Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

January 16, 2025

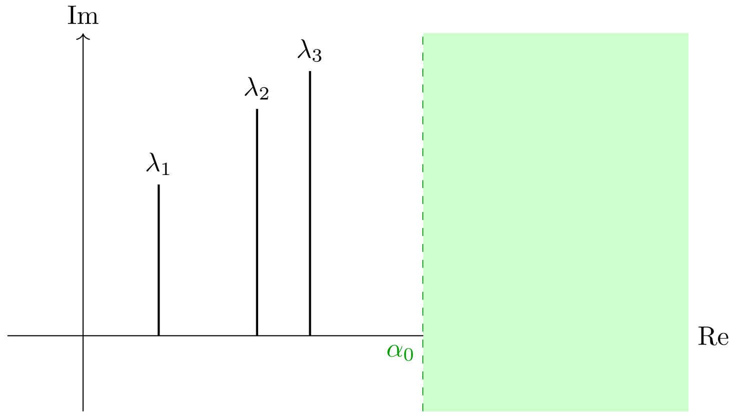
Contents

1 Trasformata di Laplace

Definition 1.1. $v(t)$ è definito nel tempo. V(s) è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st}dt$$

Figure 1: $\alpha \geq max\{\lambda_i\}$



1.1 Proprietà

La trasformata di LaPlace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

Property 1.2. ***Linearità:***

$$a_1v_1(t) + a_2v_2(t) = a_1V_1(s) + a_2V_2(s)$$

Property 1.3. ***Traslazione nel dom. del tempo:***

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)](s) = \overbrace{e^{-st}V(s)}^{\tau>0}$$

Property 1.4. ***Tralaslazione nel dom. dei complessi:***

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)] = V(s-\lambda)$$

Property 1.5. ***Cambio di scala:***

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Property 1.6. ***Proprietà delle derivate:*** *Se $v(t)$ ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito $v(0^-) = \lim_{t\to 0} v(t)$ allora anche la sua derivata i-esima ammette TdL.*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^iv(t)}{dt}\right] = S^iV(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \left.\frac{d^kv(t)}{d^t}\right|_{t=0^-}(S^{i-1-k})$$

Proof. Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\ &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\ &= sV(s) - v(0^-)\end{aligned}$$

Proof. Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\ &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= \int_0^{+\infty}\left[S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)\right] - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}\end{aligned}$$

Property 1.7. ***Moltiplicazione per funzioni polinomiali:*** *Se $v(t)$ ammette TdL e t è un polinomio allora anche $tV(s)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{dS^i}$$

Proof. Per $i = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tv(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt &= -\int_{0^-}^{+\infty} v(t)\cdot(te^{-st})dt \\ &= -\int_0^{+\infty} v(t)\frac{d}{ds}te^{-st}dt \\ &= -\frac{d}{ds}\overbrace{\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt}^{\text{TdL}} \\ &= -\frac{d}{ds}V(s)\end{aligned}$$

Property 1.8. ***Integrazione nel dom. del tempo****: Se $v(t)$ ammette TdL, allora $\Psi(t) = \int_{0^-}^{t} v(t)dt$ ammette TdL*

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza: $\alpha = max\{0, \alpha_0\}$

Proof.

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \Longrightarrow \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) = \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) &= S\mathcal{L}[v_1'(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

Property 1.9. ***Integrazione nel dom. dei complessi***: *Se $v(t)$ ammette TdL e esiste $\lim_{t\to 0^-} \frac{v(t)}{t}$ allora:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dtd\zeta \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t) \underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

Theorem 1.10. ***Teorema del valore iniziale***: *Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t\to 0^-} v(t)$ allora*

$$\lim_{t\to 0^-} v(t) = \lim_{s\to\infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Theorem 1.11. ***Teorema del valore finale***: *Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t\to\infty} v(t)$ allora*

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Property 1.12. ***Convoluzione nel dom. del tempo***: *Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulla per $t < 0$) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Proof.

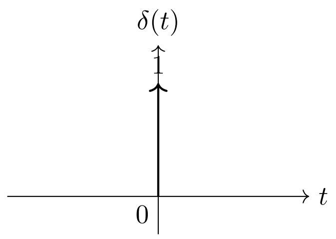
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(u*v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u*v)(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau\right) e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau)\left(\int_{0^-}^{\infty} v(t-\tau)e^{-st}dt\right) d\tau
\end{aligned}$$

Sostituiamo $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau)\left(\int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-s(x+\tau)}dx\right) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x)e^{-sx}dt \\
&= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
\end{aligned}$$

1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse $\delta(t)$

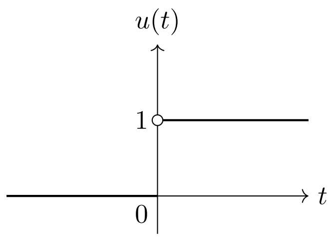
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A\overbrace{\cancel{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}}^{1} = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t-\tau)](s) = e^{-st}\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

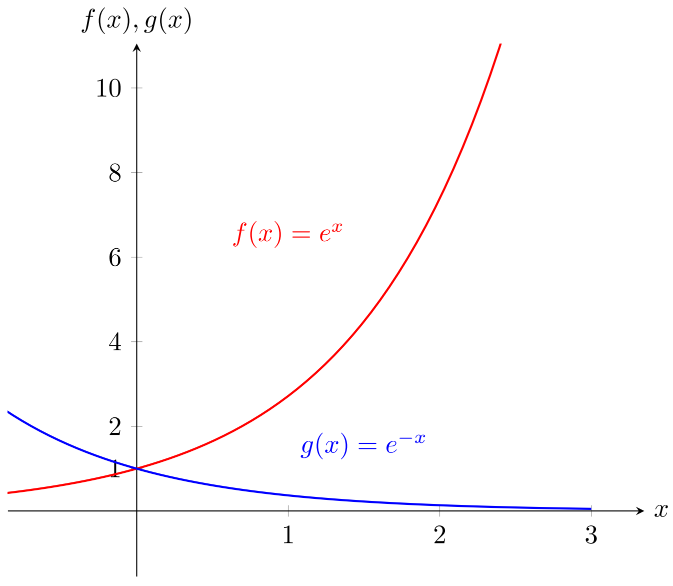


Unit Step $u(t)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\
&= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\
&= e^{-s\tau}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{e^{-s\tau}}{s}
\end{aligned}
$$

Esponenziale complesso causale: $v(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s-\lambda) \\
&= \frac{1}{s-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s-\lambda}
$$

$$
\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s-\lambda}
$$

Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:

$$
v(t) = \frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!}\mathcal{L}[t^l e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&\overset{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\frac{1}{s-\lambda} \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{l!(-1)^l}{(s-\lambda)^{l+1}} \\
&= \frac{1}{(s-\lambda)^{l+1}}
\end{aligned}
$$

Esempio 1

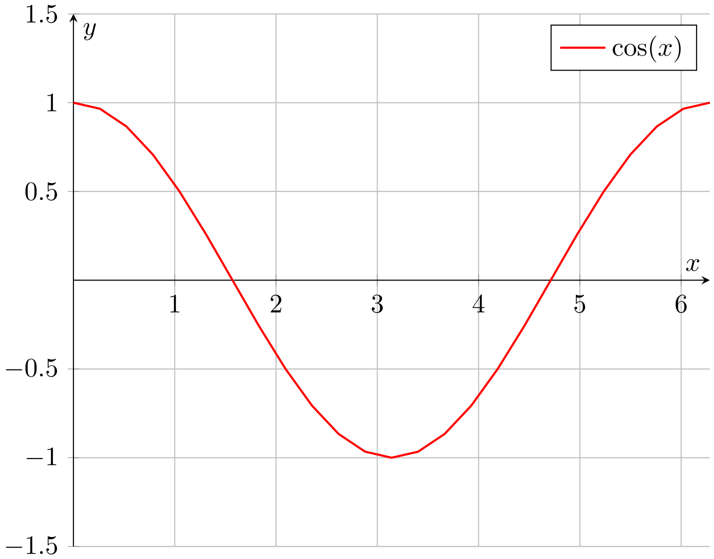
Con l = 1

$$
\mathcal{L}[te^{e^{\lambda t}}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}
$$

Con l = 2

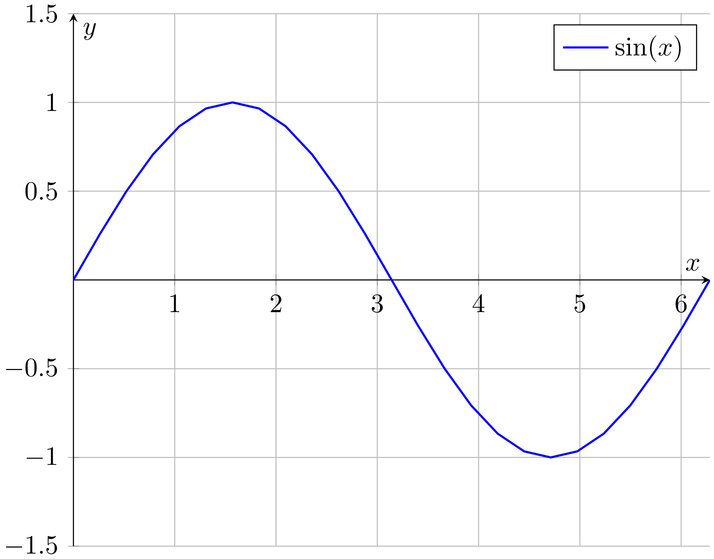
$$
\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^3}
$$

Funzione coseno:



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[cos(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - jw} + \frac{1}{s + jw}\right] \\
&= \frac{s}{s^2 + w^2}
\end{aligned}
$$

Funzione seno:



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[sin(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt}-e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jw} - \frac{1}{s+jw}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{\cancel{s}+jw-\cancel{s}+jw}{s^2+w^2}\right] \\
&= \frac{w}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t)\cdot\delta_{-1}(t)(u(t)=0, t<0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-),\ \frac{dv(0)}{dt};\ \frac{d^2v(0)}{dt^2};\ \dots\ \frac{d^{n-1}v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL allora anche $v(t)$ ammette TdL e:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

Applicando $n+m$ volte la regole della derivata:

$$
\begin{aligned}
&a_n\left[S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}(S^{n-1-k})\right] + \\
&+ a_{n-1}\left[S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}(S^{n-2-k})\right] + \\
&+ \dots + a_0 V(s) \\
&= b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)
\end{aligned}
$$

Imponiamo le C.I.: $u(t)\bigg|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\underbrace{\left[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0\right] V(s)}_{d(s)} +$$

$$\underbrace{- a_n v(0^-) S^{n-1} \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt}\bigg|_{t=0^-}\right) S^{n-2} - \ \ldots \ - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}\right)}_{p(s)}$$

$$= \underbrace{\left(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0\right)}_{n(s)} U(s)$$

$$\implies d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinonio di grado m che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonio caratteristico di u(t)
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate di uscita. Polinimonio caratteristico di v(t)
- $p(s)$:

  $$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{j+1} \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\bigg|_{t=0^-}\right)$$

  Polinomio di grado $n-1$ che dipende solo dalle C.I di v(t)
- $\frac{P(s)}{d(S)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I ì del sistema e dai coefficenti del polinomio caratteristico di $v(t)$

  $$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)} U(s)$ è una funzione razionale che dipende dai coefficenti del polinomio caratteristico di $u(t)$, dei coefficenti del polinomio caratteristico di v(t) moltiplicati per tali u(t):

  $$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} U(s)$$

Esempio

Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3 v(t)}{dt^3} + \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3v(t)}{dt^3}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right]$$

$$\downarrow$$

$$S^3V(s) - S^2v(0^-) - S\frac{dv(0^-)}{dt} - \cancel{S^0}\frac{d^2v(0^-)}{dt^2} +$$

$$+S^2V(s) - Sv(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} = SU(s)$$

$$\underbrace{(S^3+S^2)}_{d(s)}V(s) - \underbrace{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt}\right]}_{p(s)} = \underbrace{S}_{n(s)}U(s)$$

$$V(s) = \frac{S}{(S^3+S^2)}U(s) + \frac{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt}\right]}{S^3+S^2}$$

H(s) è definita come TdL delle risposte impulsive $h(t)$. È una funzione razionale con grado del numeratore generalemnte minore o uguale del denominatore.

$$h(t) = d_0\delta_0(t) + ... \left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l}\frac{t^l}{l!}e^{\lambda_i t}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$\stackrel{\mathcal{L}}{=} d_0 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1}\frac{d_{i,l}}{(s-\lambda)^{l+1}} = H(s)$$

1.3.1 Funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$
$$= \frac{b_m(S-\beta)^{\zeta_1}(S-\beta_2)^{\zeta_2}\ ...\ (S-\beta_q)^{\zeta_q}}{a_n(S-\alpha)^{\mu_1}(S-\alpha_2)^{\mu_2}\ ...\ (S-\alpha_n)^{\mu_r}}$$

Rapporto tra i polinomi car. di u(t) e v(t)

Dove α_i e β_j sono rispettivamente radici del denominatore e del numeratore.

Possiamo anche riscriverla come:

$$H(s) = k\frac{\prod_{i=1}^{m}(S-Z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(S-P_i)} \quad \text{dove} \quad k = \frac{b_m}{a_n}$$

Dove $(S-Z_i)$ e $(S-P_i)$ sono rispettivamente zeri e poli della funzione razionale.

Definition 1.13. Definiamo come zero di una funzione razionale $H(s)$ un qualiasi numero $\beta \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\beta) = 0$.

Definition 1.14. Definiamo come polo di una funzione razionale $H(s)$ un qualunque numero $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\alpha) = \infty$.

Dato H(s) in forma ridotta (ho eliminato le radici in comune): Siano $\lambda_1,\ ...\ \lambda_r$ con $r \leq n$ i suoi poli dopo la semplificazione se $Re(\lambda_i) < 0$ per $i = 1,\ ...\ r$ allora il sistema è BIBO stabile.

