Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

November 15, 2024

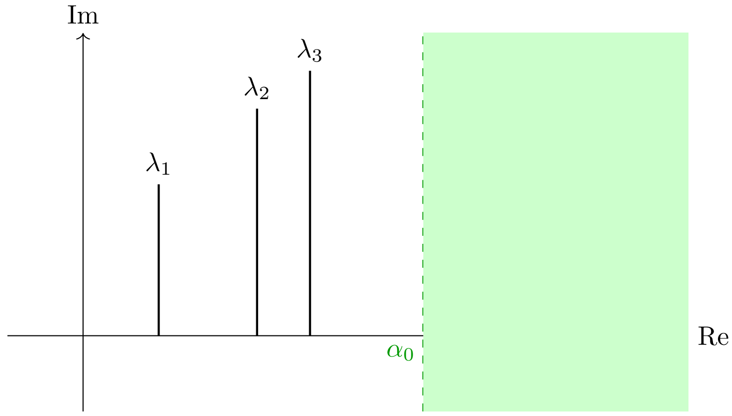
Contents

1 Trasformata di Laplace

Definition 1.1. $v(t)$ è definito nel tempo. V(s) è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st}dt$$

Figure 1: $\alpha \geq max\{\lambda_i\}$



1.1 Proprietà

La trasformata di LaPlace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

Propriety 1.2. ***Linearità:***

$$a_1v_1(t) + a_2v_2(t) = a_1V_1(s) + a_2V_2(s)$$

Propriety 1.3. ***Traslazione nel dom. del tempo:***

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)](s) = \overbrace{e^{-st}V(s)}^{\tau>0}$$

Propriety 1.4. ***Tralaslazione nel dom. dei complessi:***

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)] = V(s-\lambda)$$

Propriety 1.5. ***Cambio di scala:***

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Propriety 1.6. ***Proprietà delle derivate:*** *Se $v(t)$ ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito $v(0^-) = \lim_{t\to 0} v(t)$ allora anche la sua derivata i-esima ammette TdL.*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^iv(t)}{dt}\right] = S^iV(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \left.\frac{d^kv(t)}{d^t}\right|_{t=0^-} (S^{i-1-k})$$

Proof. Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\ &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^\infty v(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\ &= sV(s) - v(0^-)\end{aligned}$$

Proof. Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\ &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= \int_0^{+\infty}\left[S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)\right] - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}\end{aligned}$$

Propriety 1.7. ***Moltiplicazione per funzioni polinomiali:*** *Se $v(t)$ ammette TdL e t è un polinomio allora anche $tV(s)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{dS^i}$$

Proof. Per $i = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tv(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt &= -\int_{0^-}^{+\infty} v(t)\cdot(te^{-st})dt \\ &= -\int_0^{+\infty} v(t)\frac{d}{ds}te^{-st}dt \\ &= -\frac{d}{ds}\overbrace{\int_0^\infty v(t)e^{-st}dt}^{\text{TdL}} \\ &= -\frac{d}{ds}V(s)\end{aligned}$$

Propriety 1.8. ***Integrazione nel dom. del tempo****: Se $v(t)$ ammette TdL, allora $\Psi(t) = \int_{0^-}^t v(t)dt$ ammette TdL*

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza: $\alpha = max\{0, \alpha_0\}$

Proof.

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \Longrightarrow \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) = \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) &= S\mathcal{L}[v_1'(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

Propriety 1.9. ***Integrazione nel dom. dei complessi**: Se $v(t)$ ammette TdL e esiste $\lim_{t\to 0^-} \frac{v(t)}{t}$ allora:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dtd\zeta \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t)\underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}}dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

Theorem 1.10. ***Teorema del valore iniziale**: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t\to 0^-} v(t)$ allora*

$$\lim_{t\to 0^-} v(t) = \lim_{s\to\infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Theorem 1.11. ***Teorema del valore finale**: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t\to\infty} v(t)$ allora*

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Propriety 1.12. ***Convoluzione nel dom. del tempo**: Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulla per $t < 0$) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Proof.

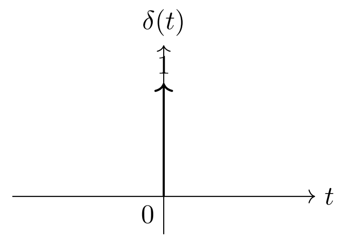
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(u*v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u*v)(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0^-}^{\infty} v(t-\tau)e^{-st}dt \right) d\tau
\end{aligned}$$

Sostituiamo $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-s(x+\tau)}dx \right) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x)e^{-sx}dt \\
&= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
\end{aligned}$$

1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse $\delta(t)$

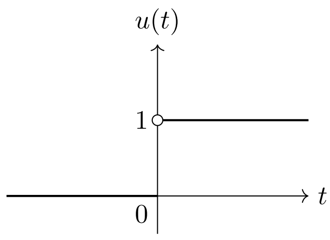
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A\overbrace{\cancel{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}}^{1} = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t-\tau)](s) = e^{-st}\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

