Fondamenti di Informatica

Università di Verona
Imbriani Paolo - VR500437
Professor Isabella Mastroeni

November 4, 2025

Contents

1 Cosa è l'informatica?

La domanda chiave di questo corso è: *"Cosa è l'informatica?"*. Ci sono diversi definizioni a seconda del contesto, ma in generale l'informatica è lo studio dei processi che trasformano l'informazione. Possiamo vedere, storicamente, diverse definizioni come quella in inglese come "Computer Science" che vede l'informatica come studio della calcolabilità, della computazione e dell'informazione.

1.1 Perché la calcolabilità

Si studia la calcolabilità perché ci aiuta a capire cosa possiamo fare con gli strumenti che abbiamo. Quando descriviamo un programma, quanto tempo ci mette e quanto spazio utilizza è una domanda importante per capire se il programma è efficiente o meno. Anche in senso dei linguaggi di programmazione per capire se usiamo quello giusto per il problema che stiamo cercando di risolvere. Chiaramente è un qualcosa che in continuo sviluppo perché si evolve in base alla tecnologia che abbiamo a disposizione.

Uno dei pionieri è stato **Hilbert** che si chiedeva se la matematica fosse formalizzabile come insieme finito (non contraddittorio) di assiomi? Godel dimostrò che non è possibile rappresentare la matematica come un insieme finito di assiomi in maniera non contradditoria, dicendo che in ogni sistema formale ci sono proposizioni vere che non possono essere dimostrate all'interno del sistema.

Nel tentativo di rispondere a queste (ed altre) domande si è costruito un modello che permette di comprendere profondamente ilr agionamento computazionale, permettendo di applicarlo ad ogni disciplina. Cosa è calcolabile e cosa non lo è?

1.1.1 Macchina di Turing

Anche Turing si pose questa domanda e propose la **Macchina di Turing** come modello di calcolo. Una sola macchina (programmabile) per tutti i problemi. La macchina è universale (interprete):

$$Init(P,x) = \begin{cases} P(x) & \text{se } P \text{ è un programma che termina} \\ \uparrow & \text{se } P \text{ è un programma che non termina} \end{cases}$$

Se un problema è intuitivamente calcolabile, allora esisterà una macchina di Turing (o un dispostivo equivalente, come il computer) in grado di risolverlo, cioè calcolarlo. I modelli equivalenti possono essere:

- Lambda calcolo
- Funzioni ricorsive

- Linguaggi di programmazione (Turing completi)

I problemi non calcolabili sono infinitamente più numerosi di quelli calcolabili.

1.1.2 Limiti dell'informatica

L'informatica ha più limiti di quanto si possa pensare, definiti dall'equivalenza di Turing e l'incompletezza di Godel che ci dicono che non possiamo risolvere tutti i problemi. Ci sono anche limiti fisici e tecnologici come:

- Dati non osservabili (teorema di Shannon)
- Dati non controllabili (velocità della luce)

1.2 Basi di logica

Alcune nozioni di logica che ci serviranno in seguito:

- **Linguaggio del primo ordine:**
  - Simboli relazionali $(p, q, ...)$
  - Simboli di funzione $(f, g, ...)$
  - Simboli di costante $(c, d, ...)$
- **Simboli logici:**
  - Parentesi (,) e virgola
  - Insieme numerabile di variabili $(v, x, ...)$
  - Connettivi logici $(\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow)$
  - Quantificatori $(\forall, \exists)$
- **Termini:**
  - Variabili
  - Costanti
  - f simbolo di funzione m-ario $t_1, t_2, \ldots, t_m$ termini, allora $f(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ è un termine.
- **Formula atomica:** p simbolo di relazione n-ario, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termini, allora $p(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ è una formula atomica.
- **Formula:**
  - Formula atomica
  - ϕ formula, allora $\neg\phi$ è una formula
  - ϕ e ψ formule, allora $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ sono formule.
  - ϕ formula e v variabile, alloar e $\forall v.\phi$ e $\exists v.\phi$ sono formule.

1.3 Nozioni sugli insiemi

- $x \in A$ signfiica che x è un elemento dell'insieme A
- $\{x|P(x)\}$ si identifica insieme costuito dagli x che soddisfano la proprietà (o predicato) $P(x)$
- $A \subseteq B$ significa che A è un sottoinsieme di B se ogni elemento di A è anche in B
- $\mathcal{P}(S)$ denota l'insieme delle parti di S, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S ($\mathcal{P}(S) = \{X|X \subseteq S\}$)
- $A \backslash B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}, A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}, A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$
- $|A|$ denota la cardinalità di A, ovvero il numero di elementi in A.
- $\bar{A}$ denota il complemento di A, ovvero $x \bar{\in} A \leftrightarrow x \notin A$

1.4 Nozioni sulle relazioni

- Prodotto cartesiano: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle | a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$
- Una **RELAZIONE** (binaria) è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di (due) insiemi; dati A e B, $R \subseteq A \times B$ è una relazione su A e B
  - **Riflessiva:** $\forall a \in S$ si ha che aRa
  - **Simmetrica:** $\forall a, b \in S$ se aRb allora bRa
  - **Antisimmetrica:** $\forall a, b \in S$ se aRb e bRa allora $a = b$
  - **Transitiva:** $\forall a, b, c \in S$ se aRb e bRc allora aRc
- Per ogni relazione $R \subseteq S \times S$ la chiusura transitiva di R è il più piccolo insieme R^* tale che $\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in R \rightarrow \langle a, c\rangle \in R^*$
- Una relazione è detta **totale** su S se $\forall a, b \in S$ si ha che $aRb \vee bRa$
- Una relazione R di *di equivalenza* è una relazione binaria riflessiva, simmetrica e transitiva.
- Una relazione binaria $R \subseteq S \times S$ è un **pre-ordine** se è riflessiva e transitiva.
- R è un ordine parziale se è un pre-ordine antisimmetrico.
- $x \in S$ è **minimale** rispetto a R se $\forall y \in S.y \not R x$ (ovvero $\neg(yRx)$)
- $x \in S$ è **minimo** rispetto a R se $\forall y \in S.xRy$
- $x \in S$ è **massimale** rispetto a R se $\forall y \in S.x \not R y$ (ovvero $\neg(xRy)$)
- $x \in S$ è **massimo** rispetto a R se $\forall y \in S.yRx$

1.5 Nozioni sulle funzioni

- Una relazione f è una **funzione** se $\forall a \in A$ esiste uno ed un solo $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$
- A dominio e B codominio di f. Il range di f è l'insieme di tutti i valori che f può assumere.
- f è **iniettiva** se $\forall a_1, a_2 \in A$ se $a_1 \neq a_2$ allora $f(a_1) \neq f(a_2)$
- Se $f : A \mapsto B$ è sia iniettiva che suriettiva allora è **biiettiva** e quindi esiste $f^{-1} : B \mapsto A$

2 Funzioni calcolabili

Un insieme è a tutti gli effetti una proprietà che dato un oggetto stabilisce se esso all'interno di insieme o no.

$$\text{Problemi} \equiv \text{Funzioni} \quad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Ci chiediamo se questa funzioni siano tutte calcolabili (intuitivamente). Da il teorema che abbiamo citato nei precedenti paragrafi (quello dell'incompletezza) sappiamo che non è così. Cerchiamo di vedere insiemisticamente perché questo è giustificato.

Definizione 2.1: Intuitivamente Calcolabile

Qualcosa che è **intuitivamente calcolabile** è qualcosa è che riusciamo a descrivere attraverso un algoritmo, ovvero una sequenza finita di passi discreti elementari.

La funzione di tipo:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

è un **insieme** di associazioni input-output.

Esempio 2.1

$$\begin{aligned} f = \text{quadrato} &= \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,16), ...\} \\ &= \{(x, x^2) \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Quindi f è un insieme di coppie in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Quindi $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$ (cardinalità di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ Quindi

$$f \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \mathbb{P}(\mathbb{N})$$

Per esempio se:

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ allora } \mathbb{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$$

dove $|\mathbb{P}(A)| = 2^{|A|}$.

$$|\mathbb{N}| = \omega < |P(\mathbb{N})|) = |\mathbb{R}|$$

e quindi l'insieme delle funzioni **non è numerabile**.