Lemma 1.15. *Un sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli giacciono nel semipiano complesso negativo.*

Per stabilizzare un sistema (BIBO stabilizzato) devo togliere gli zeri λ_i con $Re(\lambda_i) > 0$, dividendoli per il loro corrispettivo polo.

Esempio 1

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Pol. Car degli ingressi}}{\text{Pol. Car delle uscite}} = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3}$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} = \frac{(s-4)(s-1)}{s-3}$$

Poiché $\lambda_1 = 3$ non è asintonticamente stabile poiché la sua parte reale è maggiore di 0.
Non è neanche BIBO stabile perché tutte le radici del denominatore (poli di $H(s)$) hanno parte reale maggiore di 0.

Esempio 2

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

Poiché $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ sono minori di 0 allora il sistema è asintonticamente stabile. Ricordiamo che se un sistema è asintonticamente stabile allora è anche BIBO stabile.

Esempio 3

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u(t) - 4u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} = \frac{(s+4)\cancel{(s-1)}}{\underbrace{(s+3)}_{\lambda_1=-3}\underbrace{(s+2)}_{\lambda_2=-2}\cancel{(s-1)}}$$

Non è asintonticamente stabile. Tuttavia è BIBO stabile poiché tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale minore di 0.

2 Antitrasformata di Laplace

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \implies \begin{cases} \underbrace{deg[n(s)] \geq deg[d(s)]}_{\text{Sistema proprio}} \implies A \\ \underbrace{deg[n(s)] < deg[d(s)]}_{\text{Sistema strett. proprio}} \implies B \end{cases}$$

A → Divisione polinomiale → Fratti semplici → Antitrasformata
B → Fratti complessi → Antitrasformata

2.1 Divisione polinomiale

$$V(S) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{dove} \quad deg[r(s)] < deg[d(s)], k \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[K\delta(t)] = K \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} K\delta_0(t)$$

Esempio

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \quad \text{dove} \quad m = 2, n = 2$$

Quotient	2
Divisor	$s^2 - s - 1$
Step 1:	$2s^2 + 4s - 3$
Subtract:	$-(2s^2 - 2s - 2)$
Remainder:	$6s - 1$

$$V(s) = \frac{6s - 1}{s^2 - s + 1} + 2$$

2.2 Fratti semplici

$$\frac{r(s)}{d(s)} = d_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda)^{l+1}}$$

Esempio 1

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s+1)^2(s-2)(s+5)}$$

$$V(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

A, B, C, D sono i $c_{i,l}$

Esempio 2

$$\frac{s - 20}{(s+4)(s-2)} = \frac{c_{1,0}}{(s+4)} + \frac{c_{2,0}}{s-2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}$$

1. Metodo:

$$\frac{A(s-2)+B(s+4)}{(s+4)(s-2)} = \frac{AS-2A+BS+4b}{(s+4)(s+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+4B=-20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \end{cases}$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

2. Metodo:

$$c_{i,l} = \lim_{s\to\alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1}\left((s-\alpha_i)^{\mu_i}\frac{r(s)}{d(s)}\right)}{ds^{\mu_i-l-1}}$$

$$c_1 = A = \lim_{s\to-4} \frac{\cancel{d^{1-0-1}}\left((s+4)^1\frac{s-20}{(s+4)(s-2)}\right)}{ds^0} = \frac{-24}{-6} = 4$$

$$c_2 = B = \lim_{s\to 2} \frac{d^{1-0-1}\left((s-2)^1\frac{s-20}{(s+4)(s-2)}\right)}{\cancel{ds^0}} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

Ora si applica l'antitrasformata:

$$V(s) = k + \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}}$$

$$\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{=} \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}}\right](t)$$

$$= k\delta_0(t) + \left[\sum_{i=0}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l}\frac{t^l}{l!}e^{\lambda_i t}\delta_{-1}(t)\right]$$

Esempio completo

$$v''(t) - v'(t) - 2v(t) = u''(t) + 2u'(t) + u(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{3t}\delta_{-1}(t)$$

Quello che ci viene chiesto è

1. Stabilità
2. Risposta libera (nel tempo e in frequenza)
3. Risposta impulsiva

4. Risposta forzata
5. Risposta totale

Partiamo con il primo punto:

1. Polinomio caratteristico: $s^2 - s - 2 = 0 \to \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ e $\mu_i = 1$
   Non è asintonticamente stabile perché $\lambda_1 > 0$

$$V(s) = \underbrace{\frac{p(s)}{d(s)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{\overbrace{h(s)}^{H(s)}}{d(s)} \cdot U(s)}_{V_f(s)}$$

   Per garantire stabilità BIBO i poli di $H(s)$ devono avere parte reale minore di 0.
   Calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^{\cancel{2}}}{(s-2)\cancel{(s+1)}} = \frac{s+1}{s-2}$$

   Non è BIBO stabile perché λ_1 (che è un polo della funzione di trasferimento) è maggiore di 0.

2a. Risposta libera nel tempo:

$$\begin{aligned} v_l(t) &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} c_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \\ &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} v_l(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ v_l'(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \end{cases} \overset{t=0}{\to} \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$v_l(t) = e^{-t}$$

2b . Risposta libera in frequenza: Facciamo la trasformata di Laplace del sistema:

$$\mathcal{L}[v''(t) - v'(t) - 2v(t)] = \mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)]$$

$$\overbrace{(s^2 V(s) - s + 1)}^{\mathcal{L}[v''(t)]} - \overbrace{(sV(s) + 1)}^{\mathcal{L}[v'(t)]} - \overbrace{2V(s)}^{\mathcal{L}[v(t)]} = \overbrace{(s^2 U(s)}^{\mathcal{L}[u''(t)]} + \overbrace{2sU(s)}^{\mathcal{L}[u'(t)]} + \overbrace{U(s)}^{\mathcal{L}[u(t)]}$$

$$\overbrace{(s^2 - s - 2)}^{\text{pol. car. uscite}} V(s) - s + 2 = \overbrace{(s^2 + 2s + 1)}^{\text{pol. car entrate}} U(s)$$

$$V(s) = \frac{s-2}{(s-2)(s+1)} + \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)} U(s)$$

Vediamo ora cosa è $U(s)$:

$$u(t) = \underbrace{e^{-3t}\delta_{-1}(t)}_{\lambda=-3, A=1} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} U(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{v_l(s)} + \overbrace{\underbrace{\frac{s+1}{s-2}}_{H(s)} \cdot \frac{1}{s+3}}^{V_f(s)}$$

Quindi la risposta libera in Laplace è:

$$v_l(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\lambda=1, A=1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

L'unica differenza che ci sta tra risposta libera e in frequenza e che quella in frequenza, quando la andiamo a trovare dobbiamo moltiplicarla per la funzione causale, ovvero il gradino.

3. Risposta impulsiva:

$$H(s) = \frac{s+1}{s-2}$$

Facciamo la divisione tra polinomi dove otteniamo:

$$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2}$$

Applichiamo l'antitrasformata: h(t) $= \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \delta_0(t) + 3e^{2t}\delta_{-1}(t)$

4. Risposta forzata: Proviamo entrambi i metodi, partiamo con il primo (i fratti semplici):

$$V_f(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\frac{As + 3A + Bs - 2B}{(s-2)(s+3)} = \frac{(A+B)s + (3A - 2B)}{(s-2)(s+3)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A - 2B = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{3}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{5}\frac{1}{s+3} = \left(\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Okay ora proviamo con il metodo dei limiti:

$$c_i = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{d^{\mu-l-1} n(s)}{ds^{s-l-1} d(s)} (s - \lambda)^{\mu}$$

$$A = \lim_{S \to +2} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{\cancel{(s-2)}(s+3)} \cancel{(s-2)} = \frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{S \to -3} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{(s-2)\cancel{(s+3)}} \cancel{(s+3)} = \frac{2}{5}$$

E come si vede, si ottiene il risultato medesimo con diverso metodo.

3 Sistema a blocchi

In generale ci sono tre modi per mettere a sistema un sistema a blocchi:

- **Sistema in serie** (o cascata) dove l'output di un sistema A diventa l'input di un sistema B
$$x_2 = y_1$$
- **Sistema parallelo** dove un input x viene separato in x_1 e x_2, entrano all'interno rispettivamente dei sistemi A e B e poi vengono sommati in una singola uscita y.
$$x = x_1 = x_2$$
$$y = y_1 + y_2$$
- **Sistema di retroazione** dove l'uscita di un sistema A diventa l'input di un sistema B e viceversa.
$$x = x_1 + y_2$$
$$y = y_1 = x_2$$

I blocchi avranno sempre un singolo input e un singolo output (poiché sistemi SISO (Single Input Single Output)), per quanto riguarda i nodi sommatori, possono entrare infiniti numeri di archi e generalmente ne esce solo una.
Esistono 2 tipi di controlli:

1. *Il controllo ad anello aperto* è un sistema in cui l'uscita non influenza l'input. È un sistema a ciclo aperto, ovvero non c'è feedback.
2. *Il controllo ad anello chiuso* è un sistema in cui l'uscita influenza l'input. È un sistema a ciclo chiuso, ovvero c'è feedback. Dove il sistema che ritorna il feedback del sistema A si chiama funzione di trasferimento del sistema.

I sistemi che ci interessano di più sono quelli a ciclo chiuso, in quanto sono quelli che si avvicinano di più alla realtà.
Guardando la nomenclatura dei sistemi a blocchi, si ha che:

- Sistema di riferimento r è l'input del sistema
- Elemento di feedforward F è un blocco che manda un segnale di controllo al processo
- Processo P è il sistema che trasforma l'input in un output (che però può essere disturbato)
- Elemento di feedback B è un blocco che manda un segnale di feedback b al processo per correggere l'errore
- Segnale di attuazione che è in genere una sorta di errore $e = r - b$ (in genere viene chiamato chiamato feedback negativo quando $e = r - b$ mentre è feedback positivo quando $e = r + b$)

3.1 Controllori

I controllori sono di tre tipi con relative regole di controllo:

- P è il controllore proporzionale e la sua regola di controllo è $u(t) = K_p e(t)$
- I è il controllore integrale e la sua regola di controllo è $u(t) = K_i \int e(\tau)d\tau$
- D è il controllore derivativo e la sua regola di controllo è $u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$

Possiamo anche combinarli insieme, esistono tipi "compositi" di controllori come PID, PI, PD, I, P, D.

$$\mu_{pid} = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t)dt$$

Quando abbiamo un sistema a blocchi complesso e ridurlo a un sistema a blocchi più semplice, applicando diverse regole di riduzione:

3.2 Forma canonica - nomenclatura

La **Forma canonica** è una forma standard di rappresentazione di un sistema a blocchi.

1. G: Funzione di trasferimento diretta
2. H: Funzione di trasferimento di feedback
3. GH: Funzione di trasferimento del loop (o anello)
4. $\frac{C}{R}$ = Funzione di trasferimento dell'anello chiuso

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} = \frac{\text{eq. car. dell'ingresso}}{\text{eq. car. dell'uscita}}$$

5. $\frac{E}{R}$: rapporto del segnale di attuazione $= \frac{1}{1 \pm GH}$
6. $\frac{B}{R}$: rapporto di feedback $= \frac{GH}{1 \pm GH}$

L'obiettivo è di compattare il sistema fino ad arrivere ad un sistema a blocchi uguale alla forma canonica. Prendiamo per esempio il sistema massa molla smorzatore:

$$\begin{aligned}
ma &= \sum F \\
mx'' &= F_{ext} - kx - bx' \\
F_{ext} &= kx + bx' + mx'' \\
F_{ext}(s) &= kX(s) + bsX(s) + ms^2X(s) \\
X(s) &= \frac{F_{ext}(s)}{ms^2 + bs + k}
\end{aligned}$$

3.3 Regole di trasfromazione

1. **Combinazione di blocchi in serie**: dati due blocchi A e B in serie, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di AB.
2. **Combinazione di blocchi in parallelo**: dati due blocchi A e B in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è (in base al sommatore) $A \pm B$.
3. **Rimozione di blocchi in parallelo**: dati due blocchi A e B in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di AB diviso la somma di AB.
4. **Rimozione di anello feedback**: dati due blocchi A e B in feedback, riducendolo otteniamo un singolo blocco che diventa $\frac{A}{1 \pm AB}$
5. **Rimozione del loop**: dati due blocchi A e B in loop, possiamo spostare il blocco retroattivo all'inizio del blocco iniziale
6. **Riorganizzazione degli input**: posso organizzare gli input del sistema a blocchi come voglio, l'importante è che alla fine si arrivi ad un sistema a blocchi canonico.
7. **Spostamento dei nodi di somma prima di un blocco**: posso spostare i nodi di somma prima di un blocco
8. **Spostamento dei nodi di somma dopo un blocco**: posso spostare i nodi di somma dopo un blocco
9. **Spostamento dei nodi prima di un blocco**: posso spostare i nodi prima di un blocco
10. **Spostamento dei nodi dopo un blocco**: posso spostare i nodi dopo un blocco

4 Diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono una rappresentazione grafica di un sistema a blocchi. Guardiamo ora le diverse componenti di un diagramma di flusso:

- **Percorso in avanti:** Un cammino che unisce un nodo di input ad un nodo di output
- **Percorso ad anello:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e senza passare più volte in altri nodi intermedi
- $\rightarrow$ **Self loop:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e non tocca altri nodi intermedi
- **Guadagno**: prodotto di tutti i pesi degli archi lungo un percorso

4.1 Convertire un Sistema a blocchi in un diagramma di flusso

Per convertire un sistema a blocchi in un diagramma flussi (così che sia più facile da gestire) dobbiamo convertire gli archi e i nodi nel seguente modo:

1. Indiviiamo i nodi di input e output
2. Per ogni nodo somma si aggiunge un nodo
3. Per ogni nodo dello schema a blocchi si aggiunge un nodo al diagramma di flusso
4. Unisco i nodi con gli archi il cui peso è la funzione dentro al blocco. Se tra un nodo e l'altro non ci sono blocchi, il suo peso vale 1.

