



Algoritmi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Roberto Segala

July 22, 2025

Contents

1	Introduzione agli algoritmi	4
1.1	Complessità	4
1.2	Complessità dei costrutti e ordini di grandezza	4
1.3	Ordini di grandezza per le funzioni	8
1.4	insertion_sort (A)	9
2	Concetto di "Divide et impera"	10
2.1	Fattoriale e funzioni ricorsive	10
2.2	Master Theorem o Teorema dell'esperto	13
2.3	Merge Sort (A, n)	14
2.4	Heap	15
2.5	Heapsort	18
2.6	Quicksort	18
3	Algoritmi di ordinamento in tempo lineare	19
3.1	Algoritmi non basati su confronti	19
3.1.1	Counting Sort	19
3.1.2	Radix Sort	20
3.1.3	Bucket Sort	20
4	Algoritmi di selezione	22
4.1	Ricerca del minimo o del massimo	22
4.1.1	Ricerca del minimo e del massimo contemporaneamente	23
4.2	Randomized select	25
5	Strutture dati	28
5.1	Stack o Pila	28
5.2	Queue o Coda	28
5.3	Binary Tree o Albero binario	29
5.4	Binary Search Tree o Albero binario di ricerca	29
5.5	Liste doppiamente concatenate	30
5.5.1	Sentinelle	30
5.6	RB-Tree o Albero rosso-nero	31
5.6.1	Estrazione in un RB-Albero	38
5.6.2	Campi aggiuntivi	39
5.7	Heap Binomiale	42
5.7.1	Unione di Heap Binomiali	45
5.7.2	Rimozione di un nodo	46

5.7.3	Diminuzione di una chiave e rimozione di un elemento arbitrario	47
5.7.4	Trovare il mediano	48
5.7.5	RB-Alberi e Search Closest	48
5.8	Strutture dati facilmente partizionabili	49
5.8.1	Ottimizzazione della complessità con alberi e unione per rango	50
5.9	Il concetto di funzione calcolabile	52
5.9.1	Esempio di mantenimento di un campo in un RB-Albero	53
6	Tecniche di programmazione	54
6.1	Programmazione dinamica	54
6.2	Programmazione Greedy	58
7	Tabelle di Hash	61
7.1	Gestione dei conflitti	61
7.2	Creazione della funzione Hash	62
7.3	Metodo di divisione	62
7.4	Metodo della moltiplicazione	62
8	Grafi	62
8.1	Definizioni generali	62
8.2	Rappresentanza di un grafo	67
8.3	Visita di un grafo	68
8.3.1	Visita in ampiezza	68
8.3.2	Visita in profondità	71
8.4	Ordinamento topologico	77
8.5	Componenti connesse	78
8.6	Componenti fortemente connesse	79
8.7	Alberi di copertura di costo minimo	81
8.7.1	Minimum Spanning Tree (MST)	81
8.7.2	Algoritmo di Kruskal	82
8.7.3	Algoritmo di Prim	86
8.8	Cammini minimi	89
8.9	Cammini minimi con sorgente multipla	94
8.10	Flusso massimo	97
8.11	Programmazione lineare	100

1 Introduzione agli algoritmi

Ci sono diverse definizioni di 'algoritmo' ma quella più semplice per definirlo è una sequenza di istruzioni volta a risolvere un problema. In maniera più semplice, possiamo definirlo come una ricetta. Le ricette sono delle istruzioni per creare dei piatti: queste istruzioni sono precise tuttavia possono avere anche delle varianti. Il problema non è trovare la ricetta, ma capire quale sia quella giusta da utilizzare in base al problema posto.

In questo corso impareremo come *decidere*. Studiare i diversi approcci e il metodo migliore per affrontare un problema. Capiremo come confrontare gli algoritmi fra di loro.

1.1 Complessità

Classifichiamo gli algoritmi in base alla loro complessità ovvero quanto tempo ci mettono per essere completati. Il nostro obiettivo è quello non di misurare il tempo in sé (poiché può dipendere dal tipo di macchina che utilizziamo) che impiega un programma a finire ma piuttosto capire il numero di istruzioni elementari che vengono impiegate per risolvere il problema.

La complessità non è un numero bensì una funzione, poiché mappa la dimensione del problema in numero di istruzioni da eseguire. Per esempio, quando si parla di dimensione di una matrice ci si viene più comodo vedere il numero di colonne e righe piuttosto che contare il numero di elementi all'interno della matrice. La dimensione del problema è un insieme di oggetti, tipicamente un insieme di numeri che ci permette di avere un'idea chiara di capire quanto sia grande il problema. Se riusciamo a misurarlo bene, potremmo facilitarci la vita nel risolvere il problema.

1.2 Complessità dei costrutti e ordini di grandezza

È doveroso stare attenti a cosa moltiplichiamo: se moltiplichiamo due vettori, il numero di operazioni da eseguire è esattamente n . Mentre se fossero organizzate in matrici quadrate con lunghezza del lato \sqrt{n} la sua complessità andrebbe ad aumentare a $O(n\sqrt{n})$. Come si rappresentano le istruzioni di un programma? Se sono in serie:

$$\begin{array}{ll} I_1 & c_1(n) \\ I_2 & c_2(n) \\ \vdots & \\ I_l & c_l(n) \end{array}$$

Dove la complessità totale allora sarà:

$$\sum_{i=1}^l c_i(n)$$

oppure all'interno di un costrutto **if-else**:

```

if cond   $c_{\text{cond}}(n)$ 
   $I_2$      $c_1(n)$ 
else
   $I_l$      $c_2(n)$ 

```

In questo caso, come faccio a sapere la complessità totale di questi istruzioni? Per capirlo, studiamo il caso nel *worst case scenario* ovvero nel caso peggiore. A volte vengono mostrati anche i casi migliore ma di solito si calcola il tempo peggiore. Quindi ci interessa specialmente il *limite superiore* dell'algoritmo, quindi piuttosto che dire che la complessità è esattamente **uguale** questo numero, invece noi diremo che è **minore o uguale** del numero calcolato.

$$C(n) = c_{\text{cond}}(n) + \max(c_1(n), c_2(n))$$

Mentre per un while loop?

```

while cond   $c_{\text{cond}}(n)$ 
   $I$          $c_0(n)$ 

```

Sia m limite superiore numero di iterazioni che esegue l'algoritmo. La complessità di questo algoritmo quindi sarà:

$$C(n) = c_{\text{cond}}(n) + m(c_{\text{cond}}(n) + c_0(n))$$

Proviamo ora a calcolare la moltiplicazioni tra matrici. Siano due matrici A e B rispettivamente con dimensione $n \times m$ e $m \times l$.

```

1 For i <- 1 to n
2   For j <- 1 to l
3     C[i][j] <- 0
4     For k <- 1 to m
5       C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]

```

Avere un risultato del tipo $5m + 1$ (riguardo il for più interno) è inutile perché non ci da informazioni realmente utili sulla complessità dell'algoritmo. Ad ogni modo contando tutti i for, avremo un risultato del tipo:

$$n(5ml + 4l + 2) + n + 1 = 5nml + 4nl + 3n + 1$$

Ci sono alcuni elementi in questa operazioni che non influiscono realmente sul risultato finale. Indi per cui, possiamo anche ometterlo all'interno del calcolo della complessità di un algoritmo. In realtà ciò che ci interessa realmente nel risultato finale è:

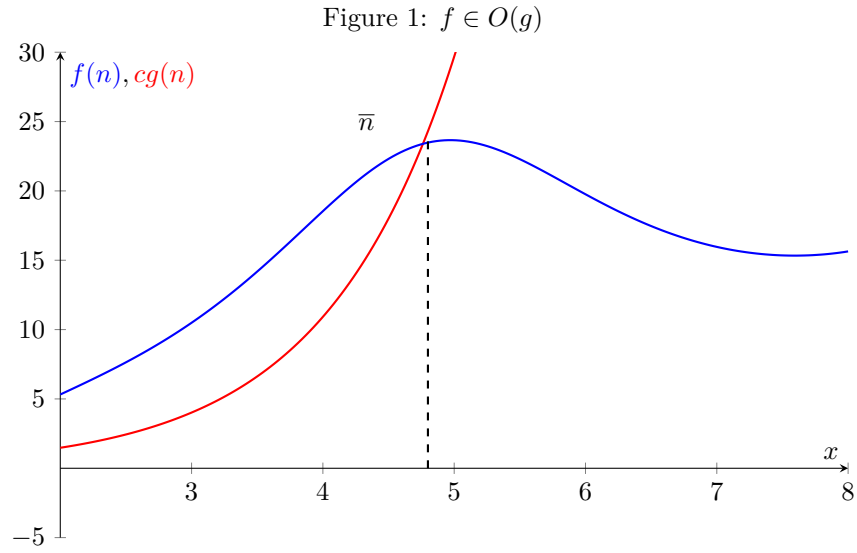
$$5 \mathbf{nml} + 4nl + 3n + 1$$

Infatti nml è capace di dirci tutto sulla complessità dell'algoritmo e da cosa dipende. Quando

si parla di ordine di grandezza si parla in realtà del comportamento asintotico della funzione calcolata.

Definition 1.1.

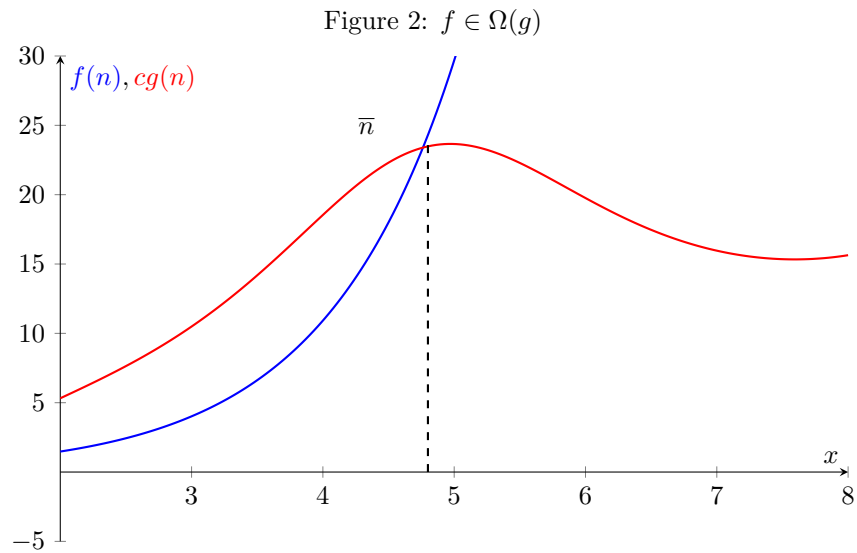
$$f \in O(g) \iff \exists c > 0, \exists \bar{n}, \forall n \geq \bar{n} \mid f(n) \leq cg(n)$$



Definition 1.2.