2.1 Quale funzioni numerabili ci sono?

Σ =alfabeto finito di simboli che uso per il programma/algoritmo

$$\Sigma = s_1, s_2, s_3, \dots$$

quindi un programma non è nient'altro che un sottoinsieme finito di Σ^* (tutte le stringhe finite che posso formare con l'alfabeto).

$$\Sigma = a, b, c$$

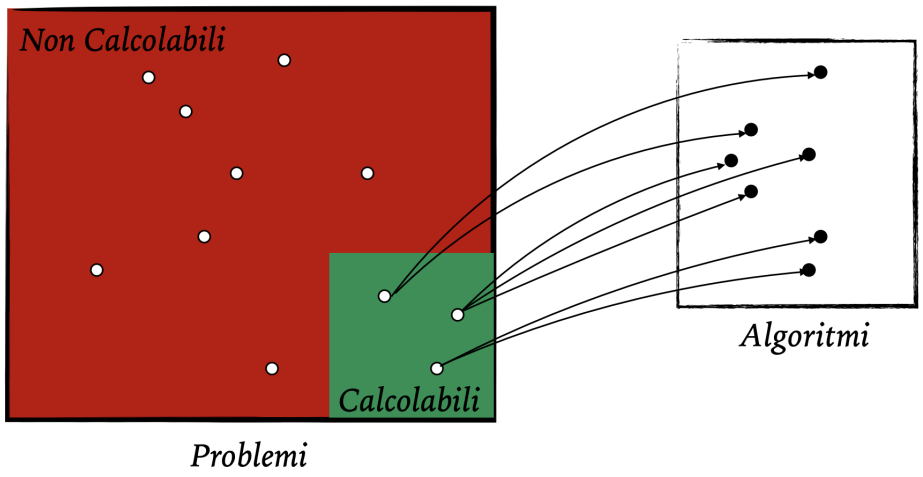
$$\Sigma^* = \{\emptyset, a, b, c, ab, ba, ac, cd, bc, cb, \dots\}$$

in questo caso, la sequenza di simboli in Σ^* è numerabile, perché

$$|\Sigma^*| = |\mathbb{N}|$$

$$|\text{Programmi in } \mathbb{N}| = |\Sigma^*| = |\mathbb{N}|$$

e di conseguenza l'insieme dei programmi è numerabile. Una veloce constatazione che possiamo fare è vedere quindi che l'insieme delle funzioni calcolabili è numerabile, perché ogni funzione calcolabile è associata ad almeno un programma che la calcola.



3 Principio di induzione

Il principio di induzione ha senso solo su insieme infiniti e serve per dimostrare che una proprietà vale per tutti gli elementi. Esistono due metodi di induzione:

- Induzione matematica
- Induzione strutturale

Tratteremo nello specifico caso in questo corso **l'induzione matematica.** Partiamo da un insieme A infinito con una relazione $< : (A, <)$ è una relazione d'ordine non riflessiva perché non è minore stretto. Utilizziamo l'induzione matematica e quindi $A = \mathbb{N}$ e $<$ è l'ordinamento stretto tra numeri. Una relazione d'ordine deve essere *ben fondata* vuol dire che non esistono catene discendenti infinite. Una catena discendente è una sequenza infinita di elementi

$$a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

In un tipo di relazione riflessiva è sicuramente non ben fondata perché posso fare continuare ad inserire lo stesso numero all'infinito.

$$m \text{ minimale in } A \ : \ b \in A \text{ è minimale se } \forall b' < b . b' \notin A$$

Esempio 3.1

Se prendiamo $\{1, 2, 3\}$ con relazione d'ordine di contenimento allora esistono più minimali come $\{1, 2\}$ o $\{2, 3\}$. Quindi se $A = \mathbb{N} \implies \exists b$ minimo $\forall x \subseteq \mathbb{N}$.

Quindi preso A insieme ben fondato con ordinamento $<$ allora: π proprietà definita sugli elementi di

$$A : \pi \subseteq A \text{ allora } \forall a \in A . \pi(a) \iff \forall a \in A . [[\forall b < a . \pi(b)] \to \pi(a)]$$

Se dimostriamo π per ogni elemento più piccolo di a allora π vale per a.

$$Base_A = \{a \in A | a \text{ minimale}\}$$

Quindi

$$\overbrace{\forall A \in Base_A \ . \ \pi(a)}^{\text{Base}} \ \underbrace{\forall a \in A . Base_A}_{\text{passo induttivo}} . \ \overbrace{\forall b < a . \pi(b)}^{\text{ipotesi induttiva}} \ \to \underbrace{\pi(a)}_{\text{tesi}}$$

Esempio 3.2

Prendiamo come esempio il seguente enunciato:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Base: $n = 1$

$$A = \mathbb{N}\backslash\{0\} \;\; Base_A = \{1\} \rightarrow \sum_{i=1}^{1} i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$
$$= n(n+1)/2$$
$$= \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

Caso base dimostrato.

Passo induttivo: prendo $n \in \mathbb{N}$ e applico l'ipotesi induttiva: per ogni $k < n$ vale la tesi.

$$\text{Tesi da dimostrare: } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n$$

Sappiamo sicuramente che $n - 1 < n$ e per ipotesi induttiva:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i + n = \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} + n = \frac{n(n-1)}{2} + n =$$

$$\frac{n(n-1) + 2n}{2} = \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \quad \square$$

e quindi la tesi vale perché siamo arrivati alla stessa espressione che volevamo dimostrare.

3.1 Linguaggi formali

Definizione 3.1: Linguaggio formale

Un linguaggio formale è un insieme di stringhe composte da simboli in un alfabeto finito Σ.

Σ^* denota il linguaggio di tutte le stringhe dell'alfabeto Σ, se Σ non è vuota allora Σ^* è infinito e numerabile. Solitamente un linguaggio formale $\mathcal{L}$ è un sottoinsieme di Σ^* tipicamente infiniti ma non è necessario:

$$\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$$

I linguaggi finiti sono sicuramente regolari perché *posso sempre costruire un automa a stati finiti* che li riconosce.

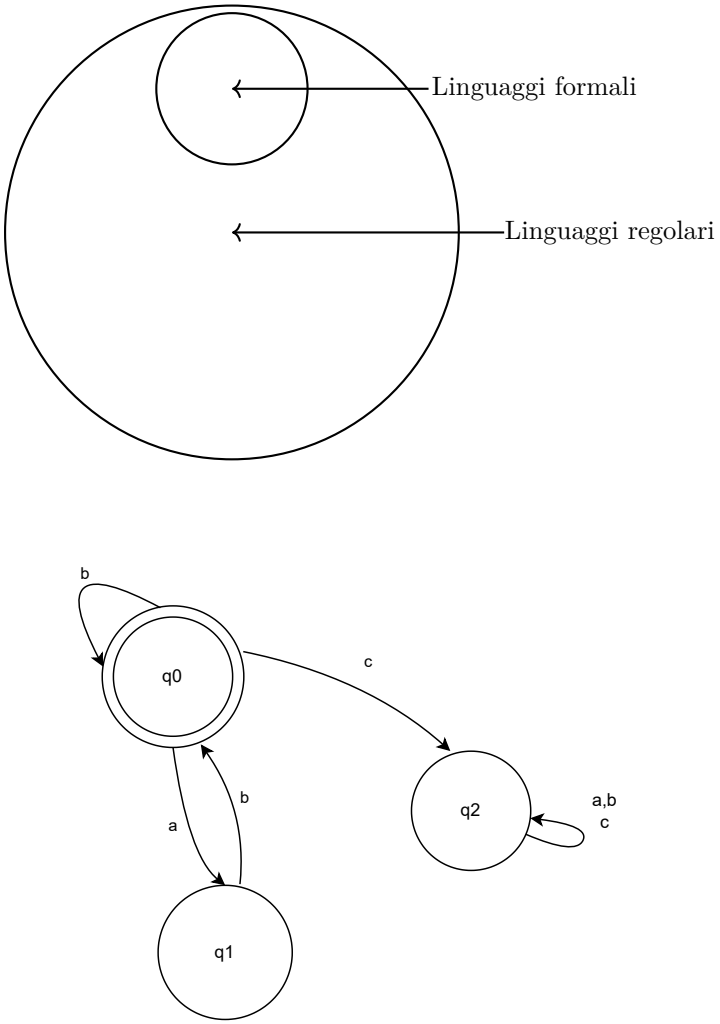


Figure 1: Esempio di automa a stati finiti

Come abbiamo detto in precedenza, una funzione è *calcolabile* se possiamo pensare ad un algoritmo per calcolarla. Tra le funzioni calcolabili, ci sono quelle totali, ovvero quelle che terminano per ogni input.

Esempio 3.3

Pensiamo ad una funzione $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la possiamo descrivere come associazione di coppie:

$$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 8, \ldots$$

Tuttavia servirebbe scrivere una quantità infinita di coppie per descrivere la funzione.

Quindi proviamo a farlo ma stavolta ricorsivamente.

$$\begin{cases} f(0) = 1 = f(1) \\ f(x+2) = f(x+1) + f(x) \end{cases}$$

3.2 Funzioni e insiemi

In realtà ci sta un forte legame tra funzioni e insiemi perché per esempio dovessimo prendere una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, questa funzione può essere vista come un linguaggio $L_f = \{1^{f(x)} | x \in \mathbb{N}\}$ che è l'insieme delle stringhe composte da $f(x)$ simboli 1. Il nostro linguaggio $\Sigma = \{1\}$ e quindi il linguaggio è un sottoinsieme di Σ^*. Il nostro linguaggio ci può dire se un oggetto in input fa parte o no dell'insieme. Parliamo di **insiemi** invece che di funzioni dove gli elementi dell'insieme dipendono dal calcolo della funzione.

