



Algebra Lineare

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437

Marzo 2024

Contents

1	Numeri complessi	7
1.1	Insiemi di numeri	7
1.2	Numeri Immaginari	7
1.3	Operazioni dei numeri complessi	8
1.3.1	Addizione	8
1.3.2	Moltiplicazione	8
1.4	Teorema fondamentale dell'algebra	8
1.5	Coniugato e Modulo	8
1.6	Coordinate polari	9
1.7	Forma trigonometrica di un numero complesso	9
1.7.1	Formula di De Moivre	10
1.8	Definizione	10
1.9	Teorema	10
1.10	Radici quadrate di numeri reali negativi	11
2	Sistemi lineari e matrici	13
2.1	Sistemi lineari	13
2.2	Definizione	15
2.3	Definizione: forma matriciale	16
2.4	Operazioni elementari	18
2.5	Linee in \mathbf{R}^2	19
2.6	Metodo di eliminazione di Gauss (EG)	21
2.7	Risoluzione di sistema lineare	23
2.8	Definizione	25
2.9	Osservazione	25
2.9.1	Teorema di Rouchè-Capelli	25
3	Matrici e le loro operazioni	26
3.1	Definizione	26
3.2	Definizione	26
3.3	Definizione	27
3.4	Prodotto di matrici	27
3.5	Osservazione	29
3.6	Definizione	30
3.7	Matrici elementari	31
3.8	Moltiplicazione con matrici elementari	32

3.9	Definizione di invertibile	33
3.10	Inverse di matrici elementari	34
3.11	Proposizione	35
3.11.1	Dimostrazione	35
3.12	Proposizione	36
3.12.1	Dimostrazione	36
4	Matrici invertibili e il determinante	38
4.1	Proposizione	39
4.1.1	Dimostrazione	39
4.2	Calcolo della matrice inversa	39
4.3	Teorema delle matrici invertibili	41
4.3.1	Dimostrazione	41
4.3.2	Nota	42
4.4	Proposizione	42
4.4.1	Dimostrazione	42
4.5	Definizione	43
4.6	Regola di Sarrus	44
4.7	Teorema di Laplace	44
4.8	Il determinante e la trasposta	45
4.9	Il principio di induzione	46
4.10	Proposizione	47
4.10.1	Dimostrazione	47
4.11	Teorema	49
4.11.1	Dimostrazione	49
4.12	Corollario	51
4.12.1	Dimostrazione	51
4.13	Corollario	51
4.13.1	Dimostrazione	51
4.14	Formula per A^{-1}	52
4.15	Teorema di Cramer	52
5	Spazi vettoriali e sottospazi	54
5.1	Definizione	54
5.2	Osservazioni	57
5.3	Definizione di combinazione lineare	57
5.4	Definizione	58
5.5	Definizione	60

5.5.1	Osservazione	60
5.6	Definizione	61
5.7	Definizione	61
5.8	Definizione	62
5.9	Proposizione	63
5.9.1	Dimostrazione	63
5.10	Definizione di spazio nullo	63
5.11	Proposizione	64
5.11.1	Dimostrazione	64
6	Dipendenza e indipendenza lineare	66
6.1	Proposizione e definizione di insieme di generatori	66
6.1.1	Dimostrazione	67
6.2	Definizione di linearmente dipendente	67
6.3	Teorema e definizione di linearmente indipendente	67
6.3.1	Dimostrazione	67
6.4	Definizione di base	69
6.5	Osservazione	69
6.5.1	Base di $C(U)$ per una matrice u in forma ridotta	70
6.6	Proposizione	72
6.7	Teorema	72
6.7.1	Dimostrazione	72
6.8	Lemma di Steinitz (senza dimostrazione)	73
6.9	Corollario	73
6.9.1	Dimostrazione	74
6.10	Definizione di dimensione	74
6.11	Corollario	74
6.12	Proposizione	74
6.12.1	Dimostrazione	75
7	Applicazione Lineare	76
7.1	Definizione di applicazione lineare	76
7.1.1	Osservazioni	76
7.2	Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$	77
7.3	Definizione di Isomorfismo	79
7.4	Applicazione delle coordinate	79
7.5	Applicazione delle coordinate $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^{\times}$	81
7.6	Teorema per cui l'applicazione lineare $C_{\mathcal{B}}$ è isomorfa	82

7.6.1	Dimostrazione	82
7.7	Osservazione	83
7.8	Corollario	83
7.8.1	Dimostrazione del corollario	83
7.9	Matrice del cambio base	84
7.9.1	Teorema	86
7.9.2	Dimostrazione	86
7.10	Matrice associata a f rispetto a basi	87
7.10.1	Teorema	88
8	Rank + Nullity	89
8.1	Definizione di spazio nullo e immagine	89
8.2	Teorema (Nullità + Rango)	90
8.2.1	Dimostrazione	90
8.3	Dimensione di $C(A)$	91
8.3.1	Proposizione	92
8.3.2	Dimostrazione	92
8.4	Dimensione di $N(A)$	94
8.4.1	Corollario	94
8.5	Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$	94
8.6	Proposizione	95
8.7	Teorema sulla relazione tra spazio nullo e soluzioni di sistemi lineari	96
8.7.1	Dimostrazione	96
9	Autovalori e autovettori	98
9.1	Definizione di autovalore e autovettore	99
9.2	Osservazione	99
9.3	Definizione di polinomio caratteristico	100
9.4	Teorema dell'autospazio	100
9.5	Corollario	101
9.6	Definizione di molteplicità	101
9.7	Osservazione	102
9.8	Proposizione	104
9.8.1	Dimostrazione ($r=2$)	104
9.9	Definizione di simile e diagonalizzabile	108

10	Diagonalizzazione di matrici	109
10.1	Proposizione (Proprietà di matrici simili)	109
10.1.1	Dimostrazione	109
10.2	Teorema	111
10.2.1	Dimostrazione	111
10.3	Corollario	112
10.3.1	Dimostrazione (10.2 + 9.8 + 6.12) \square	112
10.4	Osservazione	112
10.5	Lemma	113
10.5.1	Dimostrazione	113
10.6	Teorema	113
10.6.1	Dimostrazione	114
10.7	Algoritmo per la diagonalizzazione	117
10.8	Osservazione	118
10.9	Teorema spettrale	118
11	Basi ortonormali	119
11.1	Prodotto interno	120
11.2	Norma euclidea	121
11.3	Interpretazione geometrica del prodotto interno di \mathbb{R}^2	122
11.4	Definizione	123
11.5	Proposizione	124
11.5.1	Dimostrazione	124
11.6	Osservazione	124
11.7	Definizione	125
11.8	Algoritmo di Gram-Schmidt per l'ortonormalizzazione	126
11.9	Corollario	127
11.9.1	Dimostrazione	127

1 Numeri complessi

1.1 Insiemi di numeri

Il sistema di numeri creato per contare fin dall'antichità sono i numeri naturali, definiti come tutti i numeri positivi.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Il sistema di numeri definito per calcolare i debiti sono i numeri interi, che possono essere minori di 0.

$$\mathbf{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Il sistema di numeri definito per dividere è quello dei numeri razionali, definito come:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbf{Z} \right\}$$

Il sistema definito per misurare grandezze reali è \mathbf{R} . L'insieme di numeri reali, contiene tutti quelli precedenti, insieme ai numeri irrazionali come $\sqrt{2}$.

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Poi abbiamo il sistema dei numeri *complessi* chiamato \mathbf{C} che permette di risolvere equazioni tipo:

$$x^2 + 1 = 0$$

1.2 Numeri Immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero i tale che:

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Questo numero è detto **unità immaginaria**. Definiamo l'insieme dei numeri complessi:

$$\mathbf{C} := \{ a + bi \mid a, b \in \mathbf{R} \}$$

Esempi: $6 + 7i$, $-12 + \frac{1}{2}i$, $3 - \sqrt{2}i$

1.3 Operazioni dei numeri complessi

1.3.1 Addizione

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + c + bi + di \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

1.3.2 Moltiplicazione

$$z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

1.4 Teorema fondamentale dell'algebra

Qualsiasi equazione nella forma $a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ax + a_0 = 0$ dove $n \in \mathbf{N}$, $a_0, a_1, a_n \in \mathbf{N}$, $a_n \neq 0$, x è un'incognita, ammette n soluzioni in \mathbf{C} .
 $a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ax + a_0 = 0$ viene chiamato anche *Polinomio di grado n* .

1.5 Coniugato e Modulo

Sia $z = a + bi \in \mathbf{C}$. Il numero complesso:

$$\bar{z} := a - bi$$

è detto coniugato di z . Il modulo di z è $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbf{R}$.

Proprietà: Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbf{C}$

- i. $z_1 \cdot \bar{z}_1 = a^2 + b^2 = |z_1|^2$
- ii. $z_1 + \bar{z}_2 = \bar{z}_1 + z_2$
- iii. $z_1 \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \cdot z_2$
- iv. Se $z_1 \neq 0$, $\frac{\bar{1}}{z_1} = \frac{1}{z_1}$ infatti $\bar{z}_1 \cdot \left(\frac{\bar{1}}{z_1}\right) = \bar{1} = 1 - 0i = 1$

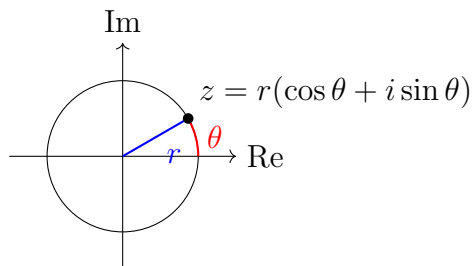
v. Se $z_1 \neq 0$ allora $\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

vi. Se $z_1 \neq 0$, allora $\frac{1}{z_1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

1.6 Coordinate polari

$z = a + bi \in \mathbf{C} \Rightarrow (a, b) = (ReZ, ImZ) \in \mathbf{R}^2$.

Possiamo esprimere z in coordinate polari (r, α) dove r è la lunghezza del segmento OZ detto raggio polare e α è l'angolo compreso tra l'asse delle x e OZ misurato in senso antiorario.



$$z_1 = (1, 0) \rightarrow 1$$

$$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \rightarrow i$$

$$z_3 = (1, \pi) \rightarrow -1$$

$$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \rightarrow -i$$

1.7 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un $z = (r, \alpha)$ in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica.

$$\cos(\alpha) := \frac{a}{r} \quad \sin(\alpha) := \frac{b}{r}$$

$$z = r(\cos(\alpha)) + i \sin(\alpha)$$

è detta **forma trigonometrica di z**.

Esempio:

$$\begin{aligned}\cos(0) + i \sin(0) &= 1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) &= i \\ \cos(\pi) + i \sin(\pi) &= -1 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -i\end{aligned}$$

In forma trigonometrica il prodotto diventa una somma di due angoli.

1.7.1 Formula di De Moivre

Dato $z = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) \in \mathbf{C}$ allora

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

1.8 Definizione

$y \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}$ si dicono radici n-esime di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$.

1.9 Teorema

Siano $y \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}$ esistono precisamente n radici n-esime distinte z_0, z_1, \dots, z_{n-1} di y. Se:

$$y = r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$$

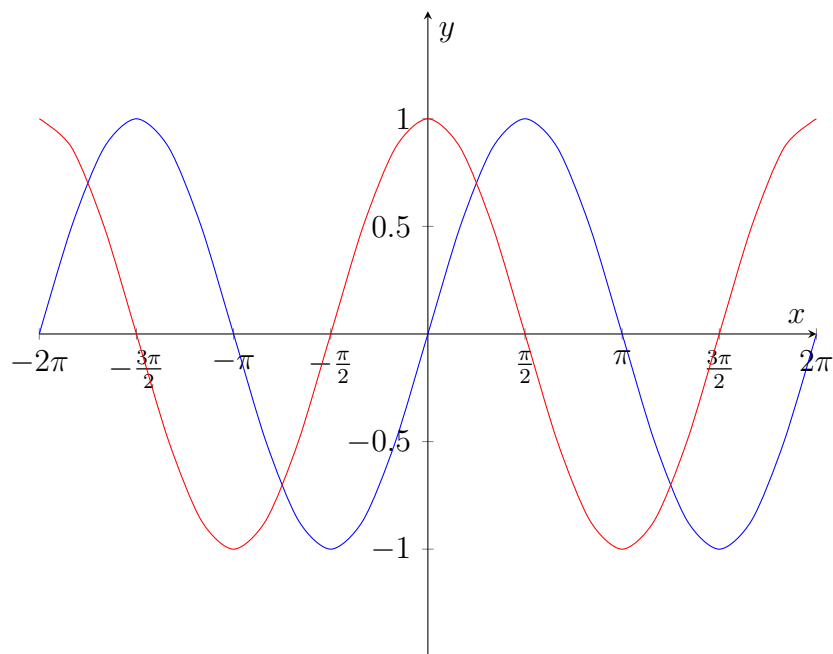
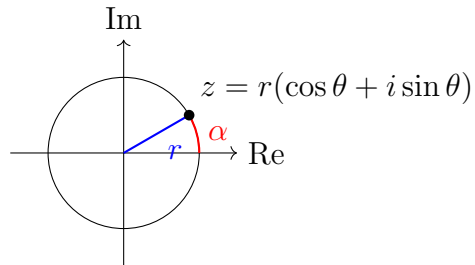
Allora:

$$\begin{aligned}z_0 &= \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha}{n}\right) \right) \\ z_k &= \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\alpha + (2\pi)k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\alpha + (2\pi)k}{n}\right) \right)\end{aligned}$$

per $k = 1, \dots, n-1$

Dimostrazione: Per la formula di de Moivre:

$$(z_k)^n = (\sqrt[n]{r})^n (\cos(\alpha + (2\pi)k) + i \sin(\alpha + (2\pi)k))$$



$$= r(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) = y$$

Quindi z_0, \dots, z_{n-1} sono soluzioni di $y = x^n$, cioè sono radici n-esime di y . Siccome il periodo di \sin e \cos è 2π , sono tutte distinte.

1.10 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia $a \in \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ tale che $a < 0$, esistono precisamente due radici quadrate di a in \mathbf{C} . Infatti, abbiamo:

$$a = (-a)(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$$

Per Teorema 1.9:

$$z_0 = \sqrt{-a} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) = -i\sqrt{-a}$$

NB: $ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ o \mathbf{C} Quindi: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ esistono due soluzioni anche se $\Delta < 0$.

2 Sistemi lineari e matrici

2.1 Sistemi lineari

Esempio: valori nutrizionali (per porzione)

	Cheerios	Quakers
Proteine(g)	4	3
Carbs (g)	20	18
Grassi (g)	2	5

Quanti porzioni di Quakers e Cheerios ci danno una colazione con 9 g di proteine, 48 g di carboidrati e 8g di grassi?

$$\begin{cases} 4c + 3q = 9 \\ 20c + 18q = 48 \\ 2c + 5q = 8 \end{cases}$$

Un sistema lineare è un insieme di m equazioni in n incognite, che può essere scritto nel modo seguente:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

dove $b_k, a_{ij} \in \mathbf{C}$ oppure \mathbf{R} per $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n$.
Se i termini noti sono tutti nulli il sistema è detto omogeneo.

Una n-upla (x_1, \dots, x_n) di numeri complessi (o reali) è una *soluzione* se soddisfa tutte le n equazioni.

Esempio:

$$4C + 3Q = 9 \text{ (I)}$$

$$20C + 18Q = 48 \text{ (II)}$$

$$2C + 5Q = 8 \text{ (III)}$$

Moltiplichiamo (I) per $\frac{1}{4}$ e otteniamo un sistema lineare equivalente (cioè avendo *esattamente* le stesse soluzioni).

$$\begin{aligned} \text{(I')} \quad C + \frac{1}{4}Q &= \frac{9}{4} \\ \text{(II)} \quad 20C + 18Q &= 48 \\ \text{(III)} \quad 2C + 5Q &= 8 \end{aligned}$$

Calcolando (II) - 20(I') e (III) - 2(I') si ottiene un altro sistema lineare equivalente.

$$\begin{aligned} \text{(I')} \quad C + \frac{1}{4}Q &= \frac{9}{4} \\ \text{(II')} \quad 0C + 3Q &= 3 \\ \text{(III')} \quad 0C + \frac{7}{2}Q &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Moltiplichiamo (II') per $\frac{1}{3}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \text{(I')} \quad C + \frac{1}{4}Q &= \frac{9}{4} \\ \text{(II'')} \quad Q &= 1 \\ \text{(III')} \quad \frac{7}{2}Q &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Calcolando (III') - $\frac{7}{2}$ (II'') si ottiene:

$$\begin{aligned} \text{(I')} \quad C + \frac{1}{4}Q &= \frac{9}{4} \\ \text{(II'')} \quad Q &= 1 \\ \text{(III')} \quad 0 &= 0 \end{aligned}$$

Otteniamo dunque che $Q = 1$ e $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

Analogamente possiamo risolvere il sistema lineare:

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \frac{1}{4}\mathbf{R1} \\ &\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array} \right) \\ &\rightarrow R2 - 20(R1), R3 - 2(R1) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \frac{1}{3}R3 \\
&\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array} \right) \\
&\rightarrow R3 - \frac{7}{2}R2 \\
&\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

2.2 Definizione

Siano $n, n \geq 1$ una tabella

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

di $n \times n$ elementi di \mathbf{C} disposti in n righe e n colonne si chiama matrice di dimensione $n \times n$. Gli elementi si dicono *coefficienti* (o *entrate*) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice ij dove i indica la riga e j indica la colonna di appartenenza.