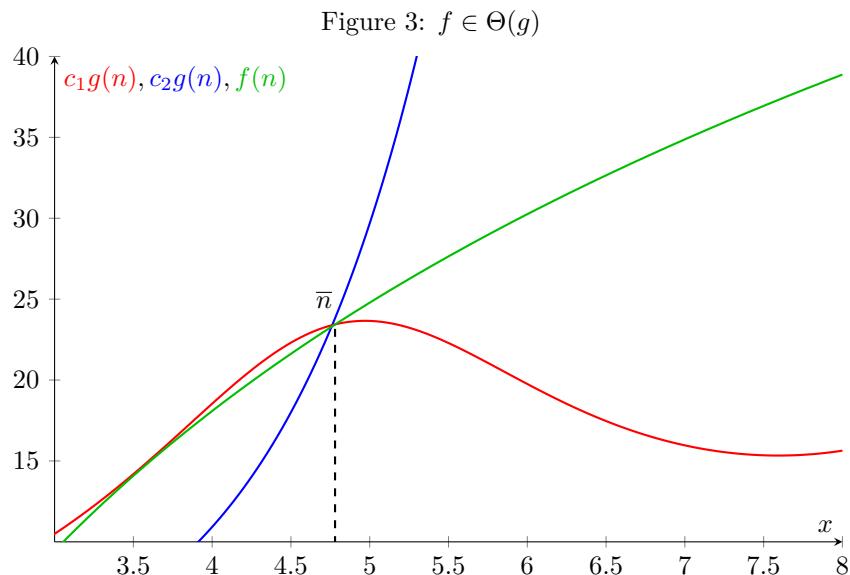
$$f \in \Omega(g) \iff \exists c > 0, \exists \bar{n}, \forall n \geq \bar{n} \mid f(n) \geq cg(n)$$

Che rispettivamente è l'inverso della funzione O grande.



Definition 1.3.

$$f \in \Theta(g) \iff f \in O(g) \wedge f \in \Omega(g)$$

**Esempio 1.1**

Questa affermazione vale?

$$n \in O(2n)$$

Sì, perché esiste un c che soddisfa $n \leq c2n$.

Quest'altra affermazione vale?

$$2n \in O(n)$$

Sì perché esiste un c che soddisfa $2n \leq cn$.

Esempio 1.2

Questa affermazione vale?

$$f \in O(g) \iff g \in \Omega(f)$$

Proviamo a dimostrare. Sappiamo che esiste un c e \bar{n} tale che $\forall n > \bar{n} \ f(n) \leq cg(n)$.

Isoliamo la g :

$$g(n) \geq \frac{1}{c}f(n)$$

Esiste quindi un c' che soddisfa la disuguaglianza.

$$c' = \frac{1}{c}$$

Esempio 3

$$f_1 \in O(g), f_2 \in O(g) \implies f_1 + f_2 \in O(g)$$

Dobbiamo dimostrare che esiste c_1 e c_2 , \bar{n}_1 e \bar{n}_2 tali che:

$$\forall n > \bar{n}_1 \mid f_1(n) \leq c_1 g(n)$$

$$\forall n > \bar{n}_2 \mid f_2(n) \leq c_2 g(n)$$

Quindi

$$\bar{n} = \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$$

$$f_1(n) + f_2(n) \leq (c_1 + c_2)g(n)$$

Esempio 4

$$f_1 \in O(g_1), f_2 \in O(g_2) \mid f_1 f_2 \in O(g_1 g_2)$$

Quindi esiste c_1 e c_2 , \bar{n}_1 e \bar{n}_2 tali che:

$$\forall n > \bar{n}_1 \mid f_1(n) \leq c_1 g_1(n)$$

$$\forall n > \bar{n}_2 \mid f_2(n) \leq c_2 g_2(n)$$

$$f_1(n) f_2(n) \leq c_1 g_1(n) c_2 g_2(n)$$

$$f_1(n) f_2(n) \leq c_1 c_2 g_1(n) g_2(n)$$

Quindi:

$$c = c_1 c_2$$

$$\bar{n} = \max(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$$

1.3 Ordini di grandezza per le funzioni

L'algoritmo di ricerca A termina entro n . Immaginiamo che l'algoritmo A sia il seguente:

```
1 For i <- 0 to length(a) - 1
2   if a[i] = x
3     ret i
```



```
4 ret -1
```

Capiamo che la sua complessità è uguale a:

$$A \in O(n)$$

Per appurarci che la stima di complessità sia accurata dobbiamo controllare che $A \in \Omega(g)$ vuol dire che esiste uno schema di input tale per cui se $g(n)$ è il numero di passi necessari per risolvere l'istanza n , allora $g \in \Omega(f)$. Se riusciamo a fare questo allora $g \in \Theta(f)$ e quindi possiamo dire che la stima è accurata.

$P \in O(f)$ vuol dire che il problema P riesco a risolvere in tempo f . Supponiamo per assurdo che esista un algoritmo riesca a capire se l'elemento si trova nell'array o no. Possiamo capire velocemente che per contraddizione, essendo che esiste almeno un elemento dove l'algoritmo non ha guardato, siamo certi del malfunzionamento dell'algoritmo e quindi non è vero che esiste una stima di complessità più bassa di f .

Ora andiamo ad affrontare i tipi di algoritmi che si definiscono di "ordinamento".

Definition 1.4. Input: Sequenza (a_1, \dots, a_n) di oggetti su cui è definita una relazione di ordinamento (in questo caso ordinamento per confronti).

Output: Permutazione (a'_1, \dots, a'_n) di (a_1, \dots, a_n) t.c. $\forall i > j, a'_i \leq a'_j$.

Andiamo ora a vedere i diversi tipi di algoritmi di ordinamento.

1.4 insertion_sort (A)

In questo caso la j sarà chiamata variabile "invariante" ovvero che mantiene una proprietà che continua a valere nel run-time dell'algoritmo. In questo caso, la j è invariante perchè tutti gli oggetti "a sinistra" di essa saranno considerati già ordinati. (Parte da 2 perché abbiamo deciso che la posizione all'interno dell'array parte da 1).

```
1 for j <- 2 to length[A]
2   key <- A[j]
3   i <- j - 1
4   while i > 0 and A[i] > key
5     A[i+1] <- A[i]
6     i--
7   A[i+1] <- key
```

Ora dobbiamo capire quale sia la complessità di questo algoritmo. Se le cose vanno bene, l'algoritmo potrebbe terminare in $O(n)$. Tuttavia, seppur giusto, non è preciso. Infatti, nel peggiore dei casi, l'algoritmo termina in $O(n^2)$. Infatti il caso peggiore di input che mi può

arrivare è un array ordinato al contrario con complessità uguale a:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \in \Theta(n^2)$$

Questo algoritmo, quanto spazio di memoria usa in più rispetto allo spazio occupato dai dati?

Lo spazio di memoria di questo algoritmo rimane costante a prescindere dalla dimensione del problema. Un algoritmo del genere si dice che **ordina in loco** se la quantità di memoria extra è costante. Si parla di **stabilità** di un algoritmo di ordinamento quando l'ordine relativo di elementi uguali non viene scambiato dall'algoritmo. Quindi:

Se $a_i = a_j$ $i < j$, mantiene l'ordinamento

2 Concetto di "Divide et impera"

2.1 Fattoriale e funzioni ricorsive

```
1 Fatt(n)
2   if n = 0
3       ret 1
4   else
5       ret n * fatt(n - 1)
```

L'argomento della funzione ci fa capire la complessità dell'algoritmo:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ T(n-1) + 1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Con problemi ricorsivi si avrà una complessità con funzioni definite ricorsivamente. Questo si risolve induttivamente:

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + T(n-1) \\ &= 1 + 1 + T(n-2) \\ &= 1 + 1 + 1 + T(n-3) \\ &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_i + T(n-i) \end{aligned}$$

La condizione di uscita è: $n - i = 0$ $n = i$

$$\begin{aligned} &= \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n + T(n-n) \\ &= n + 1 = \Theta(n) \end{aligned}$$

Questo si chiama passaggio iterativo.

Esempio 1

$$T(n) = 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n$$

Questa funzione si può riscrivere come:

$$T(n) = \begin{cases} \text{Costante} & \text{se } n < a \\ 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n & \text{se } n \geq a \end{cases}$$

Se la complessità fosse già data bisognerebbe soltanto verificare se è corretta. Usando il metodo di sostituzione:

$$T(n) = cn \log n$$

sostituiamo nella funzione di partenza:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \\ &\leq 2c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \log \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq 2c \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} + n \\ &= cn \log n - cn \log 2 + n \\ &\stackrel{?}{\leq} cn \log n \quad \text{se } n - cn \log 2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$c \geq \frac{n}{n \log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

Il metodo di sostituzione dice che quando si arriva ad avere una disequazione corrispondente all'ipotesi, allora la soluzione è corretta se soddisfa una certa ipotesi.

Esempio 2

$$T(n) = T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 \in O(n)$$

$$T(n) \leq cn$$

$$\begin{aligned} T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 \\ &\leq c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 \\ &= c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 \\ &= cn + 1 \stackrel{?}{\leq} cn \end{aligned}$$

Il metodo utilizzato non funziona perchè rimane l'1 e non si può togliere in alcun modo.

Per risolvere questo problema bisogna risolverne uno più forte:

$$\begin{aligned}
 T(n) &\leq cn - b \\
 T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + T\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + 1 \\
 &\leq c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) - b + c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) - b + 1 \\
 &= c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) - 2b + 1 \\
 &= cn - 2b + 1 \stackrel{?}{\leq} cn - b \\
 &= \underbrace{cn - b}_{\leq 0} + \underbrace{1 - b}_{\leq 0} \leq cn - b \quad \text{se } b \geq 1
 \end{aligned}$$

Se la proprietà vale per questo problema allora vale anche per il problema iniziale perchè è meno forte.