Esempio 3.4

Se io dovessi scrivere una funzione costante del tipo $f(x) = 2$. In questo caso riconosciamo che il linguaggio L_f è finito perché

$$L_f = \{1\}$$

L'unica combinazione possibile è una singola stringa. Il linguaggio si dice finito che è sottoinsieme di linguaggi totali.

Esempio 3.5

In questo caso la funzione $f(x) = 2x$ è una funzione lineare. Ho bisogno di una memoria finita. Mi sposto tra queste informazioni per determinare se la stringa in input fa parte o no del linguaggio. Questa funzione è anche detta **regolare**.

Esempio 3.6

$f(\sigma) = \sigma_{\text{reverse}}$ quindi per esempio:

$$f(abc) = cba$$

Tuttavia per questa funzione non mi basta più una memoria finita ma illimitata essendo che non posso sapere a priori quanta memoria abbia bisogno la funzione (è sufficiente uno stack). Questo tipo di funzione è detta anche **context free**.

Esempio 3.7

Nel caso di $f(x) = x^2$ sappiamo sicuramente che possiede un output preciso ma avrei bisogno di una memoria illimitata per rappresentarla.

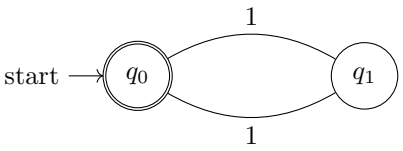
4 Linguaggi Regolari

4.1 Automa a stati finiti determinsitici (DFA)

Quando parliamo di memoria è facilmente codificabile in termini di stati. Dal punto di vista grafico possiamo rappresentarli come nodi collegati da archi. Prendiamo per esempio il linguaggio L_f di prima:

$$L_f = \{1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$\Sigma = 1$$



Definizione 4.1: Automa a stati finiti

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

è un automa a stati finiti deterministico dove:

- Q è un insieme finito di stati (ogni stato rappresenta "un informazione")
- Σ è un alfabeto finito di simboli
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ è la funzione di transizione (descrive come evolve il calcolo a partire dallo stato raggiunto e dal simbolo letto)
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di stati finali (o di accettazione)

$\Sigma \backslash Q$	q_0	q_1
1	q_1	q_0

Ci sta poi la funzione $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ che estende la funzione di transizione e descrive lo stato

che raggiungiamo leggendo una sequenza di simboli.

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \epsilon) = q \\ \hat{\delta}(q, wa) = \hat{\delta}(\delta(q, w), a) \end{cases} \qquad w \in \Sigma^*, a \in \Sigma$$

anche chiamata chiusura transitiva di δ. Quindi mi permette di calcolare lo stato raggiunto leggendo una stringa di simboli.

4.2 Come si dimostra che un linguaggio è regolare?

Esempio 4.1

Prendiamo come esempio il linguaggio:

$$L = \{\sigma \mid \ \sigma \text{ contiene almeno due } 1\}$$

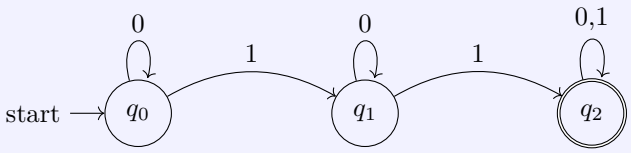
$$\Sigma = \{0, 1\}$$

Per esempio:

$$110, 101, 111, 011, 1001 \in L$$

$$0, 00, 000, 01, 10, 0000 \notin L$$

Quindi intuitivamente come possiamo definire l'automa?



Un linguaggio L è riconosciuto da M (Automa a stati finiti deterministico o DFA) se $L = L(M)$ dove $L(M)$ è il linguaggio di n definito come:

$$L(M) = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F\}$$

Sono tutte le stringhe che partendo da q_0 (stato iniziale) raggiunge uno stato finale.

Definizione 4.2

Per dimostrare che L è regolare dobbiamo costruire M (almeno un M) e dimostrare che $L(M) = L$.

$$L = L(M) \equiv L \subseteq L(M) \text{ e } L(M) \subseteq L$$

1.

$$L \subseteq L(M) \equiv \sigma. \in L \to \sigma \in L(M)$$

$$\sigma \in L \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$$

2.

$$L(M) \subseteq L \equiv \sigma \in L(M) \to \sigma \in L$$

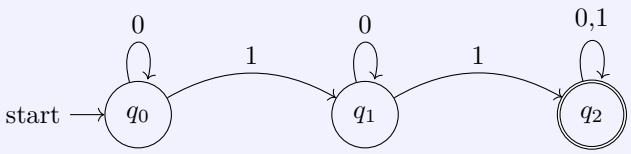
$$\hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F \to \sigma \in L \equiv$$

$$\sigma \notin L \to \hat{\delta}(q_0, \sigma) \notin F$$

Dimostriamo per induzione sulla lunghezza delle stringhe $\sigma \in \Sigma^*$ che se $\sigma \in L$ allora $\hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F$ e $\sigma \notin L$ allora $\hat{\delta}(q_0, \sigma) \notin F$.

Esempio 4.2

$$L = \{\sigma \mid \ \sigma \text{ contiene almeno due } 1\}$$



Dimostriamo per induzione sulla lunghezza delle stringhe $\sigma \in \Sigma^*$ che se $x \in L$ allora $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$ e se $x \notin L$ allora $\hat{\delta}(q_0, x) \notin F$.

$|\sigma| = 0$ non è **mai** sufficiente come base, ma è eventualmente la base **solo** per una delle due dimostrazioni. Bisogna quindi prendere la lunghezza più piccola che permette di avere sia $\sigma \in L$ che $\sigma \notin L$, in questo caso è $|\sigma| = 2$. Per ogni σ tale che $|\sigma| < 2 \quad \sigma \notin L$ perchè non può contenere due 1 e non è riconosciuta da M dove il primo stato finale è raggiunto leggendo almeno due simboli.

$$\varepsilon \in L \quad \varepsilon \notin L$$

- **Base**: Controlliamo ogni stringa di lungheezza minima nel linguaggio per provare il caso base

$$\begin{cases} \sigma & = 11 \in L \ \text{ e } \ \hat{\delta}(q_0, 11) = q_2 \in F \\ \sigma & = 10 \notin L \ \text{ e } \ \hat{\delta}(q_0, 10) = q_1 \notin F \\ \sigma & = 01 \notin L \ \text{ e } \ \hat{\delta}(q_0, 01) = q_1 \notin F \\ \sigma & = 00 \notin L \ \text{ e } \ \hat{\delta}(q_0, 00) = q_0 \notin F \end{cases}$$

- **Passo induttivo**: Dimostriamo l'**ipotesi induttiva**, cioè la tesi con un limite

fissato:

$$\forall \sigma \in \Sigma^* \ . \ |\sigma| \leq n \ . \ \begin{cases} \sigma \in L & \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F \\ \sigma \notin L & \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \notin F \end{cases}$$

Vogliamo dimostrare se $|\sigma| = n + 1$ (la successiva stringa che posso considerare) allora vale $\begin{cases} \sigma \in L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \in F \\ \sigma \notin L \Rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \notin F \end{cases}$

Dimostrazione:

$$|\sigma| = n + 1 \rightarrow \sigma = \sigma' 1 \ \vee \ \sigma = \sigma' 0$$

- Supponiamo che σ appartiene al linguaggio e termini con 1:

$$\sigma \in L \wedge \sigma = \sigma' 1 \rightarrow$$

  * Se $\sigma' \in L$ applico l'ipotesi induttiva:

$$\hat{\delta}(q_0, \sigma') = q_2$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q_0, \sigma) &\overset{\sigma = \sigma' 1}{=} \hat{\delta}(q_0, \sigma' 1) \\ &= \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 1) \\ &= \delta(q_2, 1) = q_2 \in F \end{aligned}$$

  * Se $\sigma' \notin L$ allora σ' contiene esattamente un 1:

$$\hat{\delta}(q_0, \sigma') = q_1$$

$$\hat{\delta}(q_0, \sigma' 1) = \delta(q_1, 1) = q_2$$

- Supponiamo che σ appartiene al linguaggio e termini con 0:

$$\sigma \in L \wedge \sigma = \sigma' 0$$

  Per definizione di L abbiamo che

$$\sigma \in L \wedge \sigma = \sigma' 0 \Rightarrow \sigma' \in L$$

  Dimostriamo l'ipotesi induttiva:

$$\hat{\delta}(q_0, \sigma') = q_2$$

allora

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(q_0, \sigma) &= \hat{\delta}(q_0, \sigma' 0) \\ &= \delta(\hat{\delta}(q_0, \sigma'), 0) \\ &= \delta(q_2, 0) = q_2 \in F\end{aligned}$$