4.2 Funzione di Mason

Definition 4.1. La funzione di Mason è una funzione che permette di calcolare la funzione di trasferimento di un sistema a blocchi.

$$T = \sum_i \frac{P_i \Delta_i}{\Delta}$$

dove

- P_i è il guadagno del percorso i
- Δ_i è il determinante del percorso i
- Δ è il determinante del sistema

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk} \\ &= 1 - \left(\sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} + ... \right) \\ &= 1 - \begin{pmatrix}\text{Somma dei guadagni di tutti gli} \\ \text{alberi}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Somma dei dei guadagni} \\ \text{dei prodotti degli anelli} \\ \text{che non toccano a due}\end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix}\text{somma dei guadagni dei prodotti} \\ \text{degli anelli che non si toccano 3} \\ \text{a 3}\end{pmatrix} + ...\end{aligned}$$

Esempio 1

Prendiamo come esempio il diagramma di flusso visto a lezione (guarda gli punt) e calcoliamo la funzione di Mason. Troviamo i guadagni per ogni percorso:

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

$$P_{1,1} = (x_2, x_3) = -GH$$

L'ordine in cui vengono chiamati i percorsi è arbitrario. Sono stati scelti semplicemente nell'ordine in cui li abbiamo notati. I guadagni che hanno 1 non vengono considerati. Calcoliamo ora il determinante del sistema:

$$\Delta = 1 - (P_{1,1}) = 1 + GH$$

Annulo tutti gli archi che toccano il percorso i-esimo:

$$\Delta_1 = 1 - \cancel{P_{1,1}} = 1 - 0 = 1$$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G \cdot 1}{1 + GH} = \frac{G}{1 + GH}$$

Esempio 2

TODO...

	Anelli	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
A_1^1	-AB			1	1						
A_2^1	-CD							1	1	1	
A_3^1	FCE	1	1				1	1	1	1	
A_4^1	FGE	1	1				1	1	1	1	1
A_5^1	ACE	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_6^1	AGE	1	1	1	1	1	1		1	1	1

5 Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono un modo per rappresentare graficamente la risposta in frequenza di un sistema.

Esempio

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{rad}{s} \alpha Hz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 2u(t) + \int u(t)dt \\
&= 2sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int sin\left(\frac{1}{2}t\right)dt \\
&= 2sin\left(\frac{1}{2}t\right) - 2cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\
&= \sqrt{2^2+2^2}\sin\left(\frac{1}{2}t + a\tan\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\
&= 2.83\sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\
&= A\sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}
$$

Questo diagramma ci aiuta a capire come si comporta un sistema descritto da segnali **sinusoidali**.

5.1 Motivo delle sinusoidi

I sistemi descritti da segnali sinusoidali sono utili perchè vedremo che qualsiasi segnale può essere rappresentato come una somma di sinusoidi.

Un sistema LTI causale permette le seguenti operazioni:

- $u(t) \cdot a$
- $\frac{du(t)}{t}$
- $\int u(t)\,dt$
- $u_1(t) + u_2(t)$

L'output del sistema è un onda scalata rispetto all'ampiezza o ritardata rispetto al tempo:

Esempio

Prendiamo ad esempio il seguente sistema:

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \sin(\frac{1}{2}t) \\
\omega &= \frac{1}{2}\frac{rad}{s}\alpha Hz
\end{aligned}
$$

Calcoliamo l'ingresso:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= 2 \cdot u(t) + \int u(t)\,dt \\
&= 2\sin(\frac{1}{2}t) + \int \sin(\frac{1}{2}t)\,dt \\
&= 2\sin(\frac{1}{2}t) - 2\cos(\frac{1}{2}t)
\end{aligned}
$$

Utilizziamo un'**identità trigonometrica**, cioè:

$$\begin{aligned} & a sin(x) + b cos(x) = \\ & = \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sin(x+\rho) \end{aligned}$$

dove: $\rho = atan\left(\frac{b}{a}\right) \quad a \geq 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= \overbrace{2}^{a} \sin(\overbrace{\frac{1}{2}t}^{x}) \overbrace{-2}^{b} \cos(\frac{1}{2}t) \\ &= \sqrt{2^2+(-2)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + atan\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{8} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + atan(-1)\right) \\ &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\ &= A \cdot \sin(\omega + \phi) \end{aligned}$$

5.2 Rappresentazione del diagramma di Bode

Il diagramma di bode permette di rappresentare il comportamento di un sistema LTI formato da sinusoidi, di seguito guardiamo un diagramma semi-logaritmico (cioè con un asse lineare e uno logaritmico) che rappresenta l'ampiezza e la fase di un sistema LTI:

Osservazione:
Il decibel dB è un unità di misura inventata nel 1920 per misurare quanto si disperde il segnale acustico su una transmission unit ($1TU = 10\log_{10}\Delta_{\text{Potenza}}$). Quindi un decibel è il minimo di potenza che un orecchio umano può percepire.

$$\text{Potenza} = \text{Ampiezza}^2$$

$$1bel = 1TU = 10\log_{10} A^2 = 20\log_{10} A$$

$$1dB = \frac{1}{10}bel$$

Esempio

$$u(t) = \sin(\frac{1}{2}t) \quad \omega = \frac{1}{2}$$

$$v(t) = 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right)$$

Studiamo il sistema in frequenza:

$$V(s) = \left(2 + \frac{1}{s}\right)U(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s+1}{s} \quad \text{Funzione di trasferimento del sistema}$$

s è un numero complesso:

$$s = \sigma + j\omega$$

Con la risposta in frequenza la s diventa solo $s = j\omega$, quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{2j\omega + 1}{j\omega} \\ &= \frac{2\cancel{j\omega}}{\cancel{j\omega}} + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} \\ &= 2 - \frac{1}{\omega} \cdot j\end{aligned}$$

La rispsota del sistema nel piano dei complessi è: dove:

$$\begin{aligned}\text{Ampiezza} = l = \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \\ \text{Fase} = \theta = atan2\left(\Im, \Re\right)\end{aligned}$$

$$atan2(\sigma, j\omega) = \begin{cases} atan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \text{se } \sigma > 0, \ \ \omega \in \mathbb{R} \\ segno(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} & \text{se } \sigma = 0, \ \ \omega \neq 0 \\ atan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi \cdot segno(\omega) & \text{se } \sigma < 0, \quad \text{o } \sigma = 0 \ \ \omega \geq 0 \end{cases}$$

Il diagramma di Bode sarà:

5.3 Risposta in frequenza

$$u(t) = Ae^{\omega_0 + \phi} \implies Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t} \implies LTIBIBO \implies v(t)$$

$$A \in \mathbb{R}_+ \ \ \phi, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}H(j\omega) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega t}d\tau \ \text{ per ogni } \omega \in \mathbb{R} \\ &:= \mathcal{L}[h(t)]\Big|_{s=j\omega}(s)\end{aligned}$$

Prendiamo come esempio un fasore:

$$u(t) = Ae^{j\phi}e^{j\omega t}$$

$$u(t) \to [h(t)] \to v(t)$$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)Ae^{j\phi}e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\
&= Ae^{j\phi}e^{j\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= Ae^{j\phi}e^{j\omega t}H(j\omega) = Ae^{j\phi}e^{j\omega t}A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \\
&= AA(\omega)e^{j(\phi+\phi(\omega))}e^{j\omega t}
\end{aligned}
$$

Dove A è l'ampiezza di $u(t)$, $A(\omega)$ è l'ampiezza della risposta in frequenza, ϕ è la fase di $u(t)$ e $\phi(\omega)$ è la fase della risposta in frequenza, ω è la frequenza iniziale e rimane invariata. *Bode ci serve a capire il comportamento del sistema al variare della frequenza del segnale d'ingresso.* Che sia un fasore o una sinusoide ci dice cosa succede se aumentiamo o diminuiamo la frequenza del nostro segnale d'ingresso.

5.4 Operazioni tra numeri complessi

Property 5.1. *Siano a e b due numeri complessi, allora:*

- $|ab| = |a||b|$
- $arg(ab)$ = $arg(a)$ + $arg(b)$
- $|a/b| = |a|/|b|$
- $arg(a/b)$ = $arg(a)$ - $arg(b)$
- $|a^n| = |a|^n$
- $arg(a^n)$ = n $arg(a)$

Property 5.2. *Sia s un numero complesso con $x \in \mathbb{C} t.c.$:*

$$\log s = x \iff s = e^x$$

E scrivendo S in forma esponenziale e x in forma complessa:

$$S = \rho e^{j\omega} \quad x = \sigma + j\omega$$

$$
\begin{aligned}
\log s &= x \\
&= \log\rho + j\phi \\
&= \log|s| + jarg(s)
\end{aligned}
$$

5.5 Forma di Bode

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{\sum_j b_j S^j}{\sum_i a_i S^i}U(s) \\
&= K\frac{(s-z_1)^{\mu_1}\dots(s-z_e)^{\mu_e}}{(s-p_1)^{\gamma_1}\dots(s-z_r)^{\gamma}_r}
\end{aligned}
$$

Molteplicità delle soluzioni algebriche:

$$l \leq m, \mu_1 + \cdots + \mu_e = m$$

$$r \leq n, \gamma_1 + \cdots + \gamma_r = n$$

Theorem 5.3. *La forma di Bode di un sistema LTI è:*

$$H(s) = K_b \frac{\prod_i (1 + s\tau_i')^{\mu_i'} \prod_k \left(1 + 2\zeta_k' \frac{s}{\omega_{n,k}'} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k}^2)}\right)^{\mu_k'}}{(S^{r_1}) \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k}^2)}\right)^{\mu_k}}$$

K_b*: è il termine costante (o guardagno di Bode)*

S^r*: raggruppa tutti le radici nulle*

$(1 + s\tau_i)^{\mu_i}$*: raggruppa la singola radice reale*

$\left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k}^2)}\right)^{\mu_k}$*: raggrupa la singola radice complessa coniugata*

Per arrivare a questa forma dobbiamo raccogliere le "costanti":

Esempio

$$H(s) = 4\frac{s^3 + s^2 - 2s}{s^3 + s^2}$$

1. Poli/Zeri Nulli

$$H(s) = 4\frac{s(s+2)(s-1)}{s^2(s+1)} = 4\frac{1}{2}\frac{s^2 + s - 2}{s+1}$$

2. Poli e zeri reali e cerco di arrivare alla forma di bode: $(1 + s\tau)^{\mu}$

$$\begin{aligned}
H(s) &= 4\frac{1}{s}\frac{s^2+s-2}{s+1} \\
&= 4\frac{1}{s}\frac{(s+2)(s-1)}{s+1} \\
&= 4\frac{1}{s}\frac{-(1-s)2\left(1+\frac{s}{2}\right)}{(1+s)} \\
&= \frac{-8}{1}\frac{1}{s}\frac{(1-s)\left(1-\frac{s}{2}\right)}{1+s} \\
&= -8\frac{1}{s}\frac{(1-s)\left(1+\frac{s}{2}\right)}{1+s} \\
&= -8\frac{1}{s}\frac{(1-s)+\left(1+\frac{s^2}{2}\right)}{1+s} \\
&= K_b\frac{1}{s^{\mu}}\frac{(1+s\tau_1)^{\mu_i}(1+s\tau_2)^{\mu_2}}{(1+s\tau_1)^{mu_1}}
\end{aligned}$$

3. Polo o zero complesso coniugato

$$\begin{aligned}
&= (s-(\sigma+j\omega))(s-(\sigma-j\omega)) = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2 \\
&= (s^2 - s\sigma + sj\omega - s\sigma - sj\omega + |z|^2) \\
&= (s^2 - 2s\sigma + |z|^2)^{\mu} \\
&= |z|^{2\mu}\left(1 - 2\frac{2\sigma}{|z|^2}s + \frac{s^2}{|z|^2}\right)^{\mu} \\
&= |z|^{2\mu}\left(1 - 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\mu}
\end{aligned}$$

dove $\zeta = \frac{-\sigma}{|z|} = -\frac{-Re(z)}{|z|}$ è il coeff. di smorzamento e $w_n = |z|$ ovvero la pulsazione naturale.

Dobbiamo trasformare $H(s) \to H(j\omega)$: Analisi in frequenza

$$H(j\omega) = K_b \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i')^{\mu_i'} \prod_k \left(1 + j2\zeta_k' \frac{j\omega}{\omega_{n,k}'} - \frac{(j\omega)^2}{(\omega_{n,k}^2)}\right)^{\mu_k'}}{(S^{r_1}) \prod_i (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + j2\zeta_k \frac{j\omega}{\omega_{n,k}} - \frac{(j\omega)^2}{(\omega_{n,k}^2)}\right)^{\mu_k}}$$

Esempio 2

$$H(s) = \frac{s^2 - 2s^2 - 8s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2} = \frac{s(s^2 - 2s - 8)}{s^2(s^2 - 2s + 2)} = \frac{s^2 - 2s - 8}{s(s^2 - 2s + 2)}$$
$$= \frac{(s-4)(s+2)}{s(s^2 - 2s + 2)}$$
$$= \frac{-4\left(1 - \frac{s}{4}\right)\cancel{2}\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s\cancel{(2)}\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} = -4\frac{1}{s}\frac{\left(1 - \frac{s}{4}\right)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)}$$

Ora vediamo ogni singolo $(1 + s\tau)^\mu$:

- $\left(1 - \frac{s}{4}\right)$ dove $\tau_1 = -\frac{1}{4}$
- $\left(1 + \frac{s}{2}\right)$ dove $\tau_2 = \frac{1}{2}$
- $\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)$ dove $w_n^2 = 2 \rightarrow w_n = \sqrt{2}$

$$\frac{2\zeta}{w_n} = -1 \implies \frac{2\zeta}{\sqrt{2}} = -1 \implies \zeta = \frac{-1\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5.5.1 Quattro possibili diagrammi di Bode

1. Terminte costante K_b
2. Uno zero o un polo nullo S^μ dove μ è la moltepliicità
3. Polo o zero reale $(1 + s\tau)^\mu$
4. Polo o zero complesso coniugato $\left(1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$ dove ζ è il coeffiicente di smorzamento e ω_n è la pulsazione naturale.