Esempio 3

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) + n \\
 &= n + 3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) \\
 &= n + 3\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3T\left(\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor}{4} \right\rfloor\right)\right) \\
 &= n + 3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3^2T\left(\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor\right) \\
 &\leq n + 3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3^2\left(\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor + 3T\left(\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor}{4} \right\rfloor\right)\right) \\
 &= n + 3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2} \right\rfloor + 3^3T\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3} \right\rfloor\right) \\
 &= n + 3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots + 3^{i-1}\left\lfloor \frac{n}{4^{i-1}} \right\rfloor + 3^iT\left(\left\lfloor \frac{n}{4^i} \right\rfloor\right)
 \end{aligned}$$

Per trovare il caso base poniamo l'argomento di T molto piccolo:

$$\begin{aligned}
 \frac{n}{4^i} &< 1 \\
 4^i &> n \\
 i &> \log_4 n
 \end{aligned}$$

L'equazione diventa:

$$\leq n + 3\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots + 3^{\log_4 n - 1}\left\lfloor \frac{n}{4^{\log_4 n - 1}} \right\rfloor + 3^{\log_4 n}c$$

Si può togliere l'approssimazione per difetto per ottenere un maggiorante:

$$\begin{aligned} &\leq n \left(1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 n - 1} \right) + 3^{\log_4 n} c \\ &\leq n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^i \right) + c 3^{\log_4 n} \end{aligned}$$

Per capire l'ordine di grandezza di $3^{\log_4 n}$ si può scrivere come:

$$3^{\log_4 n} = n^{(\log_n 3^{\log_4 n})} = n^{\log_4 n \cdot \log_n 3} = n^{\log_4 3}$$

Quindi la complessità è:

$$= O(n) + O(n^{\log_4 3})$$

Si ha che una funzione è uguale al termine noto della funzione originale e l'altra che è uguale al logaritmo dei termini noti. Se usassimo delle variabili uscirebbe:

$$\begin{aligned} T(n) &= aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n) \\ &= O(f(n)) + O(n^{\log_b a}) \end{aligned}$$

2.2 Master Theorem o Teorema dell'esperto

Data una relazione di occorrenza di questa forma:

$$T(n) = aT\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n)$$

Distinguiamo tre casi:

1.

$$f(n) \in O(n^{\log_b a - \epsilon}) \implies T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

2.

$$f(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) \implies T(n) \in \Theta(f(n) \log n)$$

3.

$$f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}) \implies T(n) \in \Theta(f(n))$$

Esempio 1

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$$

$$a = 3, b = 3, f(n) = n$$

Basta che trovo un ϵ che mi dia n .

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = n^2 * n^{-\frac{1}{2}}$$

In questo caso $\epsilon = n^{-\frac{1}{2}}$ e ci troviamo nel **PRIMO CASO** e la soluzione è $T(n) \in \Theta(n^2)$.

Esempio 2

$$T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$$

$$a = 1, b = \frac{3}{2}, f(n) = n^0$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0$$

Ci troviamo nel **SECONDO CASO** e la soluzione è $T(n) \in \Theta(\log n)$

Esempio 3

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$$

$$a = 3, b = 4, f(n) = n \log n$$

Ci troviamo nel **TERZO CASO** quindi basta qualsiasi valore di ϵ basta che sia contenuto tra $\log_3 4 \leq \epsilon \leq 1$. La soluzione è $T(n) \in \Theta(n \log n)$.

Esempio 4

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log n$$

$$a = 2, b = 2, f(n) = n \log n$$

$$n \log n \in \Omega(n^{1+\epsilon})$$

$$\log n \in \Omega(n^\epsilon) \text{ NON VALE}$$

Poiché un logaritmo è sempre più piccolo di un polinomio. Questo è un caso dove il teorema *non* si applica

2.3 Merge Sort (A, n)

Questo algoritmo di ordinamento *ricorsivo* utilizza il concetto di *divide et impera*.

Concettualmente, un merge sort funziona come segue:

1. **Dividi** l'array non ordinato in n sottoarray, ognuno contenente un elemento (un array di

un elemento è considerato ordinato).

2. **Unisci** ripetutamente i sottoarray per produrre nuovi sottoarray ordinati finché non ne rimane solo uno. Questo sarà l'array ordinato.

La sua complessità considerando il merge con complessità lineare risulta:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Utilizzando il **Master Theorem** e cadendo del *secondo caso* possiamo confermare che il risultato è:

$$= \Theta(n \log n)$$

```
1 // A e' l'array mentre p ed r sono rispettivamente l'indice di partenza e di
  arrivo
2 mergeSort(A, p, r) // O(n log n)
3   if (p < r)
4     q <- floor((p+r)/2)
5     mergeSort(A, p, q)
6     mergeSort(A, q+1, r)
7     merge(A, p, q, r)

1 merge(A, p, q, r)
2   i <- 1
3   j <- p
4   k <- q+1
5   // Ordina gli elementi di A in B
6   // 0 il lato sinistro ha finito
7   while(j <= q or k <= r) // O(n)
8     if j <= q and (k > r or A[j] <= A[k])
9       B[i] <- A[j]
10      j++
11    else
12      B[i] <- A[k]
13      k++
14    i++
15  // Copia gli elementi di B in A
16  for i <- 1 to r-p+1 // O(n)
17    A[p+i-1] <- B[i]
```

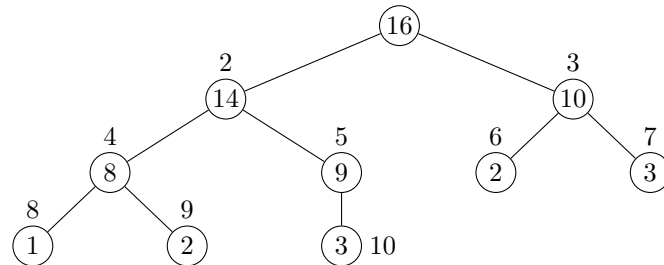
L'algoritmo è **stabile** poiché non vengono scambiati gli elementi uguali. Tuttavia non ordina **in loco** poiché utilizza uno spazio di memoria aggiuntivo.

2.4 Heap

L'Heap è un albero semicompleto (ogni nodo ha 2 figli ad ogni livello tranne l'ultimo che è completo solo fino ad un certo unto) in cui i nodi contengono oggetti con relazione di ordinamento.

Proprietà Heap:

\forall nodo, il contenuto è \geq del contenuto dei figli



La complessità dell'algoritmo è in base al numero di livelli dell'albero.

→ albero con n livelli:

$$\# \text{Nodi} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

→ albero con n nodi:

$$\# \text{Livelli} = \log_2 n$$

$$\# \text{Foglie} = \frac{n}{2}$$

Le foglie di un albero sono la metà dei nodi dell'albero.

```
1 extractMax(H) // O(log n)
2   h[1] <- H[H.heap_size()]
3   H.heap_size()--
4   heapify(H, 1)

1 heapify(H, 1) // O(log n)
2   l <- left[i] //
3   r <- right[i]
4   if (l < h.heap_size() AND H[l] > H[i])
5     largest <- l
6   else
7     largest <- i
8   if m <= h.heap_size() and H[r] > H[largest]
9     largest <- r
10  if largest != i
11    swap(H[i], H[largest])
12    heapify(H, largest)
```

Creare uno heap da un array:

```
1 buildHeap(A)
```



```
2   A.heap_size() <- length[A]
3   for i <- length[A]/2 down to 1
4     heapify(A, i)
```

Immagino tutte le foglie come heap con un solo nodo. L'indice del primo nodo che non è heap corrisponde a $\frac{\text{length}(A)}{2}$ su questo allora chiamo `heapify`.

2.5 Heapsort

```
1 HeapSort(A) // O(n log n)
2   buildHeap(A)
3   for i <- length(A) to 1
4     scambia(A[1], A[i])
5     heapsize(A)--
6     heapify(a, i)
```

L'Heap Sort è un algoritmo che lavora **in loco** tuttavia non è **stabile**. Tuttavia riusciamo a fare una stima migliore e più corretta?

$$n \log i = \sum_{i=1}^n \log i = \log \prod_{i=1}^n i = \log n! = \Theta(\log n^n) = \Theta(n \log n)$$

In questo caso, essere accurati non aiuta, ma abbiamo avuto la certezza che non esiste una stima migliore.

2.6 Quicksort

Come funziona l'algoritmo?

1. Dividi prima l'array in due parti. (Partizione)
2. Devi essere sicuro che tutti gli elementi di sinistra siano \leq di quelli di destra. Ricorsivamente ordina la parte sinistra e la parte destra.
3. A questo punto l'array è ordinato.

```
1 quickSort(A, p, r)
2   if (p < r)
3     q <- partition(a, p, r)
4     quickSort(A, p, q)
5     quickSort(A, q+1, r)
```

```
1 partition(A, p, r) // O(n)
2   x <- A[p] // Elemento Perno
3   i <- p-1
4   k <- r+1
5   while true
6     repeat j-- until a[j] <= x
7     repeat i++ until a[i] >= x
8     if i < j
9       scambia(a[i], a[j])
10    else
11      ret j
```

Scegliamo un elemento a caso in base a quello comparato rispetto all'elemento perno tale che:

$$sx \leq \text{perno} \leq dx$$

Questo algoritmo non è **stabile** ma lavora **in loco**. La sua complessità?

$$T(n) = T(\text{partition}) + T(q) + T(n - q)$$

Se il quicksort è perfettamente diviso in due, allora la sua complessità è $O(n \log n)$. Se invece l'array è già ordinato la sua equazione di ricorrenza sarà:

$$= n + T(1) + T(n - 1) = \Theta(n^2)$$

Tuttavia non ci aspettiamo che questo caso sia frequente e quindi nella stragrande maggioranza dei casi allora:

$$T(n) = n + T(cn) + T((1 - c)n)$$

Un'equazione di questo tipo sappiamo che ha come complessità $\Theta(n \log n)$.

```

1 rand_Partition(A, p, r)
2     i ← rand(p .. r) // Ora l'elemento perno e' un elemento a caso
3     scambio(A[p], A[i])
4     ret partition(A, p, r)

```

$$\begin{aligned}
 T(n) &= n + \frac{1}{n}(T(1) + T(n - 1)) + \frac{1}{n}(T(2) + T(n - 2)) + \dots + \\
 &\quad \frac{1}{n}(T(n - 2) + T(2)) + \frac{1}{n}(T(n - 1) + T(1)) = \\
 &= n + \frac{1}{n} \sum_i (T(i) + T(n - i)) \\
 &= n + \frac{2}{n} \sum_i T(i) \in O(n \log n)
 \end{aligned}$$

Qualsiasi algoritmo che *lavora per confronti* deve fare almeno $O(n \log n)$.

3 Algoritmi di ordinamento in tempo lineare

3.1 Algoritmi non basati su confronti

3.1.1 Counting Sort

Tuttavia possiamo trovare algoritmi che come tempo di esecuzione hanno tempo lineare. Come? Non lavorando a **confronti**.

Come ordinare n numeri con valori da 1 a k ?

```
1 countingSort(A, k)
2   for i <- 1 to k
3     C[i] <- 0
4   for j <- 1 to len(A)
5     C[A[j]]++
6   for i <- 2 to k
7     C[i] <- C[i-1]+C[i]
8   for j <- len(A) down to 1
9     B[C[A[j]]] <- a[j]
10    C[A[j]]--
```

La complessità di questo algoritmo è $O(n + k)$ dove n è la lunghezza dell'array e k è il range di valori.