$M_{n \times n}(\mathbf{C})$ = L'insieme di tutte le matrici di dimensioni $n \times n$ con entrate \mathbf{C}

$M_{n \times n}(\mathbf{R})$ = L'insieme di tutte le matrici di dimensioni $n \times n$ con entrate \mathbf{R}

ESEMPIO:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbf{C}) \\
&\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbf{R}) \subseteq M_{2 \times 2}(\mathbf{C})
\end{aligned}$$

2.3 Definizione: forma matriciale

Un sistema lineare di n incognite e n equazioni:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

può essere rappresentato nella forma matriciale:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ vettore dei termini noti}$$

$$\text{La matrice } (A \mid B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$

è detta **matrice aumentata**.

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{4} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$\sim \frac{1}{2}R1$$

$$R2 - R1, R3 + R1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array} \right)$$

$$-\frac{1}{5}R2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array} \right)$$

$$R3 - 4R2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & 1 & \frac{8}{5} \end{array} \right)$$

$$5R3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array} \right)$$

Si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{5} \\ x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Assegniamo un parametro alla variabile libera x_4 : $t = x_4$. Possiamo scrivere la soluzione con un parametro.

$$x_4 = t$$

$$x_3 = 8 - 5t$$

$$x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(8 - 5t) + \frac{1}{4}t = -\frac{7}{5} + t - \frac{1}{4}t = -\frac{7}{5} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 2 - 3(-\frac{7}{5} + \frac{5}{4}t) - \frac{3}{2}(8 - 5t) - 5 = 2 + \frac{21}{5} - 12 - \frac{15}{4}t + \frac{15}{2}t - t =$$

$$\frac{10 + 21 - 60}{5} - \frac{15 + 30}{4}t - t = -\frac{29}{5} + \frac{15}{4}t - \frac{4}{4}t = -\frac{29}{5} + \frac{11}{4}t$$

Il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni $t \in \mathbf{C}$.

2.4 Operazioni elementari

Attraverso le seguenti operazioni sulla matrice aumentata $(A \mid b)$, si ottiene un sistema equivalente più semplice:

- Moltiplicare riga i (R_i) per uno scalare ($\alpha \in \mathbb{C}$). Questa operazione non cambia le soluzioni del sistema se lo scalare non è $\neq 0$.
- Sommare una riga (R_i) con un multiplo di un'altra riga (R_j): $R_i + \alpha R_j$
- Scambiare riga i (R_i) e riga j (R_j): $R_i \longleftrightarrow R_j$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{7}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Applichiamo l'algoritmo *Eliminazione di Gauss*.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \\ & \sim \frac{1}{2}R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array} \right) \\ & \sim R_2 - R_1, R_3 + R_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right) \\ & \sim -\frac{1}{5}R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array} \right) \\ & \sim R_3 - 4R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Lo scopo dell'algoritmo è di avere degli 1 in "diagonale" nella matrice.

$$\sim {}^5_8R3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Otteniamo un sistema lineare equivalente:

$$x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2$$

$$x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5}$$

$$0 = 1$$

0 non è mai uguale uno e quindi non esistono soluzioni a questo sistema lineare.

2.5 Linee in \mathbf{R}^2

Consideriamo 2 equazioni in 2 incognite con coefficienti $\in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbf{R}$

$$\rightarrow y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}}(I)$$

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}}(II)$$

1. Soluzione dove le due rette sul piano cartesiano si incontrano.

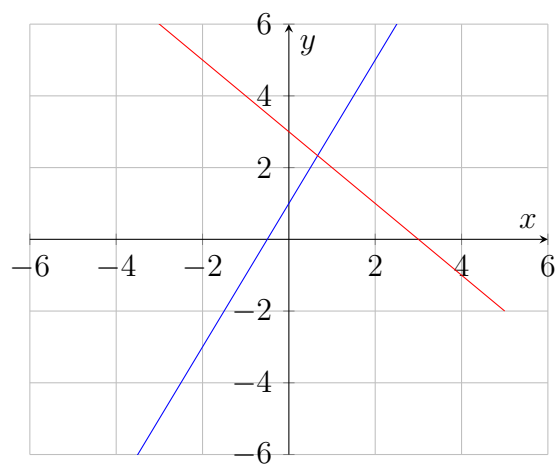


Figure 1: Rette incidenti: 1 soluzioni

2. Soluzione dove le due linee sono parallele (0 soluzioni)

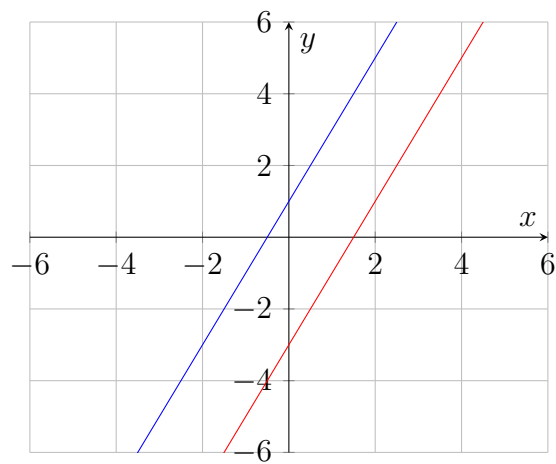


Figure 2: Rette parallele: 0 soluzioni

3. Infinite soluzioni

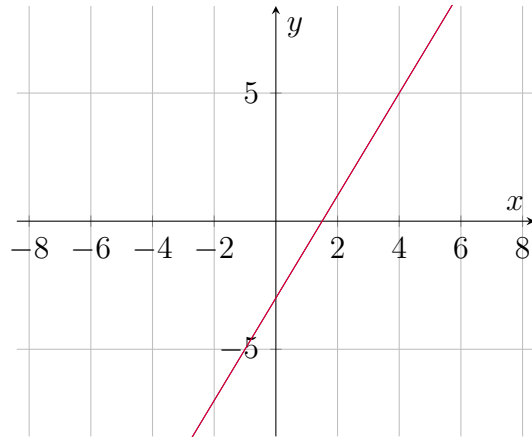


Figure 3: Rette coincidenti: ∞ soluzioni

2.6 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

Data una matrice $M = (a_{ij})$ in $M_{n \times n}(\mathbf{C})$ (oppure in $M_{n \times n}(\mathbf{R})$) con righe R_1, \dots, R_n , eseguiamo le seguenti operazioni elementari:

- Scegliamo la prima colonna non nulla j di M (partendo da sinistra). Dopo aver eventualmente scambiato due righe di M , otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Moltiplicando R_1 per $\frac{1}{a_{ij}}$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{nj} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Adesso per ogni $2 \leq i \leq n$, eseguiamo l'operazione elementare $R_i -$

a_{ij} R1. Otteniamo una matrice di forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

- Ripetiamo il procedimento (a) sia M' per ottenere:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

- Dopo un numero finito di passi , si ottiene una matrice che è una matrice a scala

//Rifare matrice

cioè esiste un numero $1 \leq r \leq n$ tale che:

- Le righe $1 \leq i \leq r$ sono non nulle
- Ogni riga $2 \leq i \leq n$ ha un numero di zeri iniziali superiore alla riga precedente
- Le righe $r + 1 \leq i \leq n$ sono tutte nulle.

Inoltre il primo coefficiente non nullo di ogni riga è uguale a 1 ed è detto *pivot*. La matrice è detta *forma ridotta* di M . Le colonne che contengono un pivot vengono chiamate *dominanti*.

Esempio:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 5} \in \mathbf{C}$$

$$R1 \longleftrightarrow R2 \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{10}R1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \\
& R3 + iR1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{3}i \end{pmatrix} \\
& \frac{1}{5}R2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{3}i \end{pmatrix} \\
& R3 - (6+3i)R2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5} - \frac{11}{5}i \end{pmatrix} \\
& (7 + \frac{1}{5}i - (6+3i)\frac{4}{5}) = (7 + \frac{1}{5}i) - \frac{24}{5} + \frac{12}{5}i = \frac{11}{5} - \frac{11}{5}i \\
& \frac{1}{\frac{11}{5} - \frac{11}{5}i}R3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.7 Risoluzione di sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$(*)Ax = b$$

con $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$, $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$ procediamo con (EG) sulla matrice aumentata $(A|b)$ fino ad ottenere la forma ridotta $(u|c)$ e sistema lineare corrispondente:

$$ux = c$$

che è equivalente a (*). Chiamiamo **variabili dominanti** le r variabili che corrispondono alle colonne dominanti e **variabili libere** le rimanenti:

Esempio:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 2 \\ 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 10 & 30 & | & 2 \\ 0 & 0 & 5 & | & 4 \\ -1 & -1 & 6 & | & 7 \end{pmatrix}$$

$$(EG) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & | & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & | & \end{pmatrix}$$

x_1 e x_3 sono variabili dominanti e x_2 è variabile libera.

Si ha uno dei seguenti casi:

[1] : Tutte le colonne di $(u|c)$ tranne c sono dominanti. In tal caso, il sistema ammette una e una sola soluzione.

Esempio 2.1:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & | & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$[\infty]$: L'ultima colonna e almeno colonna di u *non* sono dominanti. In tal caso un sistema ammette infinite soluzioni che possiamo ottenere assegnando parametri per ogni colonna libera.

Esempio 2.3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & | & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & | & 8 \end{pmatrix}$$

$[0]$: L'ultima colonna c è dominante in tal caso il sistema non ammette soluzione.

Esempio 2.4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{3}{2} & | & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & | & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Attenzione: La forma ridotta di una matrice **non è unica** ma le colonne dominanti sono univocamente determinate.

2.8 Definizione

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ con forma ridotta U . Il numero r di righe non nulle, pari al numero di colonne dominanti, è detto **rango** di u e si indica $\text{rk}u$ (rank). Dimosteremo più avanti che ogni forma ridotta di A ha lo stesso rango, quindi definiamo il rango di A come $\text{rk}A$ (rango di A) = $\text{rk}U$ (rango di U). Si ha $\text{rk}A \leq \min(n, n)$

2.9 Osservazione

Possiamo ricavare le condizioni $[1], [\infty], [0]$ usando il rango:

2.9.1 Teorema di Rouchè-Capelli

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$, sia $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$.

$$[1] \iff \text{rk}A = \text{rk}(A|b) = n$$

$$\text{rk}U = \text{rk}(u|c)$$

$$[\infty] \iff \text{rk}A = \text{rk}(A|b) < n$$

$$[0] \iff \text{rk}A < \text{rk}(A|b)$$

3 Matrici e le loro operazioni

3.1 Definizione

Sia $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ e $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ matrici in $M_{n \times n} \mathbf{C}$. Diciamo **somma** di A e B la matrice:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij} + b_{ij}) \\ &= a_{11} + b_{11} \dots a_{1n} + b_{1n} \\ &= a_{21} + b_{21} \dots a_{2n} + b_{2n} \\ &= a_{n1} + b_{n1} \dots a_{nn} + b_{nn} \end{aligned}$$

in $M_{n \times n} \mathbf{C}$.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ -1 & 1-i & 5+i \end{pmatrix}$$

Proprietà: L'addizione di matrice è associativa (cioè $(A+B)+C = A+(B+C)$) e commutativa (cioè $A+B = B+A$)

3.2 Definizione

Data una matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in M_{n \times n} \mathbf{C}$ e $\alpha \in \mathbf{C}$, diciamo **prodotto** della matrice A per lo scalare α la matrice:

$$\begin{aligned} \alpha A &= (\alpha a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbf{C}) \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ i & 1-2i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}i & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Proprietà:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

per $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{C}), \alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

3.3 Definizione

Accanto a una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$, consideriamo la matrice A^t ottenuta da A scambiando le righe per le colonne detta trasposta di A.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 7 \\ \pi & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ i & \frac{1}{12} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Prodotto di matrici

(a) Una matrice di dimensione $n \times 1$ è detta vettore (colonna) e si usa la notazione:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$$

Una matrice di dimensione $1 \times n$ è detta vettore riga e si usa la notazione v^t .

$$v^t = (v_1 \quad \dots \quad v_n) \in M_{1 \times n}(\mathbf{C})$$

Siano v^t un vettore riga in $M_{1 \times n}(\mathbf{C})$ e u un vettore colonna in $M_{n \times 1}(\mathbf{C})$. Si chiama **prodotto di v^t con u** il numero complesso $v_u^t = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n \in \mathbf{C}$.

Esempio:

$$v^t = (1 \quad 2 \quad 3) u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_u^t = 1 + 0 + 9 = 10.$$

(b) possiamo vedere una matrice $A = (a_{ij})$ come n vettori riga $R_i = (a_{i1} \dots a_{in})$

detti **righe di A** oppure n vettori colonna: $c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ detti **colonne di**

A.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2i & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2i & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Siano $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n} \in \mathbf{C}$ e $B = (b_{ij}) \in M_{n \times n} \in \mathbf{C}$ se $n = s$, allora possiamo formare il prodotto di A e B:

$$AB = (c_{ij})$$

dove $c_{ij} = R_i C_j = (a_{i1} \ \dots \ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ è il prodotto della riga i di A e la

colonna j di B.

Esempio:

$$v^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1C1 & R1C2 & R1C3 \\ R2C1 & R2C2 & R2C3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 22 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

Proprietà:

- Il prodotto di matrici è associativo:

$$(AB)C = A(BC)$$

- Leggi distributive:

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

- Scriviamo $I_n \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ per la matrice ridotta e diciamo **matrice identità**.

ESEMPIO:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$MI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

Per ogni matrice $M \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ abbiamo che $MI_n = M = I_n M$

- $(AB)^t = B^t A^t$

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} = (AB)^t$$

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto tra matrici NON è commutativo.

$$AB \neq BA$$

3.5 Osservazione

Siano $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Consideriamo $Ax = b$ in forma matriciale. Abbiamo:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

è uguale a $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 6x_2 \\ x_1 & -2x_2 \\ -x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3.6 Definizione

Una matrice $A = a_{ij}$ di dimensione $n \times n$ si dice matrice quadrata di ordine n . Gli elementi di A a_{ii} formano la **diagonale** di A .

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & i \end{pmatrix}$$

Se tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, allora è detta **matrice diagonale**.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sotto della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta matrice **triangolare** superiore o inferiore.

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & i \end{pmatrix}$$

3.7 Matrici elementari

Prendiamo la matrice identità:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le operazioni elementari alla matrice identità I_n per ottenere matrici elementari che denotiamo come segue:

- E_{ij} la matrice ottenuta da I_n scambiando la riga i con la riga j .

Esempio:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $E_i(K)$ ottenuta da I_n moltiplicando la riga per lo scalare $\alpha \neq 0 \in \mathbf{C}$.

$$n = 3, \alpha = i + 5 \in \mathbf{C}$$

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

- $E_{ij}(\alpha)$ ottenuta da I_n sommando la riga i con la riga j moltiplicata per $\alpha \in \mathbf{C}$.

$$n=3, k=-\frac{5}{6}$$

$$E_{13}\left(-\frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 Moltiplicazione con matrici elementari

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -i-5 & 5i+25 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}\left(-\frac{5}{6}\right)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{25}{6} \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Vediamo che ogni operazioni elementare su una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ corrisponde alla (pre)moltiplicazione di A con la matrice elementare ottenuta di I_n effettuando la medesima operazione elementare.