Partiamo dal primo:

1. $$A = |H(j\omega) = |K_b|$$

   Un numero reale ha 2 fasi:

   $$\phi = atan2(\sigma + j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \sigma > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}$$

2. Polo nullo con $\mu \in \mathbb{Z}, \mu > 0$ zero, $\mu < 0$ polo

   $$H(s) = H(j\omega) = (j\omega)^\mu$$

   Consideriamo l'ampiezza di $H(j\omega)$:

   $$|H(s)| = |(jw)^\mu| = |\omega|^\mu = \omega^\mu$$

$$A(\omega) = |H(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\omega^{\mu} = 20\mu\log_{10}\omega$$

Questa è una rette che cresce/decresce di 20μ dB/decade. Cosa succede invece alla fase?

$$\phi(\omega) = atan2(j\omega)^{\mu} = \mu \cdot atan2(j\omega) = \mu 90°$$

Retta costante che passa per per μ di 90°. Consideriamo i seguenti zeri e poli di $H(j\omega)$:

ω	S^1	S^{-1}	S^{-2}
10^{-2}	-40	40	80
10^{-1}	-20	20	40
10^0	0	0	0
10^1	20	20	40
10^2	40	-40	80

3. Zeri e poli reali
   I poli possono essere scritti così:

$$\frac{1}{1+\frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{1+\tau s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

$$A(\omega) = 20\log_{10}(\sqrt{(\Re^2 + \Im^2)})$$

$$\phi(\omega) = atan2(\Im, \Re)$$

$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$A(\omega) = 20\log_{10} 1 = 0$	$A(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{-2} = -3db$	$A(\omega) = 20\log_{10}\sqrt{\omega^2\tau^2+1} = 20db$
$\phi(\omega) = atan2(1) = 0$	$\phi(\omega) = atan2(2) = -45°$	$\phi(\omega) = atan2(\omega\tau) = -90°$

4. Poli e zeri complessi coniugati

$$H(s) = \left(1 + 2\zeta\frac{\omega}{\omega_n} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\mu}$$

Partiamo del caso di un polo:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \overset{\text{Bode}}{\Longrightarrow} \frac{1}{1 + 2\zeta\frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \overset{s=j\omega}{\Longrightarrow} \frac{1}{1 + 2j\omega\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Fattorizziamo:

$$\Re = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Se $\omega << \omega_0$

$$A(\omega) = -20\log_{10}(1) = 0$$

$$\phi(\omega) = atan2(0) = 0°$$

- Se $\omega >> \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

È una retta che decresce di 40db/decade

$$\phi(\omega) = atan2\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -180°$$

- $\omega = \omega_0 = \omega_n$ Per $\zeta \geq 0.5$:

$$A(\omega) = -20\log_{10}(2\zeta) = 0$$

Il grafico passa per ω_0, ma se $\zeta < 0.5$? Picco di risonanza. Se $\zeta = 0$ c'è discontinuità.

$$\phi(\omega) = -90°$$

In generali le fomule per calcolare l'ampiezza di un polo o zero complesso coniugato sono:

  - $\omega >> \omega_0$

$$A(\omega) = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -40\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\phi(\omega) = \mu sgn(\zeta) = -180°$$

    * $\zeta = 0$ asintoto verticiale in $A(\omega)$ in ω_n
    * $0 < \zeta \leq 0.5$ picco di risonanza, per cui la pulsazione naturale: $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ e l'ampiezza del picco: $M_r = 20\mu\log_{10}(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2})$
    * $\zeta = 0.5$ $A(\omega) = 0$
    * $0.5 > \zeta > 1$ "Passa sotto" il grafico asintotico

Esempio

$$H(s) = \frac{s^2(s+1)(s^2+3s+16)}{(2s-1)}$$

1. Portare la funzione di trasferimento in forma di Bode. Se si dovessero trovare trinomi scomponibili, ricordarsi di scomporli. In questo caso il trinomio al denominatore ha soluzioni coniugate com-

plesse e quindi non lo andremo a scomporre.

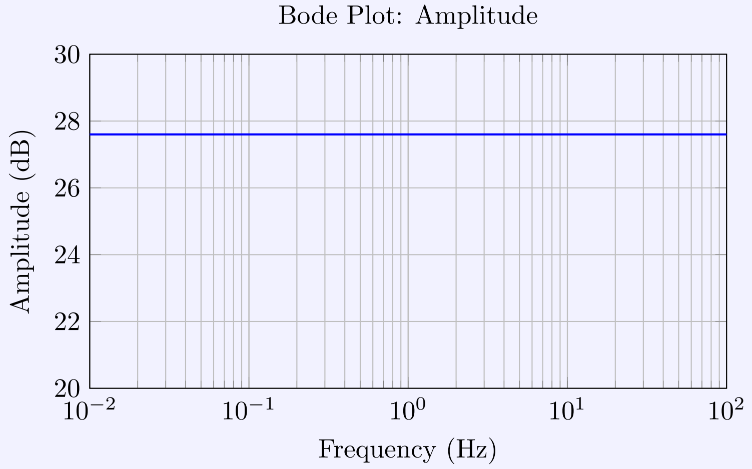
$$H(s) = \frac{s^2(1)\left(1+\frac{s}{1}\right)^1(16)\left(1+\frac{3}{16}s+\frac{s^2}{16}\right)^1}{-(1-2s)^1}$$
$$= -16\frac{s^2(1+s)\left(1+\frac{3}{16}s+\frac{s^2}{16}\right)}{(1-2s)}$$

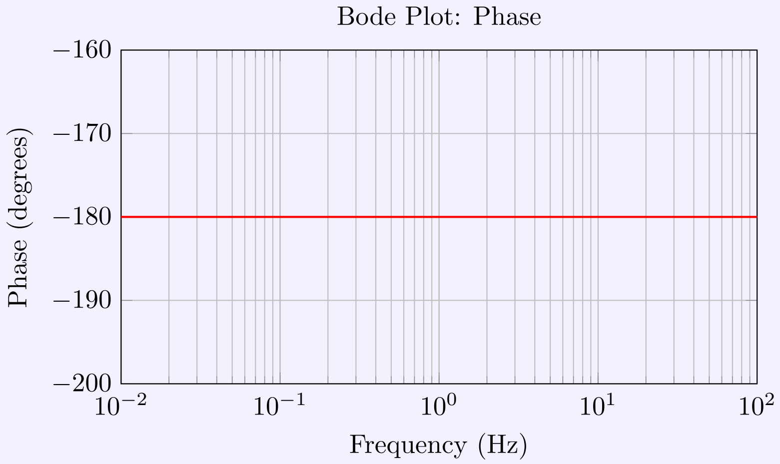
2. Cominciamo a calcolare i diagrammi di Bode dei diversi termini:

   - $K_b = -16$:

     $$A = 20\log_{10}(|-16|) = 24$$
     $$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } K_b > 0 \\ -180^\circ & \text{se } K_b < 0 \end{cases}$$

     Quindi $\phi = -180^\circ$





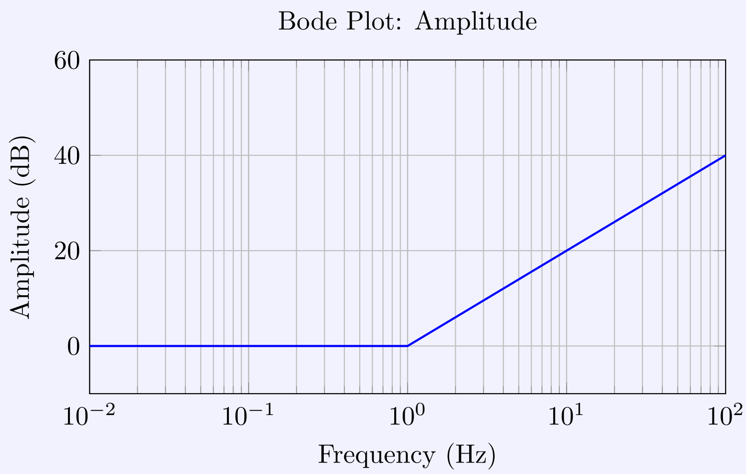
- $(1+s)$ dove $\mu = 1$ e $\tau = 1$ e quindi $\omega = \frac{1}{|\tau|} = 1$:

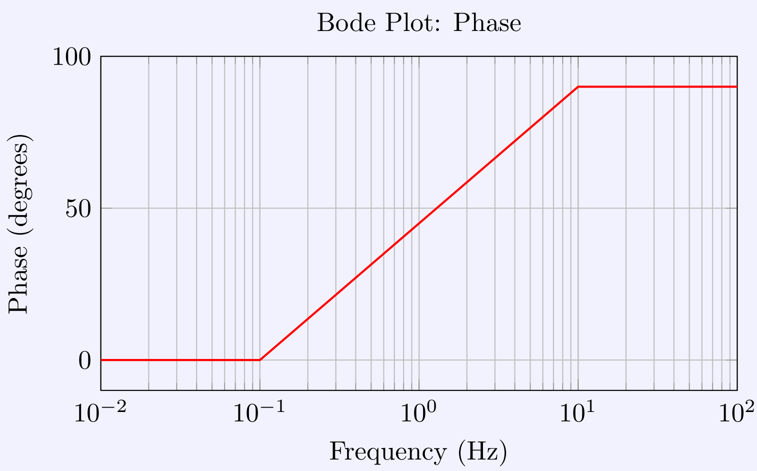
$$A = 20\log_{10}\omega_n = 0$$

Quindi prima di 10^0 il grafico è piatto in 0. Ma per ogni decade il grafico sale di 20db poichè $A = 20\mu\log_{10}(\omega|\tau|)$. La fase ha un comportamento molto simile.

$$\phi = \mu sgn(\tau)90° = 90°$$

Quindi prima di $(10^{-1}, 0°)\phi = 0$ e da $(10^1, 90°)$ la fase è di $90°$.

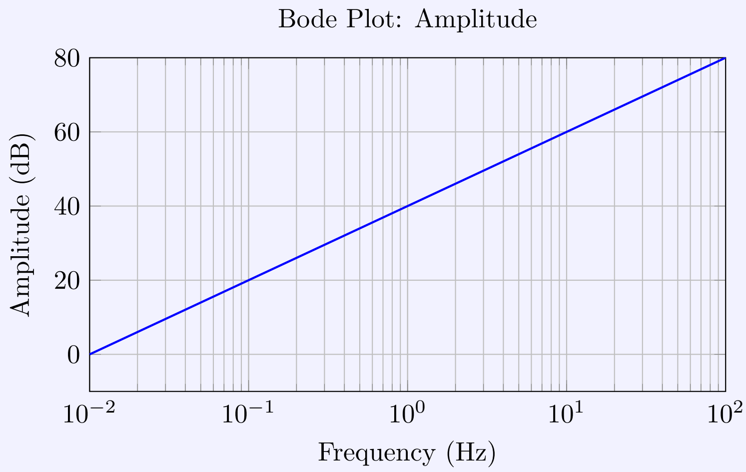


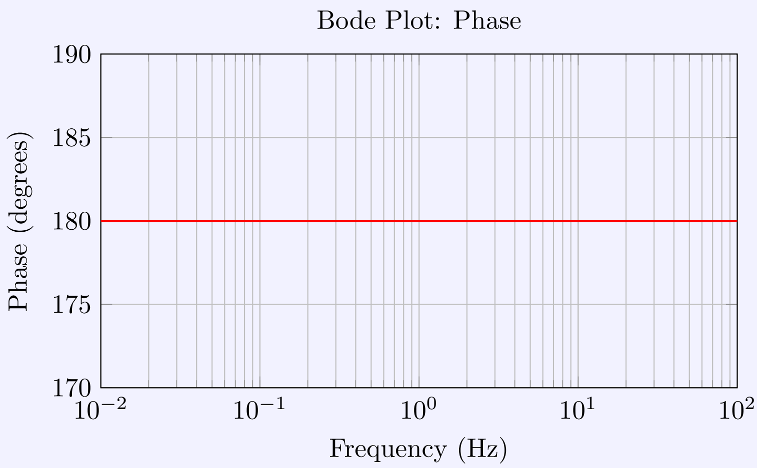


- s^2 dove $\mu = 2$:

$$A = 20\mu\log(\mu) = 40db/dec$$

$$\phi = \mu 90° = 180°$$





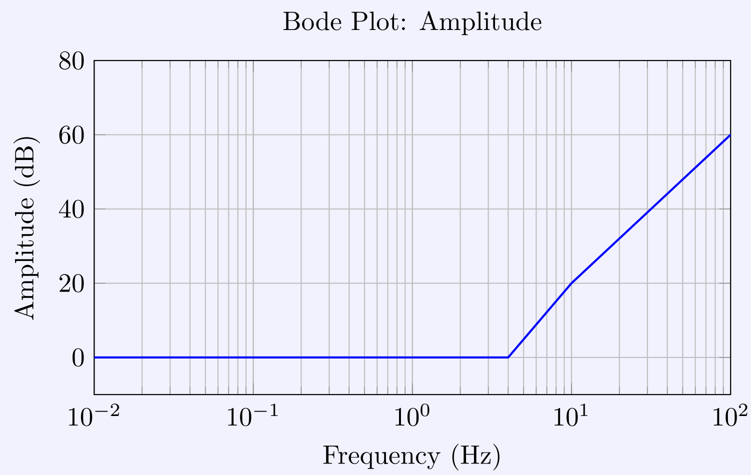
- $\left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)$ dove $\mu = 1$ e $\omega_n = \sqrt{16} = 4$ e $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{3}{16} \implies \zeta = \frac{3}{8}$:

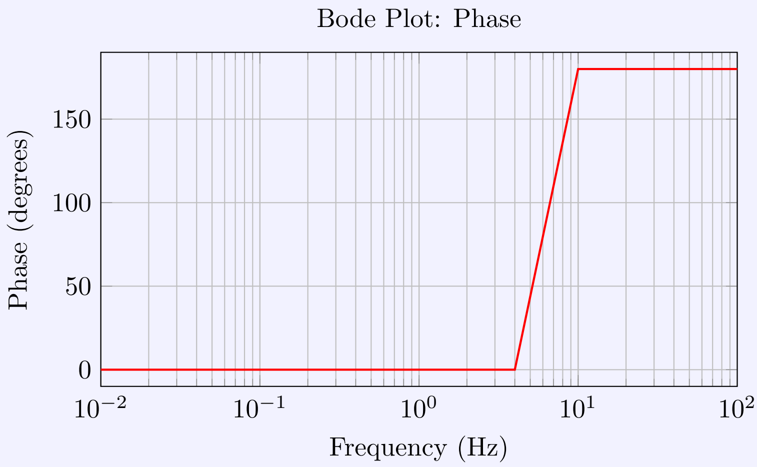
  $$A = 40\mu \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) = 40db/decade$$

  quindi prima di 4, $A = 0$ e dopo 4, $A = 40db/decade$. Ora calciamo ω_r e M_r: ... Per la fase

  $$\phi = 180\mu sgn(\zeta) = 180°$$

  Dopo ω_n la fase è di 180° mentre prima la fase rimane a $\phi = 0°$

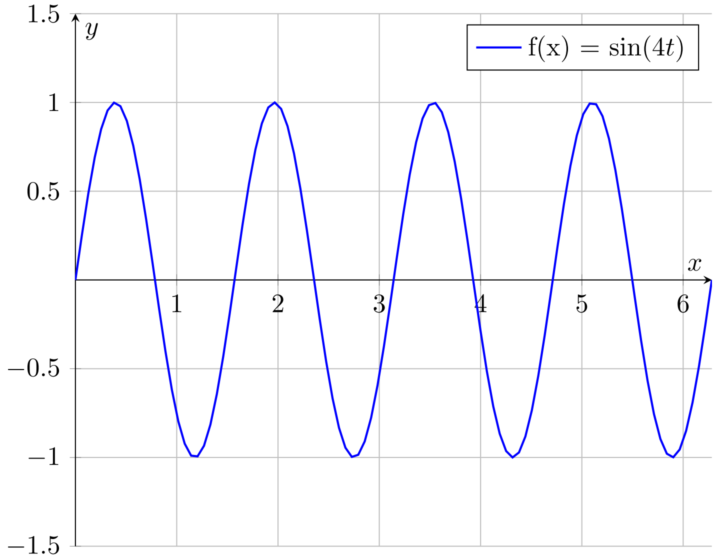


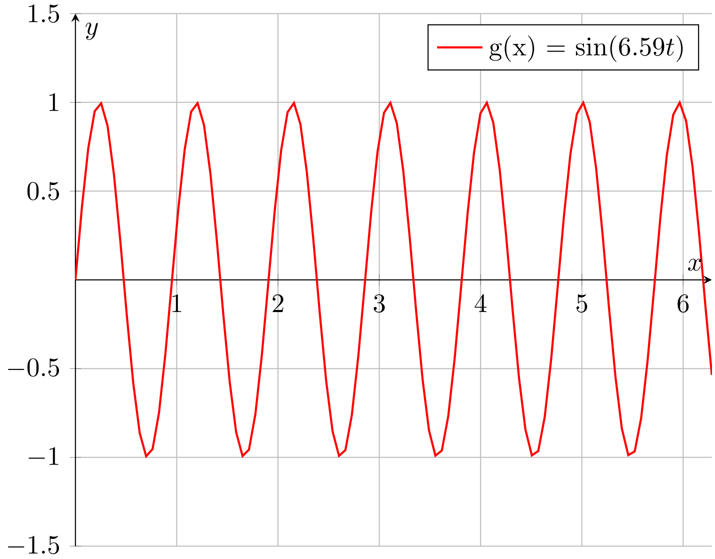


5.6 Diagrammi di Bode Totale

6 Trasformata di Fourier

Fourier ha scoperto che qualsiasi segnale periodico (o aperiodico) può essere scomposto in una somma di sinusoidi. Con Fourier si riesce a rappresentare con somma di frequenze che non sono necessariamente armoniche. Le trasformate di Fourier vengono usate in molti campi come la comunicazione, analisi del suono, modulazione o demoloduzione dei segnali, meccanica, cambiamento climatico, ecc.





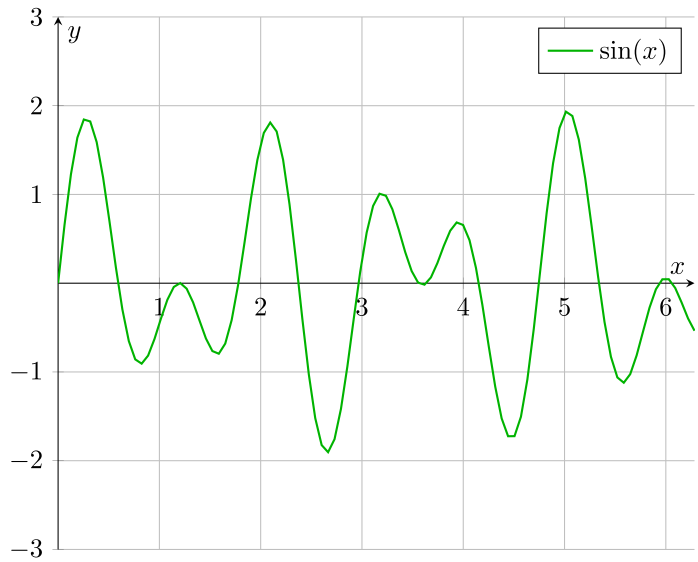


Figure 2: Somma di f(x) e g(x)

Ci sono diversi tipi di onde che psosono essere sommate per creare un segnale complesso. Come per esempio le onde quadre, triangolari, ecc.

6.1 Winding Frequency e la quasi-trasformata di Fourier

Calcoliamo il centro di massa come la media dei punti sul grafico:

$$cdm = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(t_k)e^{-2\pi f_0 t}$$

per cui possiamo trovare il limite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(t_k)e^{-2\pi f_0 t} = \underbrace{\frac{1}{t_2 - t_1}\Big|_{t_1}^{t_2} - g(t_k i f_0 t)dt}_{\text{Quasi TdF}}$$

Quindi:

$$TdF = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i f_0 t}dt$$

Proprio come la trasformata di LaPlace ci è utile spostarsi nel dominio delle frequenze da quello del tempo.

$$\underbrace{e^{j\omega_k t}}_{input} \to LTI \to \underbrace{H(\omega_k)}_{Transf.Fun} \; e^{j\omega_k t}$$

Questo è il principio di sovrapposizione. Il principio di sovrapposizione dice che se un sistema è lineare e invariante nel tempo, allora la risposta a una somma di segnali è la somma delle risposte ai singoli segnali.

6.2 Segnali periodici e aperiodici

Se abbiamo un segnale **periodico** possiamo scomporlo in una somma (finita) di funzioni elementari tramite la serie di Fourier. Invece per un segnale **aperiodico**, quindi privo di periodicità, andremo ad utilizzare la trasformata di Fourier. Mentre nella serie di Fourier le funzioni sono strettamente *collegate* a livello armonico, nella trasformata di Fourier le funzioni sono *indipendenti.*

6.3 Serie di Fourier

Prendiamo come un segnale periodico $x(t)$ con periodo t_0:

$$x(t) = x(t + t_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi f_0 \leftarrow \text{ funzione fondamentale}$$

Se passiamo alla rappresentazione complessa:

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{k\omega_0}$$

Questa è una famiglia di funzioni che sono armonicamente collegate perché come si può vedere i loro periodi sono soltanto multipli interi del periodo fondamentale. Riscriviamo $x(t)$ come combinazione lineare di ϕ_k:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Dove a_k sono i coefficienti della serie di Fourier.

Theorem 6.1. *Si può riscrevere un segnale periodico in somme di sengnali elementari.*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

*dove a_k sono i coefficienti della serie di Fourier, k è l'indice di armonica e ω_0 è la frequenza fondamentale. Viene anche chiamata **equazione di sintesi**.*

I coefficienti a_k si possono calcolare come:

$$\begin{aligned} a_k &= A_k e^{j\theta k} \\ &= B_k + jC_k \end{aligned}$$

Quindi modificando trigonometricamente:

$$
\begin{aligned}
e^{jk\omega_0 t} &= \cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t) \\
x(t) &= a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \\
\text{oppure } &= a_0 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - iC_k \sin(k\omega_t)]
\end{aligned}
$$

Come facciamo a calcolare i coefficienti a_k?

$$
\begin{aligned}
a_k &= \int_{t_0} e^{-jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} t_0 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \\
&= \int_{t_0} \cos(k\omega_0 t) dt - \int_{t_0} \sin(k\omega_0 t) dt
\end{aligned}
$$

Si fa quindi l'integrale sul periodo di $x(t)$.

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0} x(t) e^{-jN\omega_0 t} dt &= \int_{t_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jN\omega_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\int_{t_0} e^{-j(k-N)\omega_0 t} dt}_{\begin{cases} t_0 & \text{se } k = N \\ 0 & \text{se } k \neq N \end{cases}}
\end{aligned}
$$

Theorem 6.2. *L'equazione di analisi di Fourier è:*

$$
a_k = \frac{1}{t_0} \int_{t_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt
$$

6.3.1 Segnali simmetrici e asimmetrici

- **Segnale periodico non-simmetrico**

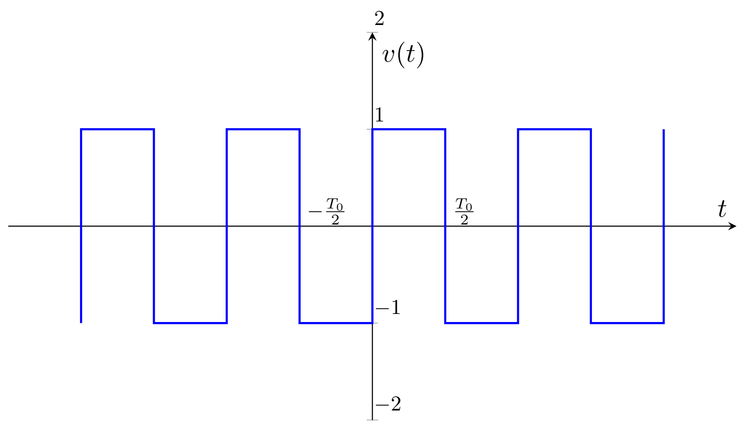


Figure 3: Segnale periodico non-simmetrico

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{0} \overset{v(t)}{(-1)} \cdot e^{-jk\omega_0 t} \, dt + \frac{1}{T_0} \int_{0}^{\frac{T_0}{2}} \overset{v(t)}{1} \cdot e^{-jk\omega_0 t} \, dt$$

$$\vdots$$
$$\downarrow$$

$$a_k = \frac{1}{j\pi k} \left[1 - (-1)^k \right] \quad k \neq 0$$

Il grafico dei coefficienti è il seguente:

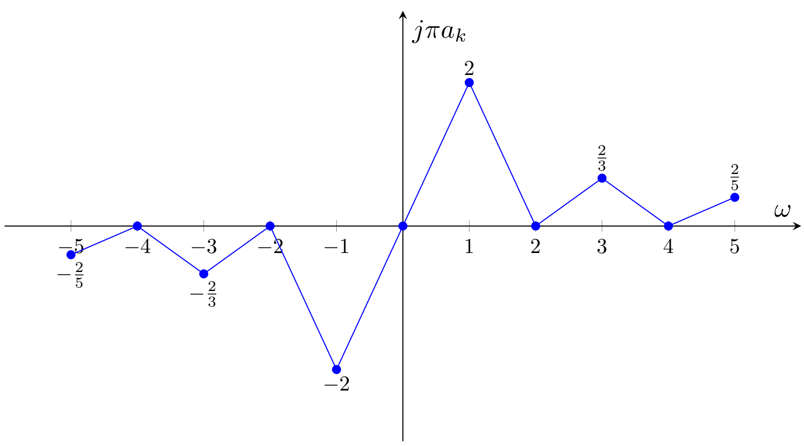


Figure 4: Coefficienti a_k per segnale non-simmetrico

- Armoniche dispari
- a_k immaginari
- $a_k = -a_{-k}$ antisimmetrico

Siccome tutti i coefficienti sono immaginari si ha una serie di seni e si può riscrivere come:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{2j}_{\text{Per avere termini reali}} \cdot a_k \sim (k\omega_0 t)$$

- **Segnale periodico simmetrico**

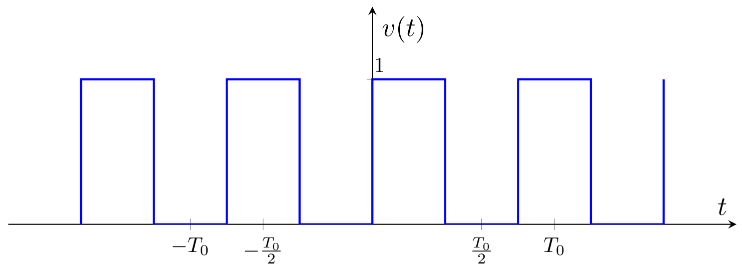


Figure 5: Segnale periodico simmetrico

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)}{\pi k} & k \neq 0 \end{cases}$$

Il grafico dei coefficienti è il seguente:

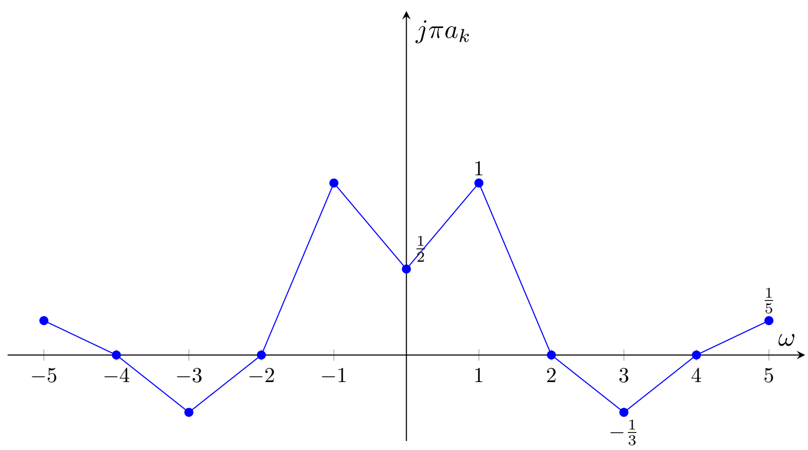


Figure 6: Coefficienti a_k per segnale simmetrico

  - Armoniche dispari
  - a_k è reale
  - $a_k = a_{-k}$ simmetrico

Siccome tutti i coefficienti sono reali si ha una serie di coseni e si può riscrivere come:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \cdot a_k \cos(k\omega_0 t)$$

6.3.2 Serie di Fourier troncata

Serve per limitare la sommatoria a N termini.

