflexion bei senkrechtem Einfall:

$$\rho_k = \sqrt{k \lambda_0 R}$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$



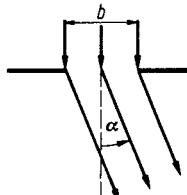
R Radius der Kugelfläche F
 λ_0 Wellenlänge der monochromatischen Strahlung im Vakuum (bzw. Luft)

6.3.4 Fraunhofer'sche Beugungserscheinungen**Beugung am Spalt bei senkrechtem Einfall**

Strahlstärke I (siehe S. 109) der gebeugten Strahlung:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin x}{x} \right]^2$$

$$x = \frac{\pi b \sin \alpha}{\lambda}$$



b Spaltbreite, λ Wellenlänge der Strahlung
 α Beugungswinkel
 I_0 Strahlstärke der gebeugten Strahlung in der Richtung $\alpha = 0^\circ$

Richtungen α_k für die Nullstellen von I (Minima):

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{b}; \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

λ Wellenlänge der Strahlung

Beugung am Doppelspalt bei senkrechtem Einfall

Richtungen α_k für die Nullstellen der Strahlstärke I (Minima):

$$\sin \alpha_k = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{g}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

λ Wellenlänge der Strahlung
 g Abstand der Spaltzentren
 α Beugungswinkel

Winkelabstand $\Delta\alpha$ benachbarter Nullstellen für kleine Winkel α_k :

$$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{g}$$

Beugung am Gitter bei senkrechtem Einfall

Richtung α_k der Hauptmaxima der Strahlstärke I :

$$\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{g}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

g Gitterkonstante
 λ Wellenlänge der Strahlung

Speziell Beobachtung in der Brennebene einer Sammellinse:

$$\tan \alpha_k = \frac{z_k}{f}$$

f Brennweite der Sammellinse
 z_k Abstand des k -ten Hauptmaximums vom 0-ten Hauptmaximum in der Brennebene der Linse

Speziell kleine Winkel α_k :

$$\lambda = \frac{z_k g}{k f}; \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

g Gitterkonstante

Beugung an kreisförmiger Öffnung bei senkrechtem EinfallRichtungen α_k für die Nullstellen der Strahlstärke I (Minima):

$$\sin \alpha_1 = 0,610 \cdot (\lambda/R)$$

 λ Wellenlänge der Strahlung R Radius der Öffnung

$$\sin \alpha_2 = 1,116 \cdot (\lambda/R)$$

$$\sin \alpha_3 = 1,619 \cdot (\lambda/R)$$

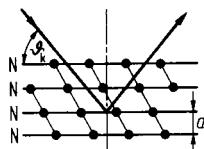
...

Beugung am Raumgitter (Kristall)Einfallswinkel $\pi/2 - \vartheta_k$ der Strahlung, für die Reflexion auftritt:

$$2d \sin \vartheta_k = k\lambda$$

(Gesetz von Bragg)

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots$$



N Netzebenen des Kristalls, für die Reflexion auftritt
 d Netzebenenabstand
 λ Wellenlänge der Strahlung
 ϑ_k Glanzwinkel

6.3.5 Polarisierter Lichtwellen**Polarisationsgrad P einer Lichtwelle**

$$P = \frac{\phi_p}{\phi}$$

 ϕ_p polarisierter Anteil des gesamten Strahlungsflusses ϕ **Polarisation durch Reflexion**Brewsterscher Winkel ε_B :

$$\tan \varepsilon_B = n$$

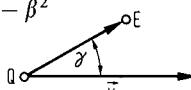
 ε_B Einfallswinkel, bei dem vollständige Polarisation des reflektierten Lichtes eintritt n Brechzahl des reflektierenden Stoffes**Optische Aktivität von Lösungen**Drehwinkel α der Schwingungsrichtung von linear polarisiertem Licht:

$$\alpha = \alpha_0 \frac{l}{dm} \frac{\rho}{g/cm^3} \frac{m}{m_L}$$

 α_0 spezifischer Drehwinkel l Weglänge des Lichts in der Lösung ρ Dichte der Lösung m Masse der optisch aktiven Substanz m_L Masse des Lösungsmittels**Dopplereffekt im Vakuum**

$$f_E = f_Q \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \gamma}; \quad \lambda_E = \lambda_Q \frac{1 - \beta \cos \gamma}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c_0}$$

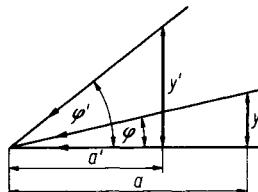
 f_E bzw. λ_E Frequenz bzw. Wellenlänge beim Empfänger E f_Q Eigenfrequenz der strahlenden Quelle Q $\beta = c_0/v$ γ Geschwindigkeit der Quelle Q relativ zum Empfänger E c_0 VakuumlichtgeschwindigkeitSpeziell transversaler Effekt: $\gamma = 90^\circ; 270^\circ$ Speziell longitudinaler Effekt: $\gamma = 0^\circ$ bei Annäherung $\gamma = 180^\circ$ bei EntfernungSpeziell $\beta \ll 1$: $f_E - f_Q \approx \beta f_Q (\cos \gamma - \beta/2)$

$$\lambda_E - \lambda_Q \approx \beta \lambda_Q (\beta/2 - \cos \gamma)$$

6.4 Optische Instrumente

Vergrößerung Γ

$$\Gamma = \frac{\varphi'}{\varphi} \approx \frac{\tan \varphi'}{\tan \varphi} = \frac{y'/a'}{y/a}$$



φ Sehwinkel, unter dem das Objekt (Größe y , Entfernung a) dem bloßen Auge erscheinen würde
 φ' Sehwinkel mit Instrument, unter dem das Bild (Größe y' , Entfernung a') dem Auge erscheint

Lupe (dem Auge unmittelbar benachbart)

Standardvergrößerung Γ_L : Objekt in der Lupenbrennebene, Auge auf unendlich akkommodiert:

$$\Gamma_L = \frac{s_0}{f}; \quad s_0 = 25 \text{ cm}$$

f Lupenbrennweite
 s_0 deutliche Schweiße des menschlichen Auges

Gebrauchsvergrößerung Γ_{LG} : Bild in der Entfernung a' , Auge auf a' akkommodiert:

$$\Gamma_{LG} = \frac{a'}{f} + 1$$

f Lupenbrennweite

Kamera

Relative Objektivöffnung $\frac{1}{k}$:

$$\frac{1}{k} = \frac{d}{f}$$

d wirksamer Durchmesser des Objektivs (Eintrittspupille)
 f Objektivbrennweite

Blendenzahl k :

$$k = \frac{f}{d}$$

Belichtungszeiten für gleiche Lichtmengen:

$$t_1 : t_2 = k_1^2 : k_2^2$$

t_1 bzw. t_2 Belichtungszeit bei der Blendenzahl k_1 bzw. k_2

Fernrohr

Vergrößerung Γ :

$$\Gamma = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{ok}}}$$

d wirksamer Durchmesser des Objektivs

Winkelauflösungsvermögen:

$$\frac{1}{\varphi_{\min}} \approx 0,8 \frac{d}{\lambda}$$

φ_{\min} kleinster Winkelabstand zweier Gegenstandspunkte ohne Instrument, die noch als getrennt erkannt werden

f_{obj} bzw. f_{ok} Objektiv- bzw. Okularbrennweite

Mikroskop

Vergrößerung Γ :

$$\Gamma = \frac{(t - f_{\text{obj}}) s_0}{f_{\text{obj}} f_{\text{ok}}}$$

t optische Tubuslänge (Abstand der Brennpunkte von Objektiv und Okular)

s_0 deutliche Schweiße

Numerische Apertur A :

$$A = n \sin \alpha$$

n Brechzahl des Stoffes vor dem Objektiv

Punktauflösungsvermögen: $1/y_{\min} \approx 2A/\lambda$

α halber Öffnungswinkel des Strahlenkegels vom Gegenstandspunkt zur Eintrittspupille

λ Wellenlänge des Lichts

Auflösungsvermögen A_s von Spektralapparaten

y_{\min} kleinster Abstand zweier Gegenstandspunkte, die noch getrennt wahrgenommen werden

$$A_s = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

$\Delta\lambda$ kleinste Differenz zweier Wellenlängen λ und $\lambda + \Delta\lambda$, die gerade noch trennbar sind

Speziell Prisma:

$$A_s = B |\text{dn}/\text{d}\lambda|$$

$\text{dn}/\text{d}\lambda$ Dispersion des Prismenmaterials

Speziell Gitter:

$$A_s = m N - 1 \approx m N$$

B wirksame Basislänge des Prismas

N Anzahl der kohärent beleuchteten Gitterstriche

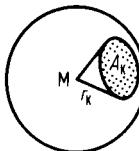
m Ordnung der gebeugten Welle

6.5 Strahlung und Photometrie

6.5.1 Grundgrößen

Raumwinkel Ω

$$\Omega = \frac{A_K}{r_K^2}$$



Einheit: $1 \text{ m}^2/\text{m}^2 = 1 \text{ Steradian sr}$

A_K Stück einer Kugelfläche, das von einem Kegel (Spitze im Kugelmittelpunkt) ausgeschnitten wird
 r_K Kugelradius

Spektrale Strahlungsgrößen

$$X_\lambda = \frac{dX}{d\lambda}; \quad X_f = \frac{dX}{df}$$

$$[X_\lambda] = [X]/[\lambda]; \quad [X_f] = [X]/[f]$$

dX physikalische oder visuelle Strahlungsgröße im Wellenlängenbereich $d\lambda$ bzw. im Frequenzbereich df

Zusammenhang zwischen physikalischen und visuellen Strahlungsgrößen

$$X = \int_0^\infty X_\lambda K(\lambda) d\lambda$$

X visuelle Strahlungsgröße

X_λ zugehörige spektrale physikalische Strahlungsgröße

$K(\lambda)$ photometrisches Strahlungsäquivalent mit dem Maximum K_m

$V(\lambda)$ spektrale Hellempfindlichkeit des menschlichen Auges für Tagsehen (Tab. 41)

$$K(\lambda) = K_m \cdot V(\lambda); \quad K_m = 688 \frac{[X]_{\text{visuell}}}{[X]_{\text{physik.}}}$$

6.5.2 Physikalische und visuelle Strahlungsgrößen

Strahlungsfluß(-leistung) ϕ

Einheit: 1 Watt W

Lichtstrom ϕ

Einheit: 1 Lumen lm

$$\phi = \frac{dQ}{dt}$$

dQ ist die in der Zeit dt abgestrahlte Energie bzw. Lichtmenge.

Spezifische Ausstrahlung M

Einheit: 1 W/m²

Spezifische Lichtausstrahlung M

Einheit: 1 lm/m²

$$M = \frac{d\phi_1}{dA_1}$$

$d\phi_1$ ist der aus der Senderfläche dA_1 in den Halbraum abgegebene Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom.

Strahlstärke I

Einheit: 1 W/sr

Lichtstärke I^1)

Einheit: 1 lm/sr = 1 Candela cd

$$I(\vartheta_1) = \frac{d\phi_1}{d\Omega_1}$$

$d\phi_1$ ist der von einer punktförmigen (oder weit entfernten) Strahlungsquelle innerhalb des Raumwinkels $d\Omega_1$ in eine durch den Winkel ϑ_1 angegebenen Raumrichtung ausgehende Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom.

Speziell Lambert-Strahler:

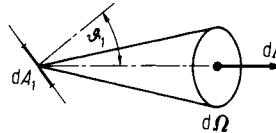
$$I(\vartheta_1) = I(0) \cos \vartheta_1$$

$I(0)$ ist die in Richtung der Flächennormalen wirksame Strahlstärke bzw. Lichtstärke.

¹⁾ Basisgröße

Strahldichte L *Einheit:* $1 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ sr})$ **Leuchtdichte L** *Einheit:* $1 \text{ lm}/(\text{m}^2 \text{ sr}) = 1 \text{ cd}/\text{m}^2$

$$L(\vartheta_1) = \frac{dI(\vartheta_1)}{\cos \vartheta_1 \cdot dA_1} = \frac{dI(\vartheta_1)}{dA'_1}$$

 dA'_1 ist die vom Beobachter gesehene Senderfläche. $dI(\vartheta_1)$ ist die von der Senderfläche dA_1 in der durch ϑ_1 angegebenen Richtung bewirkte Strahlstärke bzw. Lichtstärke.*Speziell* Lambert-Strahler:

$$L = \frac{M}{\Omega_0 \cdot \pi} = \text{konstant} \quad \Omega_0 = 1 \text{ sr}$$

 M ist die spezifische Ausstrahlung bzw. spezifische Lichtausstrahlung.**Bestrahlungsstärke E** *Einheit:* $1 \text{ W}/\text{m}^2$ **Beleuchtungsstärke E** *Einheit:* $1 \text{ lm}/\text{m}^2 = 1 \text{ Lux lx}$

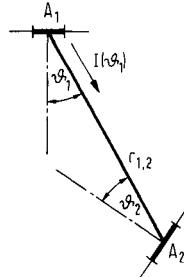
$$E = \frac{d\phi_2}{dA_2}$$

 $d\phi_2$ ist der auf die Empfängerfläche dA_2 fallende Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom.*Abstandsgesetz:*

$$E(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{I(\vartheta_1)}{r_{1,2}^2} \Omega_0 \cdot \cos \vartheta_2$$

Speziell horizontale Sender- und Empfängerfläche:

$$E = I(\vartheta_1) \Omega_0 \frac{h}{(a^2 + h^2)^{3/2}}$$



$I(\vartheta_1)$ Strahlstärke bzw. Lichtstärke des Senders in Richtung zum Empfänger
 $r_{1,2}$ Abstand Sender-Empfänger; $\Omega_0 = 1 \text{ sr}$
 ϑ_2 Winkel zwischen der Normalen zur Empfängerfläche und der Richtung zum Sender

h Höhe der Senderfläche über der Empfängerfläche
 a Horizontalabstand
 $\Omega_0 = 1 \text{ sr}$

Bestrahlung H *Einheit:* $1 \text{ W s}/\text{m}^2$ **Belichtung H** *Einheit:* 1 lx s

$$H = \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt$$

 $E(t)$ ist die in der Zeit dt beim Empfänger bestehende Bestrahlungsstärke bzw. Beleuchtungsstärke.**Reflexionsgrad ρ eines Körpers**

$$\rho = \frac{\phi_r}{\phi}$$

ϕ auftreffender Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom
 ϕ_r reflektierter Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom

Transmissionsgrad τ eines Körpers

$$\tau = \frac{\phi_t}{\phi}$$

ϕ_t durchgehender Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom

Absorptionsgrad α eines Körpers

$$\alpha = \frac{\phi_a}{\phi}$$

ϕ_a absorzierter Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom

Spektrale Größen $\varrho_\lambda, \tau_\lambda, \alpha_\lambda$

$$\varrho_\lambda = \frac{\phi_{\lambda r}}{\phi_\lambda}; \quad \tau_\lambda = \frac{\phi_{\lambda t}}{\phi_\lambda}; \quad \alpha_\lambda = \frac{\phi_{\lambda a}}{\phi_\lambda}$$

ϕ_λ auftreffender spektraler Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom
 $\phi_{\lambda r}, \phi_{\lambda t}, \phi_{\lambda a}$ reflektierter, durchgelassener, absorbiert Strahlungsfluß bzw. Lichtstrom

Zusammenhang zwischen Reflexionsgrad, Transmissionsgrad und Absorptionsgrad:

$$\varrho + \tau + \alpha = 1; \quad \varrho_\lambda + \tau_\lambda + \alpha_\lambda = 1$$

Diffus reflektierende bzw. diffus durchlassende ebene Fläche:

$$L = \frac{\varrho E}{\Omega_0 \pi}; \quad L = \frac{\tau E}{\Omega_0 \pi}$$

L Strahldichte bzw. Leuchtdichte
 E Bestrahlungsstärke bzw. Beleuchtungsstärke
 $\Omega_0 = 1 \text{ sr}$

Energiedichte w

Einheit: 1 W s/m³

$$w = \frac{dQ}{dV}$$

dQ Strahlungsenergie im Volumen dV

Strahlungsdruck p_{str} auf eine Oberfläche

Einheit: 1 Pa

bei vollständiger Absorption: $p_{\text{str}} = w$

w Energiedichte

bei vollständiger Reflexion: $p_{\text{str}} = 2w$

Elementarstrahler

I_1 bzw. I_0 Lichtstärke in der durch den Winkel ϑ_1 bzw. 0° angegebenen Richtung
 Φ Gesamtlightstrom, $\Omega_0 = 1 \text{ sr}$

Kugelfläche:

$$I_1 = I_0; \quad \Phi = 4\pi I_0 \Omega_0$$

$\vartheta_1 = 0^\circ$ in Richtung einer Symmetriechse
 $(-180^\circ \leq \vartheta_1 \leq +180^\circ)$

Halbkugelfläche:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1 + \cos \vartheta_1); \quad \Phi = 2\pi I_0 \Omega_0$$

$\vartheta_1 = 0^\circ$ in Richtung der Symmetriechse
 $(-180^\circ \leq \vartheta_1 \leq +180^\circ)$

Kreisscheibe:

$$I_1 = I_0 \cos \vartheta_1; \quad \Phi = \pi I_0 \Omega_0$$

$\vartheta_1 = 0^\circ$ in Richtung senkrecht zur Scheibe vom Mittelpunkt aus $(-90^\circ \leq \vartheta_1 \leq +90^\circ)$

Zylindermantelfläche:

$$I_1 = I_0 |\cos \vartheta_1|$$

$\vartheta_1 = 0^\circ$ in Richtung senkrecht zur Achse vom Mittelpunkt aus $(-180^\circ \leq \vartheta_1 \leq +180^\circ)$

(in einer Ebene durch die Symmetriechse)

$$\Phi = \pi^2 I_0 \Omega_0$$

7 Quantenmechanik und Atombau

7.1 Photonenentheorie

7.1.1 Grundgrößen des Photons

Energie W

$$W = h f = h c_0 / \lambda_0$$

$$h = 6,62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,13567 \cdot 10^{-15} \text{ eV s}$$

Einheit: $1 \text{ J} = 1 \text{ W s} = 1 \text{ N m}$

$$1 \text{ eV} = 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

f bzw. λ_0 Frequenz bzw. Wellenlänge der dem Photon zugeordneten Wellen

h Planck-Konstante (Wirkungsquantum)

Impuls \vec{p}

$$p = \frac{h}{\lambda_0} = \frac{h f}{c_0}$$

Betragseinheit: 1 N s

f bzw. λ_0 Frequenz bzw. Wellenlänge
 c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

Masse m

$$m = \frac{h f}{c_0^2} = \frac{h}{\lambda_0 \cdot c_0}$$

Einheit: 1 kg

h Planck-Konstante, f Frequenz, λ_0 Wellenlänge
 c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

7.1.2 Elementarprozesse des Photons

Äußerer Photoeffekt

(Maximale) Translationsenergie W_{trans} des ausgelösten Photoelektrons:

$$W_{\text{trans}} = h f - \Delta W \quad \text{für } f > f_{\text{gr}}$$

Grenzfrequenz f_{gr} : $f_{\text{gr}} = \Delta W / h$

h Planck-Konstante
 f Frequenz der auslösenden Strahlung
 ΔW Austrittsarbeits des Elektrons

Compton-Effekt

Wellenlängenzunahme $\Delta\lambda$ bei Streuung eines Photons an einem ruhenden Elektron:

$$\Delta\lambda = 2\lambda_C \sin^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \lambda_C \cdot (1 - \cos\vartheta)$$