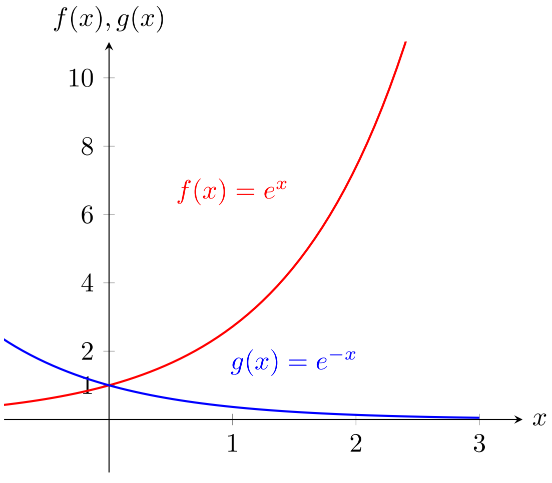


Unit Step $u(t)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\
&= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\
&= e^{-s\tau}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{e^{-s\tau}}{s}
\end{aligned}
$$

Esponenziale complesso causale: $v(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s-\lambda) \\
&= \frac{1}{s-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s-\lambda}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s-\lambda}$$

Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:

$$v(t) = \frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!}\mathcal{L}[t^l e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&\overset{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\frac{1}{s-\lambda} \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{l!(-1)^l}{(s-\lambda)^{l+1}} \\
&= \frac{1}{(s-\lambda)^{l+1}}
\end{aligned}$$

Esempio 1

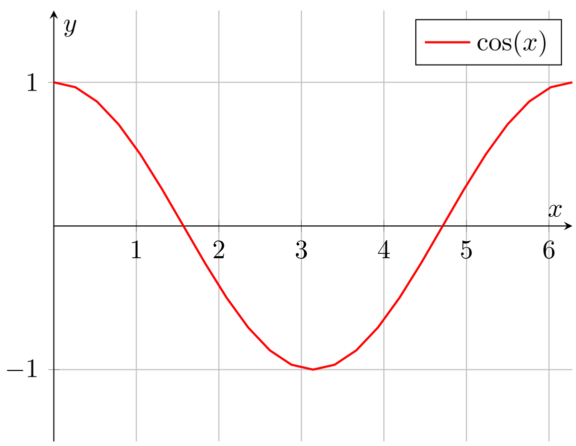
Con l = 1

$$\mathcal{L}[te^{e^{\lambda t}}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

Con l = 2

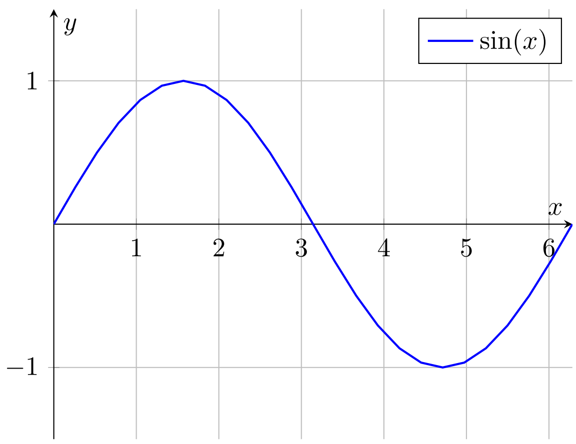
$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^3}$$

Funzione coseno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[cos(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-jw} + \frac{1}{s+jw}\right] \\
&= \frac{s}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

Funzione seno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[sin(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jw} - \frac{1}{s+jw}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{\cancel{s}+jw-\cancel{s}+jw}{s^2+w^2}\right] \\
&= \frac{w}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t)(u(t) = 0, t < 0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-),\ \frac{dv(0)}{dt};\ \frac{d^2v(0)}{dt^2};\ \dots\ \frac{d^{n-1}v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL allora anche $v(t)$ ammette TdL e:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

Applicando $n+m$ volte la regole della derivata:

$$\begin{aligned}
& a_n \left[S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \left.\frac{d^k v(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-} (S^{n-1-k})\right] + \\
& + a_{n-1} \left[S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \left.\frac{d^k v(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-} (S^{n-2-k})\right] + \\
& + \cdots + a_0 V(s) \\
& = b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \cdots + b_0 U(s)
\end{aligned}$$

Imponiamo le C.I.: $\left. u(t)\right|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\underbrace{\left[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0\right] V(s)}_{d(s)} +$$

$$\underbrace{- a_n v(0^-) S^{n-1} \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0^-}\right) - \ \ldots\ - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \left.\frac{d^k v(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-}\right)}_{p(s)}$$

$$= \underbrace{\left(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0\right)}_{n(s)} U(s)$$

$$\Longrightarrow d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinonio di grado m che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonio caratteristico di u(t)
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate di uscita. Polinimonio caratteristico di v(t)
- $p(s)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{j+1} \frac{d^{n-j}}{\ldots}\right)$$

- $\frac{P(s)}{d(S)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I ì del sistema e dai coefficenti del polinomio caratteristico di $v(t)$

$$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}U(s)$ è una funzione razionale che dipende dai coefficenti del polinomio caratteristico di $u(t)$, dei coefficenti del polinomio caratteristico di v(t) moltiplicati per tali u(t):

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$ funzione di trasferimento $H(s)$:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$

Rapporto tra i polinomi car. di u(t) e v(t)

H(s) è definita come TdL delle risposte impulsive $h(t)$

$$h(t) = d_0\delta_0(t) + ...TODO$$