Sia $N \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{v_N(t)}_{v(t) \text{ rappresentato con } N \text{ componenti}} = \sum_{k=-N}^{N} \tilde{a}_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad \omega_0, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Calcoliamo l'errore quadratico medio (MSE, Mean Square Error) che è la misura dell'errore di approssimazione

$$MSE\,(v(t), v_N(t)) := \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t) - v_N(t)|^2 \, dt$$

misura l'energia della differenza di due segnali.

$$\tilde{a}_k = a_k = \lim_{N \to \infty} MSE\,(v(t), v_N(t)) = 0$$

Definizione

Fenomeno di Gibs: Aumentando il numero di armoniche si ha un aumento di armoniche ad alta frequenza nei punti di discontinuità.

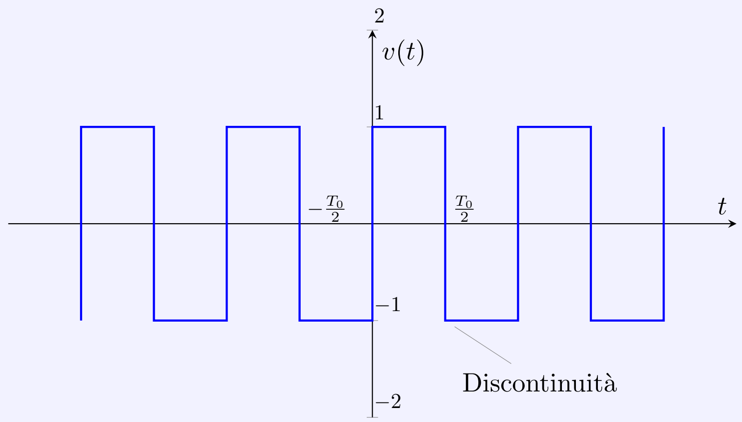


Figure 7: Discontinuità

$$T = 2\pi \quad \text{Non simmetrico}$$

$$t = k\pi$$

$$
\begin{aligned}
v(t) &= a_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) \\
a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(t)e^{-jk\omega_0 t}\, dt \\
&= \frac{-i}{2\pi k}\left(2 - 2e^{-j\pi t}\right) \\
a_k &= \begin{cases} \frac{-2j}{k\pi} & k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}
$$

6.4 Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

Se si ha un segnale non periodico che va da $[-T_1, T_1]$:

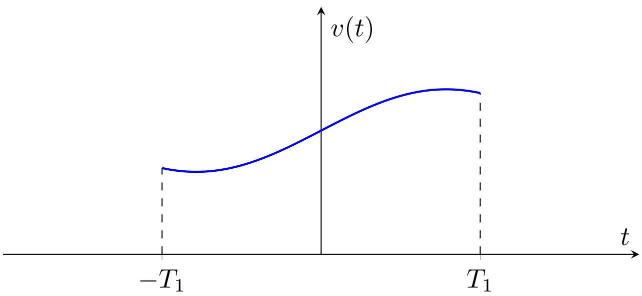


Figure 8: Segnale non periodico

$$
\underbrace{\tilde{v}(t)}_{\text{Periodico}} = \underbrace{v(t)}_{\text{Non periodico}}
$$
$$
|t| < \frac{T_0}{2}
$$

Se $T_0 \to \infty$ si ha che $\tilde{v}(t) \to v(t)$. Cioè si prende un segnale periodico e si fa tendere il periodo a infinito facendolo sembrare non periodico. Questo passaggio si può fare anche al contrario, cioè prendere un segnale non periodico e farlo diventare periodico.

- Usiamo la serie di Fourier per rappresentare $\tilde{v}(t)$
- Facciamo tendere T_0 a infinito $T_0 \to \infty$ per rappresentare $v(t)$

Esempio

Partiamo da un segnale non periodico e lo replichiamo nel tempo con periodo T_0

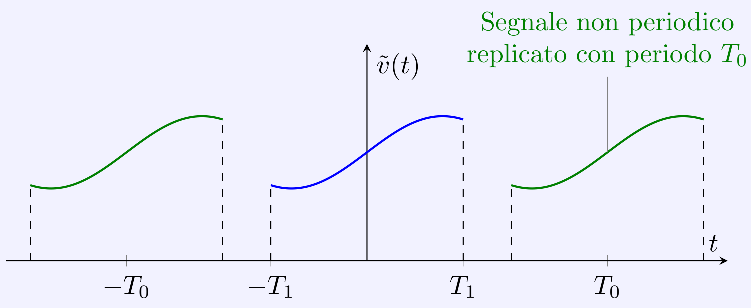


Figure 9: Segnale non periodico replicato

$$\tilde{v}(t) = v(t) \quad |t| < \frac{T_0}{2}$$

Applichiamo la serie di Fourier su $\tilde{v}(t)$:

$$\tilde{v}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{v}(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt \end{aligned}$$

Rappresentiamo $k\omega_0$ con una funzione $V(\omega)$

$$V(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t}\, dt \quad \rightarrow \quad T_0 a_k = V(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}$$

$V(\omega)$ è l'**inviluppo** di $T_0 a_k$:

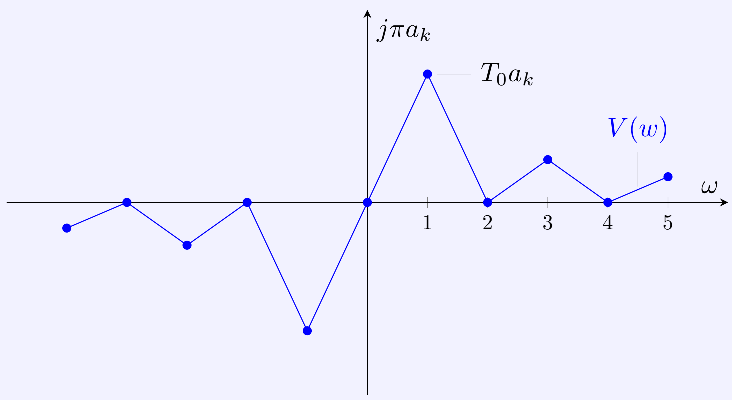


Figure 10: Inviluppo di $T_0 a_k$

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

Se $T_0 \to \infty$ otteniamo che:

- $\omega_0 \to 0$
- $\tilde{v}(t) \to v(t)$
- $\omega_0 \to d\omega$
- $\sum \to \int$

Con queste premesse possiamo riscrivere la funzione come:

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$\downarrow$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

È la trasformata di Fourier inversa.

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

È la trasformata di Fourier.

Definition 6.3.

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} \, d\omega$$

È l'**equazione di sintesi per un segnale non periodico** che equivale alla trasformata **inversa** di Fourier.

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

È l'**equazione di analisi per un segnale non periodico** che equivale alla **trasformata di Fourier**.

Esempio

Prendiamo ad esempio un segnale non periodico:

$$v(t) = e^{-at}$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(a+j\omega)}\, dt \\ &= \frac{-1}{a+j\omega} \cdot e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{\infty}^{0} \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Con Laplace sarebbe stato:

$$e^{\lambda t} = \frac{1}{s-\lambda}$$

$$\downarrow$$

$$e^{-at} = \frac{1}{s+a} = \frac{1}{a+j\omega}$$

6.4.1 Sviluppo dei coefficienti di Fourier

Prendiamo in considerazione il segnale rettangolare:

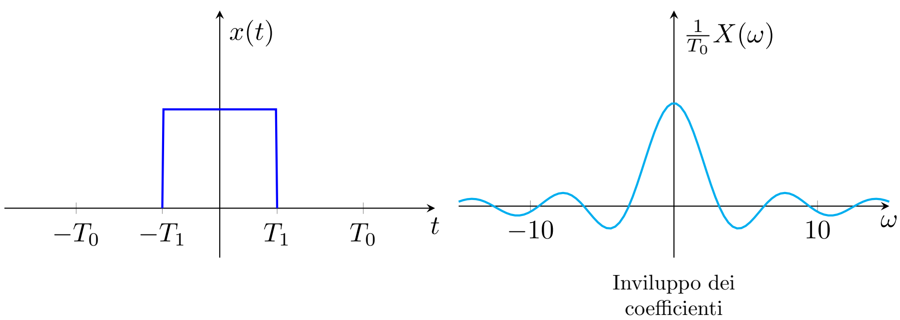


Figure 11: Segnale rettangolare

Replichiamo il segnale in un periodo T_0 e osserviamo il cambiamento dei coefficienti di Fourier:

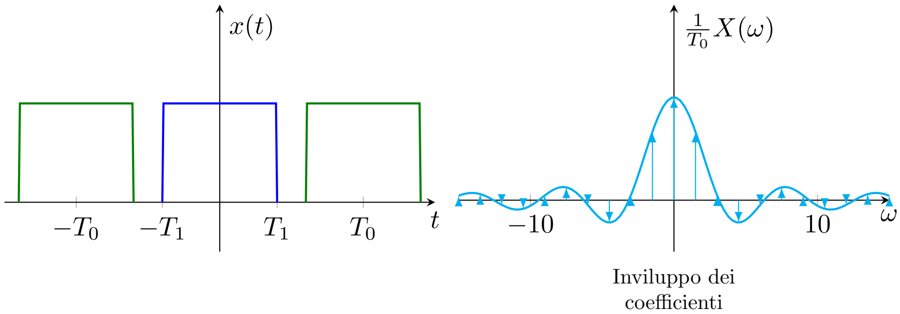


Figure 12: $T_0 = 4T_1$

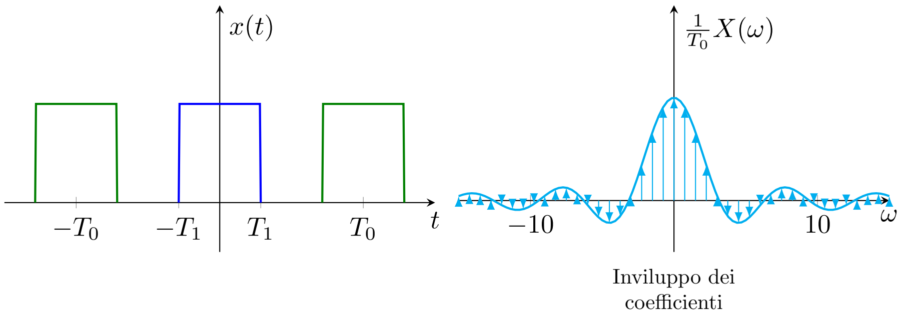


Figure 13: $T_0 = 8T_1$

...

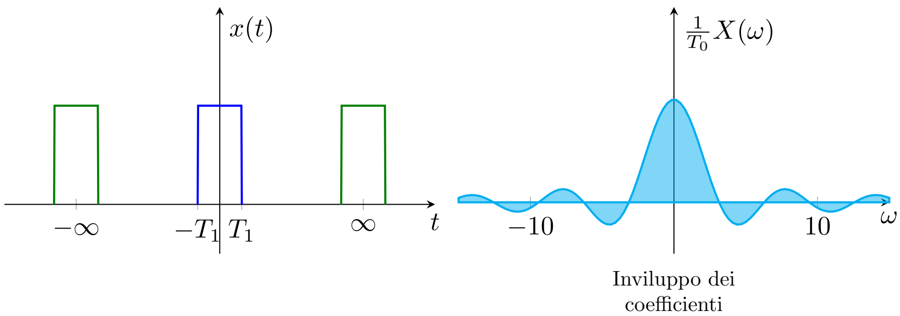


Figure 14: $T_0 \to \infty$

6.4.2 Trasformata di Fourier di un segnale periodico

$$\tilde{v}(t) \leftrightarrow a_k \quad \text{Coefficienti delle serie di fourier}$$

$$\tilde{v}(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \tilde{V}(\omega) \quad \text{Trasformata di Fourier}$$

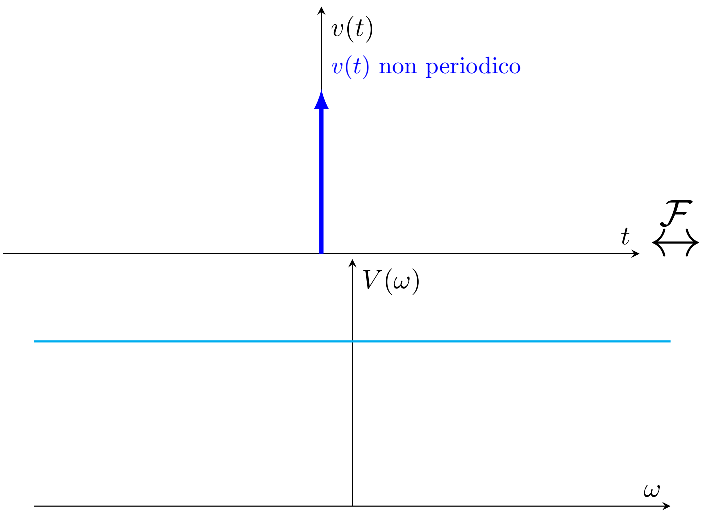
$$\tilde{v}(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0) \text{ Treno di impulsi}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\omega)\cdot e^{j\omega t}\,d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)\cdot e^{-j\omega t}\,d\omega}_{e^{-jk\omega_0 t}}
\end{aligned}
$$