λ_C Compton-Wellenlänge

ϑ Streuwinkel des Photons

$m_{e,0}$ Ruhemasse des Elektrons

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

h Planck-Konstante

f Frequenz

Energie W' des gestreuten Photons:

$$W' = \frac{hf}{1 + \frac{hf(1 - \cos\vartheta)}{m_{e,0} \cdot c_0^2}}$$

$m_{e,0} c_0^2 = 0,510999 \text{ MeV}$ Ruheenergie des Elektrons

Paarbildungseffekt

eines Photons der Energie $h f$ im Feld eines Atomkerns:

$$h f = W_{\text{trans},e} + W_{\text{trans},p} + 2 m_{e,0} c_0^2$$

$W_{\text{trans},e}$ bzw. $W_{\text{trans},p}$ Translationsenergie des gebildeten Elektrons bzw. Positrons

$m_{e,0}$ Ruhemasse des Elektrons und Positrons

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

7.2 Wellenmechanik

Materiewellenlänge λ eines Teilchens mit dem Impuls p

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m v} \quad (\text{Gesetz von de Broglie})$$

h Planck-Konstante
 m relativistische Masse,
 v Geschwindigkeit des Teilchens

Wellengleichung für den linearen Fall

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

mit den reellen Lösungen

$$\Psi_n(x, t) = \psi_n(x) \cos \omega t; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x) dx = 1$$

$\Psi(x, t)$ Zustandsfunktion (Wellenfunktion)
 c Ausbreitungsgeschwindigkeit

$\psi_n(x)$ ist Lösung der (zeitunabhängigen) Schrödinger-Gleichung für das Elektron:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2(W - W_{\text{pot}}) m_{e,0}}{\hbar^2} \psi(x) = 0; \quad \hbar = h/2\pi$$

$$\Delta \mathcal{W}_n(x) = \psi_n^2(x) \Delta x$$

x Ortskoordinate, t Zeitkoordinate
 $\Psi_n(x, t)$ Zustandsfunktion
 $\psi_n(x)$ normierte Eigenfunktion im Zustand der Quantenzahl n
 ω Kreisfrequenz

Speziell Reflexionsoszillator:

$$\text{Mögliche Wellenlängen } \lambda_n: \quad \lambda_n = 2l/n$$

Eigenfunktionen:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

Speziell harmonischer Oszillator: $W_{\text{pot}} = 2\pi^2 m f_0^2 x^2$

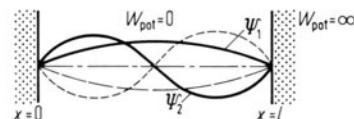
Eigenwerte der Energie W_n :

$$W_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar f_0$$

Speziell Nullpunktenergie:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar f_0$$

W Gesamtenergie
 W_{pot} potentielle Energie des Elektrons
 $m_{e,0}$ Elektronenmasse
 $\Delta \mathcal{W}$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Bereich zwischen x und $x + \Delta x$,
 $\psi_n^2(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte im Zustand der Quantenzahl n



$n = 1, 2, 3, \dots$ Quantenzahl

m Masse des Oszillators

f_0 Oszillatorgrundfrequenz

$n = 0, 1, 2, \dots$ Quantenzahl

\hbar Planck-Konstante

Wellengleichung für den räumlichen Fall

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

mit den reellen Lösungen

$$\Psi_n(x, y, z, t) = \psi_n(x, y, z) \cos \omega t; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x, y, z) dV = 1$$

$\Psi(x, y, z, t)$ Zustandsfunktion (Wellenfunktion)
 c Ausbreitungsgeschwindigkeit
 x, y, z Ortskoordinaten, t Zeitkoordinate

$\psi_n(x, y, z)$ ist Lösung der (zeitunabhängigen) Schrödinger-Gleichung für das Elektron:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2(W - W_{\text{pot}}) m_{e,0}}{\hbar^2} \psi(x, y, z) = 0$$

$$\Delta \mathcal{W}_n = \psi_n^2(x, y, z) \Delta V$$

$\Psi_n(x, y, z, t)$ Zustandsfunktion
 $\psi_n(x, y, z)$ normierte Eigenfunktion im Zustand n
 ω Kreisfrequenz

W Gesamtenergie

W_{pot} potentielle Energie des Elektrons

$m_{e,0}$ Elektronenmasse, $\hbar = h/2\pi$

$\Delta \mathcal{W}_n$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Volumelement ΔV

$\psi_n^2(x, y, z)$ Wahrscheinlichkeitsdichte im Zustand der Quantenzahl n

7.2.1 Unschärferelation von Heisenberg

Unschärfe des Impulses und des Ortes

$$\Delta p_x \Delta x \geq h/4\pi$$

Δp_x Unschärfe des Impulses in Richtung der x -Koordinate

Δx Unschärfe der Ortskoordinate x

Unschärfe der Energie und der Zeit

$$\Delta W \Delta t \geq h/4\pi$$

ΔW Unschärfe der Energie W

Δt Unschärfe der Zeit t

h Planck-Konstante

7.3 Atomhülle

7.3.1 Einelektronensysteme

1. Postulat von Bohr

$$p_e u_n = n \hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$m_{e,0} v_n 2\pi r_n = n \hbar \quad (n=1: \text{Grundzustand})$$

p_e Bahnimuls, $m_{e,0}$ Ruhemasse des Elektrons
 v_n Bahngeschwindigkeit des Elektrons auf der Kreisbahn mit dem Radius r_n und dem Umfang u_n
 n Hauptquantenzahl, \hbar Planck-Konstante

Radius r_n der n -ten Kreisbahn:

$$r_n = \frac{e_0 \hbar^2}{\pi e^2 m_{e,0}} \frac{1}{Z} n^2 = 5,291772 \cdot 10^{-11} m \frac{1}{Z} n^2 = \frac{1}{Z} r_1 n^2$$

Z Kernladungszahl (= Ordnungszahl im PSE)

e_0 elektrische Feldkonstante

e Elementarladung

r_1 Radius der innersten Bahn

Speziell H-Atom $Z = 1$:

$$n = 1: \quad r_B = 5,291772 \cdot 10^{-11} m \quad (\text{Bohrscher Radius})$$

Bahngeschwindigkeit v_n des Elektrons auf der n -ten Kreisbahn:

$$v_n = \frac{e^2}{2 \epsilon_0 \hbar} Z \frac{1}{n} = 2,18769 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} Z \frac{1}{n}$$

e Elementarladung
 ϵ_0 elektrische Feldkonstante
 \hbar Planck-Konstante
 Z Kernladungszahl

Energie W_n des Elektrons auf der n -ten Kreisbahn:

$$W_n = W_\infty - \frac{e^4 m_{e,0}}{8 \epsilon_0^2 \hbar^2} Z^2 \frac{1}{n^2} = W_\infty - R_{Z,\infty} \hbar \frac{1}{n^2}$$

$R_{Z,\infty}$ Rydbergfrequenz bei ruhendem Atomkern mit der Kernladungszahl Z
 W_1 Energie des Elektrons auf der innersten Bahn mit dem Radius r_1

Spezielle Energieskalen:

$$W_\infty = 0: \quad W_n \text{ Bindungsenergie}$$

$$W_1 = 0: \quad W_n \text{ Anregungsenergie}, \quad W_\infty = R_{Z,\infty} \hbar$$

W_∞ Ionisierungsenergie

Rydbergfrequenz $R_{Z,\infty}$, R_∞ bzw. R_Z :

$$R_{Z,\infty} = \frac{Z^2 e^4 m_{e,0}}{8 \epsilon_0^2 \hbar^3} = Z^2 R_\infty; \quad R_\infty = 3,28984195 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$$

R_∞ Rydbergfrequenz für das H-Atom ($Z=1$) bei ruhendem Atomkern

$R_{Z,\infty}$ Rydbergfrequenz für ein Atom mit der Ordnungszahl Z bei ruhendem Atomkern

Korrektur für nichtruhenden Atomkern:

$$R_Z = R_{Z,\infty} \frac{1}{1 + \frac{m_{e,0}}{m_K}}$$

R_Z Rydbergfrequenz für einen nichtruhenden Atomkern der Masse m_K
 $m_{e,0}$ Elektronenmasse

2. Postulat von Bohr

Abgestrahlte bzw. absorbierte Energie bei Bahnsprüngen:

$$\Delta W = W_2 - W_1; \quad |\Delta W| = h f$$

$$f = R_{Z, \infty} \left| \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right|$$

$$\text{Repetenz } \sigma = \frac{1}{\lambda_0}; \quad \sigma = R_{Z, \infty}^* \left| \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right|$$

$$R_{Z, \infty}^* = \frac{R_{Z, \infty}}{c_0} = Z^2 R_\infty^*; \quad R_\infty^* = 1,09737315 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

W_2 bzw. W_1 Energie des Elektrons auf den Bahnen mit den Hauptquantenzahlen n_2 bzw. n_1

h Planck-Konstante

f Frequenz des abgestrahlten bzw. absorbierten Quants
 $R_{Z, \infty}$ Rydbergfrequenz bei ruhendem Atomkern der Ordnungszahl Z

λ_0 Wellenlänge im Vakuum

$R_{Z, \infty}^*$ Rydbergkonstante für ruhenden Atomkern

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

R_∞^* Rydbergkonstante für das H-Atom ($Z = 1$)

Spektralserien des H-Atoms:

$n_1 = 1; \quad n_2 = 2, 3, 4, \dots$

Lyman-Serie

$n_1 = 2; \quad n_2 = 3, 4, 5, \dots$

Balmer-Serie

$n_1 = 3; \quad n_2 = 4, 5, 6, \dots$

Paschen-Serie

Ellipsenbahnen nach Sommerfeld

Große Halbachse a_n :

$$a_n = r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_{e,0}} \frac{1}{Z} n^2; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Kleine Halbachse $b_{n,l}$:

$$b_{n,l} = r_1 (l+1) n; \quad l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

r_n Kreisbahnradius nach Bohr

ε_0 elektrische Feldkonstante

e Elementarladung

h Planck-Konstante, $m_{e,0}$ Elektronenmasse

Z Kernladungszahl, n Hauptquantenzahl

r_1 Radius der innersten Kreisbahn

l Bahndrehimpulsquantenzahl (Nebenquantenzahl)

Mechanische Drehimpulse des umlaufenden Elektrons

Betrag des Bahndrehimpulses L_l

nach Bohr-Sommerfeld: $L_l = l \hbar; \quad \hbar = h/2\pi$

l Bahndrehimpulsquantenzahl; $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

h Planck-Konstante

nach Schrödinger: $L_l = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$

z -Koordinate: $L_{l,z} = m \hbar$

m Richtungsquantenzahl; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$
 z -Richtung: Orientierung eines äußeren Feldes

Betrag des Elektronenspins (Eigendrehimpuls) L_s

nach Schrödinger: $L_s = \sqrt{|s|(|s|+1)} \cdot \hbar; \quad s = \pm \frac{1}{2}$

s Spinquantenzahl

z -Koordinate: $L_{s,z} = s \hbar$

Magnetische Momente des Elektrons¹⁾

Einheit: 1 A m^2

Betrag des magnetischen Bahnmomentes m_l :

$$m_l = L_l \mu_B$$

L_l bzw. $L_{l,z}$ Betrag bzw. z -Koordinate des Bahndrehimpulses

z -Koordinate: $m_{l,z} = L_{l,z} \mu_B$

μ_B Bohrsches Magnetron

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_{e,0}} = 9,27402 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2; \quad \hbar = h/2\pi$$

e Elementarladung, $m_{e,0}$ Elektronenruhemasse

¹⁾ Identisch mit dem Ampereschen magnetischen Moment \vec{m} von Seite 77.

Betrag des magnetischen Spinmomentes m_s :

$$m_s = L_s \mu_B$$

L_s bzw. $L_{s,z}$ Betrag bzw. z-Koordinate des Elektronenspins

z-Koordinate: $m_{s,z} = L_{s,z} \mu_B$

μ_B Bohrsches Magneton

Wellenmechanisches Atommodell (Schrödinger-Atommodell)

Speziell Schrödinger-Gleichung für reelle radialsymmetrische Eigenfunktionen $\psi_n(r)$ für das Elektron des H-Atoms:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{2m_{e,0}}{\hbar^2} \left(W + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0$$

r Abstand vom Kernmittelpunkt

W Gesamtenergie, e Elementarladung

$m_{e,0}$ Elektronenmasse, ϵ_0 elektrische Feldkonstante

Normierte radialsymmetrische Eigenfunktionen:

$$1\text{s-Zustand: } \psi_1(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_B^3}} \cdot e^{-\varrho}; \quad \varrho = \frac{r}{r_B} \quad r_B = 5,291772 \cdot 10^{-11} \text{ m (Bohrscher Radius)}$$

$$2\text{s-Zustand: } \psi_2(r) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r_B^3}} \left(1 - \frac{\varrho}{2} \right) \cdot e^{-\varrho/2}$$

$$3\text{s-Zustand: } \psi_3(r) = \frac{1}{3\sqrt{3\pi r_B^3}} \left(1 - \frac{2}{3}\varrho + \frac{2}{27}\varrho^2 \right) \cdot e^{-\varrho/3}$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeit $\Delta\mathcal{W}_n$ für das Elektron in der Kugelschale mit den Radien r bis $r + \Delta r$:

$$\Delta\mathcal{W}_n = \psi_n^2(r) 4\pi r^2 \cdot \Delta r$$

$\psi_n(r)$ Eigenfunktionen
 r Abstand vom Kernmittelpunkt

7.3.2 Schalenaufbau für Mehrelektronensysteme

Schalenbezeichnung und Besetzung

Hauptquantenzahl n	1	2	3	4	5	6	7
Schale	K	L	M	N	O	P	Q

Maximale Besetzungszahl N_{\max} :

$$N_{\max} = 2n^2$$

Unterschalen:

Nebenquantenzahl l	0	1	2	3
Unterschale	s	p	d	f

Maximale Besetzungszahl N_{\max} :

$$N_{\max} = 2(2l+1)$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$$

Pauli-Prinzip

Die Elektronen in einer Atomhülle müssen sich mindestens in einer der vier Quantenzahlen n, l, m, s unterscheiden.

Periodensystem der Elemente (PSE) und Schalenbesetzung siehe Tabellenanhang

7.3.3 Röntgenstrahlung

Röntgenbremsstrahlung

Grenzwellenlänge λ_{gr} :

$$\lambda_{\text{gr}} = \frac{c_0 \cdot h}{e \cdot U_b} = 1,23984 \text{ nm} \cdot \frac{\text{kV}}{U_b}$$

U_b Beschleunigungsspannung der Elektronen
 e Elementarladung, h Planck-Konstante
 c_0 Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Charakteristische Röntgenstrahlung

Frequenz der K_{α} -Linie (Sprünge auf die Bahn $n=1$):

$$f_{K,\alpha} = R_{\infty} (Z-1)^2 \cdot \frac{3}{4}; \quad Z > 1 \quad (\text{Gesetz von Moseley})$$

R_{∞} Rydbergfrequenz (siehe S. 114)
 Z Kernladungszahl

Frequenz der L_{α} -Linie (Sprünge auf die Bahn $n=2$):

$$f_{L,\alpha} = R_{\infty} (Z-7,4)^2 \cdot \frac{5}{36}$$

7.4 Aufbau und Umwandlung des Atomkerns

7.4.1 Charakteristische Größen des Nuklids

Nuklid ist eine Atomart, die durch die Angabe der Nukleonenzahl A und der Kernladungszahl Z gekennzeichnet ist.

Nukleonenzahl A des Nuklids ${}^A_Z X$

$$A = N + Z$$

N Anzahl der Neutronen im Kern
 Z Anzahl der Protonen im Kern = Anzahl der Elektronen in der Hülle (Kernladungszahl, Ordnungszahl im PSE)

Speziell isobare Nuklide: $A = \text{konstant}$

Speziell isotone Nuklide: $N = \text{konstant}$

Speziell isotope Nuklide: $Z = \text{konstant}$

Masse m_A eines Atoms des Nuklids ${}^A_Z X$

$$m_A = A_r u$$

A_r relative Atommasse (Tab. 45)
 u atomare Masseneinheit

$$u = \frac{1}{12} m_A (^{12}_6 C) = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Näherungswert: $m_A \approx A \cdot u \approx A \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

A Nukleonenzahl

Mittlere Masse \bar{m}_A eines Atoms eines Isotopengemisches des Elementes X

$$\bar{m}_A = \bar{A}_r \cdot u$$

\bar{A}_r mittlere relative Atommasse (PSE: A_r)

u atomare Masseneinheit

$$\bar{A}_r = p_1 A_r (^{A_1}_Z X) + p_2 A_r (^{A_2}_Z X) + \dots$$

p_i bzw. $A_r (^{A_i}_Z X)$ relative Häufigkeit bzw. relative Atommasse des Isotops ${}^{A_i}_Z X$

$$(p_1 + p_2 + \dots = 1)$$

Masse m_K eines Atomkerns des Nuklids ${}^A_Z X$

$$m_K = m_A - Z \cdot m_{e,0}$$

m_A Atommasse, $m_{e,0}$ Elektronenruhemasse
 Z Kernladungszahl

Massendefekt Δm eines Atomkerns des Nuklids ${}^A_Z X$

$$\Delta m = Z m_{p,0} + N m_{n,0} - m_K$$

$$\Delta m = Z m_A({}_1^1 H) + (A - Z) m_{n,0} - m_A$$

$$\Delta m = [Z \cdot 1,0072765 + (A - Z) \cdot 1,0086649 - A_r] u$$

Relativer Massendefekt: $\Delta m_r = \frac{\Delta m}{u}$

$m_{p,0} = 1,67262 \cdot 10^{-27}$ kg Protonenruhemasse

$m_{n,0} = 1,67493 \cdot 10^{-27}$ kg Neutronenruhemasse

Z Kernladungszahl, N Neutronenzahl,

A Nukleonenzahl, m_K Kernmasse

m_A Atommasse

$m_A({}_1^1 H)$ Masse des Wasserstoffatoms

A_r relative Masse eines Atoms des Nuklids ${}^A_Z X$

(Tab. 45),

u atomare Masseneinheit

Bindungsenergie W_B

$$W_B = -\Delta m \cdot c_0^2$$

Δm Massendefekt

$$W_B = -931,49 \text{ MeV} \cdot \Delta m_r$$

c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

Δm_r relativer Massendefekt

Weizsäcker-Formel für die Bindungsenergie:

$$W_B = - \left[15,75 A - 17,8 A^{2/3} + 0,71 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - 23,7 \frac{(A - 2Z)^2}{A} + \delta \frac{34}{A^{3/4}} \right] \text{ MeV}$$

$$\delta = \begin{cases} +1 & \text{für (g, g)-Kerne} \\ 0 & \text{für (g, u)- bzw. (u, g)-Kerne} \\ -1 & \text{für (u, u)-Kerne} \end{cases}$$

A Nukleonenzahl, Z Kernladungszahl

g gerade Protonen- bzw. Neutronenzahl im Kern

u ungerade Protonen- bzw. Neutronenzahl im Kern

Mittlerer Radius r_K eines Atomkerns

$$r_K = r_0 \sqrt[3]{A};$$

A Nukleonenzahl

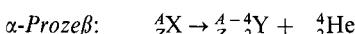
$$r_0 = 1,42 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 1,42 \text{ fm}$$

7.4.2 Radioaktivität

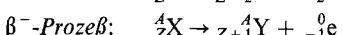
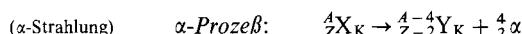
Verschiebungsregeln von Soddy und Fajans

(${}^A_Z X_K$ Kern des Nuklids ${}^A_Z X$; ${}^A_Z Y^*$ bzw. ${}^A_Z Y^m$ angeregter bzw. isomerer Zustand des Folgenuklids ${}^A_Z Y$)