NB:

$$AE_1, (-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 3 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R2 - 3R1 \sim E_{21}(-3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}R2 \sim E_2\left(\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = u = E_2\left(\frac{1}{5}\right) (E_{21}(-3))A$$

Quindi $u = E_2\left(\frac{1}{5}\right) (E_{21}(-3))A$. Si può svolgere lo stesso calcolo in questo modo:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \\ & \rightsquigarrow \\ & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 & 0 & 1 \end{array} \right) R2 - 3R1 \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ & \frac{1}{5}R3 \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

3.9 Definizione di invertibile

Una matrice A di dimensione $n \times n$ è detta invertibile se esiste un'altra matrice C di dimensione $n \times n$ tale che:

$$CA = I_n \text{ e } AC = I_n$$

In tal caso, C è detta inversa di A . L'inversa di A , quando esiste, è univocamente determinata e si indica A^{-1} . Infatti se C e C' sono inverse di A allora:

$$C = I_n C = (C' A) C = C' (AC) = C' I_n = C'$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow C = A^{-1}$$

Se $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ sono invertibili allora lo è anche il loro prodotto AB .
Infatti l'inversa di $AB = B^{-1}A^{-1}$:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A = AA^{-1}$$

$$= I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B$$

$$= B^{-1}B = I_n$$

Quindi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

3.10 Inverse di matrici elementari

Le matrici elementari sono tutte invertibili con inverse:

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}$$

Esempio:

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

$$E_3 \left(\frac{1}{i+5} \right) E_3(i+5) = I_3$$

$$E_{ij}\alpha^{-1} = E_{ij}(-\alpha)$$

$$E_{23} \left(-\frac{5}{6} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}E_{23} \left(-\frac{5}{6} \right) = I_3$$

3.11 Proposizione

Sia $Ax = b$ un sistema lineare in forma matriciale, cioè $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ e $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$. Se $(u|c)$ è una forma ridotta della matrice aumentata $(A|b)$, allora i sistemi lineari $Ax = b$ e $Ux = c$ hanno precisamente le **stesse soluzioni**, cioè sono equivalenti.

3.11.1 Dimostrazione

Siano E_1, \dots, E_5 le matrici elementari che trasformano $(A|b)$ nella forma ridotta $(u|c)$:

$$(A|b) \sim (A'|b') \sim \dots \sim (u|c)$$

Allora abbiamo $(u|c) = E_3, \dots, \underbrace{E_1(A|b)}_{A'|b'}$. Per 3.10, le matrici elementari

E_1, \dots, E_5 sono invertibili.

Dunque anche il prodotto $E = E_3 \dots E_1$, è invertibile con $E^{-1} = E_1^{-1}, \dots, E_3^{-1}$.

Abbiamo che $E(A|b) = (u|c)$, ovvero $EA = u$ e $Eb = c$.

Pertanto, se $v \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$ è una soluzione di $Ax = b$, cioè $Av = b$, allora

$$Uv = (EA)v = E(Av) = Eb = c$$

Quindi v è soluzione di $Ux = c$.

Se $v \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$ è soluzione di $Ux = c$, cioè $Uv = c$, allora:

$$Av = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_n} Av = E^{-1}(EA)v = E^{-1}(Uv) = E^{-1}c = E^{-1}(Eb) = b$$

Quindi v è soluzione di $Ax = b$. \square

3.12 Proposizione

Sono equivalenti seguenti annunciati per $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$:

- i. Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$
- ii. Il $\text{rk}A$ di A è pari al numero di righe di A .

3.12.1 Dimostrazione

[(1) \longrightarrow (2)] Supponiamo (1) sia u una forma ridotta di A :

$$u = \begin{pmatrix} 1 & \dots & *** & \dots & *** & \dots & * \\ \vdots & 1 & \vdots & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 000 & \dots & 000 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste righe esistono se e solo se $\text{rk}A = \text{rk}U < \#$ righe di $u = \#$ righe di A . Esiste una matrice invertibile E tale che $u = EA$ (E = prodotto delle matrici elementari dell'EG).

Consideriamo il vettore $c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e mettiamo $b = E^{-1}C$. Allora il sistema

lineare $Ax = b$ ammette una soluzione v per (1) cioè $Av = b$. Allora:

$$Uv = Eb = E(E^{-1}C) = C \text{ per 3.11}$$

Per il teorema di Ronché-Capelli, $\text{rk}U = \text{rk}(u|c)$, cioè

$$(u|c) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \dots & *** & \dots & *** & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & & & \vdots & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 000 & \dots & 000 & 1 \end{array} \right)$$

L'ultima riga non può essere nulla, altrimenti l'ultima colonna di $(u|c)$ sarebbe una colonna dominante.

Dunque $\text{rk}A = \text{rk}U = \# \text{ righe di } U = \# \text{ righe di } A$.

[(2) \longrightarrow (1)] Supponiamo (2)

Sia $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$ e consideriamo $Ax = b$. Eseguendo EG sulla matrice $(A|b)$, otteniamo una forma ridotta $(u|c)$. Siccome $\text{rk}U = \# \text{ righe di } U$, ogni riga di U contiene un *pivot*. Perciò $\text{rk}U = \text{rk}(u|c)$ e quindi $\text{rk}A = \text{rk}(A|b)$. Quindi siamo in caso [1] oppure $[\infty]$ del teorema RC. \square

4 Matrici invertibili e il determinante

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo EG e calcoliamo il prodotto delle matrici elementari contemporaneamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim E_{21}(-5), E_{31}(4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{32}(2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim E_3\left(-\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Siccome $\text{rk}U = 3$, possiamo continuare per ottenere la matrice identità.

$$(u|E) \sim E_{23}(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\sim E_{12}(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Allora:

$$I_3 = E_{12}(-2)E_{23}(1)u = E_{12}(-2)E_{23}(1)EA$$

$$= E'A$$

Osserviamo che:

$$AE' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = E'$$

4.1 Proposizione

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$. A è invertibile se e solo se esiste una sequenza E_1, \dots, E_t di matrici elementari tali che $I_n = E_t \dots E_1 A$.

4.1.1 Dimostrazione

Supponiamo che A sia invertibile. Per ogni $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$, il vettore $A^{-1}b =: v$ è una soluzione del sistema lineare $Ax = b$.

Infatti:

$$Av = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$$

Per 3.12, abbiamo che $\text{rk}A = n$. (Il rango è il numero di righe non nulle nella forma ridotta di A). Esiste una forma ridotta di A :

$$u = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Con 1 sulla diagonale e matrici elementari $E_1 \dots E_t$ tali che $u = E_t \dots E_1 A$.

Proseguendo l'esempio precedente, troviamo matrici elementari E_{t+1}, \dots, E_s tali che $I_n = E_s \dots E_{t+1} u = E_s \dots E_{t+1} E_t \dots E_1 A$.

Ora supponiamo che esistano E_1, \dots, E_s matrici elementari tali che $I_n = E_s \dots E_1 A$.

Per 3.10 le matrici elementari sono invertibili, quindi abbiamo:

$$E_1^{-1} \dots E_s^{-1} = E_1^{-1} \dots E_s^{-1} I_n = \overbrace{E_1^{-1} E_s^{-1}}^{I_n} E_s \dots E_1 A$$

$(E_s \dots E_1)^{-1}$

Dunque A è prodotto di matrici invertibili e quindi A è invertibile con $A^{-1} = E_s \dots E_1$. \square

4.2 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice invertibile $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$.

Usiamo le operazioni elementari per trasformare A nella matrice identità, eseguiamo le medesime operazioni elementari su I_n per ottenere A^{-1} :

$$(A|I_n) \sim E_1(A'|E') \sim E_2 \cdots \sim E_s(I_n|A^{-1})$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\sim E_{31}(-5) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
&\sim E_{32}(4) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \\
&\sim E_{23}(-4) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \\
&\sim E_{13}(-3) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \\
&\sim E_{12}(-2) \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right)}_{\substack{I_n \qquad A^{-1}}}
\end{aligned}$$

4.3 Teorema delle matrici invertibili

Sono equivalenti i seguenti enunciati per la matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$:

- (a) A è invertibile.
- (b) Esiste una sequenza $E_1 \dots E_t$ di matrici elementari tali che $E_t \dots E_1 A = I_n$
- (c) $\text{rk} A = n$
- (d) Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$
- (e) Il sistema lineare $Ax = 0$ (Vettore nullo) ammette la soluzione $x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- (f) Esiste una matrice $C \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ tale che $CA = I_n$
- (g) Esiste una matrice $D \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ tale che $AD = I_n$

4.3.1 Dimostrazione

$$(a) \iff (b) \quad (4.2)$$

$$(a) \implies (g)$$

$$(a) \implies (f)$$

$$(g) \implies (d) \quad (4.1)$$

$$(d) \implies (c) \quad (3.12)$$

$$(e) \implies (c)$$

$$(f) \implies (e)$$

Supponiamo che esiste $C \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ tale che $CA = I_n$. Sia $v \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$ una soluzione del sistema $Ax = 0$. Allora $v = vI_n = (CA)v = C(Av) = C0 = 0$.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

4.3.2 Nota

$$D = I_n D = (CA)D = C(AD) = CI_n = C$$

Quindi:

$$C = D = A^{-1}$$

4.4 Proposizione

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbf{C})$ se $ad - bc \neq 0$, allora A è invertibile e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Se $ad - bc = 0$ allora A non è invertibile.

4.4.1 Dimostrazione

$$\begin{aligned} M(\alpha N) &= \alpha(MN) \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{ad - bc} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & -ba + ab \\ cd - dc & -bc + ad \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Se invece $ad - bc = 0$, allora

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc \\ cd - cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ è soluzione al sistema $Ax = 0$.

Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora A non è invertibile per 4.3(e).

Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora $d = c = 0$.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango < 2 , quindi A non è invertibile per 4.3(e). \square

4.5 Definizione

Definiamo una funzione:

$$\det : M_{n \times n}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{C}$$

Detta *determinante* per ricorrenza:

$$n = 1$$

$$A = (a) \quad \det A := a$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \det A := ad - bc$$

$$n \geq 3$$

$$A = a_{ij}$$

Si pone

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{ij} \det A_{ij}$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la prima riga e la colonna j .

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^2 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -6 + 6 - 3 = -3$$

Ulteriore esempio:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &= \\ (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ = 1(-2 - 1) - 2(-3 - 0) + 3(3 - 0) &= -3 + 6 + 9 = 12 \end{aligned}$$

4.6 Regola di Sarrus

Per una matrice di dimensione 3x3 possiamo usare la regola:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\det A = 1*1*0 + 2*3*1 + 3*0*2 - 3*1*1 - 1*3*2 - 2*0*0 = 6 - 3 - 6 = -3$$

4.7 Teorema di Laplace

Il determinante di una matrice $A = (a_{ij})$ può essere sviluppato per qualsiasi riga o colonna come segue:

Sviluppo per la riga i

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j .
Sviluppo per la colonna j

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Il valore $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ è detto complemento algebrico di a_{ij} . Il segno si determina secondo a

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 0^- & 1^+ & 3^- \\ 1^+ & 2^- & 0^+ \end{pmatrix}$$

Riga 3:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2^- & 3^+ \\ 1^+ & 3^- \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (6 - 3) - 2(3 - 0) = 3 - 6 = -3$$

Colonna 3

$$\det A = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3(0 - 1) - 3(2 - 2) = -3$$

4.8 Il determinante e la trasposta

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\det A = ad - bc \quad \det A^t = ad - cb$$

$$\implies \det A = \det A^t$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = -3$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo per riga 1:

$$\det A = 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}} - 2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{12}} + 3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{13}} = -3$$

Sviluppo per la trasposta la colonna 1:

$$\det A^t = 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}^t = (A_{11})^t} - 2 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{12}^t = (A_{12})^t} + 3 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{13}^t = (A_{13})^t} = -3$$

Se $A = a_{ij} \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$, allora $\det A = \det A^t$.

4.9 Il principio di induzione

”Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale una proprietà $p(n)$ ”

$p(n)$ = ”Ogni matrice di A di dimensione $n \times n$, $\det A = \det A^t$ ”

Base dell'induzione

$p(n)$ è vera per $n = 1$ ovvero $p(1)$ è vera.

Passo induttivo

Supponendo che $p(n)$ sia vera; ne consegue che $p(n+1)$ è vera.

Allora $p(n)$ è vera per tutti gli $n \in \mathbf{N}$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Sviluppo per la riga 4:

$$\det A = 10 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(Si Laplasizza ulteriormente) Riga 3:

$$\begin{aligned} 10(8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}) &= \\ = 10 \cdot 8 \cdot (1 \cdot 5 - 0 \cdot 2) &= \\ = 80 \cdot 5 &= \\ = 400 \end{aligned}$$

4.10 Proposizione

Sia $A = a_{ij} \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ una matrice triangolo superiore o inferiore. Allora $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

4.10.1 Dimostrazione

(Superiore) Induzione su n .

Proprietà $p(n)$: per $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$, $\det A = a_{11}\dots a_{nn}$

- **Base dell'induzione:** $p(1)$ è vera:

$$A = a_{11} \in M_{1 \times 1}(\mathbf{C})$$

- **Passo induttivo:** Supponiamo $p(n)$:

$$A = a_{ij} \in M_{n+1 \times n+1}(\mathbf{C})$$

Laplace per riga $n+1$

$$\det A = a_{n+1, n+1} \det A_{n+1, n+1} = a_{n+1, n+1} (a_{nn} \dots a_{11})$$

Quindi $p(n+1)$ è vera.

Per il principio di induzione, abbiamo dimostrato che $p(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. La dimostrazione per A triangolare inferiore è simile. \square

Esempio:

$$(1) \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det u = 1$$

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det u' = 0$$

Poiché il prodotto degli elementi sulla diagonale è uguale a 0.

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = -3$$

$$\det(E_{23}A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (LPj = 1) = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6 - 0 - (6 - 3) = 3 = -\det A$$

$$\det(E_2(2)A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -12 + 6$$

$$= -6 = 2\det A$$

$$\begin{aligned}
\det(E_{13}(2)A) &= \det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= (j=1)3\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1\det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= 3(-6) + 1(18 - 3) \\
&= -3 = \det A
\end{aligned}$$

4.11 Teorema

Siano $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$, $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$, allora:

$$\det(EA) := \begin{cases} -\det A & \text{se } E = E_{ij} \\ \alpha \det A & \text{se } E = E_i(\alpha) \\ \det A & \text{se } E = E_{ij}(\alpha) \end{cases}$$

NB:

$$\det I_n = 1 \text{ (Matrice diagonale)}$$

$$\det E_{ij} = \det E_{ij} I_n = -1$$

$$\det E_i(\alpha) = \det E_i(\alpha) I_n = \alpha$$

$$\det E_{ij}(\alpha) = \det E_{ij}(\alpha) I_n = 1$$

Quindi per $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ ed ogni matrice elementare E , abbiamo

$$\det EA = \det E \det A$$

4.11.1 Dimostrazione

(n=2):

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbf{C}) \\
\det A &= ad - bc
\end{aligned}$$

$$\det(E_{12}A \quad o \quad E_{21}A) = \det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad = -\det A$$

$$\begin{aligned} \det(E_1(\alpha)A) &= \det \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha ad - \alpha bc \\ \alpha(ad - bc) &= \alpha \det A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(E_{21}(\alpha)A) &= \det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} = a(\alpha + \alpha b) - b(c + \alpha a) \\ &= ad + \cancel{\alpha ab} - bc - \cancel{\alpha ab} \\ &= \det A \quad \square \end{aligned}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim E_{31}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim E_3\left(-\frac{1}{3}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_u$$

$$\det u = 1$$

$$u = E_3\left(-\frac{1}{3}\right) E_{31}(-1)A$$

$$A = E_{31}(-1)^{-1} E_3\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} u$$

$$E_{31}(1)E_3(-3)u$$

$$\begin{aligned} \det u &= \det(E_{31}(1)E_3(-3)u) = \\ &= \det(E_3(-3)u) = -3 \cdot \det u = -3 \end{aligned}$$

4.12 Corollario

Se $A \in M_{n \times n}$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se A è invertibile.

4.12.1 Dimostrazione

Sia u una forma ridotta di A :

$$\det A \neq 0 \xLeftrightarrow[4.3]{} \det u \neq 0 \xLeftrightarrow[4.10]{} rkU = n \xLeftrightarrow[4.3]{} A \text{ è invertibile} \quad \square$$

4.13 Corollario

Siano $A, B \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$. Allora $\det AB = \det A \det B$.