3.1.2 Radix Sort

Il radix sort è un algoritmo di ordinamento che ordina gli elementi confrontando i singoli bit. Quello che fa è ordinare per la cifra meno significativa, poi per la seconda cifra meno significativa e così via.

```
1 radixSort(A, d) // O(d(n+k))
2   for i <- 1 to d
3     countingSort(A, n)
```

La complessità di questo algoritmo è

$$\Theta(d(n + k))$$

dove d è il numero di cifre e k è il range di valori. Se si vuole invece ordinare n valori da 1 a $n^2 - 1$, le costanti nascoste all'interno del Θ sono molto alte e quindi non è un algoritmo efficiente. Tuttavia si possono rappresentare i numeri in base n e quindi ottenere un algoritmo lineare.

3.1.3 Bucket Sort

Il Bucket Sort è un algoritmo di ordinamento applicabile quando la distribuzione dei dati è nota. Quindi su un array di n elementi **distribuiti uniformemente** su $[0, 1)$, si può dividere l'intervallo in n sottointervalli con probabilità $\frac{1}{n}$ e poi ordinare i singoli sottointervalli chiamate anche "Bucket". Infatti se i dati sono distribuiti uniformemente allora la complessità dell'algoritmo è lineare:

$$\Theta(n)$$

Questo perché in ogni bucket ci si aspetta un valore costante e quindi indipendente dal valore di n .

Il caso pessimo però è quando tutti gli elementi ricadono nello stesso bucket. La probabilità

che questo accada è molto bassa infatti è:

$$\underbrace{\frac{1}{n} * \frac{1}{n} * \dots * \frac{1}{n}}_{n-1} = \frac{1}{n^{n-1}}$$

e la sua complessità diventa:

$$O(n^2)$$

Sia X_{ij} la variabile aleatoria che vale:

$$\begin{cases} 1 & \text{Se l'elemento } i \text{ va nel bucket } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per esprimere il numero di elementi nel bucket j si ha:

$$N_j = \sum_i X_{ij}$$

La complessità di questo algoritmo quindi può essere espressa come:

$$C = \sum_j N_j^2$$

Dove il valore atteso è:

$$E[C] = E \left[\sum_j N_j^2 \right] = \sum_j E[N_j^2] = \sum_j (Var(N_j) + E[N_j]^2)$$

Dove $E[N_j]$ è:

$$E[N_j] = \sum E[X_{ij}] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

$$Var[N_j] = \sum Var(X_{ij}) = \sum \frac{1}{n} * \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

E quindi possiamo svolgere il calcolo precedente dove:

$$\begin{aligned}
\sum_j (Var(N_j) - E[N_j]^2) &= \sum_j \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 \right) \\
&= \sum_j 2 - \frac{1}{n} \\
&= 2n - 1
\end{aligned}$$

Le distribuzioni possono essere arbitrarie ma basta che tutti i bucket abbiano la stessa probabilità. Prendiamo:

$$\begin{aligned}
&n_1, \dots, n_2, \dots, n_l \\
&\frac{1}{n_1}, \dots, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_l}
\end{aligned}$$

La *turing-riduzione* è un algoritmo che riduce un problema ad un altro problema.

4 Algoritmi di selezione

Dato in input un array A di oggetti su cui è definita una relazione di ordinamento e un indice i compreso tra 1 e n (n è il numero di oggetti nell'array), l'output dell'algoritmo è l'oggetto che si trova in posizione i nell'array ordinato.

```

1 selezione(A, i)
2   ordina(A) // O(n log n)
3   return A[i]
```

Quindi la complessità di questo algoritmo nel caso peggiore è $O(n \log n)$ (limite superiore). È possibile selezionare un elemento in tempo lineare? Analizziamo un caso particolare dell'algoritmo di selezione, ovvero la ricerca del minimo (o del massimo).

4.1 Ricerca del minimo o del massimo

In tempo lineare si può trovare il minimo e il massimo di un array:

```

1 minimo(A)
2   min <- A[1]
3   for i <- 2 to length[A]
4     if A[i] < min
5       min <- A[i]
6   return min
```

trovare il minimo equivale a trovare `selezione(A, 1)` e trovare il massimo equivale a trovare `selezione(A, n)`. Si può però andare sotto la complessità lineare?

Per trovare il massimo (o il minimo) elemento n di un array bisogna fare **almeno** $n - 1$ confronti

perchè bisogna confrontare ogni elemento con l'elemento massimo (o minimo) trovato per poter dire se è il massimo (o minimo). Di conseguenza, non è possibile avere un algoritmo per la ricerca del massimo (o minimo) in cui c'è un elemento che non "perde" mai ai confronti (cioè risulta sempre il più grande) e non viene dichiarato essere il più grande (o più piccolo).

Dimostrazione: Per dimostrarlo si può prendere un array in cui l'elemento a non perde mai ai confronti, ma l'algoritmo dichiara che il massimo è l'elemento b . Allora si rilancia l'algoritmo sostituendo l'elemento a con $a = \max(b+1, a)$ e si ripete l'algoritmo con questo secondo array in cui a è l'elemento più grande. Si ha quindi che i confronti in cui a non è coinvolto rimangono gli stessi e i confronti in cui a è coinvolto non cambiano perchè anche prima a non perdeva mai ai confronti, di conseguenza l'algoritmo dichiarerà che il massimo è b e quindi l'algoritmo non è corretto, dimostrando che non esiste un algoritmo che trova il massimo in meno di $n-1$ confronti.

Abbiamo quindi trovato che la complessità del massimo (o minimo) nel caso migliore è $\Omega(n)$ (limite inferiore) e nel caso peggiore è $O(n)$ (limite superiore). Di conseguenza la complessità è $\Theta(n)$.

4.1.1 Ricerca del minimo e del massimo contemporaneamente

Si potrebbe implementare unendo i 2 algoritmi precedenti:

```

1 min_max(A)
2   min <- A[1]
3   max <- A[1]
4   for i <- 2 to length[A]
5     if A[i] < min
6       min <- A[i]
7     if A[i] > max
8       max <- A[i]
9   return (min, max)

```

Questo algoritmo esegue $n-1 + n-1 = 2n-2$ confronti.

- **Limite inferiore:** Potenzialmente ogni oggetto potrebbe essere il minimo o il massimo. Sia m il numero di oggetti potenzialmente minimi e M il numero di oggetti potenzialmente massimi. Sia n il numero di oggetti nell'array.

- All'inizio $m + M = 2n$ perchè ogni oggetto può essere sia minimo che massimo.
- Alla fine $m + M = 2$ perchè alla fine ci sarà un solo minimo e un solo massimo.

Quando viene fatto un confronto $m + M$ può diminuire.

- Se si confrontano due oggetti che sono potenzialmente sia minimi che massimi, allora $m + M$ diminuisce di 2 perchè:

$$a < b$$

b non può essere il minimo e a non può essere il massimo e si perdono 2 potenzialità.

- Se si confrontano due potenziali minimi (o massimi), allora $m + M$ diminuisce di 1 perchè:

$$a < b$$

b non può essere il minimo e si perde 1 potenzialità.

Un buon algoritmo dovrebbe scegliere di confrontare sempre 2 oggetti che sono entrambi potenziali minimi o potenziali massimi.

Due oggetti che sono potenzialmente sia minimi che massimi esistono se $m + M > n + 1$ perchè se bisogna distribuire n potenzialità ne avanzano due che devono essere assegnate a due oggetti che hanno già una potenzialità. Quindi fino a quando $m + M$ continua ad essere almeno $n + 2$ si riesce a far diminuire $m + M$ di 2 ad ogni confronto.

Questa diminuzione si può fare $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ volte, successivamente $m + M$ potrà calare solo di 1 ad ogni confronto.

Successivamente il numero di oggetti rimane:

$$\begin{cases} n + 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \\ n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

- n dispari:

$$\begin{aligned} n + 1 - 2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ = n - 1 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ = \lfloor \frac{3}{2}n \rfloor - 1 \\ = \lceil \frac{3}{2}n \rceil - 2 \end{aligned}$$

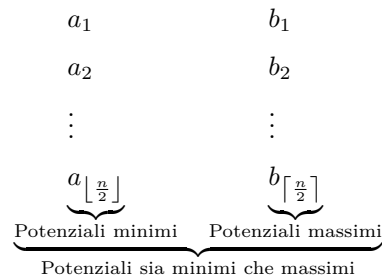
- n pari:

$$\begin{aligned} n - 2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ = n - 2 + \frac{n}{2} \\ = \frac{3}{2}n - 2 \\ = \lceil \frac{3}{2}n \rceil - 2 \end{aligned}$$

Quindi la complessità è $\Omega(\lceil \frac{3}{2}n \rceil - 2) = \Omega(n)$ (limite inferiore). Meglio di così non si può fare, ma non è detto che esista un algoritmo che raggiunga questo limite inferiore.

Un algoritmo che raggiunge il limite inferiore è il seguente:

1. Dividi gli oggetti in 2 gruppi:



2. Confronta a_i con b_i , supponendo $a_i < b_i$ (mette a sinistra i più piccoli e a destra i più grandi). Una volta aver fatto il confronto possiamo swappare gli elementi nella loro apposita sezione.
3. Cerca il minimo degli a_i e cerca il massimo dei b_i :
4. Sistema l'eventuale elemento in più (se l'array è dispari)

4.2 Randomized select

Si può implementare un algoritmo che divide l'array in 2 parti allo stesso modo in cui viene effettuata la `partition` di quick sort:

```

1 // A: Array
2 // p: Indice di partenza
3 // r: Indice di arrivo
4 // i: Indice che stiamo cercando (compreso tra 1 e r-p+1)
5 randomized_select(A, p, r, i)
6   if p = r
7     return A[p]
8   q <- randomized_partition(A, p, r)
9   k <- q - p + 1 // Numero di elementi a sinistra
10  // Controlla se l'elemento cercato e' a sinistra o a destra
11  if i <= k
12    return randomized_select(A, p, q, i) // Cerca a sinistra
13  else
14    return randomized_select(A, q+1, r, i-k) // Cerca a destra

```

- Se dividessimo sempre a metà si avrebbe:

$$T(n) = n + T\left(\frac{n}{2}\right) = \Theta(n) \text{ (terzo caso del teorema dell'esperto)}$$

- Mediamente:

$$T(n) = n + \frac{1}{n}T(\max(1, n-1)) + \frac{1}{n}T(\max(2, n-2)) + \dots$$

$$= n + \frac{2}{n} \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1} T(i)$$

La complessità media è lineare.