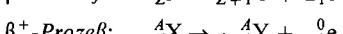
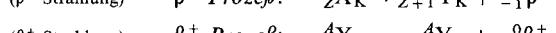
Atom:



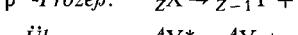
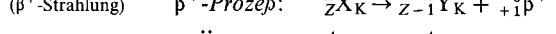
Kern:



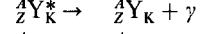
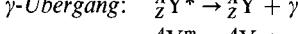
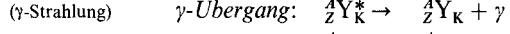
(β^- -Strahlung)



(β^+ -Strahlung)



(γ -Strahlung)



Umwandlungskonstante (Zerfallskonstante) λ

Einheit: 1 s^{-1}

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2} = 1/\tau; \quad \ln 2 = 0,693$$

$T_{1/2}$ Halbwertszeit, τ mittlere Lebensdauer

Halbwertszeit $T_{1/2}$, mittlere Lebensdauer τ

Einheit: 1 s

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = \tau \cdot \ln 2; \quad \tau = 1/\lambda = T_{1/2} / \ln 2$$

λ Umwandlungskonstante

Zahl $N(t)$

der noch nicht umgewandelten Atome eines Radionuklids ${}^A_Z X$ nach der Zeit t in einem Präparat:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \cdot t}; \quad N_0 = \frac{m m_{\text{ges}}}{m_A} = \frac{m}{m_A}$$

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{0.693}{T_{1/2}} t} = N_0 2^{-t/T_{1/2}}$$

λ Umwandlungskonstante, $T_{1/2}$ Halbwertszeit

N_0 Anzahl der Atome zur Zeit $t = 0$

p relativer Massenanteil dieser Atome im Präparat zur Zeit $t = 0$

m_{ges} Gesamtmasse des Präparates bei $t = 0$

m_A bzw. m Masse eines Atoms bzw. aller Atome des Radionuklidanteils im Präparat

Aktivität \mathcal{A} eines Radionuklids

$$\mathcal{A}(t) = \lambda \cdot N(t); \quad \mathcal{A}_0 = \lambda \cdot N_0$$

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 e^{-\lambda t} = \mathcal{A}_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}}$$

Einheit: $1 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ Becquerel Bq}$
 $1 \text{ Curie Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$

λ Umwandlungskonstante

\mathcal{A}_0 Aktivität zur Zeit $t = 0$, $T_{1/2}$ Halbwertszeit

Spezifische Aktivität a

$$a = \frac{\mathcal{A}}{m} = \frac{\lambda}{A_r u}$$

$$a = 4,17 \cdot 10^{26} \text{ kg}^{-1} \frac{1}{A_r T_{1/2}} = 1,13 \cdot 10^{16} \frac{\text{Ci s}}{\text{kg}} \frac{1}{A_r T_{1/2}}$$

Einheit: 1 Bq/kg

$1 \text{ Ci/kg} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq/kg}$

\mathcal{A} Aktivität des Radionuklidanteils der

Masse m in einem Präparat

$T_{1/2}$ Halbwertszeit

A_r relative Atommasse

u atomare Masseneinheit

Quellstärke (Emissionsrate) Q

$$Q = k \mathcal{A}$$

Einheit: 1 s^{-1}

k Anzahl der Teilchen oder Photonen pro Umwandlung
 \mathcal{A} Aktivität

Teilchenfluenz ϕ

$$\phi = \frac{\Delta N}{\Delta A}$$

Einheit: 1 m^{-2}

ΔN Anzahl der Teilchen oder Photonen, die senkrecht durch die Fläche ΔA hindurchtreten

Teilchenflußdichte φ

$$\varphi = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$$

Einheit: $1 \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

$\Delta \phi$ Teilchenfluenzänderung in der Zeit Δt

Energiefluenz Ψ

$$\Psi = \frac{\Delta W}{\Delta A}$$

Einheit: 1 J/m^2

ΔW Energie der Teilchen oder Photonen, die senkrecht durch die Fläche ΔA hindurchtritt

Speziell Teilchen mit der gleichen Energie W_0 :

$$\Psi = W_0 \phi$$

ϕ Teilchenfluenz

Energieflußdichte $\dot{\Psi}$

$$\dot{\Psi} = \frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$$

Einheit: 1 W/m^2

$\Delta \Psi$ Energiefluenzänderung in der Zeit Δt

Speziell Teilchen mit der gleichen Energie W_0 :

$$\dot{\Psi} = W_0 \varphi$$

φ Teilchenflußdichte

Impulsrate I_r

$$I_r = \frac{\Delta N}{\Delta t}$$

Einheit: $1 \text{ s}^{-1} (\text{min}^{-1})$

ΔN Anzahl der von einem Detektor registrierten Teilchen in der Zeit Δt

7.4.3 Radioaktive Gleichgewichte

Laufendes Gleichgewicht $\lambda_M < \lambda_T$

$$\mathcal{A}_T(t) = \frac{\lambda_T}{\lambda_T - \lambda_M} \mathcal{A}_M(t)$$

$$\mathcal{A}_{\text{ges}}(t) = \mathcal{A}_T + \mathcal{A}_M = \frac{2\lambda_T - \lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \mathcal{A}_M$$

\mathcal{A}_T Aktivität der Tochtersubstanz

\mathcal{A}_M Aktivität der Muttersubstanz

λ_T Umwandlungskonstante des Tochternuklids

\mathcal{A}_{ges} Gesamtaktivität von Mutter- und Tochtersubstanz

Dauergleichgewicht $\lambda_M \ll \lambda_T$

$$\mathcal{A}_T = \mathcal{A}_M; \quad \mathcal{A}_{\text{ges}} = 2 \mathcal{A}_M$$

$$N_T(t) : N_M(t) = \lambda_M : \lambda_T = T_{1/2, T} : T_{1/2, M}$$

$T_{1/2, T}$ Halbwertszeit des Tochternuklids

$T_{1/2, M}$ Halbwertszeit des Mutternuklids

$N_T(t)$ Anzahl der nicht umgewandelten Atome des Tochternuklids

$N_M(t)$ Anzahl der nicht umgewandelten Atome des Mutternuklids

Radioaktive Umwandlungsreihen (Tab. 46)

Laufendes Gleichgewicht $\lambda_M < \lambda_{T_1}, \lambda_{T_2}, \dots$:

\mathcal{A}_{ges} nimmt mit λ_M ab.

λ_M Umwandlungskonstante der Muttersubstanz

Dauergleichgewicht $\lambda_M \ll \lambda_{T_1}, \lambda_{T_2}, \dots$:

$$N_1 : N_2 : N_3 : \dots = T_{1/2, 1} : T_{1/2, 2} : T_{1/2, 3} : \dots$$

$\lambda_{T, 1}, \lambda_{T, 2}, \dots$ Umwandlungskonstanten der Folgenuklide

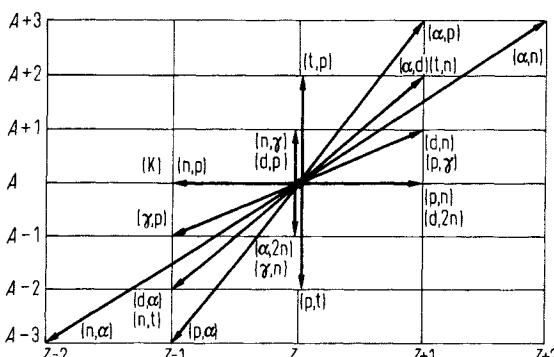
$$\mathcal{A}_1 : \mathcal{A}_2 : \mathcal{A}_3 : \dots = T_{1/2, 1} : T_{1/2, 2} : T_{1/2, 3} : \dots$$

N_1, N_2, \dots Anzahl der Atome der Folgenuklide

$T_{1/2, 1}, T_{1/2, 2}, \dots$ Halbwertszeiten der Folgenuklide

7.4.4 Nuklidumwandlungen

Mögliche Umwandlungen (Austauschreaktionen) eines Nuklids ${}_Z^A X$ (Umwandlungsspinne):



Abkürzungen:

n: Neutron; p: Proton; α : α -Teilchen

γ : γ -Quant (Photon)

d: Deuteron (Kern des schweren Wasserstoffatoms H2)

t: Triton (Kern des überschweren Wasserstoffatoms H3)

Schreibweise:

$M + a \rightarrow T + b$ bzw. $M(a, b) T$

M Mutter-, T Tochternuklid

a Geschoßteilchen oder Photon

b abgestrahltes Teilchen oder Photon

7.5 Wechselwirkung ionisierender Strahlung mit Materie

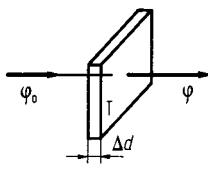
7.5.1 Grundgrößen

Totaler atomarer (mikroskopischer) Wirkungsquerschnitt σ_T

$$\sigma_T = \frac{1 - \varphi/\varphi_0}{n \cdot \Delta d}$$

$$\sigma_T = \frac{N_w}{n N \Delta d}$$

$$n = \frac{\varrho N_A}{m_m}$$



Einheit: 1 m^2

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

φ_0 auftreffende Teilchenflußdichte (einheitliche Richtung)

φ Teilchenflußdichte in der ursprünglichen Richtung nach der Wechselwirkung

n Anzahl der Atome des Targets T pro Volumeneinheit

N Anzahl der auftreffenden Teilchen bzw. Photonen

N_w Anzahl der Wechselwirkungen

ϱ Dichte des Targetmaterials der molaren Masse m_m

N_A Avogadrokonstante

Einheit: 1 m^{-1}

σ_T totaler atomarer Wirkungsquerschnitt

n Anzahl der Targetatome pro Volumeneinheit

Schwächungskoeffizient¹⁾ μ (makroskopischer Wirkungsquerschnitt Σ)

$$\mu = \Sigma = n \sigma_T$$

Massenschichtdicke (flächenbezogene Masse) d^*

Einheit: 1 kg/m^2 ($1 \text{ kg/m}^2 = 10^2 \text{ mg/cm}^2$)

$$d^* = d \varrho = \frac{m}{A}$$

d (geometrische) Schichtdicke

ϱ Dichte, m Masse

A durchstrahlte Fläche des Absorbermaterials

7.5.2 Wechselwirkung von Röntgen- und γ -Strahlung

γ -Energien von Radionukliden

siehe Tab. 45

Elementarprozesse der Wechselwirkung

siehe Seite 112.

Schwächungsgesetz

$I_{r,0}$ Impulsrate der ankommenden Strahlung

für Strahlenbüschel kleiner Öffnungswinkel:

$I_r(d) = I_{r,0} e^{-\mu d}$ bzw. $I_r(d^*) = I_{r,0} e^{-\mu^* d^*}$ Impulsrate der Strahlung nach Durchlaufen der Schichtdicke d bzw. der Massenschichtdicke d^*

μ Schwächungskoeffizient (Tab. 42)

μ^* Massenschwächungskoeffizient (in m^2/kg)

ϱ Dichte des Absorbermaterials

n Anzahl der Targetatome pro Volumeneinheit

σ_T totaler Wirkungsquerschnitt

μ_t , μ_σ bzw. μ_x Schwächungskoeffizient des Photo-, Compton- bzw. Paarbildungseffekts

$$I_r(d) = I_{r,0} e^{-\mu d}$$

$$I_r(d^*) = I_{r,0} e^{-\mu^* d^*}; \quad d^* = d \varrho; \quad \mu^* = \mu / \varrho$$

$$\mu = n \cdot \sigma_T = \mu_t + \mu_\sigma + \mu_x$$

Halbwertsschichtdicke $d_{1/2}$:

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

Zehntelwertsschichtdicke $d_{1/10}$:

$$d_{1/10} = \frac{\ln 10}{\mu}$$

Schwächungsgesetz für breite Bündel

$I_r(d) = B(W) I_{r,0} e^{-\mu d}$ Impulsrate der ankommenden Strahlung

$B(W)$ Aufbaufaktor (Zuwachsfaktor) des Absorbermaterials

W Quantenenergie

$$I_r(d) = B(W) I_{r,0} e^{-\mu d}$$

$$B(W) \approx 1 + \mu d$$

¹⁾ Auch linearer Absorptionskoeffizient genannt.

7.5.3 Wechselwirkung von α -Teilchen

α -Energien von Radionukliden

siehe Tab. 45

(Mittlere) Reichweite R_Z in einem Stoff der Ordnungszahl Z

$$R_Z = 3,4 \cdot 10^{-4} \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{\sqrt{A_r}}{\varrho} \cdot R_L$$

A_r relative Atommasse des Stoffes (PSE: A_r)

ϱ Dichte des Stoffes

R_L Reichweite in Normalluft

W_{trans} Anfangstranslationsenergie des Teilchens

$$R_L = 0,32 \text{ cm} \cdot \left(\frac{W_{trans}}{\text{MeV}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Massenreichweite R^*

Einheit: 1 kg/m^2

(für alle Zustände eines Stoffes konstant)

$$R^* = R \cdot \varrho$$

R Reichweite im Stoff der Dichte ϱ

7.5.4 Wechselwirkung von Elektronen- und β -Strahlung

β -Maximalenergie W_{max} eines Radionuklides

siehe Tab. 45

Schwächungsgesetz

$$\begin{aligned} I_r(d) &= I_{r,0} e^{-\mu d} \\ I_r(d^*) &= I_{r,0} e^{-\mu^* d^*}; \quad d^* = d \varrho \\ \mu^* &= \mu / \varrho; \\ \mu^* &\approx 22 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \cdot \left(\frac{W_{max}}{\text{MeV}} \right)^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

$I_{r,0}$ Impulsrate der ankommenen Strahlung

$I_r(d)$ bzw. $I_r(d^*)$ Impulsrate der Strahlung nach Durchlaufen der Schichtdicke d bzw. der Massendicke d^* (Einheit: 1 kg/m^2)

μ Schwächungskoeffizient

μ^* Massenschwächungskoeffizient

ϱ Dichte des Absorbermaterials

W_{max} Maximalenergie der Elektronen

Massenreichweite R^* :

$$R^* = R \cdot \varrho$$

R Reichweite im Stoff der Dichte ϱ

$$R^* = 407 \frac{\text{mg}}{\text{cm}^2} \left(\frac{W_{max}}{\text{MeV}} \right)^{1.38}; \quad 0.15 \text{ MeV} \leq W_{max} \leq 0.8 \text{ MeV}$$

W_{max} Maximalenergie der Elektronen

$$R^* = \left(542 \frac{W_{max}}{\text{MeV}} - 133 \right) \frac{\text{mg}}{\text{cm}^2}; \quad 0.8 \text{ MeV} \leq W_{max} \leq 3 \text{ MeV}$$

7.5.5 Wechselwirkung von Neutronen

Schwächungskoeffizient (makr. Wirkungsquerschnitt) Σ

Einheit: 1 m^{-1}

n Anzahl der Wechselwirkungsatome pro Volumeneinheit

σ_T totaler atomarer Wirkungsquerschnitt

σ_s Streu-, σ_e Einfang-, σ_f Spalt- und σ_a Absorptionsquerschnitt

$$\Sigma = n \sigma_T = n (\sigma_s + \sigma_e + \sigma_f)$$

$$\sigma_a = \sigma_e + \sigma_f$$

Schwächungsgesetz für eine homogene Schicht

$$\varphi(d) = \varphi_0 e^{-d\Sigma}$$

φ_0 aufstreffende Neutronenflußdichte
 $\varphi(d)$ Neutronenflußdichte in Einfallrichtung nach Durchlaufen der Schichtdicke d
 Σ Schwächungskoeffizient des Schichtmaterials

Neutronenaktivierung (dünnnes Target)Aktivität \mathcal{A} der aktivierten Atome:

$$\mathcal{A}(t) = \sigma_e \varphi N_a (1 - e^{-\lambda t}) = \sigma_e \varphi N_a (1 - 2^{-t/T_{1/2}})$$

$$N_a = \frac{p \cdot m_{\text{ges}}}{m_m} \cdot N_A$$

σ_e Neutroneneinfangquerschnitt des zu aktivierenden Nuklids
 φ Neutronenflußdichte
 N_a Anzahl der zu aktivierenden Atome mit dem relativen Massenanteil p im Präparat der Masse m_{ges}
 λ Umwandlungskonstante des aktivierten Nuklids
 t Aktivierungszeit
 N_A Avogadrokonstante, $T_{1/2}$ Halbwertszeit
 m_m molare Masse des aktivierten Nuklids

7.5.6 Dosimetrie**Energiedosis D**

$$D = \frac{\Delta W}{\Delta m} = \frac{1}{\varrho} \frac{\Delta W}{\Delta V}$$

Speziell homogene Strahlung: $D = W/m$

Einheit: 1 Gray Gy = 1 J/kg
 $1 \text{ rad rd} = 10^{-2} \text{ Gy}$

ΔW absorbierte Energie im Stoff mit der Masse Δm bzw. dem Volumen ΔV
 ϱ Dichte

Energiedosisrate(-leistung) \dot{D}

$$\dot{D} = \frac{\Delta D}{\Delta t}$$

Ionendosis J_L (luftbezogen)

$$J_L = \frac{\Delta Q}{\Delta m_L} = \frac{1}{\varrho_{L,n}} \frac{\Delta Q}{\Delta V_L}$$

Speziell homogene Strahlung: $J_L = Q/m_L$

Einheit: 1 C/kg
 $1 \text{ Röntgen R} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$

ΔQ durch Ionisierung erzeugte Ladung eines Vorzeichens in Normalluft der Masse Δm_L bzw. des Volumens ΔV_L bei der Dichte $\varrho_{L,n}$

Ionendosisrate(-leistung) \dot{J}

$$\dot{J} = \frac{\Delta J}{\Delta t}$$

Einheit: 1 A/kg
 $1 \text{ R/h} = 7,17 \cdot 10^{-7} \text{ A/kg}$

Zusammenhang zwischen Energiedosis D_B im Stoff B und Ionendosis J_L bei γ -Strahlung

$$D_B = 34 \text{ V} \cdot \frac{\mu_B^*}{\mu_L^*} \cdot J_L$$

μ_B^* bzw. μ_L^* Massenschwächungskoeffizient des Stoffes B bzw. der Luft
 J_L Ionendosis in Luft

Speziell organisches Gewebe: $D_{\text{gew}} = 37,2 \text{ V} \cdot J_L$ **Äquivalentdosis H**

$$H = q D; \quad q = Q \cdot N$$

Einheit: 1 Sievert Sv = 1 J/kg; 1 rem = 10^{-2} Sv

q Bewertungsfaktor (Tab. 44), D Energiedosis
 Q Qualitätsfaktor
 N Zahlenfaktor (äußere Strahlung: $N = 1$)

Äquivalentdosisrate(-leistung) \dot{H}

$$\dot{H} = \frac{\Delta H}{\Delta t}$$

$$\dot{H} = K_\gamma \cdot \frac{\mathcal{A}}{r^2}$$

Einheit: 1 Sv/s = 1 W/kg
 $1 \text{ rem/h} = 2,78 \mu\text{Sv/s}$

K_γ γ -Dosiskonstante (Tab. 43)

\mathcal{A} Aktivität

r Abstand vom Strahler

7.6 Systeme freier Teilchen

7.6.1 Grundgrößen

h Planck-Konstante, k Boltzmannkonstante, T absolute Temperatur

Volumenelement $\Delta\tau$ im Phasenraum

$$\Delta\tau = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z$$

Einheit: $1 \text{ kg}^3 \text{ m}^6 \text{ s}^{-3}$

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ Intervalle der (kartesischen) Koordinaten des Ortsvektors \vec{r}

$\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ Intervalle der (kartesischen) Koordinaten des Impulsvektors \vec{p}

Dichte ϱ_{Ph} der möglichen Zustände im Phasenraum

$$\varrho_{\text{Ph}} = \frac{\Delta N_0}{\Delta\tau} = \frac{1}{h^3}$$

Einheit: $1 \text{ s}^3 \text{ kg}^{-3} \text{ m}^{-6}$

ΔN_0 Anzahl der möglichen Zustände im Phasenraumvolumenelement $\Delta\tau$

7.6.2 Elektronengas

(sowie Atome und Moleküle mit halbzahligem Spin)

Pauli-Prinzip

Jeder mögliche Zustand kann höchstens von einem Elektron besetzt sein.