– Supponiamo che σ non appartiene al linguaggio e termini con 1:

$$\sigma \notin L \land \sigma = \sigma' 1 \text{ (ha esattamente un 1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma \notin L \text{ non ha 1}$$

– Supponiamo che σ non appartiene al linguaggio e termini con 0:

$$\sigma \notin L \land \sigma = \sigma' 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma' \notin L$$

Esempio 4.3 (Esercizio da esame)

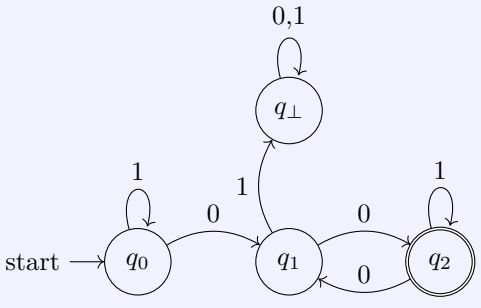
$$L = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \exists n \geq 1 \,.\, \sigma = 0^n \to n \geq 2\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

Ovvero ogni sequenza di 0 nella stringa deve essere di lunghezza pari. Per esempio:

$$101 \notin L, 1111 \in L$$

$$1001 \in L, 000 \notin L, 0000 \in L, 010101 \notin L$$



- q_0: non abbiamo letto 0
- q_1: rappresenta una sequenza di 0 consecutivi di lunghezza dispari
- q_2: sequenza di 0 di lunghezza pari.

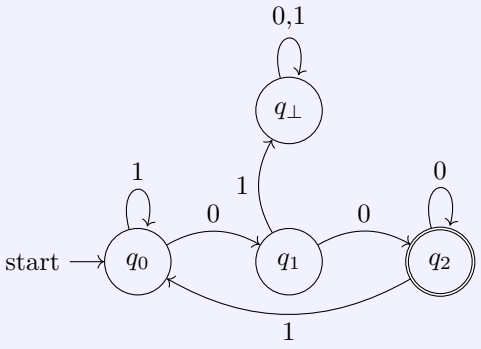
Tesi: $\begin{cases} \sigma \in L \text{ e non contiene } 0 \ \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \\ \sigma \in L \text{ e contiene } 0 \ \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \\ \sigma \notin L \text{ e contiene una sequenza finali di } 0 \ \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \\ \sigma \notin L \text{ e contiene una sequenza dispari di } 0 \text{ seguiti da un } 1 \ \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_\perp \end{cases}$

Esempio 4.4

$$L = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \exists n \geq 1 \,.\, \sigma = 0^n \rightarrow n \geq 2\}$$

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

Se σ non contiene 0 allora $\sigma \in L$.



- q_0: non contiene 0 oppure tutte le sequenze di 0 sono lunghe almeno 2.
- q_1: esattamente uno 0.
- q_2: almeno due 0.

Tesi: $\begin{cases} \sigma \in L \text{ e } \sigma = \sigma'1 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_0 \\ \sigma \in L \text{ e } \sigma = \sigma'0 \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_2 \\ \sigma \notin L \text{ e } \sigma = \sigma'0 \text{ dove l'ultima seq di 0 è esattamente lunga 1} \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_1 \\ \sigma \notin L \text{ e } \sigma \text{ contiene una sequenza lunga 1 di 0} \rightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) = q_\perp \end{cases}$

4.3 Automi a stati finiti non deterministici (NFA)

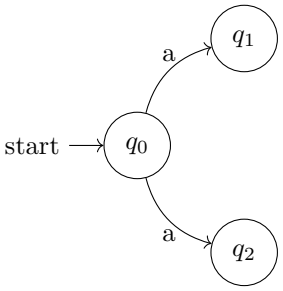
Definizione 4.3

Un automa a stati finiti non deterministico è una 5-upla:

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

dove:

- Q è un insieme finito di stati
- Σ è un alfabeto finito di simboli
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di stati finali (o di accettazione)
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ è la funzione di transizione dove per ogni coppia di stato-simbolo ho un insieme di stati potenzialmente raggiungibili.



$$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\} \subseteq Q$$

$$\varnothing \in \mathcal{P}(Q)$$

- È possibile che non esistano coppie associate al vuoto
- Non è obbligatorio avere un arco uscente per ogni simbolo di Σ.

Definiamo $\hat{\delta}$: $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \epsilon) = \{q\} \\ \hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a) \end{cases}$$

Linguaggio riconosciuto:

$$L(N) = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \sigma) \cap F \neq \varnothing\}$$

Teorema 4.3.1 Teorema di Rabin-Scott

Se abbiamo $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un NFA allora esiste M DFA tale che $L(N) = L(M)$.

Quindi se M DFA allora N è un particolare NFA.

Proof. Preso $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ costruiamo $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ dove:

$$Q' = \mathcal{P}(Q)$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$$

$$Q' = \{\varnothing, \{q_0\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_1, q_2\}, \{q_0, q_1, q_2\}\}$$

$$q_0' = \{q_0\}$$

$$F = \{q_2\}$$

$$F' = \{\underbrace{P \subseteq Q}_{P \in \mathcal{P}(Q)} \mid P \cap F \neq \varnothing\}$$

$$F' = \{\{q_2\}, \{q_1 q_2\}, \{q_0 q_2\}, \{q_0 q_1 q_2\}\}$$

$$\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a) \in \mathcal{P}(Q)$$

$$\begin{aligned} \delta'(q_5', 1) &= \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1) \\ &= \{q_0, q_2\} \cup \{q_0, q_1, q_2\} \\ &= \{q_0, q_1, q_2\} \end{aligned}$$

Dimostriamo:

1. $\hat{\delta}' q_0', \sigma = \hat{\delta}(q_0, \sigma)$
2. $\sigma \in L(N)$ sse $\sigma \in L(M)$

1. Per induzione su $|\sigma|$:
   Se $\sigma = \epsilon$ allora: $\hat{\delta}'(q_0', \epsilon) = q_0' = \{q_0\} = \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$ per le definizioni.
   Se $\sigma = \sigma' a$: $\hat{\delta}'(q_0', \sigma' a) = \hat{\delta}(\hat{\delta}'(q_0, \sigma'), a)$. Per ipotesi induttiva:

$$\hat{\delta}'(q_0', \sigma') = \hat{\delta}(q_0, \sigma')$$

2. $\sigma \in L(N)$ sse $\sigma \in L(M)$

$$\begin{aligned}\sigma \in L(N) &\Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, \sigma) \cap F \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(q_0', \sigma) \cap F \neq \varnothing \\ &\Leftrightarrow \hat{\delta}'(q_0', \sigma) \in F' \\ &\Leftrightarrow \sigma \in L(M) \text{ def. linguaggio accettato in DFA} \quad \square\end{aligned}$$

Una volta aver raggiunto un risultato di automa a stati finiti deterministico non è detto che sia il migliore che possiamo trovare. Possiamo *eliminare gli stati non raggiungibili* e ottenere un automa equivalente più piccolo (**DFA minimo**).

4.3.1 Automi non deterministici con ε-transizioni (ε-NFA)

Gli ε-NFA sono una variante degli NFA in cui possiamo cambiare stato senza leggere simboli.

$$q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2$$

Definizione 4.4

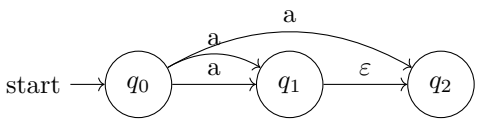
Un ε-NFA è una 5-upla:

$$N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

dove:

- Q è un insieme finito di stati
- Σ è un alfabeto finito di simboli
- $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq Q$ è l'insieme di stati finali (o di accettazione)
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$ è la funzione di transizione dove per ogni coppia di stato-simbolo ho un insieme di stati potenzialmente raggiungibili. La ε mi dice che possiamo cambiare stato senza leggere simboli.

Per esempio:



Definiamo ora:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$

$$\varepsilon - \text{closure} : Q \to \mathcal{P}(Q)$$

La ε-closure(q) di uno stato q è l'insieme di stati raggiungibili da q seguendo archi etichettati con ε.

$$\varepsilon - \text{closure} : \mathcal{P}(Q) \to \mathcal{P}(Q)$$

$$\begin{cases} \hat{\delta}(q, \epsilon) = \varepsilon\text{-closure}(q) \\ \hat{\delta}(q, wa) = \varepsilon\text{-closure}\left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a)\right) \end{cases}$$

Esempio 4.5

La ε-closure di q' nell'automa sopra è:

$$\varepsilon\text{-closure}(q') = \{q', q''\}$$

Il riconoscimento di un linguaggio è analogo a quello di un NFA:

$$L(N) = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, \sigma) \cap F \neq \varnothing\}$$

Teorema 4.3.2

Sia $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un ε-NFA. Allora esiste un NFA N' tale che $L(N) = L(N')$.