4.13.1 Dimostrazione

Caso 1: A non è invertibile allora $\det A = 0$. Se AB è invertibile, allora $A(B(AB)^{-1}) = AB(AB)^{-1} = I_n$ e $B(AB)^{-1}$ sarebbe l'inversa di A . Quindi AB non è invertibile. Allora $\det AB = 0 = \det A \det B$.

Caso 2: A è invertibile.

Per 4.1, esiste una sequenza $E_1 \dots E_t$ di matrici elementari tali che $E_t \dots E_1 A = I_n$.

Siccome $E_1 \dots E_t$ sono invertibili, possiamo considerare

$$\begin{aligned} A &= (E_1^{-1} \dots E_t^{-1}) E_t \dots E_1 A \\ &= E_1^{-1} \dots E_t^{-1} I_n = E_1^{-1} \dots E_t^{-1} \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \det AB &= \det E_1^{-1} \dots E_t^{-1} B \\ &= (teo.) \det E_t^{-1} \det E_2^{-1} \dots \det E_t^{-1} \det B \\ &= (teo.) \det E_1^{-1} \dots \det E_t^{-1} \det B \\ &= \det A \det B \quad \square \end{aligned}$$

4.14 Formula per A^{-1}

Se $\det A \neq 0$, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

è la matrice i cui coefficienti sono i complementi algebrici di A^t e $\det A^t = \frac{1}{\det A}$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{3}$$

4.15 Teorema di Cramer

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ con $\det A \neq 0$, sia $b \in M_{n \times 1}(\mathbf{C})$. Allora il sistema lineare:

$$Ax = b$$

possiede un'unica soluzione.

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

dove $p_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i con il vettore b .

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A \quad \det A = -3$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$\det A_2 = 3$$

$$\det A_3 = -1$$

$$p_1 = \frac{-6}{-3} = 2, \quad p_2 = \frac{3}{-3} = -1, \quad p_3 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Dunque $p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione del sistema lineare $Ax = b$.

5 Spazi vettoriali e sottospazi

Esempio:

Possiamo identificare \mathbb{R}^2 con l'insieme $M_{2 \times 1} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right)$

Possiamo

- Sommare i vettori

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$$

- Moltiplicare per uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

5.1 Definizione

Sia $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ oppure $\mathbf{K} = \mathbb{C}$; sia uno *spazio vettoriale* su \mathbf{K} è un insieme non vuoto \mathbf{V} i cui elementi sono detti *vettori* sul quale sono definite due operazioni:

- per $v, w \in \mathbf{V}$ abbiamo $v + w \in \mathbf{V}$ (*addizione*)
- per $\alpha \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{V}$ abbiamo $\alpha v \in \mathbf{V}$ (*moltiplicazione per uno scalare*)

che godono della seguenti proprietà:

- Valgono le seguenti proprietà:
 - $(v + u) + w = v + (u + w)$ per tutti i vettori dell'insieme $v, w, u \in \mathbf{V}$ (*associativa*)
 - esiste $0_v \in \mathbf{V}$ tale che $v + 0_v = v = 0_v + v$ per ogni $v \in \mathbf{V}$ (*elemento neutro*)
 - Per ogni $v \in \mathbf{V}$ esiste $w \in \mathbf{V}$ tale che $v + w = 0_v = w + v$, scriviamo $w = -v$
 - $v + w = w + v$ per tutti $v, w \in \mathbf{V}$ (*Commutativa*)

ii. per ogni $v \in \mathbf{V}$

$$1v = v$$

iii. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ per tutti gli scalari $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ e tutti i vettori $v \in \mathbf{V}$

iv. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
 $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta w$ (*Leggi Distributive*)

Esempi:

i. $v = M_{n \times n}(\mathbf{K})$ è uno spazio vettoriale su \mathbf{K} con addizione di matrici e moltiplicazioni per scalari uguali

$$0_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$0_v = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare scriviamo

$$\mathbf{K}^n = M_{n \times 1}(\mathbf{K})$$

$$0_{\mathbf{K}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. $\mathbf{K}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficienti in \mathbf{K} .

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

ES:

$$f = 1 - 2x + 3x^2 + 0x^3$$

$$9 = 1 + 6x^3 + 4x^4$$

$$9 = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

$$f + 9 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$\alpha f = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x^1 + \dots + (\alpha a_n)x^n$$

$\mathbf{K}[x]$ è uno spazio vettoriale.

L'elemento neutro:

$$0 + 0x + \cdots + 0x^n$$

$\mathbf{K}[x]$ l'insieme di polinomi di grado $\leq n$ a coefficienti in \mathbf{K} è uno spazio vettoriale.

iii. Le successioni $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{K}$

Esempio:

$$(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) \in \mathbf{C}$$

formano uno spazio vettoriale S su K .

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} + (b_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

$$\alpha(a_n)_{n \in \mathbf{N}} = (\alpha a_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

L'insieme di successioni che soddisfano la relazione ‘

$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 3a_k = 0$$

per $k = 1, 2, 3, \dots \in \mathbf{N}$.

Esempio:

$$(1, 0, -3, -15, -66, \dots)$$

è uno spazio vettoriale.

$$0_v = 0_{v'} = (0, 0, 0, 0, \dots)$$

iv. L'insieme di funzioni $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale:

$$f, g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$$

$$f + g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\alpha \in \mathbf{R},$$

$$\alpha f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$0_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}$ è la funzione: $0_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}(x) = 0$

v. $\mathbf{V} = 0_v$ è uno spazio vettoriale. Scriviamo $\mathbf{V} = 0$. PIPO

5.2 Osservazioni

Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale su \mathbf{K} . Siano $v \in \mathbf{V}$, $a \in \mathbf{K}$

- $\alpha 0_v = 0_v$ infatti $\alpha 0_v = \alpha(0_v + 0_v) = \alpha 0_v + \alpha 0_v$
Sommando con $-\alpha 0_v$, si ottiene

$$\begin{aligned}\alpha 0_v + (-\alpha 0_v) &= (\alpha 0_v + \alpha 0_v) + (-\alpha 0_v) \\ &= \alpha 0_v + (\alpha 0_v + (-\alpha 0_v)) \\ &= \alpha 0_v + 0_v \\ &= \alpha 0_v\end{aligned}$$

- $0.v = 0_v$
 $v = 1.v = (1 + 0).v = 1.v + 0.v = v + 0.v$
Sommando con $-v$, si ottiene

$$\begin{aligned}0.v &= v + (-v) = (v + 0.v) + (-v) = 0.v + (v + (-v)) \\ &= 0.v + 0_v \\ &= 0.v\end{aligned}$$

- Se $\alpha.v = 0_v$, allora $\alpha = 0$ oppure $v = 0_v$.
Se $\alpha = 0$ allora

$$0.v = 0_v \quad \square$$

Se $v = 0_v$:

$$\alpha.0_v = 0_v \quad \square$$

- $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$

5.3 Definizione di combinazione lineare

Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale su \mathbf{K} e siano $v_1 \dots v_n \in \mathbf{V}$, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbf{K}$. Il vettore $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ è detto *combinazione lineare* di v_1, \dots, v_n con coefficienti $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Esempio:

Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3$ è combinazione lineare di
 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con
 coefficienti 1, 2, 3. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un'altra combinazione lineare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO:

$$f = 2x^2 + 4x + 3 \in \mathbf{R}[x]$$

è una combinazione lineare

$$g_1 = x^2 + 2x, g_2 = x - 1, g_3, \frac{1}{2}x - 1$$

infatti

$$\begin{aligned} 2g_1 + 3g_2 + (-6)g_3 &= 2(x^2 + 2x) + 3(x - 1) - 6\left(\frac{1}{2}x - 1\right) \\ &= 2x^2 + 4x + 3x - 3 - 3x + 6 \\ &= 2x^2 + 4x + 3 = f \end{aligned}$$

5.4 Definizione

Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$. Se ogni $v \in \mathbf{V}$ è combinazione lineare di v_1, \dots, v_n si dice (v_1, \dots, v_n) è un insieme di generatori e \mathbf{V} è detto *finitamente generato*.

Esempi:

$(1)e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 è un insieme di generatori di $\mathbb{K}^3 = M_{3 \times 1}(\mathbf{K})$
 per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Infatti se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, allora:

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Scrivendo } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\{e_1, \dots, e_n\}$ è un insieme di generatori di \mathbb{K}^n
 Dunque \mathbb{K}^n è finitamente generato.

Esempio:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è un insieme di generatori di } \mathbb{R}^2$$

(2)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ è un insieme di generatori } \mathbb{R}^2.$$

Infatti, se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, allora

$$\begin{aligned}
 v &= (v_1 - v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(v_2 - v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (v_1 - v_2) + v_2 \\ 3(v_1 - v_2) + v_2 + 3(v_2 - v_1) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Esempio:

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

$$v = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I coefficienti della combinazione lineare non sono univocamente determinati:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Gli spazi vettoriali $\overbrace{\mathcal{S}}^{\text{successioni}}$, $\overbrace{\mathbf{K}[x]}^{\text{polinomi}}$, $\overbrace{R^R}^{\text{funzioni}}$ non sono finitamente generati

5.5 Definizione

Sia \mathbb{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Un sotto insieme $\emptyset \neq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ è detto *sottospazio* di \mathbb{V} se soddisfa le proprietà:

- i. Per ogni $u, u' \in \mathbb{U}$, $u + u' \in \mathbb{U}$
- ii. per ogni $u \in \mathbb{U}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u \in \mathbb{U}$

5.5.1 Osservazione

In tal caso \mathbb{U} è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni $+$, \cdot di \mathbb{V} .

Esempi:

(1) Il sottoinsieme

$$u = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = mv_1 \right\}$$

è un sottospazio di \mathbb{R}^2 per qualsiasi $n \in \mathbb{R}$.

Infatti:

(i)

$$\begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + u \\ m(v + u) \end{pmatrix} \in U$$

(ii)

$$\alpha \begin{pmatrix} v \\ mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ \alpha mv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v \\ m(\alpha v) \end{pmatrix} \in U$$

5.6 Definizione

Dati $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$, l'insieme $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R} \}$ di tutte le combinazioni lineari di v_1, \dots, v_n è un sottospazio di \mathbf{V} . Infatti:

$$\begin{aligned}
 \text{i. } & (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) + (\sum_{i=1}^n \beta_i v_i) \\
 &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \\
 &= (\alpha_1 v_1 + \beta_1 v_1) + \dots + (\alpha_n v_n + \beta_n v_n) \\
 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \\
 \text{ii. } & \beta (\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^n (\beta \alpha_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle
 \end{aligned}$$

Diciamo che $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è il sottospazio generato da v_1, \dots, v_n

Esempi:

$$\begin{aligned}
 v &= \mathbb{R}^2 \\
 \mathcal{L} &\subseteq \mathbb{R}^2
 \end{aligned}$$

è il sottospazio guidato da $\left(\frac{1}{m}\right)$

$$\left\langle \left(\frac{1}{m}\right) \right\rangle = \left\{ \alpha \frac{1}{m} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

\mathcal{S}' è il sottospazio di \mathcal{S} generato da u_1 e u_2 .

5.7 Definizione

Se u, w sono sottospazi di \mathbf{V} allora l'intersezione

$$u \cap w = \{v \in \mathbf{V} \mid v \in u \wedge v \in w\}$$

è un sottospazio di \mathbf{V} .

In generale, l'unione

$$u \cup w = \{v \in \mathbf{V} \mid v \in u \vee v \in w\}$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
 v &= \mathbb{R}^2 \\
 u &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\
 w &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \\
 \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U \cup W
 \end{aligned}$$

Quindi $U \cup W \subseteq \mathbf{V}$ non soddisfa (i).

L'insieme $U + W = \{u + w \mid u \in U \wedge w \in W\}$ è un sottospazio di \mathbf{v} , detto che la somma di U e W .

NB:

$$U \cup W \subseteq U + W$$

perché

$$\begin{aligned}
 u &= \{u = u + 0_v \mid u \in U\} \\
 w &= \{w = 0_v + w \mid w \in W\}
 \end{aligned}$$

5.8 Definizione

Consideriamo lo spazio vettoriale \mathbb{K}^n . Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$.

Il sottospazio di \mathbb{K}^n

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

generato dalle colonne di A è detto lo spazio delle colonne di A .

Esempio:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{K} &= \mathbb{R} \\
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$C(A) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$C(A) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (3) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in C(A)$$

NB:

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 6x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.9 Proposizione

Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n \times n} \in (\mathbb{K})$

Lo spazio delle colonne $C(A)$ consiste di tutti i vettori $b \in \mathbb{K}^n$ per i quali il sistema lineare $Ax=b$ possiede soluzione.

5.9.1 Dimostrazione

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

$$\left\{ b \in \mathbb{K}^n \mid \exists v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid Av = b \right\} \quad \square$$

5.10 Definizione di spazio nullo

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. L'insieme $N(A) = \left\{ v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0 \right\}$ dove $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è

detto spazio nullo di A .

NOTAZIONE: $N(A)$ sta per $\text{Null}(A)$.

5.11 Proposizione

Lo spazio nullo $N(A)$ di una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ è uno sottospazio di K^n .

5.11.1 Dimostrazione

Siano $v, u \in N(A)$ cioè $Av = 0 = Au$, e sia $\alpha \in \mathbb{K}$. Allora

- $A(v + u) = Av + Au = 0 + 0 = 0$ (*legge distributiva del prodotto di matrici*)

Quindi $v + u \in N(A)$

- $A(\alpha v) = \alpha(Av)$ (*Proprietà di moltiplicazione con uno scalare*)
 $= \alpha \cdot 0 = 0$

Quindi $\alpha v \in N(A)$

Dunque $N(A)$ è un sottospazio. \square

Esempio: (1)

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, N(A) \subseteq \mathbb{C}$$

$N(A)$ = Soluzioni del sistema lineare $Ax = 0$

Risolviamo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array} \right) \sim E_1 - i \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array} \right) \sim E_{31}(-i) \wedge E_{23}(1)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{quindi } N(A) = \left\{ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(2)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, N(A) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Risolviamo il sistema lineare $Ax = 0$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array} \right) &\sim E_2 \left(\frac{1}{6} \right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right) \\
 &\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow x_3 = t \\
 &\begin{cases} x_1 = -2(-\frac{1}{2}t) = t \\ x_2 = -\frac{1}{2}tx_3 = t \end{cases} \in \mathbb{R} \text{ Quindi} \\
 N(A) = \left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right) t \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(\begin{array}{c} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{array} \right) \right\rangle \in R^3
 \end{aligned}$$

6 Dipendenza e indipendenza lineare

Esempio:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ insieme di generatori.}$$

Infatti, per ogni $v = (v_1 v_2) \in \mathbb{V}$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= (v_2 - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(v_1 - \frac{3}{2}v_2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v_2}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I sottoinsiemi $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{C}$ sono insieme di generatori.

In particolare:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.1 Proposizione e definizione di insieme di generatori

Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale \mathbb{V} su \mathbb{K} e v_n è combinazione di lineare v_1, \dots, v_n allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un **insieme di generatori**.

6.1.1 Dimostrazione

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$. Per ogni $v \in \mathbb{V}$, esistono $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n \\ &= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right) \\ &= (\beta_1 + \beta_n \alpha_1) v_1 + \dots + (\beta_{n-1} + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1} \end{aligned}$$

Quindi $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori. \square .

6.2 Definizione di linearmente dipendente

Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$ dei vettori in uno spazio vettoriale \mathbb{V} .

Un insieme $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è detto *linearmente dipendente*. Se almeno uno dei vettori v_1, \dots, v_n è combinazione lineare dei rimanenti.

6.3 Teorema e definizione di linearmente indipendente

Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. Sono equivalenti i seguenti enunciati:

- i. $\{v_1, \dots, v_n\}$ **non** è linearmente dipendente
- ii. se $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, allora $\alpha_i = \beta_i \quad \forall 1 \leq i \leq n$.
- iii. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sono coefficienti tali che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0v$, allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Se valgono le condizioni (i), (ii), (iii), allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è detto *linearmente indipendente*.