Fermi-Energie W_F

Einheit: $1 \text{ eV} (= 1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ J})$

W_F Energie des höchsten besetzten Zustandes bei 0 K

T_F Entartungstemperatur

n_e Elektronendichte, m_e Elektronenmasse

Fermi-Dirac-Verteilung $f_F(W)$

$$f_F(W) = \left(\frac{\Delta N_W}{\Delta N_0} \right)_F = \frac{1}{A(T) e^{W/kT} + 1}$$

W kinetische Energie eines Elektrons

ΔN_0 vzw. ΔN_W Anzahl der möglichen bzw. der besetzten Zustände zwischen W und $W + \Delta W$

μ Fermi-Niveau (chemisches Potential)

$A(T)$ temperaturabhängige Normierungskonstante

7.6.3 Photonengas

(sowie Atome und Moleküle mit ganzzahligem Spin)

Bose-Einstein-Verteilung $f_B(W)$

$$f_B(W) = \left(\frac{\Delta N_W}{\Delta N_0} \right)_B = \frac{1}{A(T) e^{W/kT} - 1}$$

W bzw. f Energie bzw. Frequenz eines Photons
 ΔN_0 bzw. ΔN_W Anzahl der möglichen bzw. der besetzten Zustände zwischen W und $W + \Delta W$

$A(T)$ temperaturabhängige Normierungskonstante

m Photonenmasse, c_0 Vakuumlichtgeschwindigkeit

$$W = h f = m c_0^2$$

8 Tabellen

Dezimale Vielfache und Teile von Einheiten

E	Exa-	10^{18}	M	Mega-	10^6	d	Dezi-	10^{-1}	n	Nano-	10^{-9}
P	Peta-	10^{15}	k	Kilo-	10^3	c	Zenti-	10^{-2}	p	Pico-	10^{-12}
T	Tera-	10^{12}	h	Hekto-	10^2	m	Milli-	10^{-3}	f	Femto-	10^{-15}
G	Giga-	10^9	da	Deka-	10^1	μ	Mikro-	10^{-6}	a	Atto-	10^{-18}

Tab. 1 Allgemeine Konstanten

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c_0 = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ (Definition)
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} = 1,25663706 \dots \cdot 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$ (Definition)
Elektrische Feldkonstante $1/(\mu_0 c_0^2)$	$\epsilon_0 = 8,8541878 \dots \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$
Gravitationskonstante	$f = 6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Absoluter Nullpunkt der Temperatur	$\vartheta_0 = -273,15^\circ\text{C} = 0\text{ K}$ (Definition)
Physikalischer Normdruck	$p_n = 1013,25 \text{ hPa}$ (Definition)
Universelle Gaskonstante	$R = 8,3145 \cdot 10^3 \text{ JK}^{-1} \text{ kmol}^{-1}$
Normvolumen idealer Gase	$V_{m,n} = 22,414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$
Avogadrokonstante	$N_A = 6,02214 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
Boltzmannkonstante	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
Atomare Masseneinheit (Atommassenkonstante)	$u = 1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Faradaykonstante	$F = 9,64853 \cdot 10^7 \text{ As kmol}^{-1}$
Planck-Konstante	$h = 6,62608 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,13567 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$
Flußquant $h/(2e)$	$\phi_0 = 2,067835 \cdot 10^{-15} \text{ Vs}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Bohrsches Magneton	$\mu_B = 9,27402 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$
Kernmagneton	$\mu_K = 5,05079 \cdot 10^{-27} \text{ A m}^2$

Tab. 2 Atome und Atombausteine

Elektron,	Ruhemasse	$m_{e,0} = 9,10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 5,485799 \cdot 10^{-4} u$
	Ladung (Elementarladung)	$e = 1,602177 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
	spezifische Ladung	$e/m_{e,0} = 1,758820 \cdot 10^{11} \text{ As kg}^{-1}$
	Radius (klassisch)	$r_e = 2,817941 \cdot 10^{-15} \text{ m}$
	Ruheenergie	$m_{e,0} c_0^2 = 0,510999 \text{ MeV} = 8,18711 \cdot 10^{-14} \text{ J}$
	magnetisches Moment	$\mu_e = 9,28477 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$
Proton,	Compton-Wellenlänge	$\lambda_C = 2,426311 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
	Ruhemasse	$m_{p,0} = 1,67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0072765 u$
	Ruheenergie	$m_{p,0} c_0^2 = 938,272 \text{ MeV} = 1,503279 \cdot 10^{-10} \text{ J}$
	spezifische Ladung	$e/m_{p,0} = 9,57883 \cdot 10^7 \text{ As kg}^{-1}$
Neutron,	magnetisches Moment	$\mu_p = 1,410608 \cdot 10^{-26} \text{ A m}^2$
	Ruhemasse	$m_{n,0} = 1,67493 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,0086649 u$
	Ruheenergie	$m_{n,0} c_0^2 = 939,566 \text{ MeV} = 1,505351 \cdot 10^{-10} \text{ J}$
Deuteron, α -Teilchen, H1-Atom,	magnetisches Moment	$\mu_n = -9,66237 \cdot 10^{-27} \text{ A m}^2$
	Ruhemasse	$m_D = 3,34359 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 2,0135532 u$
	Ruhemasse	$m_\alpha = 6,6465 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4,00260 u$
	Ruhemasse	$m_{H1} = 1,67356 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,007825 u$
	Bohrscher Radius	$r_B = 5,291772 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
	Rydbergfrequenz	$R_\infty = 3,28984195 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$

Tab. 3 Astronomische Daten

Erde,	Mittlerer Radius	$r_E = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
	Äquatorradius	$r_{E,\text{Ä}} = 6,378388 \cdot 10^6 \text{ m}$
	Polradius	$r_{E,\text{P}} = 6,356912 \cdot 10^6 \text{ m}$
	Masse	$m_E = 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
	Umdrehungszeit (Sterntag)	$T_E = 8,6164 \cdot 10^4 \text{ s}$
	Umlaufzeit (siderisches Jahr)	$T_{E,\text{S}} = 3,1472 \cdot 10^7 \text{ s}$
	Mittlere Dichte	$\varrho_E = 5,517 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
	Normfallbeschleunigung	$g_{E,\text{n}} = 9,80665 \text{ m/s}^2$
Mond,	Fluchtgeschwindigkeit	$v_{P,E} = 11,2 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
	Mittlerer Radius	$r_M = 1,738 \cdot 10^6 \text{ m}$
	Masse	$m_M = 7,347 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
	Umlaufzeit (siderisch)	$T_M = 2,36059 \cdot 10^6 \text{ s}$
	Mittlere Entfernung Erde-Mond	$r_{E,M} = 3,847 \cdot 10^8 \text{ m}$
	Mittlere Dichte	$\varrho_M = 3,342 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
	Fallbeschleunigung	$g_M = 1,6193 \text{ m/s}^2$
	Fluchtgeschwindigkeit	$v_{P,M} = 2,4 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
Sonne,	Mittlerer Radius	$r_S = 6,9635 \cdot 10^8 \text{ m}$
	Mittlere Entfernung Erde-Sonne (astronomische Einheit)	$r_{E,S} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$
	Masse	$m_S = 1,991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
	Mittlere Dichte	$\varrho_S = 1,409 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
	Fallbeschleunigung	$g_S = 2,801 \cdot 10^2 \text{ m/s}^2$
	Fluchtgeschwindigkeit	$v_{P,S} = 618 \cdot 10^3 \text{ m/s}$
	Temperatur an der Oberfläche	$T_{S,O} = 5790 \text{ K}$
	Temperatur im Sonnenkern	$T_{S,K} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ K}$
Solarkonstante		
$S = 1,395 \cdot 10^3 \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} = 1,395 \text{ kW/m}^2$		

Tab. 4 Planetendaten

Planet	Mittl. Abstand zur Sonne in 10^6 km	Siderische Umlaufszeit	Masse in 10^{24} kg	Fallbe- schleunigung in m/s^2	Mittlere Dichte in kg/dm^3	Äquator- Radius in 10^3 km
Merkur	57,9	87,9 d	0,3302	3,69	5,44	2,439
Venus	108,2	224,7 d	4,871	8,85	5,24	6,0513
Erde	149,6	365,26 d	5,975	9,81	5,52	6,378
Mars	227,9	686,98 d	0,6418	3,73	3,93	3,397
Jupiter	778,3	11,86 a	1899	24,5	1,32	71,398
Saturn	1429,4	29,46 a	568,8	10,5	0,71	60,330
Uranus	2884	84,02 a	87,0	8,5	1,22	25,556
Neptun	4504,3	164,8 a	103,0	11,2	1,64	24,765
Pluto	5966	247,7 a	0,013	0,2?	≈ 2	1,150

Tab. 5 Fläche A, Volumen V, Schwerpunkt S, Flächenmoment 2. Grades I und Trägheitsmoment J

Dreieck	 $A = \frac{1}{2} b h$ $e = \frac{1}{3} h$ $I_x = \frac{1}{12} b h^3$	 $V = \pi R^2 l$; $e = l/2$ $J_x = \frac{1}{2} m R^2$ $J_y = \frac{1}{12} m(l^2 + 3R^2)$ Scheibe: $l \ll R$ Stab: $R \ll l$
Rechteck	 $A = b H$ $e = \frac{1}{2} b$ $I_x = \frac{1}{12} b H^3$	 $V = \pi l(R^2 - r^2)$ $J_x = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2)$ Dünnwandig: $R \approx r$
Trapez	 $A = \frac{1}{2} (a + b) H$ $e = \frac{1}{3} H \frac{a + 2b}{b}$ $I_x = \frac{1}{2} H^3 (a + 3b)$	 $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{1}{6} \pi D^3$ $J_x = \frac{2}{5} m R^2$
Sechseck	 $A = \frac{3}{2} \sqrt{3} R^2$ $I_x = I_y = 0,541 R^4$	 $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ $e = \frac{1}{4} H$ $J_x = \frac{3}{10} m R^2$
Kreis	 $A = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2$ $I_x = \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{1}{64} \pi D^4$	 $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$ $e = \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \frac{H}{4}$ $J_x = \frac{3}{10} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
Ellipse	 $A = \pi a b$ $I_x = \frac{1}{4} \pi a b^3$ $I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$	 $V = a b c$ $J_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $J_y = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$ Platte: $a \ll b$
Quadr. Parabel	 $A_i = \frac{2}{3} a f$; $A_a = \frac{1}{3} a f$ $x_{Si} = \frac{3}{5} f$; $x_{Sa} = \frac{3}{10} f$ $y_{Si} = \frac{3}{8} a$; $y_{Sa} = \frac{3}{4} a$	 $V = 2\pi^2 a r^2$ $J_y = \frac{1}{4} m(4a^2 + 3r^2)$ $J_x = \frac{1}{8} m(4a^2 + 5r^2)$

Tab. 6a Dichte ρ in kg/dm³ fester Stoffe bei 20 °C (*Schüttdichte)

Aluminium (gewalzt)	2,7	Silber	10,40	Kalk (gebrannt)*	0,9 bis 1,2
Blei	11,34	Titan	4,5	Kies (trocken)*	1,9 bis 2,0
Bronze (gewöhnlich)	8,6	Uran	18,7	Sand (feucht)*	1,9 bis 2,1
Eisen	7,86	Wolfram	19,3	Sand (trocken)*	1,4 bis 1,6
Flußstahl	7,7 bis 7,86	Wolframstahl	9,0	Diamant	3,6
Gold	19,3	Zink (gewalzt)	7,15	Eis (0 °C)	0,92
Gußeisen	7,2 bis 7,6	Zinn (gegossen)	7,20	Kork	0,24
Konstantan	8,8	Platin	21,4	Kristallglas	2,9
Kupferdraht (hart)	8,96			Quarzglas	2,2
Magnesium	1,74	Basalt	3,0	Gummi	1,1
Messing	8,1 bis 8,6	Gips	2,3	Balsaholz	0,08 bis 0,2
Natrium	0,97	Granit	2,5 bis 2,7	Buchenholz	0,6 bis 0,9
Nickeldraht (hart)	8,76	Kalkstein	2,7		
		Gips*	1,6 bis 1,8		

Tab. 6b Dichte ρ in kg/dm³ von Flüssigkeiten bei 20 °C

Ethanol	0,789	Petroleum	0,8 bis 0,82	Schwefelsäure (100 %)	1,83
Benzin	0,70 bis 0,74	Quecksilber	13,55	Seewasser	1,02
Benzol	0,88	Salpetersäure (50 %)	1,31	Spiritus	0,83
Diethylether	0,72	Salzsäure (25 %)	1,1	Tetrachlorkohlenstoff	1,598
Dieselöl	0,85 bis 0,88	Salzsäure (40 %)	1,195	Toluol	0,866
Glycerin	1,26	Schwefelkohlenstoff	1,26	Wasser (4 °C)	1,0000
Pentan	0,623	Schwefelsäure (50 %)	1,40	Wasser (0 °C)	0,9982

Tab. 6c Dichte ρ_n in kg/m³ von Gasen im Normzustand (S. 53)

Ammoniak	0,771	Kohlenmonoxid	1,250	Sauerstoff	1,429
Acetylen	1,171	Luft (trocken)	1,293	Schwefeldioxid	2,93
Chlor	3,23	Methan	0,717	Stadtgas	0,6
Helium	0,179	Ozon	2,22	Stickstoff	1,250
Kohlendioxid	1,977	Propan	2,0	Wasserstoff	0,090

Tab. 7 Elastizitätsmodul E in 10¹¹ N/m², Kompressionsmodul K in 10¹¹ N/m² und Poissonzahl μ fester Stoffe

Stoff	E	K	μ	Stoff	E	μ
Aluminium	0,73	0,72	0,34	Basalt	0,5 bis 1	
Blei	0,17	0,44	0,45	Beton	0,1 bis 0,4	0,17
Gußeisen	0,75	0,72	0,26	Granit	0,15 bis 0,7	
Kupfer	1,24	1,43	0,35	Kalkstein	0,25 bis 0,7	0,33
Magnesium	0,41	0,33	0,28	Marmor	0,42	0,30
Messing	1,03	1	0,35	Sandstein	0,04 bis 0,4	
Nickel	0,20	2	0,31	Ziegel	0,09	
Stahl (Cr/Ni)	2,0		0,3	Laborglas	0,65	
Federstahl	2,2	0,53	0,29	Plexiglas	0,03	
Wolfram	3,55	3,3	0,29	Polystyrol	0,032	0,33
Uran	1,3		0,28	Porzellan	0,7	0,23
Zink	0,8	0,59	0,25	Quarzglas	0,6	0,20
Zinn	0,55	0,53	0,33	Gummi	0,005	

Tab. 8 Reibungszahlen μ' bzw. μ für Haft- bzw. Gleitreibung

Stoffpaar	Haftreibung		Gleitreibung	
	trocken	naß bzw. geschmiert	trocken	naß bzw. geschmiert
Stahl auf Stahl	0,15	0,12 bis 0,11	0,09 bis 0,03	0,009
Stahl auf Holz	0,6 bis 0,5	0,1	0,5 bis 0,2	0,08 bis 0,02
Stahl auf Eis		0,027		0,014
Gummi auf Asphalt	0,9		0,85	0,45
Gummi auf Eis				0,15

Tab. 9 Rollreibungszahlen μ_R

Auto auf Asphalt	0,025	Stahlreifen auf Erde	0,05 bis 0,1
Auto auf Pflaster	0,04	Stahlreifen auf Pflaster	0,3
Eisenbahn	0,003	Stahlreifen auf Asphalt	0,02 bis 0,03

Tab. 10 Rollreibungslänge f in m

Stahl auf Stahl (Eisenbahn)	$5 \cdot 10^{-4}$	Gußeisen auf Gußeisen	$5 \cdot 10^{-5}$
Stahl auf Stahl (Kugellager)	$5 \cdot 10^{-6}$ bis 10^{-5}	Weichholz auf Weichholz	$1,5 \cdot 10^{-3}$

Tab. 11 Kompressionsmodul K von Flüssigkeiten in 10^8 N/m^2 bei 20°C

Ethanol	8,55	Glycerin	45,1	Tetrachlorkohlenstoff	8,8
Benzol	7,87	Pantan	4,04	Wasser	20
Diethylether	6,4	Quecksilber	257		

Tab. 12 Kapillaritätskonstante σ von Flüssigkeiten in 10^{-2} N/m gegen Luft bei 20°C (Wasser siehe Tab. 14)

Ethanol	2,20	Glycerin	6,34	Quecksilber	46,5
Benzol	2,88	n-Pantan	1,37	Tetrachlorkohlenstoff	2,38

Tab. 13 Dynamische Viskosität η in 10^{-3} Pas bei 20°C (Wasser siehe Tab. 14)

Ethanol	1,20	Petroleum	1,46	Kohlendioxid	0,0147
Benzol	0,648	Quecksilber	1,554	Methan	0,0108
Diethylether	0,24	Schweres Wasser	1,26	Sauerstoff	0,0203
Glycerin	1480	Tetrachlorkohlenstoff	0,97	Stickstoff	0,0175
Methanol	0,587	Toluol	0,585	Wasserstoff	0,013
Motoröl	20 bis 10^4	Ammoniak	0,224	Luft	0,0171
Pech	$3 \cdot 10^{10}$	Helium	0,022		

Tab. 14 Eigenschaften von Wasser in Abhängigkeit von der Temperatur ϑ σ Kapillaritätskonstante, η dynamische Viskosität, ρ Dichte, p_s Sättigungsdruck

ϑ in °C	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ρ in kg/dm ³	0,99984	0,9997	0,9982	0,9957	0,9922	0,9881	0,9832	0,9778	0,9718	0,9653	0,9584
p_s in Pa	611	1228	2340	4244	7313	12332	19865	31197	42329	70127	101325
σ in 10^{-2} N/m	7,56	7,40	7,25	7,09	6,93	6,78	6,57	6,45	6,30	6,12	5,88
η in 10^{-3} Pas	1,79	1,31	1,00	0,80	0,65	0,55	0,47	0,40	0,36	0,32	0,28

Tab. 15 Widerstandsbeiwerte (Richtwerte) c_w

			c_w				c_w
	Kreisplatte	$Re < 2 \cdot 10^5$	1,11		Kegel (mit Boden)	$\alpha = 60^\circ$ $\alpha = 30^\circ$	0,51 0,34
	Kreisringplatte	$D: d = 2$	1,22		Stromlinienkörper	$Re \approx 10^5$ $L:D = 2$ $L:D = 5$ $L:D = 10$ $L:D = 20$	0,2 0,06 0,083 0,094
	Halbkugel (ohne Boden)	$a:b = 1$ $a:b = 4$ $a:b = 10$ $a:b = 18$	1,10 1,19 1,29 1,40		Ellipsoid	$Re > 10^5$ $L:D = 9:5$	0,1
	Halbkugel (mit Boden)		0,40 1,17		Ellipsoid	$Re < 4,5 \cdot 10^5$ $Re > 5,5 \cdot 10^5$	0,6 0,2
	Kugel	$Re = 10^6$	0,47 0,13		Zylinder	$Re \approx 8 \cdot 10^4$ $H:D = 1$ $H:D = 2$ $H:D = 5$ $H:D = 10$	0,63 0,68 0,74 0,82