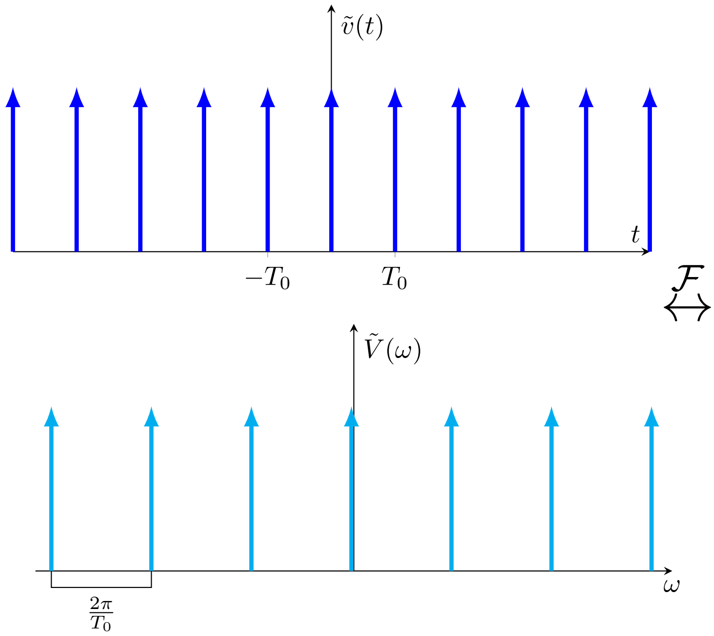
6.4.3 Come usare la trasformata di Fourier

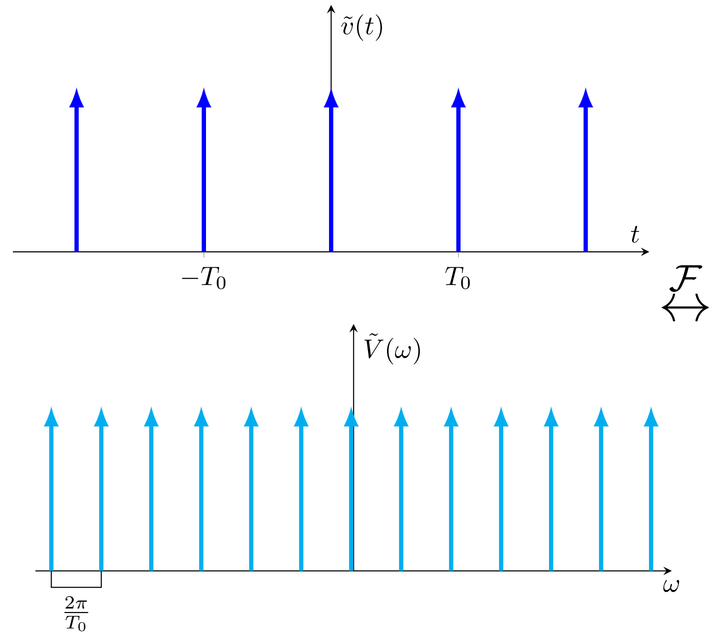
1. $v(t)$ non periodico
   - Costruisco un segnale periodico $\tilde{v}(T)$ in cui il singolo periodo è definito da $v(t)$
   - $\tilde{v}(t)$ ha serie di fourier
   - All'aumentare del periodo $\tilde{v}(t) \to v(t)$ e la serie di Fourier di $\tilde{v}(t) \to$ TdF di $v(t)$
2. $\tilde{v}(t)$ è periodico, $v(t)$ rappresenta il singolo periodo
   - Coefficienti della serie di Fourier $= \frac{1}{T_0}\cdot$ campioni delle TdF di $v(t)$
3. $\tilde{v}(t)$ è periodico
   - La trasformata di Fourier di $\tilde{v}(t)$ è definita come **treno di impulsi**

$$
\tilde{V}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)
$$



Se $T_0 \to \infty$ allora il treno di impulsi diventa sempre più fitto fino ad una retta costante:


$\tilde{v}(t)$
t
$-T_0$
T_0
$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$
$\tilde{V}(\omega)$
ω
$\frac{2\pi}{T_0}$


$\tilde{v}(t)$
t
$-T_0$
T_0
$\overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow}$
$\tilde{V}(\omega)$
ω
$\frac{2\pi}{T_0}$

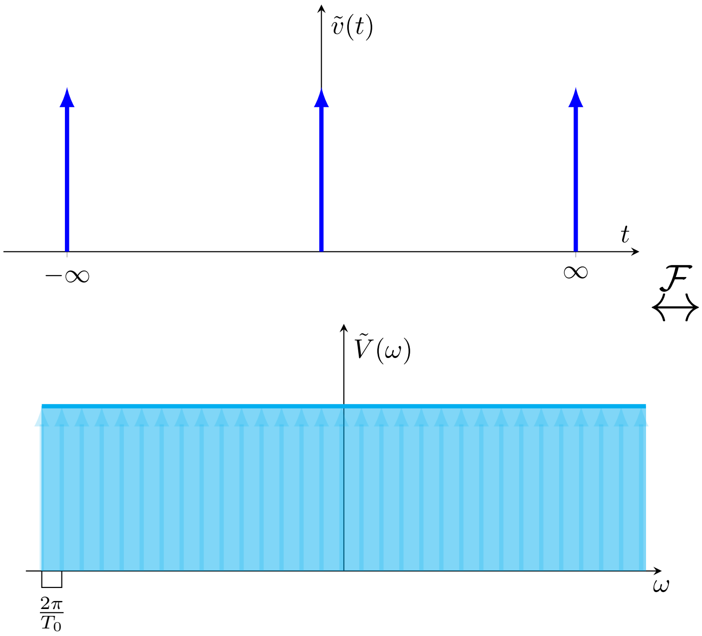


Figure 15: Trasformata di Fourier all'aumentare di T_0

6.5 Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier

Definition 6.4 (Equazione di sintesi)**.** Sia $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un segnale a valori reali o complessi, si definisce la trasformata di Fourier del segnale come:

$$\mathcal{F}\left[v(t)\right](f) := \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega_0 t}\, dt = V(f)$$

Dove V è una funzione che va da $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, con $f \in \mathbb{R}$. Questa viene chiamata **equazione di sintesi**.

Definition 6.5 (Equazione di analisi)**.** Data una funzione $V : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si definisce anti-trasformata di Fourier la funzione:

$$\mathcal{F}^{-1}\left[V(f)\right](t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot e^{j\omega_0 t}\, df = v(t)$$

Dove v è una funzione che va da $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, con $t \in \mathbb{R}$. Questa viene chiamata **equazione di analisi**.

Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier:

Theorem 6.6. *Sia $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un segnale a valori reali o complessi. Se almeno una delle seguenti condizioni è vera, allora la funzione è trasformabile secondo $\mathcal{F}$:*

1. *$v(t)$ è sommabile, cioè:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)| \, dt < \infty$$

e a variabile limitata su ogni intervallo finito di $\mathbb{R}$, cioè è esprimibile come differenza di funzioni limitate non decrescenti.

2. *$v(t)$ è un segnale di energia, cioè:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt < \infty$$

3. *$v(t)$ è un segnale di potenza, cioè:*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt < \infty$$

*bisogna però "**finestrare**" il segnale, cioè moltiplicarlo per una finestra rettangolare*

6.6 Trasformate notevoli

Le trasformate di Fourier notevoli sono le seguenti:

- **Impulso**

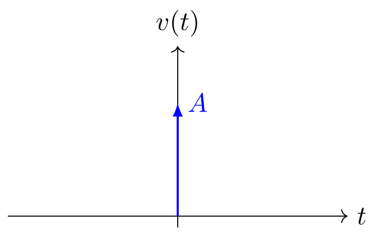


Figure 16: Impulso unitario

La trasformata di Fourier è:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[A\delta_0(t)\right](f) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \, dt \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) \cdot 1 \, dt \\ &= A \end{aligned}$$

(per le regole del campionamento)

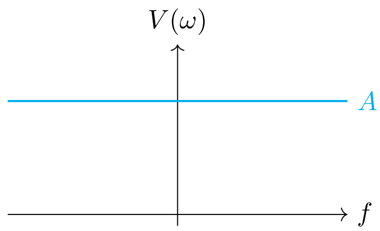


Figure 17: Trasformata di Fourier dell'impulso

- **Esponenziale causale**

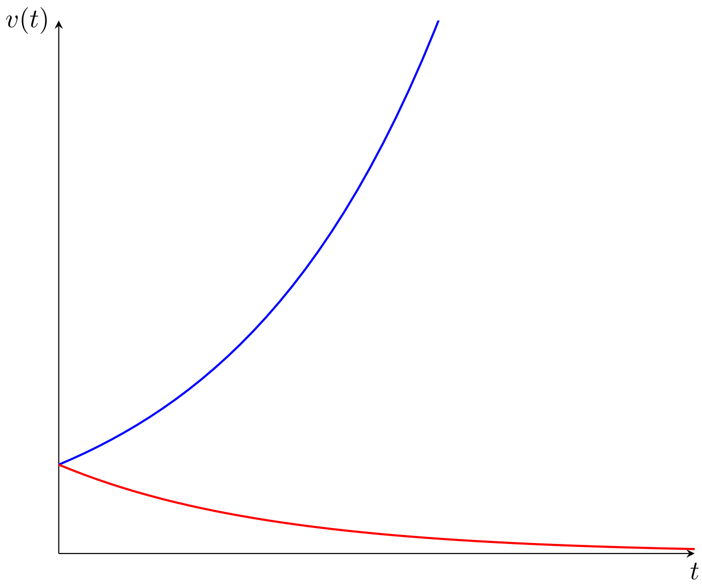


Figure 18: Esponenziale causale

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}\left[Ae^{j\phi}e^{\lambda t}\underbrace{\delta_{-1}(t)}_{\text{Causalità}}\right](t) = \frac{Ae^{j\phi}}{j2\pi f - \lambda}$$

La trasformata di Laplace è molto simile, basta infatti sostituire la s con $j\omega = j2\pi f$ e si ottiene la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{L}\left[Ae^{j\phi}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{Ae^{j\phi}}{s - \lambda}$$

- **Finestra rettangolare di altezza A e supporto T**

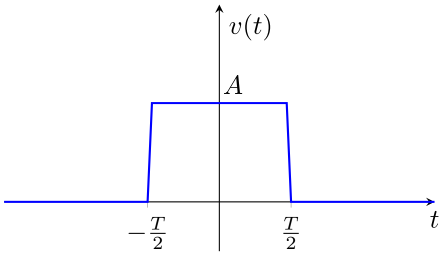


Figure 19: Finestra rettangolare

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}\left[A\Pi\left(\frac{t}{T}\right)\right](f) = AT \cdot sinc(fT)$$

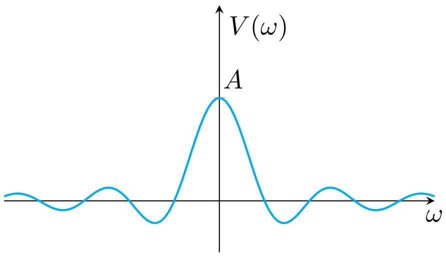


Figure 20: Trasformata di Fourier della finestra rettangolare

Questa funzione è chiamata **sinc**.

- **Funzione costante**

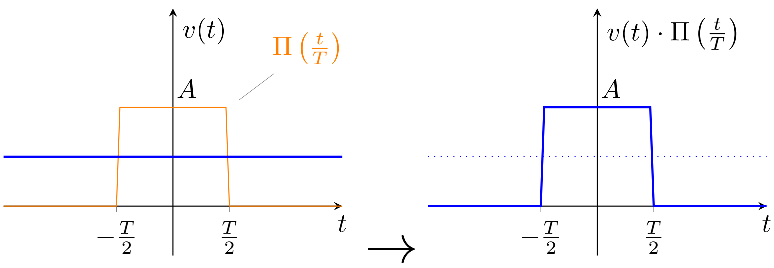


Figure 21: Funzione costante

La funzione costante non può essere trasformata facilmente, quindi bisogna ”finestrarla”, cioè moltiplicare il segnale per una finestra rettangolare:

$$v(t) = A \rightarrow v_T(t) = A \cdot \Pi(\frac{t}{T})$$

La sua trasformata di Fourier è la stessa del segnale rettangolare:

$$\mathcal{F}\left[\underbrace{v(t)}_{\text{Ampiezza }=A} \cdot \underbrace{\Pi\left(\frac{t}{T}\right)}_{\text{Ampiezza }=1}\right](f) = AT \cdot sinc(fT)$$

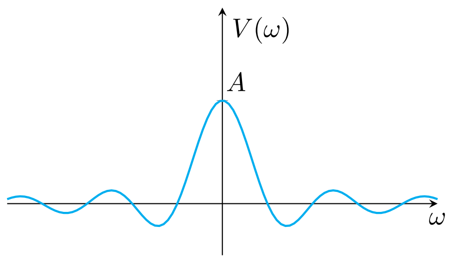


Figure 22: Trasformata di Fourier della funzione costante

- **Fasore**

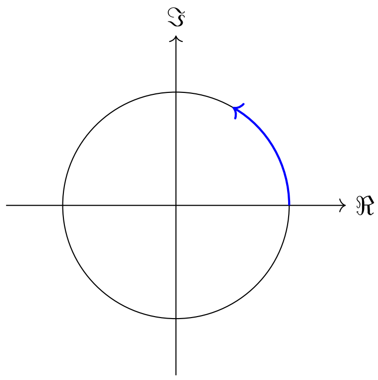


Figure 23: Fasore

$$v(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Anche in questo caso bisogna moltiplicare per il segnale rettangolare:

$$v_T(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}\left[v_T(t)\right](f) = AT \cdot sinc((f - f_0) \cdot t)$$

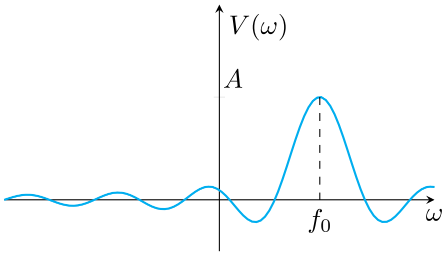


Figure 24: Trasformata di Fourier del fasore

- **Seno** Possiamo derivare il seno utilizzando la formula di Eulero su un fasore:
$$v(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$
La trasformata di Fourier è:
$$\mathcal{F}\left[v(t)\right](f) = \frac{A}{2j}\left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right)$$
Il seno è solo la parte immaginaria del fasore.
- **Coseno**
$$v(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$
La trasformata di Fourier è:
$$\mathcal{F}\left[v(t)\right](f) = \frac{A}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$$
Il coseno è solo la parte reale del fasore.