6.3.1 Dimostrazione

Dimostreremo che (i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)

$$\neg(ii) \implies \neg(i) \implies \neg(iii)$$

$$[\neg 2 \implies \neg 3]$$

$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \implies \alpha_i = \beta_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.
 Supponiamo che

$$\begin{aligned}\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n &= 0v \\ &= 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n\end{aligned}$$

Quindi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ per (2).

$$[\neg(2) \implies \neg(1)]$$

Supponiamo che $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$ e $\alpha_j \neq \beta_j$ per qualche $1 \leq i \leq n$.
 Quindi $0v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i$.

$$\text{E allora } v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i + \sum_{i=j+1}^n \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i$$

Dunque $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente dipendente.

$$[\neg(1) \implies \neg(3)]$$

Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente dipendente cioè esistono

$$\alpha_i, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

tali che

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i + \sum_{i=j+1}^n \alpha_i v_i$$

$$\text{Allora } 0v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1)v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \dots + \alpha_n v_n$$

Dunque (3) non vale.

Esempi: (1)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente. Infatti se

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$ e $2\alpha_2 = 0$.
Abbiamo $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 = 0$

(2)

Un insieme $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{V}$ è linearmente dipendente se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha v_1 = v_2$ oppure $\alpha v_1 = v_2$ oppure $v_1 = \alpha v_2$.

(3)

Un insieme $\{v\} \subseteq \mathbb{V}$ è linearmente dipendente se e solo se $v = 0v$.
Inoltre, per ogni $\{v_1, \dots, v_n\}$ se $v_j = 0v$ per qualche j , allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente dipendente perché $0v = \underbrace{0v_1}_{0v} + \dots + \underbrace{0v_{j-1}}_{0v} + \underbrace{0v_j}_{0v} + \underbrace{0v_{j+1}}_{0v} + \dots + \underbrace{0v}_{0v}$.

e quindi $\neg(3)$.

6.4 Definizione di base

Sia \mathbb{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. L'insieme $U = \{v_1, \dots, v_n\}$ è detto **base** di \mathbb{V} se U è un insieme di generatori di \mathbb{V} e U è linearmente indipendente.

6.5 Osservazione

Per teorema 6.4, un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{V}$ è una base se e solo se possiamo ricostruire in modo unico tutti i vettori di \mathbb{V} mediante combinazione lineari. Possiamo pensare di una base $U = \{b_1, \dots, b_n\}$ di \mathbb{V} come un sistema di coordinate:

Sia $v \in \mathbb{V}$. Esiste un unico vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\mathbb{V} = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n.$$

Scriviamo $[v]_u$ per il vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Esempi: (1)

$$\mathbb{V} = \mathbb{K}^n, \mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right\}$$

è una base di \mathbb{K}^n detta **base canonica**.

Infatti per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, abbiamo $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$.

Supponiamo $\mathbb{O} = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, quindi $v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_n = 0$.

(2)

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di \mathbb{R}^2 .

6.5.1 Base di $C(U)$ per una matrice u in forma ridotta

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(U) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Le colonne dominanti formano una base di $C(U)$: Infatti

Insiemi di generatori

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 7 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 7\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $\alpha_3 = 0, \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_1 = \alpha_1 + 7\alpha_2 = 0$

Insieme di generatori

Proposizione 6.1:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di $C(U)$.

In generale le colonne dominanti di una matrice U in forma ridotta formano una base $C(U)$. Inoltre le colonne non nulle di U^t (cioè le righe non nulle di U) formano una base di $C(U^t)$.

6.6 Proposizione

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale su \mathbb{K} .

- (1) \mathcal{B} è un insieme di generatori minimo, cioè nessun sottoinsieme di \mathcal{B} è un insieme di generatori.
- (2) \mathcal{B} è massimamente linearmente dipendente, cioè nessun insieme di vettori che contenga propriamente \mathcal{B} è linearmente indipendente.

6.7 Teorema

Sia \mathbb{V} uno spazio vettoriale \mathbb{K} finitamente generato.

- Se $\mathbb{V} \neq 0$, allora \mathbb{V} possiede una base.
- Se $\mathbb{V} = 0$, allora \mathbb{V} *non* possiede una base.

6.7.1 Dimostrazione

Se $V = 0 = \{0v\}$, allora ogni sottoinsieme non-vuoto di \mathbb{V} contiene $0v$ e quindi non può essere linearmente indipendente.

Supponiamo $V \neq 0$. Sia $\mathcal{B}_n = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori. Se \mathcal{B}_n è linearmente indipendente, allora \mathcal{B}_n è una base di \mathbb{V} . Altrimenti uno dei vettori di \mathcal{B}_n è combinazione lineare dei rimanenti.

Senza perdita di generalità, supponiamo che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per 6.1, $\mathcal{B}_{n-1} = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è un insieme di generatori. Se \mathcal{B}_{n-1} è linearmente indipendente allora è una base.

Altrimenti continuiamo come sopra. Proseguendo così, otteniamo un sottoinsieme di \mathcal{B}_n che è una base.

Esempio:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}^{v_3} \right\}$$

\mathcal{C}_3 è un insieme di generatori, ma non è linearmente dipendente:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_2 + 2v_1$$

Allora

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori. Inoltre \mathcal{C}_2 è linearmente dipendente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$. Allora \mathcal{C}_2 è una base.

6.8 Lemma di Steinitz (senza dimostrazione)

Sia $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di \mathbb{V} e $\mathcal{L} = \{u_1, \dots, u_m\}$ un insieme linearmente dipendente. Allora $m \leq n$ ed esiste un insieme di generatori di \mathbb{V} formato da \mathcal{L} e $n - m$ vettori di \mathcal{G} .

6.9 Corollario

Se $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_m\}$ sono basi di uno spazio vettoriale, allora $n = m$.

6.9.1 Dimostrazione

Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_2$ per il teorema di Steinitz, si ha $m \leq n$. Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_1$ si ha $n \leq m$. \square

6.10 Definizione di dimensione

Sia \mathbb{V} uno spazio vettoriale finitamente generato. Il numero di vettori che formano una base di \mathbb{V} è detto *dimensione* di \mathbb{V} e si indica con $\dim_k \mathbb{V}$.

Esempio:

(1)

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{V} = \mathbb{C}$$

$\{1\}$ è una base di \mathbb{V} su \mathbb{C} . Dunque $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

(2)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{C}$$

$\{1, i\}$ è una base di \mathbb{V} su \mathbb{R}

[Insieme di generatori]

$$z \in \mathbb{C} = \mathbb{V} \quad z = a + bi = a(1) + b(i), a, b \in \mathbb{R}.$$

[Linearmente indipendente]

$$0v \in \mathbb{C}$$

$0 = 0 + 0i$ è l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare di $\{1, i\}$.

$$\implies \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

6.11 Corollario

In uno spazio vettoriale \mathbb{V} di dimensione $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$, si ha

- i. Un insieme con $> n$ vettori è linearmente dipendente.
- ii. Se n vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base
- iii. Ogni insieme di generatori consiste di almeno n vettori.

6.12 Proposizione

Sia $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{V} = n$. Allora ogni sottospazio U di V ha dimensione $\dim_{\mathbb{K}} U \leq n$. Inoltre $\dim_{\mathbb{K}} U = n$ se e solo se $U = \mathbb{V}$.

6.12.1 Dimostrazione

Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$ una base di \mathbb{U} . Allora \mathcal{B} è linearmente indipendente in \mathbb{V} perché $0v = 0u$. Quindi possiamo completare \mathcal{B} a una base di \mathbb{V} (usando il teorema di Steinitz). Allora

$$\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{B}'$$

Abbiamo che \mathcal{B} contiene n elementi (cioè $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{U} = n$) se e solo se \mathcal{B} è una base di \mathbb{V} . Quindi in tal caso, abbiamo $\mathbb{U} = \langle u_1, \dots, u_n \rangle = \mathbb{V}$ \square

7 Applicazione Lineare

7.1 Definizione di applicazione lineare

Siano \mathbb{U} e \mathbb{V} spazi vettoriali su \mathbb{K} . Un'applicazione $f : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{V}$ si dice **lineare** se per $u, u' \in \mathbb{U}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha

- i. $f(u + u') = f(u) + f(u')$
- ii. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

7.1.1 Osservazioni

(a)

$$f(0u) \stackrel{5.2(b)}{=} f(0.0u) \stackrel{7.1(ii)}{=} 0.f(0u) \stackrel{5.2(b)}{=} 0v$$

(b)

$$f(-u) \stackrel{5.2(d)}{=} f((-1).u) \stackrel{7.1(ii)}{=} -1.f(u) \stackrel{5.2(d)}{=} -f(u)$$

Esempi:

$$\mathbb{U} = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$$

$$f : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{V}$$

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\begin{aligned} f(p) &= \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

f è lineare. Infatti, $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$:

i.

$$\begin{aligned} f(p + q) &= f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) = \\ &= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{pmatrix} \\ f(p) + f(q) &= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0 + b_1 + b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Quindi $f(p + q) = f(p) + f(q)$

ii.

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(\alpha p) = f(\alpha(a_0) + \alpha(a_1x) + \alpha(a_2x^2))$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha f(p) = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha(a_0 + a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$

Quindi $f(\alpha p) = \alpha f(p)$

7.2 Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, definiamo

$$f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ $f(v) = Av$

f_A è lineare:

i. $f_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = f_A(v) + f_A(w)$

ii. $f_A(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha f_A(v)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 - i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{C})$$

$$f_A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

$$f_A \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1 - i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + iy \\ (1-i)y \\ x \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^3 &\rightarrow \mathbb{K}^3 \\ f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) &= f \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= x \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dunque $f = f_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Quindi

$$f_A(v) = Av$$

Per ogni applicazione lineare $f : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$ e per $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, abbiamo

che:

$$\begin{aligned} v &= v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \cdots + v_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \\ f(v) &= f(v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n) = \\ &= f(v_1 e_1) + f(v_2 e_2) + \cdots + f(v_n e_n) = \\ &= v_1 f(e_1) + v_2 f(e_2) + \cdots + v_n f(e_n) = \end{aligned}$$

$$= (f(e_1), \dots, f(e_n)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ = Av$$

dove $A = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di \mathbb{K}^n . Allora $f = f_A$. La matrice A è detta la *matrice associata* a f (rispetto alla base canonica).

NB: Per una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ invertibile abbiamo $f_A : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$ e $f_{A^{-1}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$. Osserviamo che:

$$f_{A^{-1}}(f_A(v)) = f_{A^{-1}}(Av) = A^{-1}(Av) = (A^{-1}A)v = I_n v = v$$

$$f_A(f_A^{-1}(v)) = f_A(A^{-1}v) = AA^{-1}v = I_n v = v$$

7.3 Definizione di Isomorfismo

Un'applicazione lineare $f : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{W}$ è detta **isomorfismo** se esiste $g : \mathbb{W} \mapsto \mathbb{V}$ tale che $g(f(v)) = v$ per ogni $v \in \mathbb{V}$ e $f(g(w)) = w$ per ogni $w \in \mathbb{W}$. L'applicazione lineare g è detta inversa di f e si dice che \mathbb{V} e \mathbb{W} sono **isomorfi**. Scriviamo $f^{-1} = g$ e $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$.

Esempio: Sia $f : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare. Allora esiste una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tale che $f = f_A$. L'applicazione lineare f è un *isomorfismo* se e solo se A è invertibile.

Infatti, supponiamo che esiste f^{-1} e consideriamo la matrice associata B , cioè $f^{-1} = f_B$. Allora, per ogni $v \in \mathbb{K}^n$, abbiamo:

$$(BAv = f_B f_A(v) = f^{-1} f(v) = v = f f^{-1}(v) = f_A f_B(v) = f_A(Bv) = (AB)v$$

Ne segue $AB = I_n = BA$. Quindi $B = A^{-1}$.

7.4 Applicazione delle coordinate

Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di uno spazio vettoriale \mathbb{V} su \mathbb{K} . Per ogni $\alpha_1 b_1 +$

$\dots + \alpha_n b_n = v \in \mathbb{V}$ abbiamo definito i vettori $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. L'applicazione:

$$C_{\mathcal{B}} = \mathbb{V} \mapsto \mathbb{K}^n$$

definita come:

$$C_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

è lineare ed è detta **applicazione delle coordinate** rispetto alla base \mathcal{B} . Infatti, per $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$ e $w = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, abbiamo:

$$\text{i. } C_{\mathcal{B}}(v + w) = C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n) =$$

$$= C_{\mathcal{B}}((\alpha_1 + \beta_1)b_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)b_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$C_{\mathcal{B}}(v) + C_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\text{ii. } C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \begin{pmatrix} \alpha \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha C_{\mathcal{B}}(v) = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Quindi $C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha C_{\mathcal{B}}(v)$.

Esempio:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x], \mathbb{K} = \mathbb{R}$$

$$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\mathcal{B} = \{b_1 = 1 + x, b_2 = 1 + x^2, b_3 = x + x^2\}$$

è una base di \mathbb{V} .

Prendiamo $v = 6 + 3x - x^2 \in \mathbb{V}$. Poichè \mathcal{B} è una base di \mathbb{V} , esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$.

$$6 + 3x - x^2 = \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(1 + x^2) + \alpha_3(x + x^2)$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha_1 + \alpha_1 x) + (\alpha_2 + \alpha_2 x^2) + (\alpha_3 x + \alpha_3 x^2) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2
\end{aligned}$$

Quindi

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema lineare:

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
&\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = 6 - \alpha_2 = 5 \\ \alpha_2 = 3 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
6 + 3x - x^2 &= v = 5b_1 + b_2 + 2b_3 = \\
&= 5(1 + x) + (1 + x^2) - 2(x + x^2)
\end{aligned}$$

7.5 Applicazione delle coordinate $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^{\times}$

Esempio:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 =$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quindi $C_{\mathbb{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema lineare $Ax = v$ dove $A =$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (b_1 b_2)$$

Siccome \mathcal{B} è una base, α_1 e α_2 sono univocamente determinati e quindi $Ax = v$ ha soluzione per ogni $v \in \mathbb{R}^2$. Per Teorema 4.2, A è invertibile e $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v$. Calcolando A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Operazioni Elementari}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

Dunque, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$C_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{8}v_2 \\ \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 \end{pmatrix}$$

In generale per una base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ di \mathbb{K}^n , la matrice $A = (b_1, \dots, b_n)$ è invertibile e $C_{\mathcal{B}} = f_{A^{-1}}$. Dunque $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$ è *isomorfismo* con inversa f_A .

7.6 Teorema per cui l'applicazione lineare $C_{\mathcal{B}}$ è isomorfa

Sia \mathbb{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} con base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. L'applicazione lineare $C_{\mathcal{B}} = \mathbb{V} \mapsto \mathbb{K}^n$ è un *isomorfismo*.

7.6.1 Dimostrazione

Definiamo $g_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{V}$,

$$g_{\mathcal{B}} = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$$

Mostriamo $g_{\mathcal{B}}$ è l'inversa di $C_{\mathcal{B}}$. Infatti:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}(g_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right)) &= C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per ogni $v = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \in \mathbb{V}$,

$$g_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}) = g_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v$$

Dunque $g_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}}^{-1}$. \square

7.7 Osservazione

Se $f : V \mapsto W$ è un isomorfismo e $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ è una base di V , allora $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ è una base di W . In particolare, $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$.

7.8 Corollario

Due spazi vettoriali V e W sono isomorfi se e solo se $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$.

7.8.1 Dimostrazione del corollario

Se $f : V \mapsto W$ è un isomorfismo, allora $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$. (Osservazione 7.7)

Supponiamo V, W sono spazi vettoriali tali che $\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} W$. Allora esiste una base di V , $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ed esiste una base di W , $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$. Consideriamo $C_{\mathcal{B}} : V \mapsto \mathbb{K}^n$ e $C_{\mathcal{C}} : W \mapsto \mathbb{K}^n$.

Notiamo che abbiamo:

dove $C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(v) = C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(v))$.

L'applicazione lineare ha inversa $C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}} : W \mapsto V$ dove $C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}}(w) = C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w))$ per ogni $w \in W$. Infatti:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}}(w)) &= C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w)))) \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w)) \\ &= w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}}(C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(v)) &= C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(v)))) \\ &= C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(v)) \end{aligned}$$

$$= v$$

Dunque V e W sono isomorfi. \square

NB: Per ogni $b_i \in \mathcal{B}$, abbiamo

$$C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(b_i) = C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(b_i))$$

Ricordiamo che

$$\begin{aligned} b_i &= 0.b_1 + \cdots + 0.b_n \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per ottenere l'inversa:

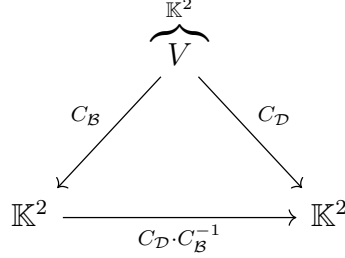
$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right\} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i c_i \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1} = \{C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(b_1), \dots, C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(b_n)\} \\ &= \{c_1, \dots, c_n\} = C \end{aligned}$$

7.9 Matrice del cambio base

Esempio: $V = \mathbb{K}^2$ con basi:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathcal{D} &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Sia $v \in V$. Dati numeri $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, come possiamo determinare $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{K}$ tali che $v = \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?