Ciò vuol dire che l'insieme dei linguaggi riconosciuti da ε-NFA coincide con quello degli NFA, che a sua volta coincide con i linguaggi regolari. Prendiamo $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un ε-NFA. Costruiamo NFA $N' = (Q', \Sigma', \delta, q_0', F')$ dove $\delta'(q, a) = \hat{\delta}(q, a)$ e $F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{se } \varepsilon\text{-closure}(q_0) \cap F \neq \varnothing \\ F & \text{altrimenti} \end{cases}$.

4.4 Espressioni Regolari

Le espressioni regolari sono un modo compatto per rappresentare i linguaggi. Le opreazioni che si possono fare sono:

- Unione: Siano $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ linguaggi : $L_1 \cup L_2 = \{\sigma \mid \sigma \in L_1 \text{ oppure } \sigma \in L_2\}$
- Concatenazione: Siano $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ linguaggi : $L_1 \cdot L_2 = \{\sigma_1\sigma_2 \mid \sigma_1 \in L_1, \sigma_2 \in L_2\}$ che permette la concatenazione di tutte le stringhe di L_1 con tutte le stringhe di L_2.
- Stella di Kleene: Sia $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio : $L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$ dove L^n è la concatenazione di L con sè stesso n volte.
$$\begin{cases} L^0 = \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} = L^n \cdot L \end{cases}$$

$$L = \{000, 111\}$$

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$
$$L^1 = \{000, 111\} = L$$
$$L^2 = \{000000, 000111, 111000, 111111\}$$
$$L^3 = \{000000000, 000000111, 000111000, 000111111, 111000000, 111000111, 111111000, 111111111\}$$
$$\vdots$$
$$L^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L^n$$

$$L^+ = \bigcup_{n \geq 0} L^n$$

Definizione 4.5

Σ alfabeto, definiamo per induzione:

- **Caso base:**
  - $\varnothing \subseteq \Sigma^*$ è espressione regolare che rappresenta il linguaggio vuoto.
  - ε è espressione regolare che rappresenta il linguaggio $\{\varepsilon\} \subseteq \Sigma^*$.
  - $a \in \Sigma$ è espressione regolare che rappresenta il linguaggio $\{a\} \subseteq \Sigma^*$.
- **Passo induttivo:**
  - r, s sono espressioni regolari che rappresentono il linguaggio $R \subseteq \Sigma^\alpha$ e $S \subseteq \Sigma^*$ rispettivamente.
    - $(r) + (s)$ è espressione regolare che rappresenta il linguaggio $R \cup S$.
    - $(r)(s)$ è espressione regolare che rappresenta il linguaggio $R \cdot S$.
    - $(r)^*$ è espressione regolare che rappresenta il linguaggio R^*.

Esempio 4.6

Prendiamo come esempio la seguente espressione:

$$1^* + 0^* + (10)^*$$

equivale:

$$\{1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(10)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Un'altra equivalenza interessante è:

$$L = 000, 111 \to (000 + 111)$$

$$L^* = (000 + 111)^*$$

Teorema 4.4.1 Teorema di equivalenza

Dato M DFA $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ allora esiste r espressione regolare t.c $L(N) = L(r)$.

$$\text{L regolare} \overset{def}{\Leftrightarrow} \exists \underbrace{M\ DFA}_{L(n)=L} \overset{thm}{\to} \exists r \in ER \mid L(r) = L$$

Teorema 4.4.2

Data r espressione regolare (ER) allora esiste un ε-NFA M tale che $L(r) = L(N)$.

- $\varepsilon \rightsquigarrow q_0, L(N) = \{\varepsilon\}$
- $\varnothing \rightsquigarrow q_0, q_1, L(N) = \varnothing$
- $a \rightsquigarrow q_0 \to q_1, L(N) = \{a\}$
- r, s espressioni regolari per ipotesi induttiva $\exists N_1.L(n_1) = L(r)$ e $\exists N_2.L(n_2) = L(s)$.

$$r\ ER \Rightarrow M\ \varepsilon\text{-closure} \iff M'\ \text{DFA} \iff L(M') \text{ è regolare}$$

Esempio 4.7

$$L = \{\sigma \in \Sigma^* \mid \sigma \text{ contiene almeno due } 1\}$$

per dimostrare che è regolare si costruisce il DFA M e si dimostra ceh $L = L(M)$.

$$r = 0^*10^*10^*$$

dove r non dimostra che L è regolare, perché dovremmo dimostrare $L = L(r)$. $L(r)$ è sicuramente regolare ma dobbiamo **comunque** dimostrare l'uguaglianza insiemistica $L = L(r)$.

4.5 Proprietà di LR (linguaggi regolari)

4.5.1 Proprietà di chiusura

Rispetto a quali operazioni due linguaggi regolari sono chiusi? Questa proprietà è utile perché a volte mi serve studiare un linguaggio complesso come intersezioni di linguaggi più semplici. Operazioni: $*, \cup, \cdot, \cap, \hat{}$.

Teorema 4.5.1

I linguaggi sono chiusi rispetto a stella di Kleene, unione (finita) e concatenazione.

Quindi

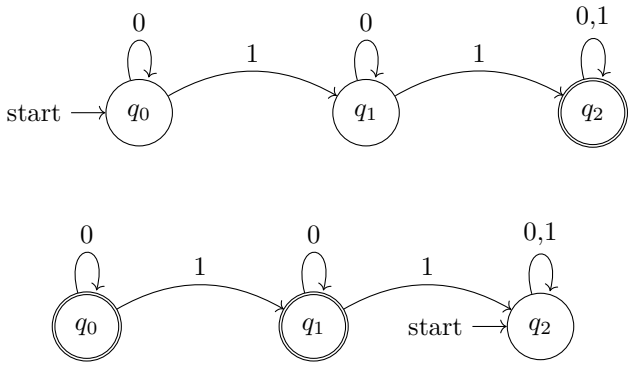
$$L_1, L_2 \text{ reg}$$

$$L^* \text{ è reg. } L_1 \cup L_2 \text{ reg} \quad L_1 L_2 \text{ è regolare}$$

$$\underbrace{a^3}_{\text{reg. finito}} \cdot \{b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Teorema 4.5.2

I linguaggi regolari sono chiusi rispetto alla complementazione.



L'automa sopra disegnato riconosce il complemento.

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

per le leggi di Morgan, i linguaggi regolari sono chiusi per intersezione (finita).

4.5.2 Proprietà di decidibilità

L'insieme di stringhe accettate da un DFA (linguaggio regolare) DFA con M stati con n stati.

1. $L(M)$ è $\neq \varnothing$ sse accetta almeno una stringa di lunghezza $\leq n$.
2. $L(M)$ è infinito se accetta almeno una stringa lunga l con $n \leq l \leq 2n$.
3. $L(M_1) = L(M_2)$ cazzo piccolissimooo... 8=======D

4.5.3 Esistenza dell'automa minimo

Fornisce strategie per costruire un automa minimo. Sia R relazione su $\Sigma : R \subseteq \Sigma \times \Sigma$. R è una relazione di equivalenza se:

- Riflessiva: $\forall a \in \Sigma . aRa$
- Simmetrica: $\forall a, b \in \Sigma . aRb \Rightarrow bRa$
- Transitiva: $\forall a, b, c \in \Sigma . aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Una relazione di equivalenza induce una partizione. $R \subseteq S \times S$ induce una partizione di S dove S_i sono una partizione di S se

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$$

e

- $\forall i, j \; S_i \cap S_j = \varnothing$
- $\forall a, b \in S_i . aRb$
- $\forall a \in S \, \forall b \in S_j . \neg(aRb)$

S_i sono detti classi di equivalenza di R:

$$a \in R \Rightarrow [a]_R = \{b \mid aRb\} \text{ classe di equivalenza di a}$$

$$cRa \Rightarrow [a]_R \equiv [c]_R$$

Torniamo ora ai linguaggi regolari. Consideriamo un linguaggio $L \subseteq \Sigma^*$. Possiamo definire $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ come:

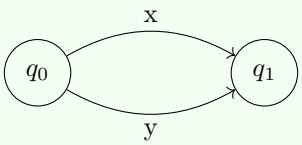
$$x, y \in \Sigma^* \quad xR_Ly \text{ sse } \forall z \in \Sigma^* . xz \text{ sse } yz \in L$$

Quello che diciamo quindi è che due stringhe sono in relazione se per ogni possibile estensione z la loro appartenenza a L è la stessa.