Tab. 16 Schallgeschwindigkeit c in m/s bei 20 °C

Luft	344	Kautschuk	50	Eis	4000
Kohlendioxid	278	Sand	200	Eichenholz	3400
Leuchtgas	453	Kork	540	Mauerwerk	3600
Petroleum	1451	Bleiplatte	700	Beton	4000
Quecksilber	1460	Bleistab	1250	Messingstab	3500
Wasser	1480	Blei	2400	Eisenstab	5170
Glycerin	1923	Glas	5200	Aluminium	5100

Tab. 17 Bewerteter Schallpegel $L_A = L + \Delta L$ in dB(A)

Frequenz in Hz	31,5	63	125	250	500	1000	2000	4000	8000	16000
ΔL in dB	-39,4	-26,2	-16,1	-8,6	-3,2	0	1,2	1	-1,1	-6,6

Tab. 18 Schallabsorptionsgrad α von Schallabsorbern

Frequenz in Hz	125	250	500	1000	2000	4000
Putz auf Mauerwerk	0,02	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04
Mineralwolleputz 1 cm	0,07	0,09	0,27	0,52	0,74	0,76
Hochlochziegel 11,5 cm mit Mineralwolle in 6 cm Hohlraum	0,15	0,65	0,45	0,45	0,40	0,70
Bimsbeton	0,15	0,40	0,60	0,60	0,60	0,60
Vorhang glatt	0,05	0,10	0,25	0,30	0,40	0,50
Vorhang dick, faltig	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
Sperrholz 3 mm mit 5 cm Abstand	0,25	0,34	0,18	0,10	0,10	0,06
2 cm Abstand	0,07		0,22		0,10	
0 cm Abstand	0,07		0,05		0,10	
Holztür	0,20	0,15	0,10	0,08	0,09	0,11
geschlossene Einfachfenster	0,10	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02
Linoleum	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04
Parkett aufgeklebt	0,04	0,04	0,06	0,12	0,10	0,15
Boucleteppich hart	0,02		0,05		0,18	
Velourteppich 5 mm	0,04	0,04	0,15	0,30	0,50	0,60
Holzgestühl	0,40	0,20	0,06	0,05	0,04	0,04
Stoffpolstergestühl	0,45	0,60	0,75	0,90	0,80	0,70
Fläche von Personen bei voller Besetzung	0,50	0,70	0,85	0,97	0,93	0,85

Tab. 19 Schallschluckung A' von Schallabsorbern in m^2

Frequenz in Hz	125	250	500	1000	2000	4000
Holzklappstuhl	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,03
Stoffpolsterklappstuhl	0,15	0,30	0,30	0,40	0,40	0,40
Person auf Stuhl	0,15	0,30	0,45	0,45	0,45	0,45
Personen in großen und halligen Räumen	0,65	0,75	0,85	0,95	0,95	0,80

Tab. 20 Raumvolumen V und optimale Nachhallzeit T in s für 500 Hz

V in m^3	Vortragssaal	Konzertsaal	Kirche	Frequenz in Hz	Nachhallzeitfaktor
200	0,7	1,0	1,3		
500	0,8	1,1	1,4	125	1,4
1000	0,9	1,2	1,5	250	1,15
2000	1,1	1,35	1,7	500	1
5000	1,2	1,5	1,9	1000	0,9
10000	1,4	1,8	2,2	2000	0,9
20000	1,7	2,1	2,6	4000	0,9

Tab. 21 Längenausdehnungskoeffizient α von festen Stoffen in 10^{-6}K^{-1} im Bereich von -20°C bis 100°C

Aluminium	23,8	Wolfram	4,5	Supremaxglas	3,7
Beryllium	13	Zink	26,3	Quarzglas	0,5
Blei	29,2	Zinn	27	Celluloid	100 bis 150
Bronze	17,5	Asphalt	170 bis 230	Pertinax	10 bis 30
Cadmium	29,4	Eis (0°C)	37	Plexiglas	70 bis 100
Invar (Ni-Stahl)	0,9	Erde	≈ 2	Polyamid	100 bis 140
Konstantan	15	Granit	3 bis 8	Polyethylen	200
Kupfer	16,6	Graphit	7,9	Polystyrol	60 bis 100
Manganin	18	Holz, längs zur Faser	8	PVC	150 bis 200
Messing	18	Porzellan	3	Stahlbeton	10 bis 15
Natrium	71	Geräteglas 20	4,8	Gips	25
Silber	10,5	Duranglas 50	3,2	Kalkstein	7
Silicium	7,6	Suprax	3,9	Klinker	3
Stahl	9,5 bis 12	Normalglas 16	8,2	Mörtel, Putz	9
Titan	9	Thermometerglas	6,0	Zement	14
V2A-Stahl	16			Ziegel	5

Tab. 22 Volumenausdehnungskoeffizient γ von Flüssigkeiten in 10^{-4}K^{-1} bei 20°C

Ethanol	11,2	Essigsäure	10,7	n-Pentan	16
Aceton	14,9	Glycerin	5,0	Quecksilber	1,818
Benzol	12,5	Heizöl	9 bis 10	Terpentinöl	9,7
Benzin	10,1 bis 10,6	n-Hexan	13,5	Tetrachlorkohlenstoff	12,3
Chloroform	12,8	Methanol	12	Toluol	11,1
Diethylether	16,2	Nitrobenzol	8,3	Wasser	1,8

Tab. 23 Sättigungsdruck p_s von Dämpfen in Pa bei 20°C

Kohlendioxid	$5,73 \cdot 10^6$	Schwefelkohlenstoff	$3,996 \cdot 10^4$	Quecksilber	0,163
Freon 22 (CHF_2Cl)	$9,17 \cdot 10^5$	Trichlorethylen	$7,2 \cdot 10^4$	Ramsay-Fett	10^{-2} bis 10^{-3}
Freon 12 (CF_2Cl_2)	$5,67 \cdot 10^5$	Ethylalkohol	$5,87 \cdot 10^3$	Picein	4 bis $5 \cdot 10^{-2}$
Methylenchlorid	$4,61 \cdot 10^4$	Pumpenöl	> 5	Hochvakuum-Silikonfett	$\approx 10^{-6}$

Tab. 24 Kritische Temperatur T_k , kritischer Druck p_k und kritische Dichte ϱ_k von Fluiden

	T_k in K	p_k in 10^5N/m^2	ϱ_k in kg/dm^3		T_k in K	p_k in 10^5N/m^2	ϱ_k in kg/dm^3
Ammoniak	405	103	0,235	Methan	191	32,2	0,162
Argon	151	49	0,536	Propan	370	42,6	0,226
Deuterium	38	16,7	0,0668	Sauerstoff	154	50,8	0,430
Helium	5	2,3	0,0694	Stickstoff	126	33,9	0,52
Kohlendioxid	304	73,8	0,468	Wasserstoff	33,3	13	0,0301
Krypton	209	55	0,908	Wasser	647	218	0,312

Tab. 25 Kalorimetrische Werte

c spez. Wärmekapazität; c_p spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck; ϑ_s Erstarrungs- bzw. Schmelztemperatur, ϑ_b Siede- bzw. Kondensationstemperatur; q_s spez. Schmelz- bzw. Erstarrungswärme; q_b spez. Verdampfungs- bzw. Kondensationswärme; R_i individuelle Gaskonstante; λ Wärmeleitfähigkeit, α Isentropenexponent

Feste Stoffe und Flüssigkeiten	c bei 20 °C in $10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	ϑ_s in °C	q_s in 10^3 J/kg	ϑ_b in °C	q_b in 10^6 J/kg	λ in $\text{W}/(\text{m K})$ bei 20 °C
Aluminium	0,91	660	397	2450	10,9	239
Blei	0,129	327,4	23	1750	8,6	34,8
Cadmium	0,231	320,9	56	765	0,89	93
Eisen (rein)	0,45	1535	277	2880	6,34	75
Gold (rein)	0,129	1063	2700	2700	1,65	312
Graphit	0,836	3650		4350		160
Gußeisen	0,54	1150				50
Kupfer	0,383	1083	205	2590	4,79	395
Messing	0,381	920				112
Natrium	1,22	97,8	113	890	0,39	130
Platin (rein)	0,133	1769,3	111	4300	2,29	70,1
Silber	0,235	961	105	2200	2,35	428
Uran	0,115	1132	82,8	3900	1,73	25
Wolfram	0,134	3380	192	5500	4,35	177
Zinn	0,227	232	60	2960	2,45	65
Eis	2,09	0	333,7	—	—	2,2 (0 °C)
Ethanol	2,43	—114,5	108	78,3	0,84	0,130
Benzol	1,73	5,5	128	80,1	0,394	0,148
Diethylether	2,31	—116,3	101	34,5	0,384	0,130
Glycerin	2,39	— 18	201	290,5	0,882	0,285
n-Pentan	2,35	—129,7	116	36,1	0,36	0,116
Quecksilber	0,138	— 38,9	11,8	356,6	0,285	8,2
Seewasser	4,18	— 2,5				
Wasser, normal	4,18	0	333,7	100	2,256	0,6
Wasser, schwer	4,212	3,8	317,8	101,4	2,072	

Gase (Normdruck)	α bei 20 °C	c_p bei 20 °C in $10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	ϑ_s in °C	q_s in 10^6 J/kg	ϑ_b in °C	q_b in 10^3 J/kg	R_i in $10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Ammoniak	1,305	2,16	— 77,7	0,339	— 33,4	1370	0,488
Argon	1,648	0,523	—189,4		—185,9	163	0,2079
Deuterium		0,498	—254,4		—249,5	304	
Helium	1,63	5,23			—268,9	20,6	2,072
Kohlendioxid	1,293	0,837	— 56,6		— 78,5*)	136,8	0,1876
Krypton	1,69		—157,2		—153,4	108	
Luft	1,402	1,005			—191,4	192	0,2868
Methan	1,308	2,219	—182,5		—161,5	510	0,5180
Propan	1,13	1,595	—187,7		—42,1	426	
Sauerstoff	1,398	0,918	—218,8	0,014	—183	213	0,2595
Stickstoff	1,401	1,038	—210	0,025	—195,8	198	0,296
Wasserstoff	1,41	14,32	—259,2	0,058	—252,8	454	4,121
Wasserdampf			—	—	100	2256	0,462

*) Sublimationstemperatur

Tab. 26 Baustoffkennwerte**Rohdichte ϱ ; Rechenwert der Wärmeleitfähigkeit λ_R ; Wasserdampf-Diffusionswiderstandszahl μ**

	ϱ in kg/m ³	λ_R in W/(m K)	μ
Wärmedämmender Putz	600	0,20	5/20
Kalkmörtel	1800	0,87	15/35
Zementmörtel, -estrich	2000	1,4	15/35
Gipsmörtel	1400	0,70	10
Normalbeton	2400	2,1	70/150
Gasbeton	400 bis 800	0,14 bis 0,23	5/10
Asbestzementplatten	2000	0,58	20/50
Gipskartonplatten	900	0,21	8
Vollklinker	2000	1,0	100
Ziegelmauerwerk	600 bis 2000	0,35 bis 1,0 ¹⁾	5/10
Kalksandsteinmauerwerk	1000 bis 1400	0,50 bis 0,70 ¹⁾	5/10
	1600 bis 2200	0,79 bis 1,3 ¹⁾	15/25
Gasbetonmauerwerk	500 bis 800	0,22 bis 0,29 ¹⁾	5/10
Polystyrol-Partikelschaum	≥30	0,025 bis 0,040	40/100
Polystyrol-Extruderschaum	≥25	0,025 bis 0,040	80/300
Polyurethan-Hartschaum	≥30	0,020 bis 0,035	30/100
Faserdämmstoffe	8 bis 500	0,035 bis 0,050	1
Holz (Fichte, Kiefer, Tanne)	600	0,14	40
Harte Holzfaserplatten	1000	0,17	70
Glas	2500	0,81	∞
Dachpappe	1200	0,17	15000/100000
PVC-Folie; 0,1 mm	—	—	20000/50000
Polyethylen-Folie; 0,1 mm	—	—	100000

¹⁾ – 0,06 W/(m K) bei Verwendung von Leichtmaermörtel**Spezifische Wärmekapazität c in kJ/(kg K)**

Anorganische Bau- und Dämmstoffe	1,0	Pflanzliche Fasern, Textilfasern	1,3
Holz und Holzwerkstoffe	2,1	Schaumkunststoffe, Kunststoffe	1,5

Wärmedehnungskoeffizient α in mm/(m K)

Aluminium	0,023	Leichtbetonsteine	0,010
Stahl	0,011	Kalksand-, Gasbetonsteine	0,008
Stahlbeton	0,010	Mauerziegel	0,006

Tab. 27 Wärmeübergangswiderstände $1/\alpha$ in m²K/W nach DIN 4108

An der Innenseite geschlossener Räume bei natürlicher Luftbewegung Wandflächen, Fenster	0,13
Fußböden und Decken bei Wärmebewegung von unten nach oben von oben nach unten	0,13 0,17
An den Außenseiten bei einer mittleren Windegeschwindigkeit in durchlüfteten Hohlräumen	0,04 0,08

Tab. 28 Wärmedurchlaßwiderstand 1/A von Luftsichten

	Dicke s in cm	1	2	2,5	3	5	10	15
Iotrecht	1/A in m ² K/W	0,14	0,16	0,17	0,17	0,18	0,17	0,16
waagrecht, Wärmestrom ↑		0,14	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,16
waagrecht, Wärmestrom ↓		0,15	0,18	0,19	0,20	0,21	0,21	0,21

Tab. 29 Emissionsgrad ε (Gesamtstrahlung) von Oberflächen bei der Temperatur θ

(ε_n senkrechte Abstrahlung, ε Abstrahlung in den Halbraum)

	θ	ε _n	ε		θ	ε _n	ε
Aluminium blank	100	0,04	0,05 bis 0,08	Kupfer oxidiert	20	0,78	0,7
Aluminiumbronze	100	0,2 bis 0,4	0,55	Lack schwarz	80	0,97	
Asbestpappe	20		0,88 bis 0,95	Messing blank	20		0,05
Beton	20		0,88	Platin poliert	100		0,05
Chrom poliert	150	0,06	0,07 bis 0,08	Ruß	20		0,95
Eisenblech verzinnt	20	0,06	0,08	Schamotte	20		0,88
Eisen gerostet	20	0,6	0,65	Silber blank	20	0,02	0,02
Emaille, Lacke	20	0,85 bis 0,95		Wasser		0,67	
Kupfer blank	20	0,03	0,04	Ziegel, Dachpappe	20	0,93	0,93

Tab. 30 Absorptionsgrad α von Baustoffen und Anstrichen

Temperatur der Strahlungsquelle	6000 K	1000 K	300 K	Temperatur der Strahlungsquelle	6000 K	1000 K	300 K
Aluminium poliert	0,30	0,14	0,07	Dachpappe, Schiefer	0,90	0,89	0,93
Aluminium eloxiert	0,16	0,37	0,80	Holz glatt	0,35	0,75	0,90
Aluminiumfarbe	0,20	0,30	0,42	Gipsputz	0,26	0,76	0,88
Asbestschiefer	0,80	0,92	0,96	Weißlack auf Holz	0,21	0,87	0,95
Beton	0,60	0,86	0,88				

Tab. 31 Sättigungsdruck (-dichte) p_s(ρ_s) von Wasserdampf in Abhängigkeit von der Temperatur θ

θ in °C	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10
p _s in Pa	103	114	125	137	150	165	181	198	217	237	260
ρ _s in g/m ³	0,88	0,97	1,06	1,16	1,27	1,39	1,52	1,66	1,81	1,97	2,14
θ in °C	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
p _s in Pa	284	310	337	368	401	437	476	517	562	611	657
ρ _s in g/m ³	2,33	2,53	2,75	2,99	3,25	3,52	3,82	4,14	4,49	4,85	5,20
θ in °C	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p _s in Pa	705	759	813	872	935	1002	1073	1148	1228	1312	1403
ρ _s in g/m ³	5,57	5,96	6,37	6,80	7,27	7,76	8,28	8,83	9,41	10,03	10,68
θ in °C	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
p _s in Pa	1498	1599	1706	1818	1937	2065	2197	2340	2487	2645	2810
ρ _s in g/m ³	11,37	12,09	12,85	13,65	14,50	15,40	16,33	17,31	18,35	19,45	20,60
θ in °C	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
p _s in Pa	2985	3169	3362	3566	3781	4006	4244	4492	4755	5030	5320
ρ _s in g/m ³	21,80	23,07	24,40	25,80	27,27	28,80	30,40	32,07	33,82	35,66	37,58

Tab. 32 Relative (statische) Permittivitätszahl ϵ_r bei 20 °C

Bakelit	3 bis 5	Kabelisolation	4,3	Tempa X	30
Barium-, Titanoxid	10 ³ bis 10 ⁴	Kerafar R	80	Toluol	2,4
Bariumtitannat	ca. 3000	Kerakonstant	ca. 3000	Trafoöl	2,2 bis 2,5
Benzol	2,3	Nitrobenzol	36	Wasser	81,6
Bernstein	2,3 bis 2,9	Papier ungetränkt	1,6	Gase bei 0 °C; 1013 hPa	
Calit	6,5	Papier getränkert	4,3	Ammoniak	1,0072
Condensa C u. F	80	Paraffin	2,0 bis 2,4	Kohlendioxid	1,00096
Condensa N	40	Polyethylen	2,5	Helium	1,000074
Glas	3 bis 15	Polystyrol	2,6	Luft	1,000594
Glimmer	4,5 bis 8	Quarz	3,8 bis 4,3	Sauerstoff	1,00055
Hartpapier	5	Siliconöl	2,2 bis 2,8	Stickstoff	1,00061
Hartgewebe	5 bis 6	Steatit	5,5 bis 6,5	Wasserstoff	1,00026
Hartporzellan	5,5 bis 6,5	Tempa S	14		

Tab. 33 Spezifischer Widerstand ρ und Temperaturkoeffizient α bei 20 °C

	ρ in $\Omega \text{ m}$	α in K^{-1}		ρ in $\Omega \text{ m}$
Aluminium	$2,69 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-3}$	Salzsäure 10 %	$2,5 \cdot 10^{-2}$
Blei	$21 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	NaCl-Lösung 10 %	$7,9 \cdot 10^{-2}$
Eisen	$9,8 \cdot 10^{-8}$	$6,6 \cdot 10^{-3}$	AgNO ₃ -Lösung 10 %	$2,1 \cdot 10^{-1}$
Gold	$2,20 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-3}$	CuSO ₄ -Lösung 10 %	$3,0 \cdot 10^{-1}$
Kalium	$7 \cdot 10^{-8}$	$5,4 \cdot 10^{-3}$	Bernstein	10^{20}
Kupfer	$1,67 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	Glimmer	$5 \cdot 10^{14}$
Nickel	$7 \cdot 10^{-8}$	$6,8 \cdot 10^{-3}$	Hartporzellan	$3 \cdot 10^{12}$
Platin	$10,5 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-3}$	Lupolen	10^{15}
Quecksilber	$96 \cdot 10^{-8}$	$0,9 \cdot 10^{-3}$	Marmor	10^8
Silber	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$	Plexiglas	10^{13}
Wismut	$12 \cdot 10^{-7}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	Polypropylen	10^{16}
Zink	$6,3 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-3}$	PVC	10^{13}
Zinn	$11 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-3}$	Quarz	$3 \cdot 10^{14}$
Chromnickel	$11 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	Quarzglas	$5 \cdot 10^{16}$
Konstantan	$5 \cdot 10^{-7}$	$-3,0 \cdot 10^{-5}$	Silikatglas	$5 \cdot 10^{11}$
Manganin	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	Teflon	10^{13}
Nickelin	$4,3 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	Trolitul	10^{17}
Lampenkohle	$6 \cdot 10^{-4}$	$-0,5 \cdot 10^{-3}$	Germanium (27 °C)	0,46
Wasser dest.	$3 \cdot 10^4$		Selen	10^{13}
Erde	$3 \cdot 10^3$		Silicium	$2,3 \cdot 10^3$