$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} &= [v]_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{D}}(v) = C_{\mathcal{D}}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) \\
&= C_{\mathcal{D}} \left(C_{\mathcal{B}}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) \right) \\
&= C_{\mathcal{D}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1}([v]_{\mathcal{B}})
\end{aligned}$$

Per 7.5, $C_{\mathcal{B}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_c$ per una matrice C , cioè per ogni $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$, $C_{\mathcal{B}} \cdot$

$$C_{\mathcal{B}}^{-1} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \right) = C \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

In questo esempio abbiamo che $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$ e $C_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$ sono della forma

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{B}} &= f_{A^{-1}} \text{ e } C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_{\mathcal{B}} \\
\text{dove } B &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Allora

$$f_{A^{-1}B} = f_{A^{-1}} \cdot f_B = C_{\mathcal{B}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_c$$

Quindi $C = A^{-1}B$. Calcolando A^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & & \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \end{array} \right) \underbrace{\left(\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{array} \right)}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{cc|cc} \frac{10}{3} & -4 & & \\ \frac{4}{3} & 0 & & \end{array} \right)$$

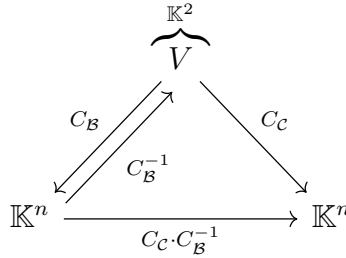
Allora, per ogni $v \in V$, abbiamo

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \frac{10}{3} & -4 & & \\ \frac{4}{3} & 0 & & \end{array} \right) [v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{D}}$$

7.9.1 Teorema

Siano $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ basi di uno spazio vettoriale V . Esiste una matrice $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ tale che $[v]_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} [v]_{\mathcal{B}}$. Le colonne di $A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ sono i vettori $[b_1]_{\mathcal{C}}, \dots, [b_n]_{\mathcal{C}}$ è detta matrice del cambio di base $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$.

7.9.2 Dimostrazione



Esempio:

$$V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$$

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$$

NB:

$$C_{\mathcal{C}}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}} &= ([b_1]_{\mathcal{C}}, [b_2]_{\mathcal{C}}, [b_3]_{\mathcal{C}}) = \\ &= (C_{\mathcal{C}}[b_1], C_{\mathcal{C}}[b_2], C_{\mathcal{C}}[b_3]) \\ &= (C_{\mathcal{C}}[1 + x], C_{\mathcal{C}}[1 + x^2], C_{\mathcal{C}}[x + x^2]) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

per ogni $a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = [a_0 + a_1x + a_2x^2]_{\mathcal{C}}$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1)(1 + x) + (a_0 + a_2)(1 + x^2) + (a_1 + a_2)(x + x^2)$$

7.10 Matrice associata a f rispetto a basi

Esempio:

$$U = \mathbb{R}_2[x], V = \mathbb{R}^2$$

$$f : U \mapsto V$$

tale che $f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$ Ovvero, per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$,

$$f(p) = f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ base di U e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base di V .

Per 7.2, esiste una matrice A associata a $C_{\mathcal{B}} \cdot f \cdot C_{\mathcal{C}}^{-1}$ rispetto alla base canonica:

$$C_{\mathcal{B}} \cdot f \cdot C_{\mathcal{C}}^{-1} = f_A$$

dove

$$\begin{aligned} A &= (C_{\mathcal{B}} \cdot f(1), C_{\mathcal{B}} \cdot f(x), C_{\mathcal{B}} \cdot f(x^2)) \\ &= C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Per ogni $p \in U$, $[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} [p]_{\mathcal{C}}$

Es. $p = 3 + 2x - x^2$ $f(p)$?

$$[p]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(p) = 4b_1 - b_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7.10.1 Teorema

Siano U, V spazi vettoriali su \mathbb{K} , $f : U \mapsto V$, $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ base di U , $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ base di V . Esiste una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tale che $A[u]_{\mathcal{C}} = [u]_{\mathcal{B}}$ per ogni $u \in U$. A è detta *matrice associata ad f rispetto alla base \mathcal{C} di U e la base \mathcal{B} di V* . Le sue colonne sono $[f(c_1)]_{\mathcal{B}}, \dots, [f(c_n)]_{\mathcal{B}}$.

Esempio: Definiamo l'applicazione $id : V \mapsto V$ come $id(v) = v$ per ogni $v \in V$. Allora la matrice associata a id rispetto ad una base \mathcal{C} e \mathcal{B} di V è la matrice del cambio base $A_{\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B}}$.

8 Rank + Nullity

8.1 Definizione di spazio nullo e immagine

Sia $f : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare, allora:

$$N(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0w\}$$

è un sottospazio di V , detto lo spazio nullo di f . Inoltre

$$Im(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

è un sottospazio di W detto immagine di f .

Esempi:

(1)

$$A = (a_{ij}) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$$

$$f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$N(f_A) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} = N(A)$$

$$Im(f_A) = \{Av \in \mathbb{K}^n \mid v \in \mathbb{K}^n\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 & \dots & a_{1n}v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}v_1 & \dots & a_{nn}v_n \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}v_1 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{nn}v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \mid v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= C(A) \text{ Spazio delle colonne di } A$$

(2)

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2, \mathbb{W} = \mathbb{R}^2, f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2, f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$N(f) = \left\{ p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 + a_2 = 0\} \\
Im(f) &= \left\{ f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

8.2 Teorema (Nullità + Rango)

Sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} N(f) + dim_{\mathbb{K}} Im(f)$$

8.2.1 Dimostrazione

Notiamo che $N(f) \subseteq V$ e inoltre è un sottospazio di V . Quindi

$$dim_{\mathbb{K}} N(f) = m \leq n = dim_{\mathbb{K}} V$$

per 6.11.

Sia $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq N(f) \subseteq V$ una base di $N(f)$. Per il teorema di Steinitz, possiamo completare $\{v_1, \dots, v_n\}$ a una base di V

$$\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$$

Si può dimostrare che l'insieme $\{f(v_{m+1}), \dots, f(v_n)\}$ è una base di $Im(f)$, cioè $dim_{\mathbb{K}} Im(f)$ è uguale $n - m$. Dunque

$$dim_{\mathbb{K}} V = n = (n - m) + m = dim_{\mathbb{K}} N(f) + dim_{\mathbb{K}} Im(f) \quad \square$$

Esempio:

$$f : V \mapsto W, V = \mathbb{R}_2[x], W = \mathbb{R}^2$$

Per ogni $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, definiamo $f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
N(f) &= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0, a_1 = -a_2\} \\
&= \{ax + ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

$$= \{a(x - x^2) \mid a \in \mathbb{R}\} \\ < x - x^2 >$$

L'insieme $\{x - x^2\}$ è un insieme di generatori ed è anche linearmente indipendente, cioè è una base di $N(f)$.

Completiamo $\{x - x^2\}$ a una base di $V = \mathbb{R}_2[x]$:

$$\{x - x^2, 1, x\} \subseteq V$$

Dimostriamo che $\mathcal{B} = \{f(1), f(x)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

è una base di $Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Linearmente indipendente

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$

Quindi $\alpha = 0$ e $\beta = \alpha + \beta = 0$.

Insieme di generatori

Per ogni $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in Im(f)$, abbiamo che

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi \mathcal{B} è un insieme di generatori.

8.3 Dimensione di $C(A)$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$:

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}1, E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

In 6.6 abbiamo visto che le colonne dominanti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ formano una base

di $C(U)$ e $\dim_{\mathbb{K}} C(U) = 2$.

Il problema è che $C(U) \neq C(A)$, in particolare $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin C(U)$.

$$\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \frac{2}{3}\beta = 3 \\ \beta = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema lineare non ha soluzione.

8.3.1 Proposizione

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e sia $U \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ una forma ridotta di A . Allora lo spazio delle colonne $C(A)$ e lo spazio delle colonne di $C(U)$ sono isomorfi e quindi $\dim_{\mathbb{K}} C(A) = \dim_{\mathbb{K}} C(U) = rkU = rkA$.

8.3.2 Dimostrazione

Sia E la matrice invertibile tale che $U = EA$ e $A = E'U$. Consideriamo l'applicazione lineare:

$$f_E : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n, f_E(v) = Ev$$

Con inversa $f_E^{-1} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n, f_E^{-1} = f_{E^{-1}}(v) = E^{-1}v$.

$$\mathbb{K}^n \xleftarrow[f_{E^{-1}}]{f_E} \mathbb{K}^n$$

$$C(A) \xleftarrow[f_{E^{-1}}]{f_E} C(U)$$

E, per $w \in C(U)$, abbiamo $f_{E^{-1}}(w) \in C(A)$. Infatti

$C(A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dove $A = (a_1, \dots, a_n)$ e $C(U) = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ dove $U = (u_1, \dots, u_n)$

Inoltre $(u_1, \dots, u_n) = U = EA = E(a_1, \dots, a_n) = (Ea_1, \dots, Ea_n)$
e quindi $a_1 = E^{-1}u_1, \dots, a_n = E^{-1}u_n$. Dunque, per ogni:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in C(A)$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} f_E(v) &= f_E \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f_E(a_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i E(a_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in C(U) \end{aligned}$$

e, per ogni $w = \sum_{i=1}^n \beta_i u_i \in C(U)$, abbiamo che $f_{E^{-1}}(w) = \sum_{i=1}^n \beta_i (E^{-1}u_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i \in C(A)$.

Quindi abbiamo un'applicazione lineare $f_E : C(A) \mapsto C(U)$ con inversa $f_{E^{-1}} : C(U) \mapsto C(A)$, dunque f_E è un isomorfismo e $\dim_{\mathbb{K}} C(A) \stackrel{7.7}{=} \dim_{\mathbb{K}} C(U) = rkU$. \square

Esempio:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $C(U)$, quindi:

$$\left\{ f_{E^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_{E^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $C(A)$ per 7.7. In generale, le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$.

8.4 Dimensione di $N(A)$

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Per il teorema Nullità+Rango dice

$$n = \dim_{\mathbb{K}} K^n = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} N(f_A)}_{\dim_{\mathbb{K}} N(A)} + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}} \text{Im}(f_A)}_{\dim_{\mathbb{K}} C(A) = rkA}$$

8.4.1 Corollario

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Allora

$$\dim_{\mathbb{K}} N(A) = n - rkA$$

8.5 Procedimento per determinare basi di $C(A)$ e $N(A)$

Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ con $r = rkA$ e $d = n - r = n - rkA$.

(1) Per determinare una base di $C(A)$:

- Si trasforma A in forma ridotta U
- Le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$

(2) Per determinare una base di $N(A)$:

- Si risolve il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$, assegnando parametri t_1, \dots, t_d alle d variabili libere e ricavando le rimanenti variabili tramite "sostituzione all'indietro".
- $1 \leq i \leq d$ si ottiene una soluzione u_i di $Ax = 0$ assegnando 1 al parametro t_i e 0 ai rimanenti parametri.
- Così facendo otteniamo $\{u_1, \dots, u_d\}$ un insieme linearmente indipendente
- dunque $\{u_1, \dots, u_d\}$ è una base di $N(A)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Le colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ formano una base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ di } C(A)$$

Allora $\dim_{\mathbb{K}} N(A) = 4 - rkA = 4 - 2 = 2$ (Nullità). Risolviamo il sistema lineare $Ax = 0$:

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -2(-t - 2s) - 3t = -t + 4s \\ x_2 = -t - 2s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

Soluzioni:

$$\begin{pmatrix} -t + 4s \\ -t - 2s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(A)$.

8.6 Proposizione

Sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali V, W . Se A è la matrice associata a f rispetto alla base \mathcal{B} di V e una base \mathcal{B} di W , allora

$$\dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = rkA$$

Di conseguenza $\dim_{\mathbb{K}} N(f) = \dim_{\mathbb{K}} V - rkA$. La dimensione $\dim_{\mathbb{K}}(Im f)$ è detta *rango* di f e scriviamo $rk(f)$. La dimensione $\dim_{\mathbb{K}} N(f)$ è detta la *nullità* di f .

8.7 Teorema sulla relazione tra spazio nullo e soluzioni di sistemi lineari

Siano $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^m$. Se $p \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione di $Ax = b$, allora l'insieme di tutte le soluzioni di $Ax = b$ è

$$L = \{p + u \mid u \in N(A)\}$$

Utile soltanto se ho una matrice con infinite soluzioni.

8.7.1 Dimostrazione

Se $v = p + u$ con $u \in N(A)$ allora $Av = A(p + u) = Ap + Au \underset{Au=0}{=} Ap \underset{\text{soluzione}}{=} b$

Quindi v è una soluzione di $Ax = b$. Viceversa, se v è una soluzione di $Ax = b$, allora $Av = b = Ap$. Quindi

$$0 = Av - Ap = A(v - p) \quad \text{e} \quad \underbrace{v - p}_u \in N(A)$$

Dunque $v = (v - p) + p = u + p \in L$. \square

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \mid \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Ponendo le variabili libere uguale a 0: $x_3 = x_4 = 0$. Troviamo una soluzione

particolare $p = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dunque l'insieme di soluzioni $Ax = b$ è

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

9 Autovalori e autovettori

$$f : \mathbb{K}^m \mapsto \mathbb{K}^m$$

$$\exists A \in M_{m \times m}(\mathbb{K}) \text{ tale che } f = f_A$$

Esempi: Consideriamo un'applicazione lineare:

$$f_A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

per una matrice $A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

1)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^2$$

Allora

$$f_A \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$$

Allora

$$f_A \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \beta v_2 \end{pmatrix}$$

Ma se $v_2 = 0$ o $v_1 = 0$:

$$f_A \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_A \left(\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta v_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora

$$f_A \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 - 2v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

per ogni $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$f_A \left(\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$f_A \left(\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6t - 2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

9.1 Definizione di autovalore e autovettore

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto **autovalore** di A se esiste un vettore $0 \neq v \in \mathbb{K}^n$ tale che:

$$Av = \lambda v$$

In tal caso v è detto **autovettore** di A rispetto all'autovalore λ .

NB: Se $v = 0$, si ha sempre che $Av = A0 = 0 = \lambda 0 = \lambda v$ per qualsiasi λ . Quindi è essenziale richiedere $v \neq 0$ nella definizione.

Esempio: $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ sono autovettori di $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ogni vettore della forma $v_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ per $t \neq 0$ è autovettore di A rispetto $\lambda_1 = 1$.

Ogni vettore di forma $v_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ per $t \neq 0$ è autovettore di A rispetto a $\lambda_2 = 2$.

9.2 Osservazione

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, $v \neq 0$ in \mathbb{K}^n .

$$(1) \quad v \text{ è autovettore di } A \text{ rispetto a } \lambda \in \mathbb{K} \stackrel{DEF}{\iff} Av = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v \rightarrow Av - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} v \rightarrow \left(A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) v \rightarrow (A - \lambda I_n) v$$

$$\begin{aligned} &\iff v \in N(A - \lambda I_n) \\ &\iff v \text{ è soluzione del sistema lineare } (A - \lambda I_n)x = 0 \end{aligned}$$

- (2) $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A
 \iff il sistema lineare ha $(A - \lambda I_n)x = 0$ possiede una soluzione diversa da 0. $\stackrel{4.3}{\iff} (A - \lambda I_n)$ non è invertibile. $\iff \det A - \lambda I_n = 0$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -3\lambda + \lambda^2 + 2 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

λ è autovalore di $A \iff (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ o } \lambda = 2$.

9.3 Definizione di polinomio caratteristico

Data una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$, il polinomio di grado n $P_A = \det A - \lambda I_n \in \mathbb{K}[\lambda]$ è detto **polinomio caratteristico**.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} P_A &= \det A - \lambda I_2 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

Quindi A non possiede autovalori reali, però A ha autovalori complessi $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$.