Definizione 4.6: Classe di equivalenza definita per gli automi

Consideriamo $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un DFA. Possiamo definire $R_M \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ come:

$$x, y \in \Sigma^*.xR_m y \iff \hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$$



Allora R_L **e** R_M **sono relazioni di equivalenza.**

Definizione 4.7: Relazione invariante destra

Una relazione di equivalenza R su Σ^* è invariante a destra se:

$$\forall x, y, z \in \Sigma^* \quad xRy \Rightarrow xzRyz$$

Quindi essere in relazione è invariante rispetto all'estensione della stringa verso destra. R_L **e** R_M **sono relazioni invarianti destra.**

Definizione 4.8: Raffinamento

Siano R e S due relazioni di equivalenza su Σ^*. Diciamo che R raffina S se:

$$\forall x, y \in \Sigma^* \quad xRy \Rightarrow xSy$$

Quindi ogni classe di equivalenza di R è contenuta in una classe di equivalenza di S. Il numero di classi di equivalenza di R è maggiore del numero di classi di equivalenza di S.

Definizione 4.9

Dato un DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ogni stato definisce un linguaggio.

$$q \in Q : L_q = \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) = q\}$$

R si dice di indice finito se il numero di classi di equivalenza indotte è finito.

Teorema 4.5.3 Teorema di Nyhill-Nerode

I seguenti enunciati sono equivalenti:

1. $L \subseteq \Sigma^*$ è regolare ovvero esiste un DFA M t.c. $L(M) = L$.
2. L è l'unione di classi di equivalenza indotte da una relazione di equivalenza R invariante destra con indice finito.
3. R_L è di indice finito.

Dimostriamo che:

$$(1) \overset{R_m}{\Longrightarrow} (2) \overset{R \text{ raffina } R_L}{\Longrightarrow} (3) \overset{\text{costruisce } M}{\Longrightarrow} (1)$$

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2)
Ipotesi: L linguaggio riconosciuto da $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ DFA.

$$L = L(M)$$

Tesi: $\exists R$ relazione di equivalenza invariante destra di indice finito t.c. L è l'unione di classi di equivalenza di R. Prendiamo $R = R_M \quad xR_m y$ sse $\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}(q_0, y)$.

1. Il numero di classi di equivalenza di R_M è uguale al numero di stati $|Q|$ ma per definizione Q è finito quindi R_M è di indice finito.
2. R_M è invariante destra:

$$\begin{aligned} L = L(M) &= \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) \in F\} \\ &= \{x \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, x) = q \wedge q \in F\} \\ &= \bigcup_{q \in F} \{x \mid \hat{\delta}(q_0, x) = q\} \\ &= \bigcup_{q \in F} L_q \text{ dove } L_q \text{ è la classe di equivalenza di } R_M \end{aligned}$$

Quindi L è l'unione di classi di equivalenza di R_M.

Proof. (2) $\Rightarrow$ (3)
Ipotesi: L è l'unione di classi di equivalenza indotte da una relazione di equivalenza R di indice finito.
Tesi: R_L è di indice finito. Possiamo dimostrare che R raffina R_L. Perché se fosse così allora il numero di classi di R sarebbe maggiore del numero di classi di R_L. Quindi se il numero di classi di R è finito allora sicuramente lo sarà anche R_L. Per dimostrare R raffinamento

di R_L dobbiamo dimostrare che $\forall x, y \in \Sigma^* \quad xRy \Rightarrow xR_Ly$. In maniera equivalente:

$$y \in [x]_R \Rightarrow y \in [x]_{R_L} \equiv [x]_R \subseteq [x]_{R_L}$$

Prendiamo xRy sapendo che R è invariante destra.

$$\forall z \in \Sigma^* \quad xRy \Rightarrow xzRyz$$

Quindi se L è l'unione di classi di equivalenza di R:

$$xRy \quad x \in L \text{ sse } y \in L$$

$$[x]_R \subseteq L \text{ oppure } [x]_R \text{ fuori da } L$$

Quindi:

$$\begin{aligned} xRy &\Longrightarrow x \in L \Longleftrightarrow y \in L \\ &\Longrightarrow \forall z \,.\, xzRyz \Longrightarrow xz \in L \Longleftrightarrow yz \in L \\ &\overset{\text{def } R_L}{\Longrightarrow} xR_Ly \end{aligned}$$

Queste dimostrazioni dato M generico, R_M è un raffinamento di R_L.

Proof. (3) $\Rightarrow$ (1)
Ipotesi: R_L è di indice finito.
Tesi: L è riconosciuto da un DFA M.
Costruiamo M:

- $Q = \{[x]_{R_L} \mid x \in \Sigma^*\}$ è l'insieme delle classi di equivalenza di R_L (sono finite)
- $\Sigma =$ quello di L
- $q_0 = [\varepsilon]_{R_L}$
- $F = \{[x]_{R_L} \mid x \in L\}$
- $\delta(q, a) = \delta([x]_{R_L}, a) = [xa]_{R_L}$ questo è vero perché R_L è invariante destra. δ è una buona definizione perché indipendente dall'elemento che rappresenta la classe.

Ora dobbiamo dimostrare che $L = L(M)$. Dimostrare per induzione che $\hat{\delta}([x], y) = [xy]$:

$$\hat{\delta}(q_0, x) = \hat{\delta}([\varepsilon]_{R_L}, x) = [x]_{R_L}$$

$$x \in L(M) \text{ sse } \hat{\delta}(q_0, x) \in F$$
$$\text{sse } \hat{\delta}([\varepsilon]_{R_L}, x) \in F$$
$$\text{sse } [x]_{R_L} \in F$$
$$\text{sse } x \in L \quad \square$$

Quindi $L(M) = L$.

Teorema 4.5.4

Dato L esiste M DFA t.c. $L(M) = L$ e M ha il numero minimo di stati (quello costruito da R_L).

4.5.4 Pumping Lemma per linguaggi regolari

Questo risultato è importante perché fornisce una condizione π necessaria alla regolarità.

$$L \text{ regolare} \implies \pi$$

Questa forma si può riscrivere come:

$$\neg\pi \implies L \text{ non è regolare}$$

Teorema 4.5.5 Pumping Lemma

Sia $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio regolare. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni stringa $s \in L$ con $|s| \geq k$ può essere scritta come:

$$s = uvw$$

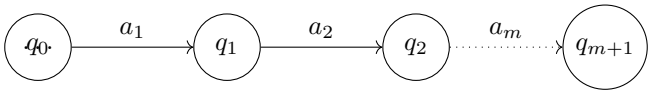
con:

- $|v| > 0$
- $|uv| \leq k$
- $\forall i \in \mathbb{N} \,.\, uv^i w \in L$

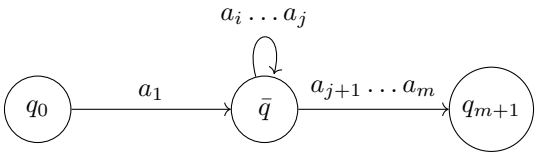
Proof. L regolare se esiste M DFA t.c $L = L(M)$ dove $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

$$|Q| = n \in \mathbb{N}, k = n \quad z \in L \text{ t.c. } |z| \geq k$$

$$z = a_1 a_2 \dots a_m \quad m \geq k$$

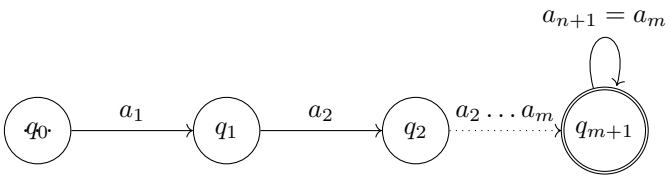


Per leggere m simboli si attraverso $m+1$ stati. Ma $m \geq n \Rightarrow$ attraverso almeno $n+1$ stati. Attraversiamo più stati di quelli in Q ovvero almeno uno stato è ripetuto nel riconoscimento di z. Suppiniamo $\bar{q} \in Q$ sia il primo stato leggendo z che viene ripetuto, in cui si torniamo per riconoscere z.



Non ci sono stati ripetuti perché $\bar{q}$ è il primo per costruzione. u da q_0 a $\bar{q}$, v da $\bar{q}$ a $\bar{q}$, w da $\bar{q}$ a q_m finale. Questa suddivisione è accettabile per il lemma?

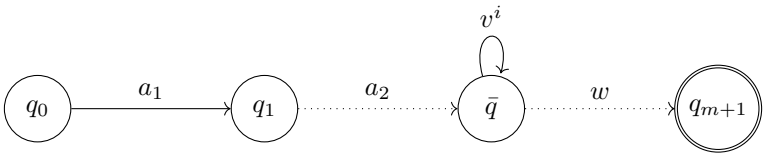
- $|uv| \leq k$



  Per arrivare allo stato finale q_m si attraversano $m-1$ simboli.

$$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{m-1}\} \rightarrow |Q| = m$$

- $|v| > 0$ perché altrimenti non ci sarebbe stato ripetuto, sappiamo che per forza di cose almeno un arco deve uscire dallo stato e ritornare nello stesso stato.
- $\forall i \in \mathbb{N} \,.\, uv^i w \in L$



  perché essendo v un ciclo, ripeterlo i volte mi riporta sempre nello stato $\bar{q}$. $\square$

Ora proviamo a negare il pumping lemma per dimostrare che un linguaggio non è regolare.