Si esegue un solo ramo, che nel caso pessimo è quello con più elementi. La risoluzione è la stessa del quick sort.

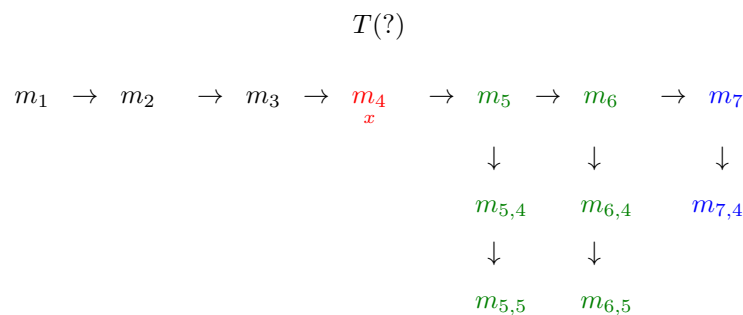
Esiste un algoritmo che esegue la ricerca in tempo lineare anche nel caso peggiore?

Si potrebbe cercare un elemento perno più ottimale, cioè che divida l'array in **parti proporzionali**:

1. Dividi gli oggetti in $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ gruppi di 5 elementi più un eventuale gruppo con meno di 5 elementi.
2. Calcola il mediano di ogni gruppo di 5 elementi (si ordina e si prende l'elemento centrale). $\Theta(n)$
3. Calcola ricorsivamente il mediano x dei mediani

$$T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right)$$

4. Partiziona con perno x e calcola k (numero di elementi a sinistra). $\Theta(n)$
5. Se $i < k$ cerca a sinistra l'elemento i , altrimenti cerca a destra l'elemento $i - k$. La chiamata ricorsiva va fatta su un numero di elementi sufficientemente piccolo, e deve risultare un proporzione di n , quindi ad esempio dividere in gruppi da 3 elementi non funzionerebbe.



Gli elementi verdi sono maggiori dell'elemento x e ogni elemento verde avrà 2 elementi

maggiori di esso (tranne nel caso del gruppo con meno di 5 elementi rappresentato in blu).

$$3 \cdot \left(\underbrace{\left\lceil \frac{1}{2} \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil \right\rceil}_{\text{verdi} + \text{blu} + \text{rosso}} - \underbrace{2}_{\text{rosso} + \text{blu}} \right) = \frac{3}{10}n - 6$$

Da ogni parte si hanno almeno $\frac{3}{10}n - 6$ elementi, quindi al massimo si hanno $n - (\frac{3}{10}n - 6) = \frac{7}{10}n + 6$ elementi.

Quindi abbiamo trovato $T(?)$:

$$T(n) = \Theta(n) + T\left(\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil\right) + T\left(\frac{7}{10}n + 6\right)$$

Applichiamo il metodo di sostituzione $T(n) \leq cn$:

$$T(n) \leq n + c \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \left(\frac{7}{10}n + 6 \right)$$

Tuttavia non sappiamo se $(\frac{7}{10}n + 6)$ sia $< n$. Scopriamo che la disuguaglianza è vera solo se $n > 20$. Quindi per risolvere il problema ci basta scegliere un $\bar{n} > 20$. Le costanti quindi sono abbastanza alte.

$$\begin{aligned} &\leq n + c + n \frac{c}{5} + \frac{7}{10}cn + 6c \\ &= \frac{9}{10}cn + 7c + n \\ &\stackrel{?}{\leq} cn \\ &= cn + \left(-\frac{1}{10}cn + 7c + n \right) \leq cn \\ &\stackrel{\text{sse}}{\iff} \left(n + 7c - \frac{1}{10}cn \right) \leq 0 \end{aligned}$$

Dove l'equazione di ricorrenza diventa:

$$T(n) \leq \Theta(n) + c \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil + c \left(\frac{7}{10}n + 6 \right)$$

Quindi $T(n) \leq cn$ e quindi $T(n) \in \Theta(n)$. Quindi è un algoritmo ottimo. Il problema è che le costanti sono così alte che nella pratica è meglio il **randomized.select**.

Esistono modi per strutturare meglio le informazioni nel calcolatore per trovare l'elemento cercato in tempo $O(\log n)$? Dobbiamo trovare delle rappresentazione che ci permettono di rispondere a delle domande in tempo logaritmico.

5 Strutture dati

Una struttura dati è un modo per organizzare i dati in modo da poterli manipolare in modo efficiente.

5.1 Stack o Pila

Definition 5.1. Uno stack è una struttura dati che permette di inserire e rimuovere elementi in modo LIFO (Last In First Out).

- **push(x)**: Inserisce l'elemento x nello stack. (Produce un oggetto che corrisponde allo stack originale a cui è stato aggiunto l'elemento).
- **pop(S)**: Rimuove l'elemento in cima allo stack. (Produce un oggetto che corrisponde all'elemento originale a cui è stato rimosso l'elemento).
- **top(S)**: Restituisce l'elemento in cima allo stack.
- **new()**: Crea uno stack vuoto.
- **isEmpty(S)**: Restituisce **true** se lo stack è vuoto, **false** altrimenti.

Da queste operazioni si possono definire certe proprietà come:

- $\text{top}(\text{push}(S, x)) = x$
- $\text{pop}(\text{push}(S, x)) = S$

Quindi un modo per definire uno stack tramite le operazioni che andiamo a fare sull'oggetto stesso:

$$\text{Push}(\text{Push}(\text{Push}(\text{Empty}(), x_1) x_2) x_3) \dots$$

5.2 Queue o Coda

Definition 5.2. Una coda è una struttura dati che permette di inserire e rimuovere elementi in modo FIFO (First In First Out).

- **enqueue(x)**: Inserisce l'elemento x in coda alla coda. $\rightarrow O(1)$ se ci tiene salvata il puntatore alla fine dell'array
- **dequeue(Q)**: Rimuove l'elemento in testa alla coda. $\rightarrow O(1)$
- **head(Q)**: Restituisce l'elemento in testa alla coda.
- **new()**: Crea una coda vuota.
- **isEmpty(Q)**: Restituisce **true** se la coda è vuota, **false** altrimenti.

5.3 Binary Tree o Albero binario

Definition 5.3. Un albero binario è una struttura dati che permette di organizzare i dati in modo gerarchico. Ogni nodo ha al massimo 2 figli.

- **new()**: Crea un albero vuoto.
- **root(T)**: Restituisce la radice dell'albero.
- **left(T)**: Restituisce il sottoalbero sinistro.
- **right(T)**: Restituisce il sottoalbero destro.
- **key(T)**: Restituisce la chiave del nodo.
- **isEmpty(T)**: Restituisce **true** se l'albero è vuoto, **false** altrimenti.

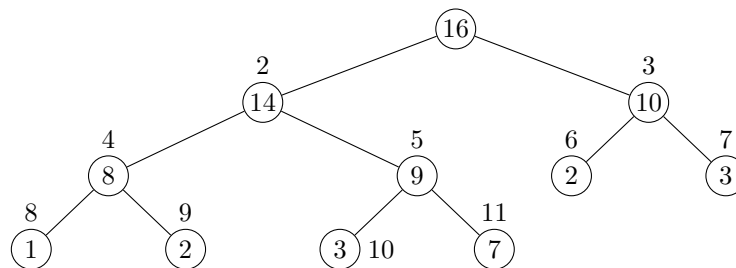


Figure 4: Esempio di albero binario

La profondità di un albero binario è il logaritmo in base 2 del numero di nodi.

$$P(n) = 1 + P\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right) = \Theta(\log_2 n)$$

5.4 Binary Search Tree o Albero binario di ricerca

Definition 5.4. Un albero binario di ricerca è un albero binario in cui per ogni nodo x valgono le seguenti proprietà:

- Tutti i nodi nel sottoalbero sinistro di x hanno chiavi minori di x .
- Tutti i nodi nel sottoalbero destro di x hanno chiavi maggiori di x .

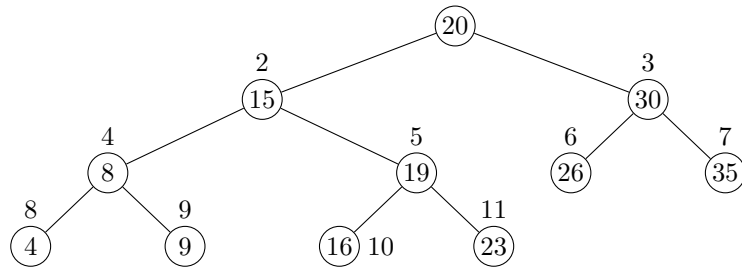


Figure 5: Esempio di albero binario di ricerca

Per cercare un elemento all'interno dell'albero binario di ricerca si può fare in *tempo logaritmico*. Infatti la sua complessità è $\Theta(\log n)$. Tuttavia nel caso peggiore devo scorrere tutto l'albero e quindi l'algoritmo finisce ad avere $O(n)$. Le funzioni che potremmo implementare per questa struttura potrebbe essere:

- **search**(T, k): Cerca la chiave k nell'albero T .
- **insert**(T, k): Inserisce la chiave k nell'albero T . $\implies \Theta(\log n)$
- **extract**(T, k): Estrae la chiave k dall'albero T . $\implies \Theta(\log n)$

Potremmo essere capaci di inserire un elemento nella giusta posizione in tempo logaritmico se l'albero è sbilanciato? No, infatti se l'albero è sbilanciato la complessità diventa lineare. Tuttavia ci sono dei workaround ma serviranno degli alberi particolari.

Una volta che un nodo viene rimosso o aggiunto non puoi essere certo che l'albero sia ancora ribilanciato. Quindi quello che bisogna fare è ribilanciare l'albero ogni volta che si rimuove o si inserisce un nodo.

5.5 Liste doppiamente concatenate

Come faccio ad eliminare un nodo all'interno della lista evitando di scrivere una lunga sintassi per riassegnare i puntatori dell'elemento prima e dell'elemento dopo? Utilizzo le sentinelle.

5.5.1 Sentinelle

Inserisco due nodi speciali all'inizio e alla fine della lista. Questi nodi speciali non contengono dati e sono chiamati sentinelle. Questi nodi speciali mi permettono di eliminare un nodo in modo più semplice. A volte l'efficienza non è la cosa più importante, infatti ci sono alcuni pezzi di codice che vogliamo ottimizzare nel migliore dei modi. Per tutti gli altri siamo disposti a perdere un po' di memoria. Proprio come le sentinelle.