Tab. 34 Dichtebezogene magnetische Suszeptibilität χ_m in $10^{-9} \text{m}^3 \text{kg}^{-1}$ bei 20 °C von para- bzw. diamagnetischen Stoffen

Paramagnetische Stoffe		Diamagnetische Stoffe			
Aluminium	7,7	Mangan	121	Al ₂ O ₃	-3,5
Eisen (800 °C)	18 900	Platin	12	Argon	-6,1
Kobalt (1200 °C)	3 800	Sauerstoff	1 300	Benzol	-8,9
Luft	2 707	Titan	40	Chlor	-7,4
Magnesium	10			Helium	-5,9
				Kupfer	-1,08
				Stickstoff	-5
				Quecksilber	-2,1
				Wasser	-9,05
				Wismut	-16

Tab. 35 Daten einiger Thermoelemente

Thermoelement	Thermokraft in $\mu\text{V/K}$ (zugehöriger Temperatur-Bereich in °C)	ungefähre obere Grenze der Anwendungs-Temperatur in °C
Kupfer/Konstantan	42,5 (0 bis 100)	400
Eisen/Konstantan	53,7 (0 bis 200)	700
Nickel/Chromnickel	41,3 (0 bis 1000)	1000
Platin/Platin-Rhodium	9,6 (0 bis 1000)	1300
Iridium/Iridium-Rhenium	17 (0 bis 2000)	2000

Tab. 36 Ionenbeweglichkeit b in stark verdünnter wässriger Lösung bei 18 °C in $10^{-8} \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$

H ⁺	33	Ag ⁺	5,7	(OH) ⁻	18,2	J ⁻	6,95
Na ⁺	4,6	NH ₄ ⁺	6,7	Cl ⁻	6,85	(MnO ₄) ⁻	5,6
K ⁺	6,75	Fe ³⁺	4,8	Br ⁻	7,0	(SO ₄) ²⁻	7,2

Tab. 37 Hall-Konstante R_H in $10^{-11} \text{ m}^3/\text{C}$

Cadmium	+5,89	Zink	+6,3	InSb	$-3 \cdot 10^7$
Gold	-7,24	Wismut	ca. -10^4	InAs	-10^7
Kupfer	-4,92	Arsen	+ 450		
Silber	-8,97	Antimon	+2000		

Tab. 38 Mengenkonstante A_r und Austrittsarbeit ΔW_A der thermischen Elektronenemission

	A_r in $\text{Acm}^{-2} \text{ K}^{-2}$	ΔW_A in eV		A_r in $\text{Acm}^{-2} \text{ K}^{-2}$	ΔW_A in eV
Molybdän	115	4,29	Bariumoxid	10^{-3} bis 10^{-1}	1,0 bis 1,5
Platin	32	5,30	Bariumoxid/ Strontiumoxid	10^{-3} bis 10^{-1}	0,9 bis 1,3
Wolfram	72	4,50	Thoriumoxid	3 bis 8	2,6
Wolfram/Barium	1	1,5 bis 2,1			
Wolfram/Cäsium	3	1,4			
Wolfram/Thorium	5 bis 16	2,8			

Tab. 39 Brechzahl n (bezogen auf Luft von 20 °C und 1013 hPa) und Abbezahl v für verschiedene Wellenlängen λ

λ in nm	n_C 656,3	n_D 589,3	n_F 486,1	v	λ in nm	n_C 656,3	n_D 589,3	n_F 486,1	v
Benzol	1,49633	1,50132	1,51338	29,214	Quarzglas	1,4563	1,4584	1,4631	67,411
Diethylether	1,3508	1,3529	1,3572	55,141	CS ₂	1,61816	1,62796	1,65230	18,394
Diamant		2,4173			Wasser	1,33115	1,33299	1,33712	55,777
Kalkspat (o)	1,65441	1,65838	1,66786	48,950	Flintglas (F3)	1,60805	1,61279	1,62464	36,937
Kalkspat (ao)	1,48462	1,48643	1,49080	78,710	Schwerflint (SF4)	1,74728	1,75496	1,77471	27,523
Quarz (o)	1,54187	1,54422	1,54966	69,063	Schwerflint (SFS1)	1,91038	1,92250	1,95250	20,918
Quarz (ao)	1,55089	1,55332	1,55896	68,565	Kronglas (K3)	1,51554	1,51814	1,52433	58,946

Tab. 40 Grenzwinkel ε_G der Totalreflexion für $\lambda_D = 589,3 \text{ nm}$

Diamant/Luft	24° 26'	Quarzglas/Luft	43° 17'	Schwerflintglas (SF4)/Wasser	49° 25'
Flintglas (F3)/Luft	38° 19'	CS ₂ /Luft	37° 54'	Kronglas (K3)/Wasser	61° 24'
Kronglas (K3)/Luft	41° 12'	CCl ₄ /Luft	43° 12'		
Schwerflint (SF4)/Luft	34° 44'	Flintglas (F3)/Wasser	35° 44'		

Tab. 41 Spektrale Hellempfindlichkeit $V(\lambda)$ des menschlichen Auges für Tagsehen

λ in nm	$V(\lambda)$						
380	0,0000	480	0,139	580	0,870	680	0,017
390	0,0001	490	0,208	590	0,757	690	0,0082
400	0,0004	500	0,323	600	0,631	700	0,0041
410	0,0012	510	0,503	610	0,503	710	0,0021
420	0,0040	520	0,710	620	0,381	720	0,00105
430	0,0116	530	0,862	630	0,265	730	0,00052
440	0,023	540	0,954	640	0,175	740	0,00025
450	0,038	550	0,995	650	0,107	750	0,00012
460	0,060	560	0,995	660	0,061	760	0,00006
470	0,091	570	0,952	670	0,032	770	0,00003

Tab. 42 Schwächungskoeffizient μ in cm^{-1} für Photonenstrahlung

Material	Dichte in g/cm^3	Energie in MeV						
		0,1	0,5	1	1,5	2	5	
Wasser	1	0,167	0,0966	0,0706	0,0575	0,0494	0,0301	
Aluminium	2,7	0,435	0,227	0,166	0,135	0,117	0,076	
Eisen	7,86	2,7	0,648	0,468	0,381	0,333	0,246	
Beton	2,3	0,389	0,200	0,146	0,119	0,102	0,066	
Kupfer	8,9	3,8	0,73	0,521	0,424	0,372	0,281	
Blei	11,3	59,78	1,64	0,73	0,579	0,516	0,418	

Tab. 43 γ -Dosiskonstante K_γ für Punktquellen in $10^{-13} \text{ Sv m}^2 \text{ h}^{-1} \text{ Bq}^{-1}$

Na 22	3,13	Kr 85	0,00316	J 131	0,545	Ra 226 und Folgeprodukte	2,14
Na 24	4,72	Co 60	3,36	Cs 137	0,847		
K 42	0,325	Cu 64	0,3	Cs 134	2,34		
Fe 59	1,63	Tc 99 ^m	0,156	Au 198	0,595		

Tab. 44 Bewertungsfaktor q der Äquivalentdosis

Elektronen, Positronen Röntgenstrahlung, γ -Strahlen	1	Protonen	1 MeV 10 MeV	6 10
Thermische Neutronen Neutronen 1 MeV	3 bis 5 10	α -Teilchen α -Teilchen	1 MeV 10 MeV	20 11

Tab. 45 Auswahl an Radionukliden (* natürliches Radionuklid)

Nuklid (Isotopen- häufigkeit)	Umwandlungs- art	relative Atom- masse	maximale Translationsenergie eines Teilchens bzw. Energie eines Quants in MeV (Anteil an der Gesamtumwandlung)	Halbwertszeit
H 3	β^-	3,016049	0,018 (kein γ)	12,3 a
C 14	β^-	14,003242	0,158 (kein γ)	5730 a
Na 22	β^+, K γ	21,99444	1,83 (0,05 %); 0,54 (89 %) 1,28	2,6 a
Na 24	β^- γ	23,99096	1,39; 4,17 (0,003 %) 1,37; 2,75 (1 : 1)	15,0 h
P 32	β^-	31,97391	1,71 (kein γ)	14,3 d
S 35	β^-	34,96903	0,167 (kein γ)	87 d
K 40*	β^-, K γ	39,96400	1,31 (89 %) 1,46	$1,28 \cdot 10^9$ a
(0,0118 %)				
Fe 59	β^- γ	58,93488	1,56 (0,3 %); 0,47 (54 %); 0,27 (46 %) 1,10 (56 %); 1,29 (42 %); 0,19 (8 %)	45 d
Co 60	β^- γ	59,93381	0,32; 1,48 (0,15 %) 1,33; 1,17	5,26 a
Kr 85	β^- γ	84,9125	0,67 (99,3 %); 0,15 (0,7 %) 0,51	10,7 a
Sr 89	β^-	88,90474	1,46 (kein γ)	50,5 d
Sr 90	β^-	89,90775	0,546 (kein γ)	28 a
Y 90	β^- γ	89,90717	2,27 (99,9 %) 1,73	64 h
J 131	β^- γ	130,90612	0,61 (87 %); 0,34 (9,3 %); 0,25 (2,8 %) 0,36; 0,64; 0,724; 0,08	8,05 d
Cs 137	β^-	136,90707	1,18 (4,8 %); 0,51 (95 %)	30 a
Au 198	β^- γ	197,9682	1,37 (0,025 %); 0,96 (98,6 %); 0,28 (1,4 %) 0,41; 0,68; 1,09 (100 : 1,1 : 0,24)	2,7 d
Tl 204	β^-, K	203,97387	0,76 (98 %); 0,29 (2 %) (kein γ)	3,78 a
Po 210*	α γ	209,98288	5,30 (100 %); 4,5 0,80 (10^{-3} %)	138,4 d
Rn 220*	α γ	220,0114	6,29; 5,75 (0,3 %) 0,54 (0,03 %)	55,6 s
Ra 226*	α γ	226,02544	4,78 (94,6 %); 4,60 (5,4 %) 0,19	1602 a
U 234*	α, Sp γ	234,04098	4,77 (72 %); 4,72 (28 %) 0,053 0,12	$2,47 \cdot 10^5$ a
(0,0056 %)				
U 235*	α, Sp γ	235,04397	4,58 (5 %); 4,39 (62 %); 4,36 (17 %) 4,21 (5,5 %) 0,18 (100 %); 0,14 (17 %)	$7,10 \cdot 10^8$ a
(0,72 %)				
U 238*	α, Sp γ	238,0508	4,2 (77 %); 4,15 (23 %) 0,048	$4,51 \cdot 10^9$ a
(99,27 %)				
Am 241	α, Sp γ	241,05684	5,48; 5,54 0,060	433 a

Tab. 46 Natürliche Umwandlungsreihen

Thorium-Reihe				Uran-Radium-Reihe				Uran-Actinium-Reihe			
Nuklid	Hist. Name		Halbwertszeit	Nuklid	Hist. Name		Halbwertszeit	Nuklid	Hist. Name		Halbwertszeit
Th 232		α	$1,41 \cdot 10^{10}$ a	U 238	UI	α	$4,51 \cdot 10^9$ a	U 235	AcU	α	$7,10 \cdot 10^8$ a
Ra 228	MsTh1	β^-	6,7 a	Th 234	UX1	β^-	24,1 d	Th 231	UY	β^-	25,5 h
Ac 228	MsTh2	β^-	6,13 h	Pa* 234	UX2	β^-, γ	1,17 min	Pa 231		α	$3,25 \cdot 10^4$ a
Th 228	RdTh	α	1,91 a	→ Pa 234	UZ	β^-	6,75 h	Ac 227		α, β^-	22 a
Ra 224	ThX	α	3,64 d	→ U 234	UII	α	$2,47 \cdot 10^5$ a	→ Th 227	RdAc	α	18,2 d
Rn 220	Tn	α	55 s	Th 230	Io	α	$8 \cdot 10^4$ a	→ Fr 223	AcK	α, β^-	22 min
Po 216	ThA	α	0,15 s	Ra 226		α	1602 a	→ Ra 223	AcX	α	11,43 d
Pb 212	ThB	β^-	10,64 min	Rn 222		α	3,82 d	→ At 219		α, β^-	0,9 min
Bi 212	ThC	α, β^-	60,6 min	Po 218	RaA	α, β^-	3,05 min	→ Rn 219	An	α	4,0 s
→ Po 212	ThC'	α	$3 \cdot 10^{-7}$ s	→ Pb 214	RaB	β^-	26,8 min	→ Bi 215		β^-	7 min
→ Tl 208	ThC''	β^-	3,1 min	→ At 218		α	2 s	→ Po 215	AcA	α, β^-	$1,8 \cdot 10^{-3}$ s
Pb 208	ThD	—	∞	→ Bi 214	RaC	α, β^-	19,7 min	→ Pb 211	AcB	β^-	36,1 min
				→ Po 214	RaC'	α	$1,64 \cdot 10^{-7}$ s	→ At 215		α	10^{-4} s
				→ Tl 210	RaC''	β^-	1,3 min	→ Bi 211	AcC	α, β^-	2,15 min
				→ Pb 210	RaD	α, β^-	21 a	→ Po 211	AcC'	α	0,52 s
				→ Hg 206	RaE	β^-	8 min	→ Tl 207	AcC''	β^-	4,79 min
				→ Bi 210	RaE''	α, β^-	5 d	Pb 207	AcD	—	∞
				→ Tl 206	RaF	α	138,4 d				
				→ Po 210	RaG	—	∞				
				Pb 206							

Sachverzeichnis

- Abbe-Zahl 99
Abbildungsgleichung, hauptpunktbezogene 103
-, Newtonsche 101, 103
-, scheitelbezogene 101
Abbildungsmäßstab 100f., 103
Abklingkoeffizient 37ff., 87
Abkühlungsgesetz von Newton 64
Ablenkkondensator 93
Ablenkungswinkel 99
Absorptionsfläche, äquivalente 49
Absorptionsgrad 49, 111
Achse, optische 100
Additionstheorem der Geschwindigkeiten 26
Admittanz 83
Ähnlichkeitsgesetz für Strömungen 34
Aktivität, optische 107
-, spezifische 119, 123
Akzeptoren 95
d'Alembert, Prinzip von 15
Ampere 72
Amplitude 35, 38f.
Anlaufstrom 97
Anregungskreisfrequenz 38, 88
Apertur, numerische 108
Aphel 24
Apogäum 24
Äquipotentialflächen 22, 67
Äquivalent, elektrochemisches 95
Äquivalentdosis 123
Äquivalentdosrate 123
Äquivalenzprinzip 27
Arbeit, mechanische 16
-, technische 55
Arbeitspunkt 96
Arbeitswiderstand 97
Archimedes, Gesetz von 31
Atommasse, relative 117
Aufbaufaktor 121
Aufenthaltswahrscheinlichkeit 113, 116
Auflösungsvermögen 108
Auftriebsbeiwert 34
Auftriebskraft 31
Ausbreitungsgeschwindigkeit 42f., 89
Ausbreitungsvektor 89
Ausdehnung, isobare 52
-, isochore 53
-, isotherme 29
Ausfluss aus Gefäßen 33
Ausflusgeschwindigkeit 33
Ausflusszahl 33
Ausgangsleitwert 97
Auslenkung 35, 37f.
Außenwiderstand 75
Ausstrahlung, spezifische 63, 109
Ausströmgeschwindigkeit 18f.
Austrittsarbeit 112
-, thermische 96, Tab. 38
Avogadrokonstante 54, 117, 119
Bahndrehimpuls 115
Bandbreite 89
bar 29
Barkhausen, Formel von 97
barn 121
barometrische Höhenformel 31
Basis 97, 108
Basislänge 108
Bequerel 119
Beleuchtungsstärke 110
Belichtung 110
Benetzung 30
Bernoulli, Gesetz von 32, 34
Beschleunigung 11, 27f., 36
Beschleunigungsamplitude 36, 40
Beschleunigungsresonanz 40
Bestrahlung 110
Beugung am Doppelpalt 106
- Gitter 106
- Raumgitter 107
- Spalt 106
- an kreisförmiger Öffnung 107
- Kristall 107
Beugungswinkel 106
Beweglichkeit 61, 94
Bewegung, geradlinige 11
Bewegungsgröße 15
Bewertungsfaktor 123
Bezugssystem, beschleunigtes 25
Biegesteife 46, 51
Biegewelle 46
Biegung 9
Bild, reelles 100
-, virtuelles 100
Bildgröße 100
Bildkonstruktion 101f.
Bildweite, brennebenenbezogen 101f.
-, hauptebenenbezogen 102
Bindungsergie 28, 118
Biot-Savart-Laplace, Gesetz von 76
Blendenzahl 108
Blindleistung 84, 86
Blindleitwert 83
Blindwiderstand 83
Bohr, Postulat von 114f.
Boltzmannfaktor 60
Boltzmann-Konstante 54
Boltzmannsche Beziehung 56
Bose-Einstein-Verteilung 124
Boyle-Mariotte, Gesetz von 31, 59
Bragg, Gesetz von 107
Breckraft 102f.
Brechungsgesetz 98
Brechungswinkel 98
Brechzahl 98, Tab. 39
Bremsweg 12
Bremswinkel 14
Bremszeit 12, 14
Brennebene 100, 102
Brennpunkte 100, 102f.
Brennschlußzeit 18
Brennweiten 100ff.
Brewsterscher Winkel 107
de Broglie, Gesetz von 113
Candela 109
Celsius-Temperatur 52
Clausius-Clapeyron, Gesetz von 58
Compton-Effekt 112
Comptonwellenlänge 112
Coriolisbeschleunigung 26
Coulomb 67
-, Gesetz von 69
Coulombfeld 93
Curie 119
Dalton, Gesetz von 55
Dampfdruck 29
Dämpfung 87f.
Dämpfungsgrad 37f.
Dämpfungskonstante 37, 39
Dämpfungskraft 37
Dämpfungsverhältnis 38
Dehnwelle 45
Dekrement, logarithmisches 37f.
Depressionshöhe 30
Deviationsmomente 20
Dezibel 48
Dichte 5
Dichteänderung 52
Dichtewelle 45
Dielektrizitätskonstante 68
Dielektrizitätszahl 68, Tab. 32
Diffusion, stationäre 61
Diffusionskoeffizient 61, 95
Diffusionslänge 95
Diffusionsspannung 95
Diffusionsstrom 95
Diffusionsstromdichte 66
Dioptrie 102
Dipol, magnetischer 77
Dipolfeld, elektrisches 70
Dipolmoment, elektrisches 70
-, magnetisches 77
Dispersion 99
Dissipationskonstante 48
Donatoren 95
Doppler-Effekt 45, 107
Dosiskonstante 123
Drall 20
Drehbewegung 13, 20
Drehimpuls 19ff.
Drehimpulserhaltungssatz 21
Drehleistung 21
Drehmoment 5, 20, 77
Drehschwingungen 35, 41
Drehstoß 21
Drehstromleistung 86
Drehwinkel 107
Dreieckschaltung 86
Dreiphasensystem 86
Driftgeschwindigkeit 94
Druck 27
-, dynamischer 32
-, hydraulischer 31
-, hydrostatischer 30
-, osmotischer 61
-, statischer 32
Drückänderung 53
Druckkraft 29, 30
Druckmittelpunkt 30
Druckwelle 46
Dulong-Petit, Regel von 57
Durchbruchsspannung 97
Durchflutungsgesetz 76
Durchgriff 97
Durchlaßrichtung 97
dyn 5
Ebene, schief 10
Effekt, glüh elektrischer 96
Effektivwerte 82
Eigenfrequenz 44, 91
Eigenfunktion 113
Eigenkreisfrequenz 88
Eigenlänge 27
Eigenzeit 27
Einfallsinkel 98
Eingangsleitwert 97
Einschnürzahl 33
Eintrittspupille 108
Einzelfläche, brechende 100f.
Elastizitätsmodul 7, 45
Elektrolyt 95
Elektronenemission 96
Elektronengas 124
Elektronenschalen 116
Elektronenspin 115
Elementarprozesse 112
Elementarstrahler 111
Ellipsenbahnen 115
Elongation 35, 37f.
Elongationsresonanz 39
Emissionsgrad 63
Emissionsrate 119
Emitter 97
Energie, elektrische 69
-, innere 56, 58
-, kinetische 16, 27f.
-, magnetische 78
-, mechanische 16
-, potentielle 16, 67
-, thermische eines Moleküles 59
Energiedichte 47, 111
-, elektrische 69, 90