9.4 Teorema dell'autospazio

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$:

1. Gli autovalori di A sono esattamente gli zeri del polinomio caratteristico P_A .
2. Gli autovettori relativi a un autovalore λ sono esattamente le soluzioni non nulle del sistema lineare $(A - \lambda I_n)x = 0$ ovvero gli elementi non nulli di $N(A)$. Chiamiamo $N(A - \lambda I_n)$ l'**autospazio** di λ e scriviamo:

$$E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$$

9.5 Corollario

Ogni matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ha al massimo n autovalori. Ogni matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ possiede n autovalori in \mathbb{C} (non sono necessariamente distinti) per il teorema fondamentale dell'algebra (1.3).

$$p_A = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

9.6 Definizione di molteplicità

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$.

1. Si dice **molteplicità algebrica** di λ , la molteplicità n_λ di λ come uno zero di p_A cioè $p_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$, allora la molteplicità algebrica di λ_i e n_i per ogni $1 \leq i \leq r$.
2. Si dice **molteplicità geometrica** di λ la dimensione di $E_A(\lambda)$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

Autovalori di A : $p_A = \det(A - \lambda I_2)$

$$\begin{aligned} p_A &= \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)(-1 - \lambda) + 8 = \\ &= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = \\ &= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Molteplicità algebrica: $n_1 = 1, n_2 = 1$.

Molteplicità geometrica: $E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$.

$$\begin{aligned} &= \left\{ v \in \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \mid \begin{pmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ E_A(3) &= N \left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right) = \left\{ v \in \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ d_1 &= \dim_{\mathbb{K}} E_A(3) = 2 - rk \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \stackrel{EG}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 - 1 &= 1 \\
E_A(1) &= N \left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \right) = \left\{ v \in \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
d_2 &= \dim_{\mathbb{K}} E_A(1) = 2 - rk \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \stackrel{EG}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

9.7 Osservazione

Siano v_1, \dots, v_n autovettori di una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ rispetto a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia linearmente indipendente.

NB:

$$U = \underbrace{\langle v_1, \dots, v_r \rangle}_{\{\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i \mid \alpha_i \in \mathbb{K}\}} \subseteq \overset{\text{sottospazio}}{\overbrace{\mathbb{K}^n}^n}$$

quindi $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di U . Sia $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in U$. Allora

$$\begin{aligned}
Av &= A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) \\
&= \alpha_1 (Av_1) + \dots + \alpha_r (Av_r) \\
&\stackrel{\underbrace{\quad}_{Av_i = \lambda_i v_i}}{=} \alpha_1 (\lambda_1 v_1) + \dots + \alpha_r (\lambda_r v_r) \\
&= (\alpha_1 \lambda_1) v_1 + \dots + (\alpha_r \lambda_r) v_r \in U
\end{aligned}$$

Abbiamo che $f_A : U \mapsto U$ è un'applicazione lineare. Allora

$$[f_A(v)]_{\mathcal{B}} = [Av]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \lambda_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{bmatrix} [v]_{\mathcal{B}}$$

Quindi $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{bmatrix}$ è la matrice associata a f_A rispetto alla base \mathcal{B}

nel dominio e nel codominio per teorema 7.11. In particolare se $n = r$, allora \mathcal{B} è una base di \mathbb{K}^n e abbiamo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{K}^n \\
\uparrow C_{\mathcal{B}^{-1}} & & \downarrow C_{\mathcal{B}} \\
\mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_D} & \mathbb{K}^n
\end{array}$$

che equivale

$$\begin{array}{ccc}
v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i & \longrightarrow & Av \\
\downarrow & & \downarrow \\
[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} & \longrightarrow & [Av]_{\mathcal{B}}
\end{array}$$

quindi $f_D = C_{\mathcal{B}} f_A C_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Abbiamo $C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_{\mathcal{B}}$ dove $(v_1, \dots, v_n) = \mathcal{B}$ per 7.5 e $C_{\mathcal{B}} = (C_{\mathcal{B}}^{-1})^{-1}$ e $f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}^{-1}}$. Allora

$$f_D = f_{\mathcal{B}^{-1}} f_A f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B}}$$

e quindi

$$D = \mathcal{B}^{-1} A \mathcal{B}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$.

Gli autovettori rispetto $\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \neq 0$.

Gli autovettori rispetto a $\lambda_2 = 1$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s, s \neq 0$. Quindi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di \mathbb{R}^2 formata da autovettori di A .

Dunque:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $D = B^{-1}AB$. Calcoliamo $B^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim$
 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.8 Proposizione

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Se v_1, \dots, v_r sono autovettori di A che corrispondono a r autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, allora $\{v_1, \dots, v_r\}$ è linearmente indipendente. In particolare, se abbiamo n autovalori distinti, allora esiste una base \mathbb{K}^n formata da autovettori.

9.8.1 Dimostrazione (r=2)

$\{v_1, v_2\}$ linearmente indipendenti $\xLeftrightarrow{6.3}$ v_1 non è combinazione lineare di v_2 (cioè v_1 non è multiplo di v_2). Mostriamo che non è possibile trovare $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha v_2 = v_1$. Se $v_1 = \alpha v_2$, allora

$$\lambda_1 v_1 = A v_1 = A(\alpha v_2) = \alpha(A v_2) = \alpha(\lambda_2 v_2)$$

Quindi

$$\alpha \lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1(\alpha v_2) = \alpha \lambda_1 v_2$$

cioè

$$\phi = \alpha \lambda_2 v_2 - \alpha \lambda_1 v_2 = \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$$

Perciò $v_2 = 0$ (definizione di autovettore) e $\lambda_2 \neq \lambda_1$ (quindi $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$), concludiamo che $\alpha = 0$. Ma è impossibile che $v_1 = 0$ perché v_1 è autovettore. Dunque non esiste un tale scalare α . \square

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

- i. autovalori di A
 - ii. molteplicità algebriche
 - iii. molteplicità geometriche e basi di $E_A(\lambda_i)$
- i. Calcoliamo il $\det(A - \lambda I_3) = P_A$ il polinomio caratteristico della matrice A . Le radici di P_A sono gli autovalori di A .

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

utilizziamo la regola di Sarrus per calcolare il determinante:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -\lambda^3 + 1 + 1 - (-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Osserviamo che $\lambda = 2$ è radice di p_A .

Dividiamo $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & & -2 & -4 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow p_A = \lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)$. Allora le radici di $-\lambda^2 - 2\lambda - 1$ sono:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = -1$$

Quindi $p_A = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

- ii. Molteplicità algebriche: $n_1 = 1, n_2 = 2$.

iii. Molteplicità geometriche: $d_1 = \dim_{\mathbb{R}} E_A(2), d_2 = \dim_{\mathbb{R}} E_A(-1)$.

$$E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_3)$$

$$E_A(2) = N \left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right) = 3 - \underbrace{rk \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{Rank+Nullity}$$

$$E_A(2) = N \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 3 - \underbrace{rk \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Rank+Nullity}$$

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$rk(A - \lambda_1 I_3) = 2$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$E_A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - 1 = 2$$

Calcoliamo una base per $E_A(2) = N \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ usando il metodo

in capitolo per il calcolo di base di spazi nulli:

$$\begin{cases} v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \\ v_3 = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} v_1 = t \\ v_2 = t \\ v_3 = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dell'autospazio $E_A(2)$. Calcoliamo ora una base di $E_A(-1) =$

$$N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{cases} v_1 = -t - s \\ v_2 = t \\ v_3 = s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Osserviamo che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base

di \mathbb{R}^3 . Infatti \mathcal{B} è linearmente indipendente $\iff B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ha rango 3 $\iff \det B \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Come possiamo notare, la matrice possiede 3 colonne dominanti e quindi la matrice è di rango 3. Quindi \mathcal{B} è linearmente indipendente e allora è anche una base di \mathbb{R}^3 .

Per 9.7, la matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e la matrice invertibile:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tali che $D = B^{-1}AB$ e $BDB^{-1} = \underbrace{BB^{-1}}_{I_n} A \underbrace{B^{-1}B}_{I_n} = A$.

9.9 Definizione di simile e diagonalizzabile

Due matrici $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ sono **simili** se esiste matrice invertibile $S \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ tale che $B = S^{-1}AS$.

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ è detta **diagonalizzabile** se esiste una matrice diagonale D tale che A e D sono simili.

10 Diagonalizzazione di matrici

10.1 Proposizione (Proprietà di matrici simili)

Siano $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ due matrici simili, cioè esiste una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1}AS$.

1.

$$\begin{aligned}\det A &= \det B \\ &\iff \\ p_A &= p_B\end{aligned}$$

2. A e B hanno gli stessi autovalori.

3. $A^n = SB^nS^{-1}$

4. Se $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ è diagonale, allora $\det A = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ e

$$A^n = S \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

10.1.1 Dimostrazione

1. abbiamo supposto che $B = S^{-1}AS$

$$\begin{aligned}\det B &= \det S^{-1}AS \\ &\stackrel{4.13}{=} \det S^{-1} \det A \det S \\ &\stackrel{4.14}{=} \frac{1}{\det S} \det S \det A \\ &= \det A\end{aligned}$$

Analogamente si vede $p_A = p_B$.

2. Gli autovalori di una matrice sono le radici del polinomio caratteristico quindi segue da (1) che gli autovalori coincidono.

3.

$$\begin{aligned} A &= I_n A I_n = (SS^{-1})A(SS^{-1}) = S(S^{-1}AS)S^{-1} \\ &= SBS^{-1} \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} A^n &= \underbrace{(SBS^{-1})(SBS^{-1}) \dots (SBS^{-1})(SBS^{-1})}_{n \text{ volte}} \\ &= SB \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} B \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} \dots \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} B \underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n} BS^{-1} \\ &= SB^n S^{-1} \end{aligned}$$

4. $\det A = \det B \stackrel{4.10}{=} \lambda_1, \dots, \lambda_n$

Osserviamo:

$$B^n = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{n \text{ volte}}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Quindi } A = SB^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix} S^{-1} \quad \square$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A^6 = SD^6S^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 64 & 64 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 66 & 63 & 63 \\ 63 & 66 & 63 \\ 63 & 63 & 66 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10.2 Teorema

Una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile \iff esiste una base di \mathbb{K}^n formata da autovettori di A .

10.2.1 Dimostrazione

(\Leftarrow) Se esiste una base di autovettori, allora abbiamo dimostrato in 9.7 che A è diagonalizzabile.

(\Rightarrow) Supponiamo che $A = PDP^{-1}$ dove P è una matrice invertibile e diagonale. $P = (v_1, \dots, v_n)$ dove $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ sono le colonne di P .

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Allora } AP = (PDP^{-1})P = (PD) \underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n} = PD.$$

$$AP = A(v_1 \dots v_n) = (Av_1 \dots Av_n)$$

$$PD = (v_1 \dots v_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \dots \lambda_n v_n)$$

Allora $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2 \dots Av_n = \lambda_n v_n$. Siccome $v_i \neq 0$ per ogni $1 \leq i \leq n$ perché la matrice è invertibile. Dunque $v_1 \dots v_n$ sono tutti autovettori di A rispetto agli autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_n$.

Siccome P è invertibile, il rango di P è uguale a n (per il teorema delle matrici invertibili). Per 8.3, le colonne di P sono linearmente indipendenti. Per 6.12 $\{v_1 \dots v_n\}$ è un insieme di generatori, cioè \mathcal{B} è una base. \square

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

A ha autovalori $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

10.3 Corollario

Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ possiede n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

10.3.1 Dimostrazione (10.2 + 9.8 + 6.12) \square

10.4 Osservazione

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, ma gli autovalori sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ (abbiamo solo **due** autovalori distinti) (la molteplicità algebrica di λ_2 è uguale a $n_2 = 2$).

La condizione di 10.3 è sufficiente ma non è necessaria.

Esempio:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_M = \det(M - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2$$

Autovalore: $\lambda_1 = 1, n_1 = 2$.

$$\begin{aligned} E_m(\lambda_i) &= E_m(1) = N \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Gli insiemi di autovettori linearmente indipendenti $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, t \neq 0$. Quindi non esiste una base di \mathbb{R}^2 formata di autovettori di M perché ogni base contiene due vettori. Per 10.2 la matrice non è diagonalizzabile.

10.5 Lemma

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ con autovalori distinti $\lambda_1 \dots \lambda_r$ con molteplicità algebriche $n_1 \dots n_r$ e molteplicità geometriche $d_1 \dots d_r$.

1. $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$
2. $1 \leq d_i \leq n_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$

10.5.1 Dimostrazione

$$p_A = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

Quindi

$$n = n_1 + \dots + n_r \quad \square$$

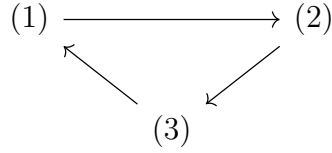
10.6 Teorema

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ con autovalori distinti $\lambda_1 \dots \lambda_r$ molteplicità algebriche $n_1 \dots n_r$ e molteplicità geometriche $d_1 \dots d_r$

I seguenti enunciati sono equivalenti:

- (1) A è diagonalizzabile
- (2) $d_1 + \dots + d_r = n$
- (3) $n_i = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$

10.6.1 Dimostrazione



[(1) \rightarrow (2)] Supponiamo che A sia diagonalizzabile. Per 10.2, esiste una base \mathcal{B} di \mathbb{K}^n formata da autovettori di A .

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)}_{E_A(\lambda_i)}, \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)_{\mathbb{K}^n} \quad t_i = \#(\mathcal{B} \cap E_A(\lambda_i))$$

$$t_i = \#(\mathcal{B} \cap E_A(\lambda_i)) = \text{numero di elementi di } \mathcal{B} \text{ contenuti in } E_A(\lambda_i)$$

NB:

$$E_A(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K}^n = N(A - \lambda_i I_n) = \{\text{autovettori di } A \text{ rispetto a } \lambda_i\} \cup 0v$$

Allora $t_i \leq d_i = \dim_{\mathbb{C}} E_A(\lambda_i)$ perché gli elementi di \mathcal{B} sono linearmente indipendenti. Inoltre

$$n = t_1 + t_2 + \dots + t_r \leq d_1 + \dots + d_r \underbrace{\leq}_{10.5} n_1 + \dots + n_r = n$$

Dunque

$$n = d_1 + \dots + d_r$$

[(2) \rightarrow (3)] Supponiamo (2) cioè

$$d_1 + \dots + d_r = n \stackrel{10.5}{=} n_1 + \dots + n_r$$

Siccome $1 \leq d_i \leq n_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$, concludiamo che $d_i = n_i$

[(3) \rightarrow (1)] Supponiamo che $n_i = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$. Per ogni $1 \leq i \leq r$, scegliamo una base $\mathcal{B}_i = \{v_1, \dots, v_{d_i}\}$ di $E_A(\lambda_i)$

$$\underbrace{\left(E_A(\lambda_1)\right)}_{E_A(\lambda_i)}, \left(E_A(\lambda_2)\right), \dots, \left(E_A(\lambda_i)\right)_{\mathbb{K}^n}$$

Mostreremo che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \dots \cup \mathcal{B}_r$

Perché \mathcal{B} contiene esattamente

$$d_1 + d_2 + \dots + d_r = n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$$

elementi, basta verificare indipendenza lineare.

$$0v = \underbrace{\alpha_{11}v_{11} + \dots + \alpha_{1d_1}v_{1d_1}}_{w_1} + \underbrace{\alpha_{21}v_{21} + \dots + \alpha_{2d_2}v_{2d_2}}_{w_2} + \dots \\ \dots \underbrace{\alpha_{r1}v_{r1} + \dots + \alpha_{rd_r}v_{rd_r}}_{w_r}$$

Vogliamo dimostrare che $a_{ij} = 0$ per ogni $1 \leq i \leq r$ e ogni $1 \leq j \leq d_i$.

Definiamo $w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \dots + \alpha_{id_i}v_{id_i}$ per ogni $1 \leq i \leq r$ e notiamo $w_i \in E_A(\lambda_i)$.