5.6 RB-Tree o Albero rosso-nero

Definition 5.5. Perché si chiamano red black? Questi sono normali alberi di ricerca, devono rispettare alcune proprietà:

- Ogni nodo è rosso o nero.
- Ogni foglia è necessariamente nera.
- Figli di un rosso sono necessariamente neri.
- Ogni cammino radice-foglia ha lo stesso numero di nodi neri.

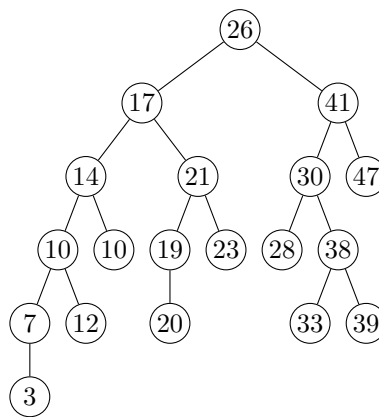


Figure 6: Esempio di albero binario

La proprietà 1 e 3 sono rispettate mentre la proprietà 2. Per sistemare questo problema potremmo bilanciare l'albero aggiungendo alle foglie rossi dei nodi "NIL" che saranno neri. In questo modo la proprietà 2 è rispettata.

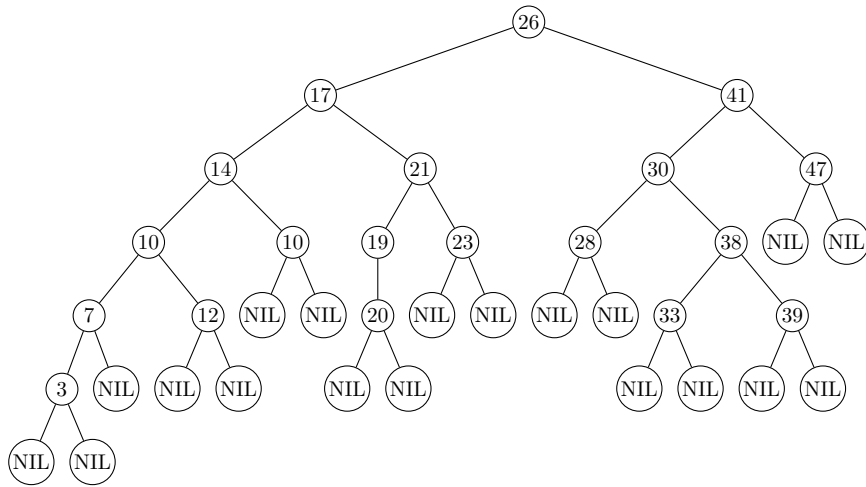


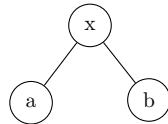
Figure 7: RB Albero bilanciato con i NIL

Il concetto principale di questo tipo di alberi è quello della **Black Height** ($bh(X)$ dove X è una foglia) cioè il numero di nodi neri che si incontrano lungo un cammino dalla radice ad una foglia.

Lemma 5.6. Per ogni nodo X il sottoalbero radicato in X ha almeno $2^{bh(X)} - 1$ nodi.

Proviamo a dimostrare il lemma:

Proof. Dimostriamo il lemma per induzione. Per $bh(X) = 0$ il lemma è vero. Supponiamo che il lemma sia vero per tutti i nodi. Allora i figli di X hanno $bh(X) = k - 1$. Per ipotesi induttiva:



dove $bh(a) \geq bh(X) - 1$ e $bh(b) \geq bh(x) - 1$

$$\begin{aligned}
 \#nodi &\geq 2^{bh(a)} - 1 + 2^{bh(b)} - 1 + 1 \\
 &\geq 2^{bh(X)-1} - 1 + 2^{bh(X)-1} - 1 + 1 \\
 &\geq 2 \cdot 2^{bh(X)-1} - 1 \\
 &= 2^{bh(X)} - 1 \quad \square
 \end{aligned}$$

Prendiamo un albero RB di altezza h , possiamo dire che l'altezza di una foglia sia uguale a 0. Quindi l'altezza di un nodo che non sia una foglia sia uguale al numero di tutti i nodi che incontro

lungo il cammino meno uno. $bh(X) \geq \frac{h}{2}$ L'altezza nera è almeno la metà dell'altezza dell'albero. Quindi l'altezza dell'albero è al massimo il doppio dell'altezza nera.

$$\# \text{ nodi interni} \geq 2^{\frac{h}{2}} - 1$$

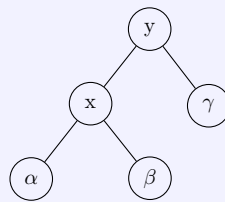
$$2^{\frac{h}{2}} \leq n + 1$$

$$\frac{h}{2} \leq \log_2(n + 1)$$

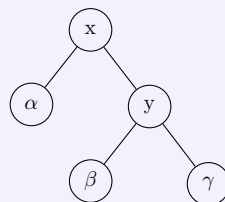
$$h \leq 2 \log_2(n + 1)$$

Come faccio a decidere se il nodo inserito deve essere rosso o nero? In questo caso, decidiamo che di base il nodo inserito sarà rosso. Se il padre del nodo inserito è rosso per la regola numero 2, allora quella parte di albero non sarà un RB-Albero creando un'anomalia. L'oggetto RB-Albero in questo momento ha un puntatore che punta ad un nodo X che potrebbe essere un nodo rosso figlio di un nodo rosso. Se l'albero presenta un'anomalia, dobbiamo eliminarla. Posso decidere se propagare l'anomalia verso l'alto in modo che risolvo l'anomalia per tutta la profondità dell'albero. In questo caso ci viene in aiuto l'algoritmo di rotazione destra o sinistra che ribalancerà l'albero:

Esempio di rotazione dx e sx



Ruota-dx →:



Pseudocodice dell'algoritmo della rotazione:

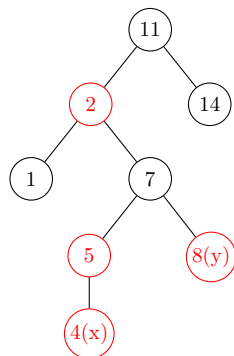
```

1 //Gli passiamo il nodo che ha l'anomalia insieme all'intero albero
2 // la funziona p[x] prende il parent del nodo x
3 while != root && color(P[x]) = red
4   if p[x] = left[p[p[x]]]
  
```

```

5  y <- right[p[p[x]]]
6  if color[y] = red
7    color(p[p[x]]) <- red
8    color[y] <- black
9    color[p(x)] <- black
10   x <- p[p[x]]
11 else
12   if x = right[p[x]]
13     x <- p[x]
14     rotation-sx(x)
15
16   color[p[x]] <- black
17   color[p[p[x]]] <- red
18   rotation-dx(p[p[x]])
19   x <- root

```



L'idea è quella di spostare l'anomalia in alto. Se il padre del nodo inserito è rosso, allora il nonno del nodo inserito sarà nero. Quindi posso cambiare colore al nonno e dare al nonno l'anomalia e così via, fino ad arrivare alla radice.

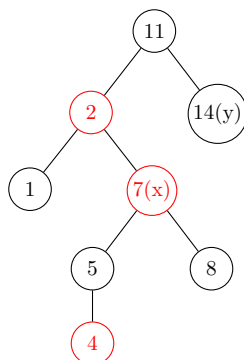


Figure 8: Il padre e lo zio del nodo anomalo diventano nero e il nonno rosso

Ruotiamo a sinistra

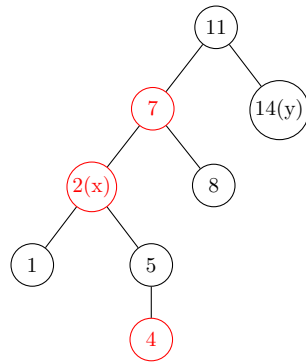


Figure 9: Rotazione a sinistra e l'ordine dei neri non è cambiato

Si cambiano i colori e si effettua una rotazione a destra:

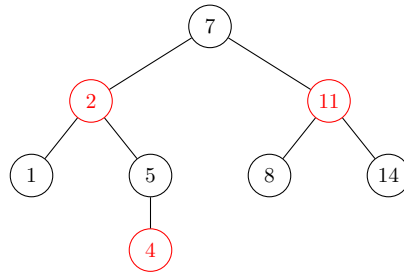
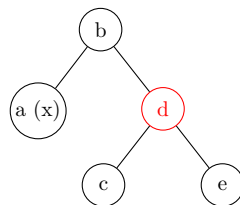


Figure 10: Rotazione a sinistra e l'ordine dei neri non è cambiato

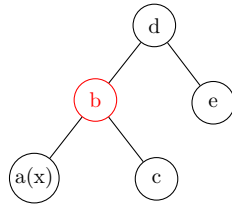
Come faccio *per l'estrazione di un elemento* ora? Se voglio eliminare un nodo rosso, non è un problema perché non c'è nessuna anomalia. Tuttavia se voglio eliminare un nodo nero, allora devo segnarmi l'anomalia perché mi servirebbe un nero in più per fare in modo che ogni cammino radice-foglia abbia lo stesso numero di nodi neri. L'anomalia si crea e un nodo diventa "doppiamente nero" poiché devo contenere per due neri se voglio che rimanga un RB-Albero. L'algoritmo che ribilancia l'albero anch'esso cerca di spostare l'anomalia verso l'alto ed è diviso in diversi casi:

1. Se il fratello del nodo è rosso. Sappiamo che DEVONO esistere il padre, lo zio e i nipoti grazie alle regole dell'RB-Tree.

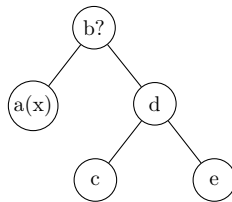


allora il padre del nodo diventa rosso e il fratello diventa nero. Si effettua una rotazione a

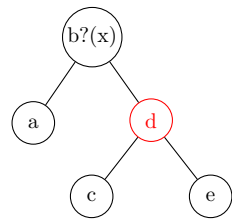
sinistra su B



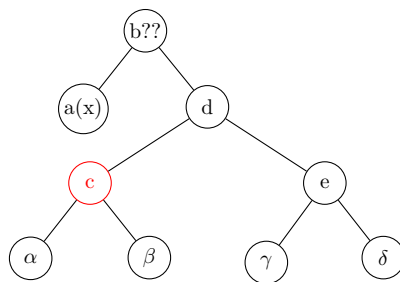
2. Se il fratello del nodo è nero andiamo a controllare i nipoti e sia C che E sono neri. (Il simbolo "?" davanti al nome del nodo vuol dire che può essere di qualsiasi colore)



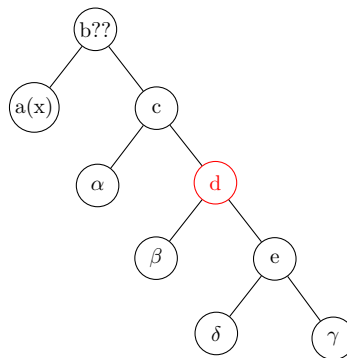
Togliamo 1 nero ad A e D e aggiungilo a B



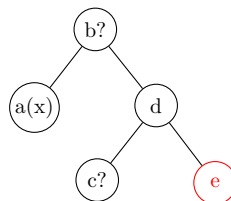
3. Non sappiamo che colore abbia B perché D è nero e assumiamo che uno dei nipoti (C) sia rosso ed E è nero.