- Energiedichte, magn. 78, 90
 Energieerhaltungssatz 17, 28
 Energiedosis 123
 Energiedosisrate 123
 Energiefluß 119
 Energieflußdichte 119
 Energielücke 95
 Energieskalen 114
 Energiestromdichte 89f.
 Energiezuwachs 27f., 92
 Entartungstemperatur 124
 Entfernungsfaktor 23f.
 Enthalpie 56, 58
 Entropie 56, 58
 erg 16
 Erregung, magnetische 76
 Erstarrungstemperatur Tab. 25
 Erstarrungswärme, spezifische 58, Tab. 25
 Fadenpendel 36
 Fahrenheit-Temperatur 52
 Fall, aperiodischer 88
 - freier 12
 - periodischer 88
 Fallbeschleunigung 12, 24
 Faraday, Gesetze von 95
 Faradaykonstante 95
 Federkonstante 9
 Federschaltungen 9
 Feld, homogenes 23
 Felder, elektrische 69
 - magnetische 78
 Feldkonstante, elektrische 68
 - magnetische 76
 Feldstärke, elektrische 67
 - magnetische 76
 Feldstärken, Richtungssinn 89
 Feldstrom 95
 Fermi-Dirac-Verteilung 124
 Fermi-Energie 124
 Fernrohr 108
 Feuchtegehalt 66
 Feuchtgrad 65
 Fick, 1. Gesetz von 61
 Fläche, ebene brechende 101
 - konkav 100
 - konvexe 100
 Flächenänderung 52
 Flächenladungsdichte 67f.
 Flächenmoment 1. Grades 7
 - 2. Grades 8
 Flächenträgheitsmoment 8
 Flächentransistor 97
 Flaschenzug 11
 Fliehkraftregung 38
 Fluß, elektrischer 68, 90
 - magnetischer 77, 79, 90
 Flußdichte, elektrische 68
 - magnetische 76
 Flußquant Tab. 1
 Flüssigkeitsschwingung 36
 Fourier, Gleichung von 64
 Fraunhoferse Beugungserscheinungen 106f.
 Freiheitsgrade der Energiespeicherung 60
 Fremdininduktion 80
 Frequenz 35, 112
 Frequenzskala 50
 Frequenzverschiebung 107
 Führungsbeschleunigung 26
 Führungsgeschwindigkeit 26
 Fundamentalschwingungen 42
 Galilei-Transformation 25
 Gangunterschied 104f.
 Gas, ideales 54
 - reales 55
 Gasgemisch 55
 Gaskonstante, individuelle 54
 - universelle 54
 Gasschwingung 36
 Gauß 76
 Gay-Lussac, Gesetz von 58
 Gebrauchsvergrößerung 108
 Gesamtdruck 32
 Gesamtenergie 27
 Gesamtfluß 68, 77, 90
 Geschwindigkeit 11, 25f., 28
 - erste kosmische 24
 - häufigste 60
 - kritische 34
 - mittlere 60
 - wahrscheinlichste 60
 - zweite kosmische 24
 Geschwindigkeitsamplitude 36, 39
 Geschwindigkeitsdruck 32
 Geschwindigkeitsquadrat, mittleres 60
 Geschwindigkeitsresonanz 39
 Geschwindigkeitszahl 33
 Gewichtskraft 15, 24
 Gilbert 76
 Gitter 108
 Gitterkonstante 106
 Glanzwinkel 107
 Gleichgewicht, radioaktive 120
 Gleichgewichtsbedingungen 6
 Gleichung von Thomson 87
 Gleitwinkel 34
 Gleitzahl 34
 Gravitationsbeschleunigung 23
 Gravitationsfeldstärke 22f.
 Gravitationsgesetz 22
 Gravitationskonstante 22f.
 Gravitationskraft 22
 Gray 123
 Grenzfall, aperiodischer 38, 88
 Grenzfläche, sphärische 101
 Grenzflächenspannung 29f.
 Grenzfrequenz 51, 112
 Grenzschichtdicke 33
 Grenzwinkel der Totalreflexion 98
 Größen, konjugierte 100
 Grundgesetz, dynamisches 15, 19, 21
 Gruppengeschwindigkeit 43, 89
 Gütefaktor 39, 88
 Haftspannung 30
 Hagen-Poiseuille, Gesetz von 33
 Halbleiter 95
 Halbleiterdiode 97
 Halbwertsbreite, relative 39
 Halbwertsschichtdicke 121
 Halbwertszeit 118
 Hallkonstante 96, Tab. 37
 Hallradius 50
 Hallspannung 96
 Hangtriebskraft 10
 Hauptebenen 102
 Hauptpunkte 102
 Hauptsatz, erster 56
 - zweiter 56
 Hebelalarm 5
 Hebelgesetz 6
 Hellempfindlichkeit 109
 Helmholtzresonator 49
 Helmholtz-Spulenpaar 79
 Henry 80
 Hertz 13, 35
 Hinterinanderschaltung 71, 75f., 83
 Hooke, Gesetz von 7, 9
 Impedanz 83
 Impuls 15, 27, 112
 - relativistischer 92
 Impulserhaltungssatz 15, 17
 Impulsrate 119
 Induktion 76
 Induktionsgesetz 79
 Induktionskonstante 76
 Induktionsspule 80, 83
 Induktivitäten 81
 Inertialsystem 25ff.
 Innenwiderstand 74f., 97
 Intensität 47
 Interferenz 43
 - durch Reflexion 105f.
 Intrinsicdichte 95
 Ionendosis 123
 Ionendosisrate 123
 Isentropenexponent 57
 Jahr, siderisches 11
 Joule 16, 75
 Kältemaschine 56
 Kamera 108
 Kapazität 68, 70
 Kapillarität 30
 Kapillaritätsgesetz 30
 Kapillaritätskonstante 29
 Kardinalgrößen 102
 Kardinalpunkte 102
 Keil 10
 Kelvin-Temperatur 52
 Kennkreisfrequenz 35ff., 38, 87
 Kepler, Gesetze von 24f.
 Kernladungszahl 114, 117
 Kernradius 118
 Kilopond 5
 Kirchhoff, Gesetz von 64
 - Regeln von 73
 Klemmspannung 75
 Knotenpunkte 100, 102f.
 Knotenpunktregel 73
 Knotenpunktweiten 102
 Kohärenzbedingung 105
 Kohärenzlänge 104
 Kohärenzwinkel 105
 Kohärenzzeit 104
 Kohäsionsdruck 29
 Koinzidenzbedingung 104
 Kollektor 97
 Kompressibilität 29, 36
 Kompressionsmodul 8, 29
 Kondensator 70f., 84
 Kondensationstemperatur Tab. 25
 Kondensationswärme, spezifische 58, Tab. 25
 Konduktanz 83
 Konstanten, van der Waalsche 55
 Kontakttemperatur 64
 Kontinuitätsgleichung 32
 Kopplungsgrad 42
 Kraft 5, 27
 Kraftstoß 15
 Kreisbahnradius 93
 Kreisbewegung 14, 19
 Kreisel 22
 Kreisfrequenz 14, 35
 Kreisrepetenz 42, 89
 Kreiswellenzahl 42
 Kreiszylinderspule 79, 81
 Kriechfall 38, 88
 Krümmungsmittelpunkt 100, 102
 Krümmungsradius 100, 102
 Kugelkondensator 70
 Kugelkonduktör 70
 Kugelwellen 48
 Kurzschlußstrom 75
 Kurzschlußstromverstärkung 97
 k-Wert 62
 Ladung 67, 72
 - influenzierte 68
 Lambert, Gesetz von 63, 110
 Lambert-Strahler 109f.
 Längenänderung 52
 Längenausdehnungskoeffizient 52, Tab. 21
 Längenkontraktion 27
 Längenschwingerung 35, 37f.
 Laplace, Formel von 46
 Lebensdauer, mittlere 95
 Leerlaufspannung 72, 75
 Leistung 17
 - eines Senders 47
 Leistungsfaktor 84
 Leistungszahl 56
 Leiter, gerader zylindrischer 81
 Leiter-Ebene-System 70
 Leitfähigkeit, elektrische 73, 94ff.
 Leitfähigkeitsband 95
 Lenz, Regel von 79
 Leuchtdichte 110
 Lichtstärke 109
 Lichtstrom 109
 Linse 102f.
 Linsensysteme 103
 Lorentzkraft 92
 Lorentztransformation 26
 Luftdruck 31
 Luftfeuchte 65
 Luftkraft 34
 Luftschalldämmaß 50
 Luftschichtdicke, diffusionsäquivalente 66
 Lumen 109
 Lupe 108
 Lux 110
 Mach-Zahl 45
 Magnetfelder 76, 78, 81f.
 Magnetisierung 76
 Maschenregel 73
 Maschinen, einfache 10
 Masse 5, 112
 - dynamische 27

- Masse einer Gasmenge 53
 - eines Moleküles 59
 -, molare 54, 119
 Massendefekt 28, 118
 Masseneinheit, atomare 117
 Massengesetz 51
 Massenreichweite 122
 Massenschichtdicke 121
 Massenstrom 18, 32
 Massenverhältnis 19
 Massenzuwachs 27f.
 Materialfeuchte 66
 Materialgleichungen 90
 Materialwellenlänge 113
 Maxwell 77
 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung 60
 Maxwell'sche Gleichungen 90
 Meniskus 29
 Meßbereichserweiterung 74
 Mikroskop 108
 Mischung idealer Gase 55
 Mischungsgleichung 57
 Mischungsregel 57
 Mittelungsspeigel 48
 Mittelwerte 82
 Mittenfrequenz 50
 Molekülmasse, relative 53, 59
 Molekülzahldichte 54
 Molwärme 57
 Moment, magnetisches 77, 115
 Momentensatz 7
 Moseley, Gesetz von 117
 Mündungskorrektur 49
- Nachhalzeit 50
 Naßdampf 55
 Nebenwiderstand 74
 Netzebenen 107
 Neutronenaktivierung 123
 Newton 5
 - Formel von 45
 Newtonsche Abbildungsgleichung 101, 103
 - Ringe 106
 Normalspannung 5, 7f.
 Normdichte 54, Tab. 6c
 Normdruck 53
 Normfallbeschleunigung 24
 Normtemperatur 53
 Norm-Trittschallpegel 51
 Normvolumen 53
 -, molares 53
 Normzustand 53
 Nukleonenzahl 117
 Nuklide 117
 - isobare 117
 - isotone 117
 - isotope 117
 Nuklidumwandlungen 120
 Nullphasenwinkel 35, 38
- Oberflächenkondensation 65
 Oberflächenspannung 29
 Objektivöffnung, relative 108
 Objektweite, brennenbenenbezogen 101f.
 - hauptebenenbezogen 102
 Oersted 76
 Ohm 72
 - Gesetz von 84, 94
- Oktavband 50
 Ortshöhe 32
 Ortskoordinate 26
 Ortsvektor 25
 Oszillator, harmonischer 113
- Paarbildungseffekt 112
 Parallelleitung 70, 81, 91
 Parallelschaltung 71, 74, 81, 85
- Partialdichte 55
 Partialdruck 55
 Pascal 5, 29
 Pauli-Prinzip 116, 124
 Pendel, mathematisches 36
 -, physisches 41
 Perigäum 24
 Perihel 24
 Periodendauer 35
- Periodensystem der Elemente 116
 Permeabilität 76
 Permeabilitätszahl 76
 Permittivität 68
 Permittivitätszahl 68, Tab. 32
 Phase 35
 Phasendifferenz 104
 Phasengeschwindigkeit 42, 43
 46, 89, 91
 Phasenraum 124
 Phasenverschiebung 38f., 88
 Phasenverschiebungswinkel 82
 Phasenwinkel 35, 82
 Photoeffekt, äußerer 112
 Photon 112
 Photonenangs 124
 Planck, Strahlungsgesetz von 63
 Planck-Konstante 112
 Planetendaten Tab. 4
 Platte, planparallele 99
 Plattenkondensator 69f.
 Plattenmasse, flächenbezogene 46
 pn-Übergang 95
 Poise 33
 Poisson, Gleichungen von 59
 Poissonzahl 7
 Polarisation, elektrische 68
 -, magnetische 76
 - von Licht 107
 Polstärke 77
 Polytropenexponent 57
 Porosität 51
 Potential 22, 67
 Potentiometer 74
 Poyntingscher Vektor 89
 Präzisionsbewegung 22
 Prandtl-Rohr 32
 Prisma 99, 108
 Prozel, irreversibler 56
 - reversibler 56
 Punkt, kritischer 55
 Punktauflösungsvermögen 108
 Punktladung 68
- Quaderraum 44
 Qualitätsfaktor 123
 Quantenzahl 113ff.
 Quellenspannung 72, 74
 Quellsstärke 119
 Querkontraktionszahl 7
- rad 123
 Radialfeld 23, 69
 Radiant 5
 Radius, Bohrscher 114
 Rakete 18f.
 Randwinkel 30
 Raumladungsdichte 67, 94
 Raumladungsstrom 97
 Raumwinkel 109
 Raumzeitkoordinate 26
 Reaktanz 83
 Reflexionsgrad 49, 99, 110
 Reflexionsoszillator 113
 Reflexionswinkel 98
 Reibung 10
 Reibungskraft 33f.
 Reichweite 122
 rem 123
 Repetenz 42, 104, 115
 Resistanz 83
 Resonanzkreisfrequenz 40, 89
 Resonanzschärfe 39, 88
 Resonanzüberhöhung 89
 Reversionspendel 41
 Reynolds-Zahl 34
 Richardson, Gesetz von 96
 Richtgröße 9, 35
 Richtungssinn von Strom und Spannung 72
 Ringspannung, induzierte 79f.
 Ringspule 79, 81
 Röhrendiode 97
 Röhrentriode 97
 Rohrströmung 34
 Rolle 11
 Röntgen 123
 Röntgenstrahlung, Bremsstrahlung 117
 -, charakteristische 117
 Rotationsenergie 16, 19, 21
 Ruheenergie 27
 Ruhelänge 27
 Ruhemasse 27f.
 Rydbergfrequenz 114
 Rydbergkonstante 115
- Sabine, Formel von 50
 Sammellinse 102
 Satellitenbewegung 24f.
 Sättigungsdruk 55,
 Tab. 14; 23; 31
 Sättigungsstrom 97
 Schalen, Besetzungszahlen 116
 -, Bezeichnung 116
 Schalldruck 46
 Schallkennimpedanz 47
 Schallpegel 48
 Schallschnelle 47
 Schallstrahlungsdruck 47
 Schallwellenwiderstand 47
 Schaltelemente, nichtlineare 96f.
 Scheinleistung 84, 86
 Scheinleitwert 83
 Scheinwiderstand 83
 Scheitelebene 100
 Scheitelpunkt 100, 102
 Schluckgrad 49
 Schmelztemperatur Tab. 25
 Schmelzwärme, spezifische 58,
 Tab. 25
- Schnittweite 101f.
- Schottky-Langmuir, Gesetz von 97
 Schraube 10
 Schraubenregel 76
 Schrödinger-Gleichung 113, 116
 Schubmodul 8, 45
 Schubkraft 18
 Schubspannung 5
 Schubwelle 45
 Schwächungskoeffizient 121f.
 Schwebung 40
 Schwebungswelle 44
 Schwerdruck 30
 Schwerpunkt 7, 15
 Schwimmen 31
 Schwingung, erzwungene im Serienschwingkreis 88
 -, mechanische, elliptische 41
 --, erzwungene 38
 --, freie 37, 87f.
 --, gekoppelte 42
 --, Lissajous- 41
 --, Überlagerung 40
 Schwingungsdauer 35, 38, 41, 87
 Schwingungsgesamtenergie 35f.
 -, elektromagnetische 87
 Seebeck-Effekt 96
 Schweiße, deutliche 108
 Schwinkel 108
 Selbstinduktivität 80
 Selbstinduktivitätsspannung 80
 Serienschaltung 71, 73f., 84
 Serienschwingkreis 87f.
 Siedetemperatur Tab. 25
 Siemens 73
 Sievert, 123
 Sinuswelle 43
 Solarkonstante Tab. 3
 Solenoid 79
 Spannung am Kondensator 86
 -- Verbraucherwiderstand 86
 - an der Spule 86
 -, elektrische 67
 -, induzierte 79f.
 -, magnetische 76
 Spannungsresonanz 89
 Spannungsstoß, induzierter 80
 -, selbstinduzierter 80
 Spannungsteilerschaltung 74
 Spektralserien 113
 Sperrrichtung 97
 Sperrkreis 85
 Sperrsättigungsstrom 97
 Spiegel 100f.
 Spiegelsysteme 103
 Spinnmoment, magnetisches 116
 Spule 77, 79, 81
 Stabmagnet 77
 Standardvergrößerung 108
 Staudruck 32
 Stefan-Boltzmann, Gesetz von 63
 Steifigkeit, dynamische 51
 Steighöhe 12, 30
 Steigzeit 12
 Steilheit 97
 Steiner, Satz von 8, 20
 Steradian 109
 Sternschaltung 86
 Stoffe, ferroelektrische 68
 -, parelektrische 68

- Stoffmenge 53
 Stokes 33
 -, Gesetz von 34
 Stoß, zentraler 17
 Stoßhäufigkeit 60
 Strahlichte 63, 110
 Strahlstärke 106
 Strahlungsaustauschkonstante 64
 Strahlungsdruck 47, 111
 Strahlungsgrößen 109
 Strahlwinkel 100
 Streckenlast 9
 Strom 71
 Stromarbeit 75
 Stromdichte 71, 94
 Stromleitung 75
 Stromleiter, gerader 78
 -, kreisförmiger 78
 Stromleitung in Legierungen 96
 -- Metallen 96
 Stromquellen 72, 74f.
 Stromresonanz 89
 Stromrichtung 72
 Stromstärke 72, 94
 Stromstoß 72
 Strömung, laminare 33
 -, turbulente 34
 Strömungswiderstand 49
 Strömungswiderstandskraft 34
 Stromwärme 75
 Stufenscheibe 11
 Supraleitung 96
 Suszeptanz 83
 Suszeptibilität, elektrische 68
 -, magnetische 76, Tab. 34

 Tangentialbeschleunigung 14, 26
 Tangentialspannung 5
 Tauperiode 66
 Taupunkttemperatur 65
 Teilchenfluenz 119
 Teilchenflußdichte 119
 Teilchenmasse, relative 53
 Teilchenzahldichte 54
 Telegraphengleichung 91
 Temperatur, absolute 52
 -, thermodynamische 52
 Temperaturfaktor 64
 Temperaturkoeffizient 73,
 Tab. 33
 Temperaturleitfähigkeit 64
 Temperaturspannung 95