- $\exists k \rightsquigarrow \forall k$ quindi la dimostrazione non deve imporre vincoli su k.

- $\forall z \rightsquigarrow \exists z \in L \,.\, |z| \geq k$ quindi costruiamo noi la $z \in L$ di lunghezza k.
- $\exists uvw = z \rightsquigarrow \forall uvw = z$ quindi dobbiamo dimostrare che per ogni possibile suddivisione $(|v| > 0, |uv| \leq k)$
- $\forall i \in \mathbb{N} \rightsquigarrow \exists i \in \mathbb{N}$ quindi dobbiamo trovare un i che rispetti la condizione $uv^i w \notin L$.

Esempio 4.8

Consideriamo il seguente linguaggio:

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dimostriamo che L non è regolare tramite il pumping lemma.

$$\forall k \in \mathbb{N} \,.\, \exists z \in L \; |z| \geq k \quad \forall uvw = z \;\; |uv| \leq k \;\; |v| > 0 \quad \exists i \,.\, uv^i w \notin L$$

Fissiamo $k \in \mathbb{N}$ (k non deve avere nessun vincolo):

$$z = 0^k 1^k \in L \quad |z| \geq k$$

Condizioni di appartenenza a L:

$$0^a 1^b \in L \text{ sse } a = b$$

Gli 0 e gli 1 devono avere cardinalità uguale. Quindi una singola suddivisione che va bene posso solo prendere $uv \in 0^k$ perché per ipotesi $|uv| \leq k$. Andiamo ora a definire

$$z_i = uv^i w = 0^{k+(i-1)|v|} 1^k$$

Prendiamo per esempio $i = 0$:

$$0^{k+(0-1)|v|} 1^k = 0^{k-|v|} 1^k$$

e quindi abbiamo effettivamente tolto l'interezza di v.
Per $i = 1$:

$$0^{k+(1-1)|v|} 1^k = 0^k 1^k$$

Per $i = 3$ (ripete tre volte v):

$$0^{k+(3-1)|v|} 1^k = 0^{k+2|v|} 1^k$$

$$z_i = 0^{k+(i-1)|v|} 1^k$$

In questo caso, dobbiamo rompere la condizione di appartenenza per cui $a \neq b$. Basterebbe ripetere v almeno una volta, quindi prendiamo $i = 2$:

$$z_2 = 0^{k+(2-1)|v|}1^k = 0^{k+|v|}1^k \notin L$$

Perché $k + |v| = k$ solo se $|v| = 0$ ma questo non è possibile perché per definizione $|v|$ deve essere maggiore di zero e quindi $z_2 \notin L$.

Riassumendo il metodo per dimostrare che un linguaggio è o non è regolare:

- L Reg $\rightarrow$ Costruisci automa e si dimostra che $L = L(M)$
- L non Reg $\rightarrow$ usa il Pumping Lemma
  - Scrivere le condizioni di appartenenza
  - Fissa k generico e si sceglie z facendo attenzione ai vincoli di k
  - Cerchiamo $i \in \mathbb{N}$ t.c. $uv^iw \notin L$ (condizioni di appartenenza violate)

5 Linguaggi Context Free

5.1 Grammatiche Context Free

Definizione 5.1

Una grammatica è una quadrupla $G = (V, T, R, S)$ dove:

- V è un insieme finito di variabili (non terminali)
- T è un insieme finito di simboli terminali (disgiunto da V)
- R è un insieme finito di regole di produzione della forma $A \rightarrow \beta$ dove $A \in V$ e $\beta \in (T \cup \Sigma)^*$
- $S \in V$ è il simbolo iniziale

Teorema 5.1.1

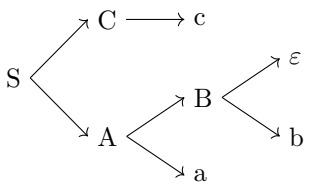
L è un linguaggio CF se esiste una grammatica G t.c. $L = L(G)$.

5.2 Alberi di derivazione

Sia $G = (V, \Sigma, R, S)$ una grammatica CF. Un albero di derivazione (*Parse Tree*) per G:

- Ogni vertice ha un etichetta in $V \cup T \cup \{\varepsilon\}$

- L'etichetta della radice è in V
- Ogni vertice interno (non foglia) ha etichetta in V
- Se un vertice n etichettato con $A \in V$ e i vertici $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sono i figli etichettati con $X_1, X_2, \ldots, X_k \in V \cup T \cup \{\varepsilon\}$ allora $A \to X_1 X_2 \ldots X_k \in P$.



Se un vertice ha etichetta ε allora è una foglia ed è l'unico figlio del padre.

Esempio 5.1

Consideriamo la grammatica:

$$E \to 0|1|(\text{E or E})|(\text{E and E})|(\text{not E})$$

Consideriamo la seguente derivazione:

$$E \Rightarrow ((0 or 1) and (not 0))$$

che è la stringa generata dalla grammatica descritta dall'albero

Teorema 5.2.1

Sia $G = (V, T, P, S)$ CF. Allora $S \Rightarrow^* \alpha \in T^*$ sse esiste un albero di derivazione con radice etichettata con S e foglie etichettate (da sx verso dx) con α

5.3 Ambiguità

Nelle grammatiche a volte, possono capitare delle ambiguità in base a come è scritta.

Esempio 5.2

$$E \to E + E|E * E|0|1|2$$

Fingiamo di prendere la stringa:

$$2 * 0 + 1$$

Il problema della grammatica ha radici aritmiche perché non sappiamo quale operazione fare prima, quindi in base a quale scegliamo, avremo due risultati diversi (1 o 2).

Quindi è utile evitare questa proprietà. Una grammatica è ambigua se esiste almeno una parola α con più di un albero di derivazione con radice S. Il linguaggio generato da una grammatica ambigua è detto inerentemente *ambiguo*.

5.4 Forme normali e minimizzazione delle grammatiche CF

Le grammatiche le cui produzioni rispettono vincoli "di forma" specifici.

- **Forma normale di Chomsky:** Tutte le produzioni hanno una forma: $A \to a$ o $A \to BC$ con $A, B, C \in V$ e $a \in T$
- **Forma di Greibach**: Tutte le produzioni hanno la forma: $A \to a\alpha$ con $a \in T$ e $\alpha \in V^*$

Ogni grammatica può essere riscritta in modo tale che:

1. Ogni simbolo non terminale genera simboli terminale e ogni terminale è generato da almeno un terminale (eliminazione dei simboli inutili)
2. Ogni produzione non è della forma $A \to B$ con $A, B \in V$ (eliminazione delle produzioni unitarie).
3. Se ε non appartiene al linguaggio allora non ci devono essere $A \to \varepsilon$ con $A \in V$ (Se $\varepsilon \in L$ allora $S \to \varepsilon$) (eliminazione ε-produzioni)

5.4.1 Eliminazione dei simboli inutili

$X \in V \cup T$ è utile se essite una derivazione $S \to^* \alpha x \beta \to^* w \in T^*$
Metodo algoritmico per eliminare i simboli che non arrivano a sequenze terminali. $\forall A \in V \ . \ \exists v \in T^* \ . \ A \to^* w$ allora $L(G) \neq 0$ tutti i simboli sono inutili. Quindi prima andremo a togliere i simboli che non portano a simboli terminali. Una volta trovati quelli, andremo a togliere quelli che non sono raggiungibili da S. Tutto il resto sono simboli inutili.
Eliminiamo i simboli non raggiungibili da S:

$$\Gamma(W) = \{X \in V \cup T \mid \exists A \in W \ . \ A \to \alpha x \beta \in P\} \cup S$$

$$\Gamma(\varnothing) = \{S\}$$

Esempio 5.3

Aggiungiamo ciò che possiamo raggiungere da S in un certo numero di passi.

- $S \to a|bC$

- $C \to d|dE$
- $E \to \varepsilon$
- $F \to f$

$$\Gamma(\varnothing) = \{\}$$

$$\Gamma(S) = \{X \in V \cup T \mid S \to \alpha x \beta \in P\} \cup \{S\} = \{a, b, c, S\}$$

$$\Gamma(a, b, c, S) = \{X \in V \cup T \mid C \to \alpha x \beta \in P \text{ o } S \to \alpha x \beta \in P\} = \{a, b, c, S, d, E\}$$

$$\Gamma(a, b, c, d, E, S) = \{a, b, c, d, E, S, \varepsilon\}$$

F è inutile.