Si scambiano colore D e C e fai una rotazione a destra su D



4. Se il nipote destro è rosso e il nipote sinistro è di qualsiasi colore:

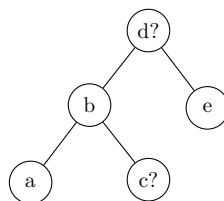


Proviamo ad implementare tramite codice e applicarlo sull'albero:

```

1  color[d] <- color[b]
2  color[b] <- black
3  color[e] <- black
4  rotation-sx(b)
5
6  x <- root

```



Abbiamo presentato quattro scenari diversi e per ciascuno di questi scenari abbiamo fatto una trasformazione e ci siamo assicurati che quest'ultima mantenga le proprietà dell'RB-Tree. Dobbiamo anche assicurarci che non ci siano nodi rossi figli di rossi.

Riassumiamo in breve questi casi prendendo come riferimento i nipoti del nodo anomalo:

- C nero, E nero (caso 2)
- **C rosso**, E nero (caso 3)
- C nero, **E rosso** (caso 4)

- C rosso, E rosso (caso 4)

Tutti i casi sono esaustivi poiché abbiamo coperto ogni caso. Il caso 1 è il caso in cui D è rosso.

- Il caso 3 e il caso 4 sono casi terminali perché portano al termine dell'algoritmo.
- Il caso 2 non termina ma porta l'anomalia in alto.
- Il caso 1 porta l'anomalia in **basso** e questo è un gran problema. Dopo il caso 1 non può verificarsi nuovamente il caso 1. Se è seguito da un caso 3 e 4 allora l'algoritmo termina. Se invece è seguito dal caso 2 nonostante il caso 2 non sia un algoritmo che termina, **l'algoritmo termina** perché l'anomalia è stata spostata in alto e B era rosso. Quindi anche questo algoritmo termina in tempo $O(\log n)$.

5.6.1 Estrazione in un RB-Albero

Se nell'albero binario posso andare a sinistra o a destra per ogni passaggio, ora sicuramente so che la complessità del mio algoritmo in un RB-Albero è $O(\log n)$.

Per sapere la posizione effettiva della mia radice, posso aggiungere alla mia struttura del nodo una proprietà *size* che mi permette di sapere quanti nodi ci sono sotto al nodo x. Per sapere la posizione effettiva di ogni nodo, posso utilizzare la seguente formula:

$$size(left(x)) + 1$$

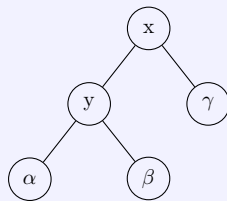
Lo pseudocode per l'estrazione di un nodo in un RB-Albero è il seguente:

```

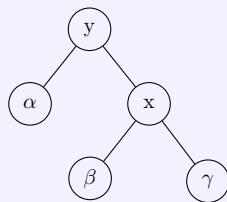
1 // X e' la lista
2 // i e' la posizione del nodo da estrarre
3 Select(x, i)
4   r <- size(leftx) + 1
5   if r = i
6     return x
7   else if (r > i)
8     ret select[left[x], i]
9   else
10    ret select[right[x], i - r]
```

Tuttavia una volta aver estratto il valore, devo aggiornare la proprietà *size* di tutti i nodi che sono stati toccati.

Esempio



Proviamo a ruotare e poi cambiare la proprietà *size* in questa maniera:



$$size(x) \leftarrow size(left[x]) + size(right[x]) + 1$$

La *size* di *y* dopo la rotazione è esattamente la *size* di *x* prima della rotazione. Gli unici che cambiano la *size* quindi, sono *x* e *y* e la complessità di questo algoritmo è $O(1)$ e quindi è costante.

5.6.2 Campi aggiuntivi

Si possono aggiornare dei campi aggiuntivi all'interno della struttura dell'RB-Albero per velocizzare alcuni algoritmi (come abbiamo visto per *size*) ma dobbiamo prestare attenzione a mantenere la complessità delle operazioni inalterate.

Theorem 5.7. *Sia F un campo aggiuntivo, se*

$$\exists f. \forall x F[x] = f(key[x], f[left[x]], f[right[x]], key[left[x]], key[right[x]])$$

allora F mantenibile in tempo logaritmico.

Cioè se il campo aggiuntivo è calcolabile utilizzando le operazioni definite in f allora la complessità di F rimane inalterata.

Osservazione. Se siamo in un Albero AVL possiamo aggiungere un campo aggiuntivo tuttavia il teorema appena enunciato non varrà poiché l'inserimento e la rimozione impiega tempo $O((\log n)^2)$. Perché deve svolgere le rotazioni (che impiegano tempo logaritmico) per ogni nodo all'interno del cammino radice-foglia.

Esempio 1

Se volessi aggiungere il campo "Rank(x)" che ritorna la posizione che occupa quel nodo in un ordinamento crescente all'interno dell'albero.

```
1 // x: Nodo da cui si parte per la selezione
2 // y: Nodo dove bisogna trovare la
3 Rank(x, y)
4     count = size[left[x]] + 1
5     // finche' x non e' la radice
6     while(x != root)
7         // Se sei figlio destro allora aggiungo la size del sottoalbero sinistro
           e il padre
8         if (x == right[parent[x]])
9             return count + size[left[parent[x]]] + 1
10        // altrimenti x diventa il suo parent e vai sopra
11        x = parent[x]
12
13    return count
```

Esempio 2

Se si volessero inserire gli elementi di un RB-Albero in un array ordinato, si potrebbe usare un algoritmo di visita in-order dell'albero. Esistono diversi modi per visitare un albero: Lo pseudocodice è il seguente:

```
1 // x: Nodo da cui si parte la visita
2 // i: indice dell'array in cui inserire x
3 // prima si scrive la radice, poi il sottoalbero sinistro e poi il
   sottoalbero destro
4 pre_visit(x, i)
5     if x != null
6         visit(x)
7         pre_visit(left[x], i)
8         pre_visit(right[x], i)
9
10 // la radice si trova al centro e a sinistra si trovo il sottoalbero
   sinistro e a destra il sottoalbero destro
11 in_visit(x, i)
12     if x != null
13         invisit(left[x], i)
14         visit(x)
15         invisit(right[x], i)
16
17 post_visit(x, i)
18     if x != null
19         post_visit(left[x], i)
20         post_visit(right[x], i)
```



```

21 visit(x)
22

```

Possiamo dimostrare che la visita ha complessità $O(n)$. Per dimostrarlo possiamo usare l'equazione di ricorrenza:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(n_{left}) + T(n_{right}) + 1 \\
 &= n_{left} + n_{right} + 1 = n
 \end{aligned}$$

Supponiamo per induzione che $T(n_{left})$ e $T(n_{right})$ sono rispettivamente n_{left} e n_{right} . Quindi possiamo visitare i nodi degli RB-Alberi in **tempo lineare**.

Se volessi inserire gli elementi di un RB-Albero in un array ordinato, posso usare la visita in-order dell'albero. Tuttavia la sua complessità è $O(n \log n)$ poiché facendo una sequenza di inserimento:

$$1 + \log 1 + \log 2 + \dots + \log n = \log n! = \Theta(n \log n)$$

Ci chiediamo se possiamo costruire un RB-Albero partendo da un array in un tempo più basso di $O(n \log n)$. Se è così, allora otteniamo un array ordinato e questo vuol dire che riesco a scrivere un algoritmo di ordinamento con complessità inferiore di $O(n \log n)$.

```

1 sort(A)
2   T <- build_tree(A)
3   B <- in_visit(T)

```

Tuttavia avevamo già dimostrato che non è possibile fare un ordinamento in tempo inferiore a $O(n \log n)$. Riusciamo a scrivere una funzione "buildtree" che dato un array ordinato mi costruisce un RB-Albero

```

1 build_tree(A)
2   if A == []
3     return null
4   else
5     m <- A.length / 2
6     x <- new Node(A[m])
7     left[x] <- build_tree(A[0, m-1])
8     right[x] <- build_tree(A[m+1, A.length])
9     return x

```

Proviamo ora a scrivere un algoritmo che costruisce un nodo e prende in input due stringhe prese dalla pre-visita e dalla in-visita.

```

1 buildtree(p, i)
2   if(length(i) == 0) {
3     return null
4   } else {
5     x <- add[p[0]]

```

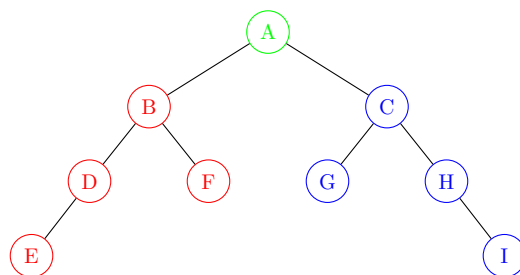
```

6  newP <- i.indexOf(p[0])
7  left(x) <- buildtree(P[1 .. newP], I[0 .. newP-1])
8  right(x) <- buildtree(P[newP+1 .. p.length], I[newP+1 .. I.length])
9  }

```

Prendiamo come esempio le due stringhe:

$$PREvisit = [A, B, D, E, C, C, G, H, I]$$

$$INvisit = [E, D, B, F, A, G, C, H, I]$$


Non è possibile unire due RB-Alberi in tempo logaritmico in modo deterministico perché:

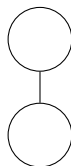
- L'operazione richiede spesso una manipolazione globale della struttura.
- Il bilanciamento degli RB-Alberi impone vincoli che possono richiedere tempo lineare rispetto alla dimensione degli alberi coinvolti.

5.7 Heap Binomiale

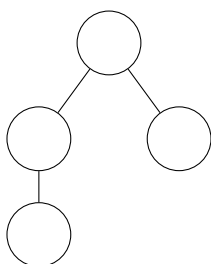
Un heap binomiale è una collezione di alberi binomiali. Un albero binomiale di dimensione 0 è un singolo nodo.