 Terzrandfrequenzen 50
 Tesla 76
 Thermokraft 96
 Thermospannung 96
 Tonne 5
 Toroid 79, 81
 Torr 29
 Torsionsmodul 8
 Torsionspendel 41
 Torsionswelle 45
 Totalreflexion 98
 Trägheitsellipse 9
 Trägheitsellipsoid 20
 Trägheitskraft 15
 Trägheitsmoment 19f.
 Trägheitsradius 20, 41
 Transformator 85
 Translationsenergie 15f.
 - eines idealen Gases 60
 Transistor, pnp- 97
 Transmissionsgrad 50, 99, 109
 Transversalwellen 46
 Triode 97
 Tubuslänge, optische 108

 Überführungsarbeit einer
 Punktladung 92
 Übersetzungsverhältnis 85
 Umdrehungsdauer 13
 Umlaufdauer 14, 24f., 93
 Umschlingung 11
 Umspanner 85
 Umwandlungskonstante 118
 Umwandlungsrate 119
 Umwandlungsreihen 120
 Unschärferelation 114
 U-Rohr 36
 Urspannung 72

 Valenzband 95
 Venturi-Rohr 32
 Verbraucherwiderstand 72, 75,
 83
 Verdampfungswärme,
 spezifische 58, Tab. 25
 Verdunstungsperiode 66
 Vergrößerung 108
 Vergütung, optische 105
 Verlustfaktor 39
 Verschiebungsregeln 118
 Viskosität, dynamische 33,
 61
 -, kinematische 33

 Volt 67
 Volumen, molares 53
 -, spezifisches 53
 Volumenänderung 52
 Volumenänderungsarbeit 55
 Volumenausdehnungskoeffizient 52, Tab. 22
 -, relativer 52
 Volumenstrom 32f.
 Vorwiderstand 74, 97

 Wände, ebene 62
 -, zylindrische 62
 Wärmedurchgangskoeffizient 62
 Wärmedurchgangswiderstand 62, 65
 Wärmedurchlaßwiderstand 62,
 65
 Wärmeeindringkoeffizient 64
 Wärmeenergie 55
 Wärmekapazität 57
 -, molare 57
 -, spezifische 57, Tab. 25
 Wärmeleistungsmaschine 56
 Wärmeleitfähigkeit 61,
 Tab. 25; 26
 Wärmemenge 55
 Wärmeleitung 56
 Wärmespannungsänderung 53
 Wärmestrom 61
 Wärmestromdichte 61, 64
 Wärmeübergangskoeffizient 61
 Wasserdampfdiffusionsdurchlaßwiderstand 65, 66
 Wasserdampfdiffusionsstromdichte 66
 Wasserdampfdiffusionswiderstandszahl 65
 Wasserdampfteildruck 65
 Watt 17, 75
 Weber 77
 Wechselstromleistung 84
 Weg 11
 -, optischer 104
 Weglänge, freie 60
 Weiszäcker-Formel 118
 Welle, ebene harmonische 43, 90
 -, fortlaufende 43, 89f.
 -, stehende 44, 91
 Wellengleichung 43, 113
 Wellenlänge 42, 104
 Wellenlängenverschiebung 107
 Wellenwiderstand 90f.

 Wellenzahl 42, 104
 Wellrad 11
 Wheatstonesche Brücke 74
 Widerstand 72
 -, differentieller 96
 -, spezifischer 73, Tab. 33
 Widerstandsbeiwert 34
 Wiedemann-Franz, Gesetz von
 Wien, Verschiebungsgesetz von
 63
 Winkelauflösungsvermögen
 108
 Winkelbeschleunigung 13
 Winkelelongation 35
 Winkelgeschwindigkeit 13
 Winkelrichtgröße 9, 35, 41
 Winkelverhältnis 100f., 103
 Wirkleistung 84, 86
 Wirkleitwert 83
 Wirkungsgrad 17, 56
 Wirkungsquantum 112
 Wirkungsquerschnitt 121f.
 Wirkwiderstand 83
 Wurf 12

 Zähigkeit 61, Tab. 13, 14
 Zehntelwertschichtdicke 121
 Zeitdilatation 27
 Zeitkonstante 71, 81
 Zeitkoordinate 26
 Zenerspannung 97
 Zentrifugalbeschleunigung 14,
 26
 Zentrifugalkraft 19
 Zentrifugalmomente 19
 Zentripetalbeschleunigung 14
 Zerfallskonstante 118
 Zerstreungslinse 102
 Zustand, kritischer 55, Tab. 24
 -, stationärer 88
 Zustandsänderung, adiabatische
 59
 -, isobare 58
 -, isochore 58
 -, isotherme 59
 -, polytropie 59
 Zustandsfunktion 113
 Zustandsgleichungen idealer
 Gase 54f., 60f.
 Zyklotronkreisfrequenz 93
 Zylinderfeld 70
 Zylinderkondensator 70
 Zylinderwellen 48

Z	82	$3 + (1) + \{4\}$	ζ
ϱ_n	11340	S 7,19	S, F
AZ	fest		
T_s	600,5		
T_b	2023	Pb	Blei
A_r	207,2		
A	(204); 206; 207; 208; {210; 211; 212; 214}		A

Z Ordnungszahl = Kernladungszahl = Protonenzahl.
 ϱ_n = Dichte in kgm^{-3} unter den Normbedingungen
 $p_n = 1013,25 \text{ hPa}$, $T_n = 273,15 \text{ K}$.

AZ Aggregatzustand unter Normbedingungen.

α , β , γ : Phasen.

T_s Schmelztemperatur in K, T_b Siedetemperatur in K, beide beim Normdruck $p_n = 1013,25 \text{ hPa}$; Fettdruck: Thermometrische Fixpunkte der Internationalen Praktischen Temperaturskala.

A_r Relative Atommasse des natürlichen Isotopengemisches, ^{12}C -Skala, Werte 1975 der Internationalen Atomgewichtskommission, Unsicherheit ± 1 , bei gesternten Werten ± 3 Einheiten der letzten Ziffer; Werte 1985 liegen innerhalb dieser Grenzen. [] A_r des wichtigsten Nuklids, i. a. desjenigen mit größter Halbwertszeit. Bei Elementen, die im terrestrischen Material erhebliche Abweichungen im Isotopenmischungsverhältnis aufweisen, sind im Zahlenwert von A_r entsprechend weniger Stellen angegeben (s. z. B. Schwefel).

A Nukleonenzahl.

ζ Anzahl isotoper Nuklide, bei den künstlich hergestellten nur die Anzahl der wichtigsten; bei den Transactinoiden 104 bis 109 alle 1988 nachgewiesenen.

zu A und ζ : ohne Klammer = stabile Nuklide; () = langlebige natürliche Nuklide; [] = die wichtigeren (meist diejenigen mit der größten Halbwertszeit) künstlich hergestellten Nuklide; Angaben nur dann, wenn keine natürlichen Nuklide vorhanden. Daher Tritium und Carbon 14 nicht enthalten. { } = Glieder der natürlichen radioaktiven Reihen (für $Z > 80$); {() } = Muttersubstanzen der natürlichen radioaktiven Reihen.

Kursive Ziffern: Häufigstes Isotop

S Supraleiter mit Übergangstemperatur in K.

F Ferromagnetisch mit Curietemperatur in K.

Symbol der Elemente, die nicht in der Natur vorkommen – weder stabil noch radioaktiv – sind im Magerdruck gegeben. Elementnamen: International empfohlen: Hydrogen, Carbon, Nitrogen, Oxygen, Sulfur, Bismut, Lanthanoide, Actinoide. Bei Ku/Rf und Ha/Ns noch keine internationale Einigung (1981).

Gruppe Ia

1	2
0,00988 (H_2)	gasf.
13,95	
20,38	
	H
	Hydrogen
	Wasserstoff
1,0078	
1; 2	

3	2
534	fest
453	
1603	
	Li
	Lithium
6,941*	
6; 7	

11	1
970	fest
370,9	
1163,2	
22,98977	Na
23	Natrium

19	2
860	fest
336,7	
1027	
	K
	Kalium
39,0983	
39; (40); 41	
44; 46; 48	

37	1
1532	fest
311,85	
973	Rb
85,4678	Rubidium
85; (87)	

55	1
1873	S 1,5
301,79	fest
958	
132,9054	Cs
133	Cesium

38	4
2600	fest
1043	
1643	Sr
87,62	Strontrium
84; 86; 87; 88	

56	7
3500	S 5,1
983	fest
1910	
137,33	Ba
130; 132; 134; 135;	Barium
136; 137; 138	

57	1
6180	S 5 ~ 5,0
1193	fest
3743	
138,9055*	La
(138); 139	Lanthan

Lanthanoide:

87	1
—	Fr
298	fest/flüssig
593	
[223; 0198]	Francium
[223]	

88	4
5000	fest
973	
1800	Radium
[226; 0254]	
[223; 224; 226; 228]	

89	2
—	Ac
1470	fest
3600	
[227; 028]	Actinium
[227; 228]	

Actinoide:

Periodensystem der Elemente

(aus W. Walcher, Praktikum der Physik)

Für 104 bis 109 empfiehlt die IUPAC die Namen *Unnilquadrium*, *-pentium*, *-hexium*, *-septium*, *-oktium* und *Une*.

VIIIa							
	2	8	9	1	10	2	
	1,2505 (N ₂) gasf. 63,15 77,35	1,42895 (O ₂) gasf. 54,96 90,18	1,696 (F ₂) gasf. 53,65 85,05	—	He Helium 4,00260 3; 4	0,1785 gasf. — 4,22	
Va	Vla	Vlla					
2	7	8	9	1	10	3	
C bon inst.	1,2505 (N ₂) gasf. 63,15 77,35	1,42895 (O ₂) gasf. 54,96 90,18	1,696 (F ₂) gasf. 53,65 85,05	—	He Helium 4,00260 3; 4	0,1785 gasf. — 4,22	
3	Nitrogen Stickstoff 14,0067 14; 15	Oxygen Sauerstoff 15,9994 16; 17; 18	Fluor 18,998403 19	F Fluor 20,179* 20; 21; 22	Neon Neon	0,9002 gasf. 24,54 27,07	
3	15	16	17	18	19	3	
Si ium	fest (weiß) 317,2 563,2	fest (monokl.) 392,2 717,75	fest (Cl ₂) 3,214 (Cl ₂) 239,1	fest 3,784 83,77 67,29	Cl Chlor 39,948 36; 38; 40	1,784 gasf. 83,77 67,29	
5	33	34	35	36	37	6	
Ge ium	5,4 5720 fest Subl: 889	5,0,5 4820 fest 490,6 958	5,6,9 3120 flüssig 265,95 331,83	3,744 gasf. 115,98 119,75	Kr Krypton 83,80 78; 80; 82; 83; 84; 86		
4;	As Arsen 74,9216 75	Se Selen 78,96* 74; 76; 77; 78; 80; 82	Br Brom 79,904 79; 81	Brom K brom 83,80 78; 80; 82; 83; 84; 86			
10	51	52	53	54	55	9	
Zn inn	0 6690 fest 903,7 1910	2 6250 fest 723	1 4930 fest 386,8 456,0	1 5,897 gasf. 161,4 165,03	Xe Xenon 131,30 124; 126; 128; 129; 130; 131; 132; 134; 136		
16;	121,75* 121; 123	Te Antimon 727,60 120; 122; 123; 124; 125; 126; 128; 130	Te Tellur 126,9045 127	Iod fest 131,30 124; 126; 128; 129; 130; 131; 132; 134; 136			
+4)	83	84	85	86	87	(4)	
7,19	9800 fest 208,9804	S 4...8 fest [208,982] [210; 211; 212; 214; 215; 216; 218]	[7] fest 527 1235 Polonium [209,987] [215; 218; 219]	[3] fest 570 650 Astat [209,987] [215; 218; 219]	Rn Radon 222,018 218; 219; 220; 222		
-6	69	70	71	71	71	1+(1)	
~20	9290 fest 1818 1990	7000 fest 1097 1590 Thulium Ytterbium 168,9342 169 173,04* 168; 170; 171; 172; 173; 174	6 fest 1925 3270 Lu Lutetium 174,97 175; (176)	1+(1) 9820 S 0,1...0,7 fest 1925 3270 Lu Lutetium 174,97 175; (176)	9820 S 0,1...0,7 fest 1925 3270 Lu Lutetium 174,97 175; (176)		
Er ium	101 Mendelevium [250; 255; 256; 257; 258]	102 Nobelium [254; 255; 257]	103 Lawrencium [254; 255; 256]				

and Symbole:
um, -ennium; Unq, Unp, Unh, Uns, Uno,

[6]	101	[5]	102	[3]	103	[3]
m ium	Mendelevium		No Nobelium		Lr Lawrencium	

Elektronenkonfiguration

1	H		$1\ s^1$
2	He		$1\ s^2$
3	Li	[He]	$2\ s^1$
4	Be	[He]	$2\ s^2$
5	B	[He]	$2\ s^2 \quad 2\ p^1$
6	C	[He]	$2\ s^2 \quad 2\ p^2$
7	N	[He]	$2\ s^2 \quad 2\ p^3$
8	O	[He]	$2\ s^2 \quad 2\ p^4$
9	F	[He]	$2\ s^2 \quad 2\ p^5$
10	Ne	[He]	$2\ s^2 \quad 2\ p^6$
11	Na	[Ne]	$3\ s^1$
12	Mg	[Ne]	$3\ s^2$
13	Al	[Ne]	$3\ s^2 \quad 3\ p^1$
14	Si	[Ne]	$3\ s^2 \quad 3\ p^2$
15	P	[Ne]	$3\ s^2 \quad 3\ p^3$
16	S	[Ne]	$3\ s^2 \quad 3\ p^4$
17	Cl	[Ne]	$3\ s^2 \quad 3\ p^5$
18	Ar	[Ne]	$3\ s^2 \quad 3\ p^6$
19	K	[Ar]	$4\ s^1$
20	Ca	[Ar]	$4\ s^2$
21	Sc	[Ar]	$3\ d^1 \quad 4\ s^2$
22	Ti	[Ar]	$3\ d^2 \quad 4\ s^2$
23	V	[Ar]	$3\ d^3 \quad 4\ s^2$
24	Cr	[Ar]	$3\ d^5 \quad 4\ s^1$
25	Mn	[Ar]	$3\ d^5 \quad 4\ s^2$
26	Fe	[Ar]	$3\ d^6 \quad 4\ s^2$
27	Co	[Ar]	$3\ d^7 \quad 4\ s^2$
28	Ni	[Ar]	$3\ d^8 \quad 4\ s^2$
29	Cu	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^1$
30	Zn	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^2$
31	Ga	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^2 \quad 4\ p^1$
32	Ge	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^2 \quad 4\ p^2$
33	As	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^2 \quad 4\ p^3$
34	Se	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^2 \quad 4\ p^4$
35	Br	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^2 \quad 4\ p^5$
36	Kr	[Ar]	$3\ d^{10} \quad 4\ s^2 \quad 4\ p^6$
37	Rb	[Kr]	$5\ s^1$
38	Sr	[Kr]	$5\ s^2$
39	Y	[Kr]	$4\ d^1 \quad 5\ s^2$
40	Zr	[Kr]	$4\ d^2 \quad 5\ s^2$
41	Nb	[Kr]	$4\ d^4 \quad 5\ s^1$

42	Mo	[Kr]	4d ⁵	5s ¹	
43	Tc	[Kr]	4d ⁶	5s ¹	
44	Ru	[Kr]	4d ⁷	5s ¹	
45	Rh	[Kr]	4d ⁸	5s ¹	
46	Pd	[Kr]	4d ¹⁰		
47	Ag	[Kr]	4d ¹⁰	5s ¹	
48	Cd	[Kr]	4d ¹⁰	5s ²	
49	In	[Kr]	4d ¹⁰	5s ²	5p ¹
50	Sn	[Kr]	4d ¹⁰	5s ²	5p ²
51	Sb	[Kr]	4d ¹⁰	5s ²	5p ³
52	Te	[Kr]	4d ¹⁰	5s ²	5p ⁴
53	I	[Kr]	4d ¹⁰	5s ²	5p ⁵
54	Xe	[Kr]	4d ¹⁰	5s ²	5p ⁶
55	Cs	[Xe]	6s ¹		
56	Ba	[Xe]	6s ²		
57	La	[Xe]	5d ¹	6s ²	
58	Ce	[Xe]	4f ¹	5d ¹	6s ²
59	Pr	[Xe]	4f ³	6s ²	
60	Nd	[Xe]	4f ⁴	6s ²	
61	Pm	[Xe]	4f ⁵	6s ²	
62	Sm	[Xe]	4f ⁶	6s ²	
63	Eu	[Xe]	4f ⁷	6s ²	
64	Gd	[Xe]	4f ⁷	5d ¹	6s ²
65	Tb	[Xe]	4f ⁹	6s ²	
66	Dy	[Xe]	4f ¹⁰	6s ²	
67	Ho	[Xe]	4f ¹¹	6s ²	
68	Er	[Xe]	4f ¹²	6s ²	
69	Tm	[Xe]	4f ¹³	6s ²	
70	Yb	[Xe]	4f ¹⁴	6s ²	
71	Lu	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹	6s ²
72	Hf	[Xe]	4f ¹⁴	5d ²	6s ²
73	Ta	[Xe]	4f ¹⁴	5d ³	6s ²
74	W	[Xe]	4f ¹⁴	5d ⁴	6s ²
75	Re	[Xe]	4f ¹⁴	5d ⁵	6s ²
76	Os	[Xe]	4f ¹⁴	5d ⁶	6s ²
77	Ir	[Xe]	4f ¹⁴	5d ⁷	6s ²
78	Pt	[Xe]	4f ¹⁴	5d ⁹	6s ¹
79	Au	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ¹
80	Hg	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ²
81	Tl	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ²
82	Pb	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ²
					6p ¹
					6p ²

83	Bi	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ²	6p ³
84	Po	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ²	6p ⁴
85	At	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ²	6p ⁵
86	Rn	[Xe]	4f ¹⁴	5d ¹⁰	6s ²	6p ⁶
87	Fr	[Rn]	7s ¹			
88	Ra	[Rn]	7s ²			
89	Ac	[Rn]	6d ¹	7s ²		
90	Th	[Rn]	6d ²	7s ²		
91	Pa	[Rn]	6d ³	7s ²		
			oder			
			(5f ²	6d ¹	7s ²)	
92	U	[Rn]	6d ⁴	7s ²		
			oder			
			(5f ³	6d ¹	7s ²)	
93	Np	[Rn]	5f ⁴	6d ¹	7s ²	
94	Pu	[Rn]	5f ⁶	7s ²		
			oder			
			(5f ⁵	6d ¹	7s ²)	
95	Am	[Rn]	5f ⁷	7s ²		
96	Cm	[Rn]	5f ⁷	6d ¹	7s ²	
97	Bk	[Rn]	5f ⁹	7s ²		
			oder			
			(5f ⁸	6d ¹	7s ²)	
98	Cf	[Rn]	5f ¹⁰	7s ²		
			oder			
			(5f ⁹	6d ¹	7s ²)	
99	Es	[Rn]	5f ¹¹	7s ²		
			oder			
			(5f ¹⁰	6d ¹	7s ²)	
100	Fm	[Rn]	5f ¹²	7s ²		
			oder			
			(5f ¹¹	6d ¹	7s ²)	
101	Md	[Rn]	5f ¹³	7s ²		
			oder			
			(5f ¹²	6d ¹	7s ²)	
102	No	[Rn]	5f ¹⁴	7s ²		
103	Lr	[Rn]	5f ¹⁴	6d ¹	7s ²	
104	Ku	[Rn]	5f ¹⁴	6d ²	7s ²	
105	Ha	[Rn]	5f ¹⁴	6d ³	7s ²	