6.7 Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Laplace è un caso specifico della trasformata di Fourier:

$$TdL \to TdF$$
$$s \to j\omega$$

Quindi alcune proprietà di Laplace valgono anche per Fourier.

1. **Linearità**
$$av_1(t) + bv_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} aV_1(f) + bV_2(f)$$
2. **Riflessione e coniugazione**
$$v(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} V(-f) \quad \text{Riflessione}$$
$$\left.\begin{array}{r} v^*(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} V^*(-f) \\ v^*(-t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} V^*(f) \end{array}\right\} \text{Coniugazione}$$

3. **Convoluzione nel dominio del tempo**

$$[v_1 * v_2](t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} V_1(f) \cdot V_2(f)$$

4. **Traslazione nel dominio del tempo**

$$v(t-\tau) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} e^{-j2\pi f\tau} \cdot V(f)$$

5. **Traslazione nel dominio delle frequenze**

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot v(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} V(f-f_0)$$

6. **Modulazione/Prodotto nel dominio del tempo**

$$v_1(t) \cdot v_2(t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} [V_1 * V_2](f)$$

Esempio

Consideriamo il seguente sistema a blocchi:

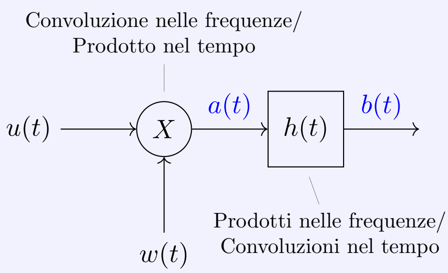


Figure 25: Sistema a blocchi

Vogliamo capire come si comporta questo segnale nelle frequenze ($a(t)$) e cosa succede quando viene alterato dalla sequenza degli operatori ($b(t)$).

$$\begin{aligned} u(t) &= 3 \cdot \cos(6\pi t) + \cos(2\pi t) \\ w(t) &= 2 \cdot \cos(4\pi t) \\ h(t) &= 4 \cdot sinc(4t) \\ b(t) &= ? \end{aligned}$$

Possiamo risolvere in maniera grafica questo problema:

1. Applichiamo le trasformate di Fourier per andare nel dominio delle frequenze:

$$\text{Trasformata notevole: } A\cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$$

$$3 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t) \overset{\mathcal{F}}{=} \frac{3}{2}\left(\delta(f-3)+\delta(f+3)\right)$$
$$\cos(2\pi \cdot t) \overset{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{2}\left(\delta(f-1)+\delta(f+1)\right)$$
$$U(f) = \frac{3}{2}\left(\delta(f-3)+\delta(f+3)\right) + \frac{1}{2}\left(\delta(f-1)+\delta(f+1)\right)$$

$$W(f) = \frac{2}{2}\left(\delta(f-2)+\delta(f+2)\right) = \delta(f-2)+\delta(f+2)$$

$$\text{Trasformata notevole: } AT sinc(tT) = A\Pi\left(\frac{f}{T}\right)$$

$$H(f) = 1 \cdot \Pi(\frac{f}{4}) = \Pi(\frac{f}{4})$$

2. Disegnamo tutti i singoli elementi su un grafico:

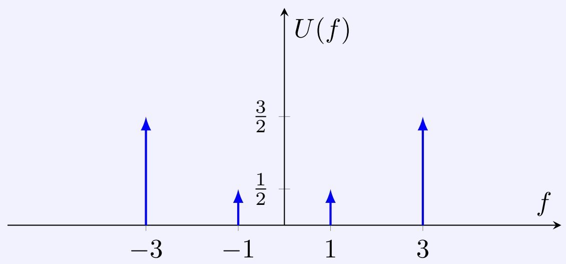


Figure 26: Segnale $U(f)$

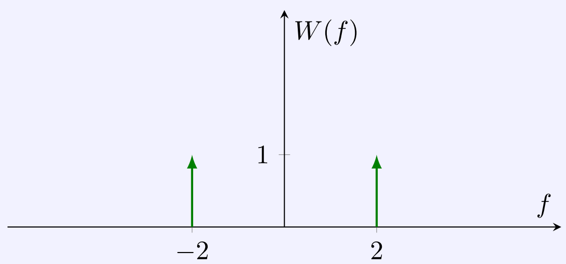


Figure 27: Segnale $W(f)$

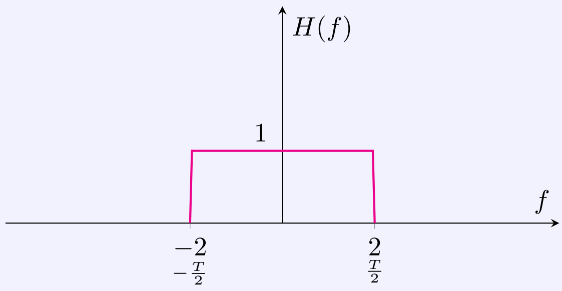


Figure 28: Segnale $H(f)$

3. Calcoliamo la convoluzione tra $U(f)$ e $W(f)$ per trovare $A(f)$: Eseguiamo la convoluzione tra $U(f)$ e $W(f)$ fissando un segnale

   e spostare l'altro specchiato. A livello più alto il segnale che si muove viene replicato ogni volta che l'asse centrale corrisponde con il segnale fermo:

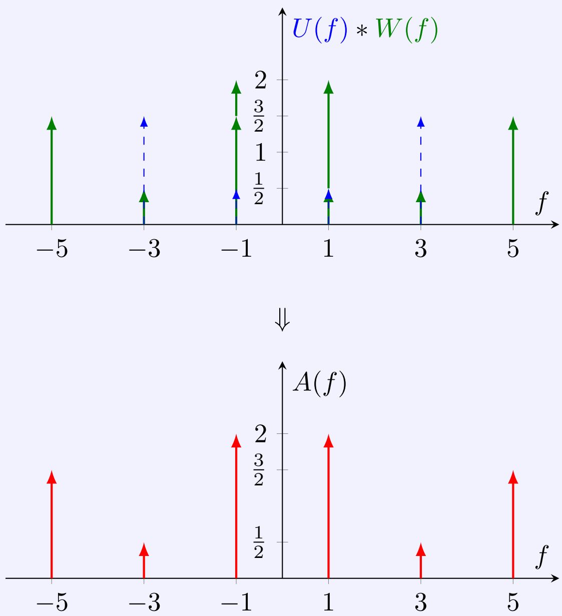
   

   Figure 29: Segnale $A(f)$

   Le altezze dei nuovi segnali replicati saranno la moltiplcazione dei segnali che si sovrappongono sommata alle altezze dei diversi segnali che si sovrappongono nello stesso punto.

4. Calcoliamo il prodotto tra $A(f)$ e $H(f)$ per trovare $B(f)$:

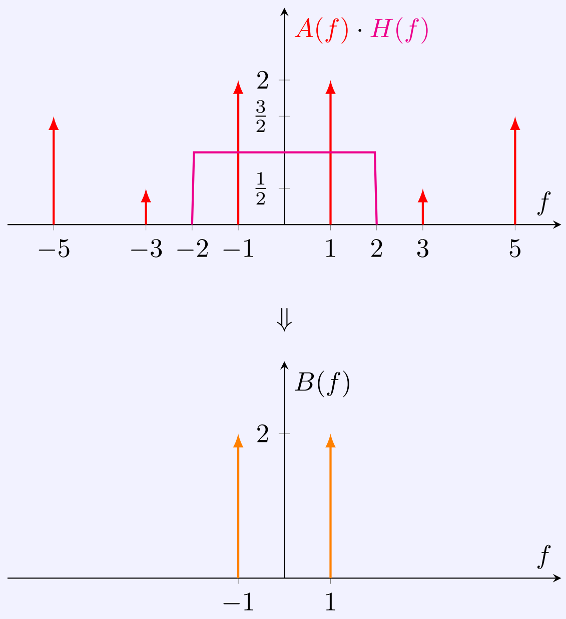


Figure 30: Segnale $B(f)$

6.8 Campionamento e replicazione

Prendiamo in considerazione il seguente sistema a blocchi

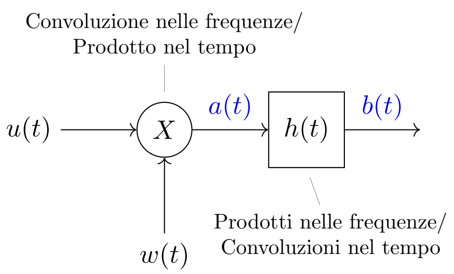


Figure 31: Sistema a blocchi

$$a(t) = u(t) \cdot w(t)$$
$$b(t) = [h(t) * a(t)]\,(f)$$

Esiste un operatore chiamato **campionatore** che si chiude a intervalli regolari derivati da T_c (**frequenza di campionamento** $[Hz]$) e "compone" il segnale. È il componente che permette di passare dal segnale a tempo continuo a quello a tempo discreto.

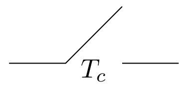


Figure 32: Campionatore

Quindi se prendiamo in considerazione il seguente segnale si ha un passaggio da continuo a discreto:

Nella realtà dopo il campionatore si inserisce uno **zero-holder** che mantiene il valore del segnale fino al prossimo campione:
Un segnale discreto può essere **quantizzato**, cioè approssimato ad un valore discreto. Questo processo è chiamato **quantizzazione**.

Inoltre un segnale quantizzato può essere **codificato** in binario, cioè rappresentato da una sequenza di bit, ovvero segnali alti e bassi:

6.8.1 Treno campionatore/impulsi

Un treno di impulsi a distanza T_c moltiplicato per un altro segnale fa ottenere un segnale campionato in quel punto kT_c:

$$\hat{\delta}_{T_c}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c)$$
$$\updownarrow \mathcal{F}$$
$$\frac{1}{T_c}\hat{\delta}_{\frac{1}{T_c}}(f) = \frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_c})$$

6.8.2 Campionamento

Definition 6.7. Dato un segnale $v(t),\ t \in \mathbb{R}$ e un periodo di campionamento $0 < T_c \in \mathbb{R}$, il campionamento è deinito come:

$$\left[samp_{T_c} v\right](t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT_c)$$

$\downarrow$ Per la proprietà del campionamento dell'impulso

$$\begin{aligned}\left[samp_{T_c} v\right](t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT_c) \cdot \delta(t - kT_c) \\ &= v(t) \cdot \hat{\hat{\delta}}_{T_c}(t)\end{aligned}$$

6.8.3 Replicazione

Definition 6.8. Sia un segnale $v(t), t \in \mathbb{R}$ e un periodo di campionamento $0 < T_c \in \mathbb{R}$, la replicazione è definita come:

$$\begin{aligned}
[rep_{T_c} v](t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t - kT_c) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t) * \delta(t - kT_c) \\
&= \left[v * \hat{\delta}_{T_C}\right](t)
\end{aligned}$$

Se si replica nel tempo si ottiene un campionamento scalato nelle frequenze

$$[rep_{T_c} v](t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{T_c} [samp_{T_c} V](f)$$

Se si campiona nel tempo si ottiene una replicazione scalata nelle frequenze

$$[samp_{T_c} v](t) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{1}{T_c} [rep_{T_c} V](f)$$

6.8.4 Teorema del campionamento ideale di Shannon

Theorem 6.9. *Sia $v(t),\ t \in \mathbb{R}$ un segnale campionato con frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$ ottenendo:*

$$\begin{aligned}
v(k) &= v_0(kT_c) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(t) \cdot \delta(t - kT_c) \\
&= [samp_{T_c} v_0](t)
\end{aligned}$$

Se:

1. *$v_0(t)$ è limitato in banda, cioè esiste almeno un $B > 0$ tale che $V_0(f) = 0$ per frequenze $|f| > B$, e B è il più piccolo per cui questo è vero. Ad esempio:*
2. *e la frequenza di campionamento f_c è tale per cui $f_c > 2B$, dove $2B$ è detta **frequenza di Nyquist**. Ad esempio: Se:*

$$\begin{aligned}
B &= 10Hz \\
f_c &= 5Hz
\end{aligned}$$

$$f_c > 2B \rightarrow 5 > 20 \text{ (FALSO)}$$

Se:

$$B = 5Hz$$
$$f_c = 20Hz$$
$$f_c > 2B \to 20 > 10 \textit{ (VERO)}$$

Allora $v_0(t)$ *è ricostruibile a partire dal segnale campionato* $\left[samp_{T_c} v_0\right](t)$ *utilizzando un filtro di ricostruzione* H_r*:*

$$H_r(f) = T_c \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \frac{1}{f_c}\Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right)$$
$$B < f_L < f_c - B$$

Quindi:

$$v_0(t) = \left[(samp_{T_c} v_0) * \underbrace{h(T)}_{sinc\left(\frac{t}{T_c}\right)}\right](t)$$

Se $f_c < 2B$ *si presenta il fenomeno di* ***aliasing*** *Cioè il segnale si mescola con le repliche delle bande laterali e la ricostruzione da origine ad un segnale diverso da quello originale.*