Quindi w_i è un autovettore di A rispetto a λ_i oppure $w_i = 0$. Quindi

$$0 = w_1 + w_2 + \dots + w_r$$

una combinazione lineare di autovettori rispetto a autovalori distinti. Per 9.8, autovettori rispetto ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Dunque $w_1 = w_2 = \dots = w_r = 0$. Allora, per ogni $1 \leq i \leq r$, abbiamo

$$0 = w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \dots + \alpha_{id_i}v_{id_i}$$

Poiché $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, \dots, v_{id_i}\}$ è una base, concludiamo che $\alpha_{i1} = \dots = \alpha_{id_i} = 0$. Dunque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ è linearmente indipendente con n elementi e quindi è una base di \mathbb{C}^n \square

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2} \in (\mathbb{C})$$

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P_A &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda)^2 - (-1) \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

Autovalori: $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. Molteplicità algebrica: $n_1 = 1, n_2 = 1$
Molteplicità geometrica: (lemma 10.5)

$$d_i = \dim_{\mathbb{C}} E_A(\lambda_i)$$

$$1 \leq d_1 \leq n_1 = 1 \rightarrow d_1 = 1$$

$$1 \leq d_2 \leq n_2 = 1 \rightarrow d_2 = 1$$

Allora $n_1 = d_1$ e $n_2 = d_2$, quindi A è diagonalizzabile.

Abbiamo $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ la matrice diagonale. Nella dimostrazione, abbiamo visto che $P = (v_1, v_2)$ dove $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $E_A(\lambda_i)$. Calcoliamo \mathcal{B}_1 e \mathcal{B}_2 :

$$E_A(\lambda_1) = N \left(\begin{pmatrix} 0 - \lambda_1 & -1 \\ 1 & 0 - \lambda_1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Risolviamo

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} &\xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21(i)}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - ix_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = it \\ x_2 = t \end{cases} \end{aligned}$$

$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_A(\lambda_1)$

Risolviamo ora per λ_2

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-i)} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + ix_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -it \\ x_2 = t \end{cases}$$

$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_A(\lambda_2)$

Dunque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo $\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} i & -i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

10.7 Algoritmo per la diagonalizzazione

Data una matrice quadrata di $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

(1) Calcoliamo il polinomio caratteristico $P_A = \det(A - \lambda I_n)$ e determiniamo gli zeri distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ con molteplicità algebrica n_1, \dots, n_r , ovvero $P_A = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$

(2) Per ciascuno $1 \leq i \leq r$ calcoliamo la molteplicità geometrica

$$d_i = \dim_{\mathbb{C}} E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_n) = n - rk(A - \lambda_i I_n)$$

(3) Verifichiamo se $n_i = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$ (oppure se $d_1 + \dots + d_r = n$)

- (4) In caso positivo determiniamo una base di $E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_n)$ (usando 8.5) per ogni $1 \leq i \leq r$.
- (5) L'unione delle basi da luogo ad una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ di \mathbb{C}^n composta da autovettori di A .
- (6) Ponendo $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e D la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Su cui diagonale abbiamo autovalori $\lambda_1 \dots, \lambda_r$ con le loro molteplicità.

- (7) Calcoliamo P^{-1} usando 4.2 oppure 4.14
- (8) Otteniamo $D = P^{-1}AP$

10.8 Osservazione

Sia A una matrice su \mathbb{R} . Se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} . Infatti in tal caso la matrice $(A - \lambda_i I_n)$ sono tutte matrici su \mathbb{R} e possiamo risolvere i sistemi lineari $(A - \lambda_i I_n)x = 0$ su \mathbb{R} ottenendo una base di \mathbb{R}^n composta di autovettori di A e $P, D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

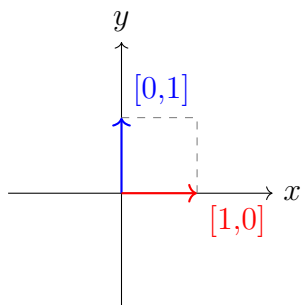
10.9 Teorema spettrale

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica cioè $A = A^t \left(Es : \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \right)$. Allora tutti gli autovalori di A sono reali e A è diagonalizzabile su \mathbb{R} .

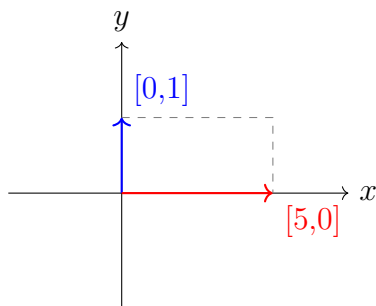
11 Basi ortonormali

Esempio:

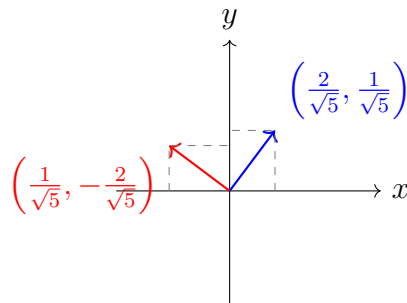
$$V = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B}_{can} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right\}$$



Nota bene: Per ogni $b_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, abbiamo che:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

11.1 Prodotto interno

Sia $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. La matrice *coniugata* \bar{A} di $A = (a_{ij})$ è la matrice $\bar{A} = (\overline{a_{ij}})$. La matrice $A^H = \bar{A}^t = \bar{A}^t$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 \\ 2+i & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 2-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ -i & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, il prodotto:

$$(v \mid w) = v^H w = (\bar{v}_1 \quad \dots \quad \bar{v}_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i w_i$$

è detto prodotto interno (standard) in \mathbb{K}^n .

Valgono le seguenti priorità per $v, w, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

i. $(v \mid w) = \overline{(w \mid v)}$

ii. $(v \mid \alpha w + \beta z) = \alpha(v \mid w) + \beta(v \mid z)$, in particolare, possiamo definire:

$$f_v : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}, f_v(w) = (v \mid w)$$

dove f_v è un applicazione lineare.

iii. $(\alpha v + \beta w \mid z) = \overline{\alpha}(v \mid z) + \overline{\beta}(w \mid z)$

iv. Se $v \neq 0$, allora

$$(v \mid v) = v^H v = \overline{v_1}v_1 + \cdots + \overline{v_n}v_n = |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 \in \mathbb{R} > 0$$

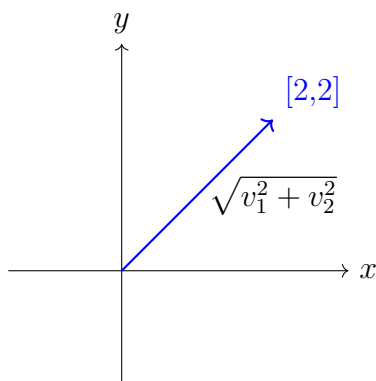
v. in generale, se v e $w \in \mathbb{R}^n$ allora:

$$(v \mid w) \in \mathbb{R}$$

11.2 Norma euclidea

Esempio:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



$$(v | v) = v_1^2 + v_2^2$$

$$\sqrt{(v | v)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

è la lunghezza di v .

Sia $v \in \mathbb{K}^n$. Il numero reale $\|v\| = \sqrt{(v | v)} \in \mathbb{R} > 0$ è detta *norma euclidea* di v . Valgono le seguenti proprietà per $v, w, \in \mathbb{K}^n, \alpha \in \mathbb{K}^n$:

- i. $\|\alpha v\| = \sqrt{(\alpha v | \alpha v)} = |\alpha| \|v\|$
- ii. Se $v \neq 0$, allora $\|v\| > 0$
- iii. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, detta disuguaglianza triangolare.

11.3 Interpretazione geometrica del prodotto interno di \mathbb{R}^2

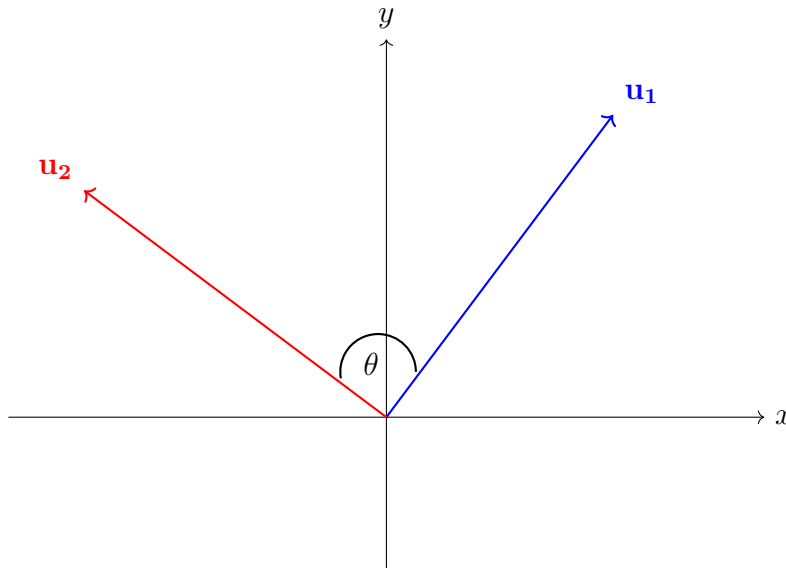


Figure 4: Vectors \mathbf{u}_1 and \mathbf{u}_2 with angle θ between them

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

L'angolo tra v e w . Vale la formula:

$$(v \mid w) = \|v\| \|w\| \cos \theta$$

Si ottiene la formula per calcolare l'angolo θ :

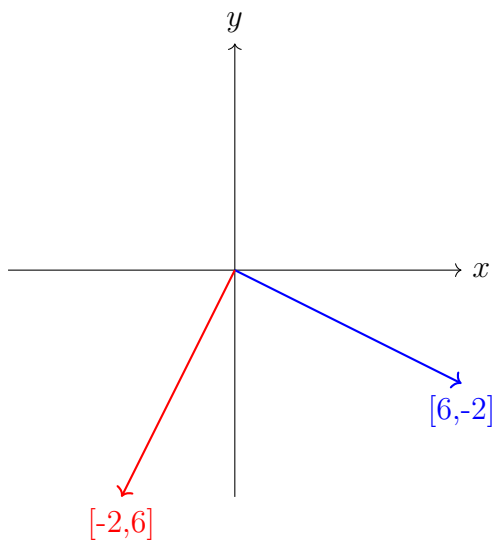
$$\cos \theta = \frac{(v \mid w)}{\|v\| \|w\|}$$

11.4 Definizione

Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali* se $(v \mid w) = 0$. Un'insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_r\}$ è detto *ortogonale* se $(v_i \mid v_j) = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq r$ con $i \neq j$.

Esempi:

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}}_v, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}}_w \right\}$$



$$(v \mid w) = 6 \cdot -2 + (-2) \cdot (-6) = 0$$

11.5 Proposizione

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme ortogonale di vettori non nulli di \mathbb{K}^n . Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente.

11.5.1 Dimostrazione

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ per ogni $1 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} 0 &= (v_k \mid 0) = (v_k \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 (v_k \mid v_1) + \dots + \alpha_n (v_k \mid v_n) = \alpha_k \underbrace{(v_k \mid v_k)}_{\neq 0} \end{aligned}$$

Concludiamo che $0 = \alpha_k$ (dividendo per $(v_k \mid v_k)$)

Dunque $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente.

Esempio:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è ortogonale e quindi è linearmente indipendente. Siccome $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, abbiamo una base ortogonale di \mathbb{R}^3 .

11.6 Osservazione

Sia $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$ una base ortogonale di \mathbb{K}^n e sia $u \in \mathbb{K}^n$. Allora $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ e

$$\begin{aligned} (v_k \mid u) &= (v_k \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \\ &= \alpha_1 (v_k \mid v_1) + \dots + \alpha_n (v_k \mid v_n) = \alpha_k (v_k \mid v_k) \end{aligned}$$

Quindi

$$\alpha_k = \frac{(v_k \mid u)}{(v_k \mid v_k)}$$

per ogni $1 \leq k \leq n$.

Esempio:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme ortogonale quindi è una base di \mathbb{C}^2 . Esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tali che $u = \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Per 11.6 abbiamo che

$$\alpha_1 = \frac{(v_1 | u)}{(v_1 | v_1)}$$

e

$$\alpha_2 = \frac{(v_2 | u)}{(v_2 | v_2)}$$

$$(v_1 | u) = (\bar{i} \quad \bar{1}) \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = -2i + 5 - 7i = 5 - 9i$$

$$(v_1 | v_1) = (-i \quad 1) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$(v_2 | u) = (\bar{i}-1) \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = -2i + 5 + 7i = 5 + 5i$$

$$(v_2 | v_2) = (-i \quad -1) \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Dunque $\alpha_1 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i$ e $\alpha_2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$.

11.7 Definizione

Un insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ ortogonale tale che $\|v_i\| = 1$ per ogni $1 \leq i \leq n$ è detto **ortonormale**.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di \mathbb{K}^n e $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathbb{K}^n$, allora $\alpha_k = (v_k | u)$ per ogni $1 \leq k \leq n$.

NB

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{e_1}_{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \dots, \underbrace{e_n}_{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}} \right\} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$(e_k | u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_k$$

Per ogni $u \in \mathbb{K}^n$, la combinazione lineare di \mathcal{B}_{can} uguale a u è data da:

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_k e_k + \dots + u_n e_n$$

Esempio:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{v_1 | v_1} = \sqrt{2}, \|v_2\| = \sqrt{2}$$

$$\overset{\text{Normalizzazione}}{\rightsquigarrow} \mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \right\}$$

NB

$$\|u_i\| = \left\| \frac{1}{\|v_i\|} v_i \right\| \stackrel{11.2}{=} \frac{1}{\|v_i\|} \|v_i\| = 1$$

$$\begin{aligned} \rightarrow (u_1 | u_2) &= \left(\frac{1}{\|v_1\|} v_1 \mid \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \right) \stackrel{11.10}{=} \frac{1}{\|v_2\|} \left(\frac{1}{\|v_1\|} v_1 \mid v_2 \right) = \\ &= \frac{1}{\|v_1\|} \frac{1}{\|v_2\|} (v_1 | v_2) = 0 \\ &\dots (u_1 | u_2) = 0 \end{aligned}$$

Dunque \mathcal{B}' è una base ortonormale.

11.8 Algoritmo di Gram-Schmidt per l'ortonormalizzazione

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di un sottospazio U di \mathbb{K}^n .

Poniamo:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \alpha_{12} u_1$$

dove

$$\alpha_{12} = \frac{(u_1 | v_2)}{(u_1 | u_1)} = \frac{(u_1 | v_2)}{\|u_1\|^2}$$

$$(u_1 | u_2) = (v_1 | v_2 - \alpha_{12} v_1) = (v_1 | v_2) - \alpha_{12} (v_1 | v_1) =$$

$$\begin{aligned}
(v_1 | v_2) &= \frac{(v_1 | v_2)}{(v_1 | v_1)} (v_1 | v_1) \\
&= (v_1 | v_2) = (v_1 | v_2) - (v_1 | v_2) \frac{(v_1 | v_1)}{(v_1 | v_1)} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u_2 | u_1) &= (v_2 - \alpha_{12}v_1 | v_1) = \\
&= (v_2 | v_1) - \overline{\alpha_{12}}(v_1 | v_1) = \\
&= (v_2 | v_1) - \frac{(v_1 | v_2)}{(v_1 | v_1)} (v_1 | v_1) = \\
&= (v_2 | v_1) - \overline{(v_1 | v_2)} \frac{(v_1 | v_1)}{(v_1 | v_1)} = \\
&= (v_2 | v_1) - \overline{(v_1 | v_2)} \stackrel{11.1}{=} 0
\end{aligned}$$

$\dots u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik} u_i$ dove

$$\alpha_{ik} = \frac{(u_i | v_i)}{(u_i | u_i)}$$

Allora $\{u_1, \dots, u_n\}$ è un insieme di generatori ortogonali di U . Normalizzando i vettori, ovvero ponendo

$$u'_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

otteniamo un insieme di generatori ortonormale $\{u'_1, \dots, u'_n\}$ di U .

11.9 Corollario

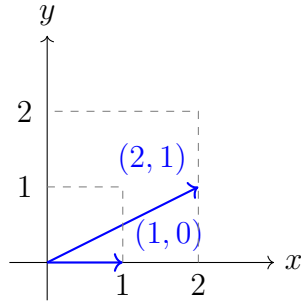
Ogni sottospazio di U di \mathbb{K}^n possiede una base **ortonormale**.

11.9.1 Dimostrazione

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di U . Allora l'insieme di generatori di ortonormale ottenuto con l'algoritmo di Gram-Schmidt è una base ortonormale di U per 11.5. \square

Esempio di ortonormalizzazione:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\|v_1\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\alpha_{12} = \frac{(v_1 | v_2)}{(v_1 | v_1)} = \frac{2}{5}$$

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \alpha_{12}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(v_1 | v_2)}{(v_1 | v_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$(u_1 | u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

è una *base ortogonale*.

Normalizzando otteniamo:

$$u'_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(u_2 | u_2)} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$u'_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Dunque $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^2