Teorema 5.4.1

$\forall G = (V, T, P, S)$ CF esiste una grammatica $G' = (V', T, P', S)$ tale che

$$L(G') = L(G)$$

e G' è senza simboli inutili.

G' si ottiene applicando in sequenza le due trasformazioni viste (nell'ordine visto).

5.4.2 Eliminazione delle ε-produzioni

L'idea è quella di sostituire la transizione con tutto quello che può generare ε ad esempio:

Esempio 5.4

Consieriamo la grammatica:

$$S \to \varepsilon|A|B$$

$$A \to 0|0A0|B$$

$$B \to 1|1B1|A|\varepsilon$$

$A \to B \to \varepsilon$ tutti i simboli non terminali che in un certo nnumero di passi generano ε ovvero $\{S, B, A\}$

$$S \to \varepsilon|A|B$$

$$A \to 0|0A0|\ 00\ |B$$

$$B \to 1|1B1|\ 11\ |A$$

Eliminando $B \to \varepsilon$, 00 e 11 non sarebbero più generabili. e quindi si aggiungono. Possiamo quindi eliminare tutte le ε-produzioni tranne $S \to \varepsilon$ se $\varepsilon \in L$.

5.4.3 Eliminazione delle produzioni unitarie

Una produzione unitaria è una produzione della forma $A \to B$ con $A, B \in V$.

Esempio 5.5

Consideriamo la seguente grammatica:

$$S \to \varepsilon|A|B$$

$$A \to 0|0A0|B|00$$

$$B \to 1|1B1|A|11$$

Guardo S e al posto di A e B inserisco tutte le sue produzioni:

$$S \to \varepsilon|0|0A0|00|1|1B1|11$$

$$A \to 0|0A0|00|1|1B1|11$$

$$B \to 1|1B1|11|0|0A0|00$$

Sostituiamo in tutte le produzioni quello che è producibile dal non terminale a destra della produzione unitaria.

Quando la grammatica è senza simboli inutili, senza ε-produzioni e senza produzioni unitarie possiamo trasformarla nella forma normale di Chomsky.

5.4.4 Riduzione in forma normale di Chomsky

Abbiamo già detto che ogni grammatica CF può essere trasformata in una grammatica equivalente in forma normale di Chomsky dove

$$A \to a \in T \quad \vee \quad A \to BC \quad \text{dove } B, C \in V$$

Per ogni coppia di simboli non terminali creiamo un nuovo simbolo non terminale che li rappresenta. Per esempio:

Esempio 5.6

Consideriamo la seguente grammatica:

$$S \to aAB|aB|b$$

$$A \to b|aS|aa$$

$$B \to a|bbA$$

Creiamo i nuovi simboli:

$$X_a \to a$$

$$X_b \to b$$

Ora riscriviamo la grammatica:

$$S \to X_aAB|X_aB|X_b$$

$$A \to X_b|X_aS|X_aX_a$$

$$B \to X_a|X_bX_bA$$

Ora dobbiamo solo risolvere le produzioni con più di due simboli a destra. Per esempio in $S \to X_aAB$ creiamo un nuovo simbolo C:

$$C \to AB$$

Quindi riscriviamo:

$$S \to X_aC|X_aB|X_b$$

$$C \to AB$$

E così via per tutte le produzioni con più di due simboli a destra.

Esempio di forma normale di Chomsky:

$$\begin{aligned}
S &\to \varepsilon \\
S &\to 0 \mid 1 \\
S &\to V_1V_1 \mid V_3V_1 \mid V_2V_2 \mid V_4V_2 \\
V_1 &\to 0 \\
V_2 &\to 1 \\
V_3 &\to V_1S \\
V_4 &\to V_2S
\end{aligned}$$

5.5 Pumping Lemma per linguaggi CF

Anche questa volta, la definizione di Pumping Lemma è simile a quella dei linguaggi regolare e quindi fornisce una condizione necessaria perché un linguaggio sia CF. Ovvero che se L è CF allora vale Π condizione del pumping lemma.

Teorema 5.5.1 Pumping Lemma per linguaggi CF

Sia $L \subseteq \Sigma^*$ un linguaggio CF. Allora esiste $k \in \mathbb{N}$ t.c. per ogni stringa $z \in L$ con $|z| \geq k$ può essere scritta come:

$$z = uvwxy$$

con:

- $|vwx| \leq k$
- $|vx| > 0$
- $\forall i \in \mathbb{N} \,.\, uv^i wx^i y \in L$

Proof. Sia $L \subseteq T^*$ un linguaggio CF. Esiste una grammatica $G = (V, T, P, S)$ CF t.c. $L = L(G)$. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che G sia in forma normale di Chomsky. Quindi le produzioni saranno del tipo $A \to a \in T$ o $A \to BC$ con $B, C \in V$. Sia $n = |V|$ il numero di sinmboli non terminali di G. Questo poiché data la forma normale implica che tutti gli altri alberi di derivazione in G sono binari. Prendiamo $k = 2^n$ dove appunto n è il numero di simboli non terminali. Si fa questo perché un albero binario di altezza h ha al massimo $2^h - 1$ nodi interni. Sia

$$z \in L \text{ con } |z| \geq k$$

Se le foglie sono $\geq 2^n$ allora l'altezza dell'albero di derivazione di z è almeno $n+1$. Il numero di archi (che non è nient'altro l'altezza dell'albero) che collegano simboli non terminali allora sono n se tolgo l'ultimo arco. Quindi il numero di nodi interni (quindi etichettati come non terminali) nel cammino sono $n+1$. Questo vuol dire che almeno una etichetta non termianle è ripetuta nel cammino due volte. Esistono almneo due vertici interni che hanno la stessa etichetta.
Supponiamo che un etichetta A sia il primo nodo (da S) con l'etichetta che si ripete. Adesso andiamo a prendere i sotto alberi radicati in A e dal secondo A che saranno entrambi alberi binari. Osserviamo che la stringa è stata divisa in cinque parti $z = uvwxy$. Preso il vincolo $|vx| > 0$ quindi $A \to AS \to a \not\in$ quindi almeno un simbolo deve essere generato in v o in x (poiché entrambi non possono essere zero).

Supponiamo ora che la ripetizione più vicina alla foglie. Questo vuol dire che dalla prima A alle foglie non ci sono ripetizioni ma questo vuol dire che attraversiamo massimo $n = |V|$ vertici perché se ne attraversassi uno in più allora almeno uno si ripeterebbe. Quindi non generiamo più di 2^n simboli terminali.

5.5.1 Uso del lemma

Quindi L CF vuol dire Π del lemma $\equiv \neq \Pi$ allora L non CF. Dove Π è:

- $\exists k \in \mathbb{N}$
- $\forall z \in L$ con $|z| \geq k$
- $\exists uvwxy = z$ con $|vwx| \leq k$ e $|vx| > 0$
- $\forall i \in \mathbb{N}\ .\ uv^iwx^iy \in L$

$\neg\Pi$ diventa:

- $\forall k \in \mathbb{N}$
- $\exists z \in L$ con $|z| \geq k$
- $\forall uvwxy = z$ con $|vwx| \leq k$ e $|vx| > 0$
- $\exists i \in \mathbb{N}\ .\ uv^iwx^iy \notin L$

Esempio 5.7

Consideriamo il seguente linguaggio:

$$L = \{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Dimostriamoc che L non è context free usando la negazione del pumping lemma. Prendiamo $n = k$ siccome n non ha alcun vincolo e scegliamo la stringa z:

$$z = a^kb^kc^k \in L$$

- Prendiamo $z = a^kb^kc^k$ con $v, x \in a^k$.

  $$z_i = a^{k+(i-1)|vx|}b^kc^k$$

  Prendiamo $i = 2$:

  $$z_2 = a^{k+|vx|}b^kc^k \overset{?}{\in} L$$

Guardando la condizione di appartenenza a L:

$$a^i b^j c^l \in L \text{ sse } i = j = l$$

Quindi

$$z_2 \in L \text{ sse } \begin{cases} k + |vx| = k & \iff |vx| = 0 \\ k = k & ovvio \end{cases}$$

perché per costruzione $|vx| > 0$ allora $z_2 \notin L$.

- $v \in a^k$ e $x \in b^k$.

$$z_i = a^{k+(i-1)|v|} b^{k+(i-1)|x|} c^k$$

Prendiamo $i = 2$:

$$z_2 = a^{k+|v|} b^{k+|x|} c^k \overset{?}{\in} L$$

Appartiene solo se:

$$k + |v| = k + |x| = k$$

Quindi necessariamente $|v| = 0$ e $|x| = 0$ che è una contraddizione perché allora $|vx| = 0$ e quindi $z_2 \notin L$.