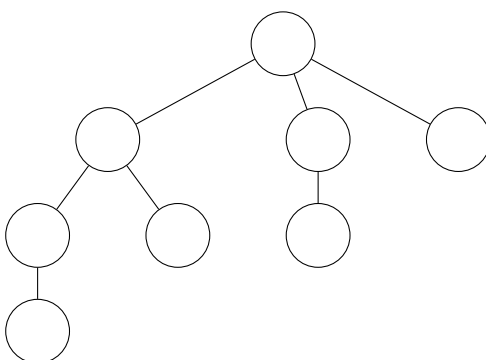
Un albero di dimensione 1 è un albero binario con un solo figlio.



Un albero di dimensione 2 diventa:



Un albero di dimensione 3 diventa:



Dato un albero di dimensione i posso costruire un albero di dimensione $i+1$ in tempo costante. Questi alberi hanno una serie di proprietà:

Lemma 5.8. *In un albero binomiale di dimensione k :*

- *ci sono 2^k nodi.*
- *L'altezza è k .*
- *A profondità i ci sono $\binom{k}{i}$ nodi.*
- *I figli della radice da sx a dx sono radici di alberi binomiali di dimensione $k-1, k-2, \dots, 0$.*

Cerchiamo di dimostrare le proprietà che abbiamo appena elencato:

Proof. Dimostrazione per induzione: Ci sono 2^k nodi: La proprietà è valida per gli alberi di dimensione 0 (B_0) perché ha $2^0 = 1$ nodo. supponiamo per induzione che in un albero di dimensione k (B_k) ci siano 2^k nodi. Dimostriamo che nell'albero di dimensione

$k + 1$ (B_{k+1}) formato da due alberi B_k sono dunque presenti:

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Proof. L'altezza è $k + 1$: Supponiamo per induzione che in albero di dimensione k ci siano 2^k nodi. Come è fatto un albero di dimensione $k + 1$? L'albero di dimensione $k + 1$ è formato da un albero di dimensione k e un albero di dimensione k . Quindi ci sono $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ nodi. L'altezza è $k + 1$. A profondità i ci sono $\binom{k+1}{i}$ nodi. I figli della radice da sx a dx sono radici di alberi binomiali di dimensione $k, k - 1, \dots, 0$.

Proof. I figli della radice da sx a dx sono radici di alberi binomiali di dimensione $k - 1, k - 2, \dots, 0$: Per $k = 0$ è vero. Dato che l'altezza è $k + 1$, il figlio sinistro della radice è un albero binomiale di dimensione k e il figlio destro è un albero binomiale di dimensione $k - 1$.

Proof. A profondità i ci sono $\binom{k}{i}$ nodi: Supponiamo per induzione che in albero di dimensione k ci siano $\binom{k}{i}$ nodi. Come è fatto un albero di dimensione $k + 1$? L'albero di dimensione $k + 1$ è formato da un albero di dimensione k e un albero di dimensione k . Quindi ci sono $\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1}$ nodi. Quindi, tramite l'identità di Pascal, otteniamo $\binom{k+1}{i}$ nodi. L'identità di Pascal dice che

$$\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{i}$$

A profondità i ci sono $\binom{k+1}{i}$ nodi. I figli della radice da sx a dx sono radici di alberi binomiali di dimensione $k, k - 1, \dots, 0$.

Quindi riassumendo: *La Heap Binomiale è una lista di alberi binomiali dove*

- I contenuti dei nodi sono oggetti su cui è definita una relazione di ordinamento
- Per ogni di dimensione k c'è al più un albero binomiale
- I vari nodi soddisfano la proprietà di heap ($\text{chiave}[x] \leq \text{chiave}[\text{children}[x]]$)

Esempio 1

La complessità di trovare il minimo all'interno di questo Heap Binomiale si basa sul numero di radici. Dove n è il numero di nodi:

$$k > \log_2 n$$

$$2^k > 2^{\log_2 n} = n$$

Quindi la complessità è $O(\log n)$, anzi $\Omega(\log n)$ perché devo scorrere tutti gli alberi.

Esempio 2

Se volessi costruire uno Heap Binomiale con n nodi fissato, è possibile perché essendo ogni albero rappresentabile come 2^k posso scomporre il valore n come somma di potenze di due.

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_m}$$

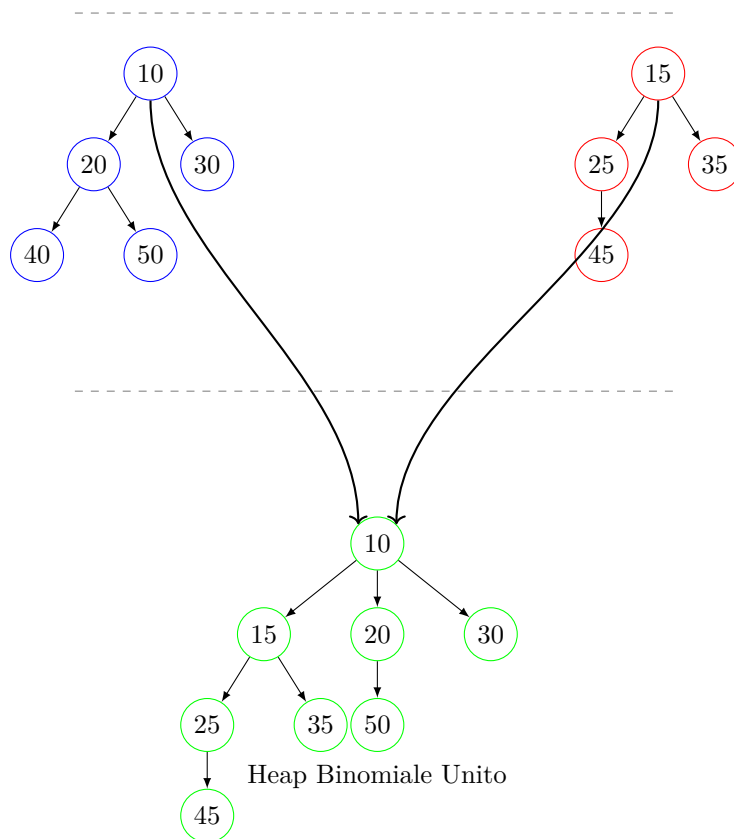
Per esempio:

$$37 = 2^5 + 2^2 + 2^0$$

Quindi posso costruire uno Heap Binomiale con qualsiasi n nodi.

5.7.1 Unione di Heap Binomiali

Supponiamo di voler fare l'unione di due heap binomiali H_1 e H_2 .



Massimo di iterazione massimo $O(\log n)$ e quindi la complessità è $O(\log n)$.

L'inserimento di un nodo non è altro che l'unione di un nodo di dimensione 0 con l'heap binomiale a cui vogliamo aggiungere il nodo.

5.7.2 Rimozione di un nodo

La rimozione di un nodo in uno heap binomiale è un'operazione che può essere eseguita in tempo $O(\log n)$. Supponendo di voler rimuovere il nodo con la chiave più piccola (che corrisponde sempre alla radice dell'heap), il processo si articola nei seguenti passi:

- Identificazione della radice con chiave minima: La radice con chiave minima può essere trovata scorrendo l'elenco delle radici degli alberi binomiali. Questo richiede tempo $O(\log n)$, dato che il numero massimo di alberi binomiali in uno heap è proporzionale a $\log n$.
- Rimozione della radice: Una volta identificata la radice minima, essa viene rimossa. A seguito della rimozione, i sottoalberi figli della radice vengono "scompattati". Ciascuno di questi sottoalberi è un albero binomiale separato, che può essere gestito individualmente.

- Ricostruzione dello heap: Per ripristinare la struttura dello heap binomiale, i sottoalberi risultanti vengono uniti tra loro e con il resto dello heap. L'operazione di unione avviene combinando alberi di gradi uguali, procedendo come nell'algoritmo di fusione. Anche questa operazione richiede $O(\log n)$.

In sintesi, l'operazione di rimozione implica un'iterazione sugli alberi binomiali (per identificare la radice minima), seguita dalla fusione dei sottoalberi generati. Entrambe le fasi hanno complessità $O(\log n)$, rendendo l'intero processo efficiente.

5.7.3 Diminuzione di una chiave e rimozione di un elemento arbitrario

Per diminuire la chiave di un nodo in uno heap binomiale, è necessario prestare attenzione a non violare la proprietà di heap. Se la chiave diminuita è minore della chiave del padre, occorre scambiare il nodo con il padre e ripetere questa operazione (nota come *risalita*) fino a quando la proprietà di heap non è più violata. La complessità di questa operazione è $O(\log n)$, poiché la profondità massima di un albero binomiale è $O(\log n)$.

La diminuzione della chiave è utile in molte applicazioni, come negli algoritmi di ottimizzazione. Tuttavia, ci sono operazioni più potenti che potrebbero comportare una complessità maggiore.

Per **rimuovere un nodo arbitrario**, possiamo sfruttare l'operazione di diminuzione della chiave. Riducendo la chiave del nodo a $-\infty$, il nodo verrà spinto alla radice, rendendo la sua rimozione equivalente a quella della radice, che richiede $O(\log n)$ tempo.

Quindi, con uno heap binomiale, è possibile eseguire le seguenti operazioni in tempo $O(\log n)$:

- Inserire un nodo
- Trovare il minimo
- Unire due heap binomiali
- Rimuovere la radice
- Diminuire una chiave
- Rimuovere un nodo arbitrario

Tuttavia, alcune operazioni non possono essere eseguite in tempo $O(\log n)$:

- Trovare il massimo
- Cercare un elemento arbitrario

5.7.4 Trovare il mediano

Poiché l'array di partenza non è ordinato, trovare il mediano richiede generalmente un'operazione di tempo lineare, ovvero $O(n)$. Tuttavia, è possibile ottimizzare questo processo trasformando l'array in un heap binomiale. L'heap binomiale, sebbene non permetta l'accesso diretto al mediano, offre una struttura che può facilitare il processo.

Per trovare il mediano utilizzando un heap binomiale, è necessario seguire alcuni passaggi aggiuntivi. In particolare, dopo aver costruito l'heap binomiale, si può procedere ad estrarre gli elementi in ordine crescente (o decrescente), fino a raggiungere l'elemento centrale. Sebbene l'heap binomiale non fornisca un accesso diretto alla posizione del mediano, l'ordinamento parziale che essa garantisce può ridurre il numero di operazioni necessarie rispetto a un ordinamento completo dell'array.

In alternativa, un approccio come l'algoritmo di selezione del k-esimo elemento potrebbe essere utilizzato in combinazione con l'heap binomiale per trovare il mediano in modo più efficiente.

5.7.5 RB-Alberi e Search Closest

Se in un RB-Albero non dobbiamo cercare la chiave precisa ma la chiave più vicina dobbiamo cercare di utilizzare l'RB Albero in modo tale da poter usare la potenza del suo ordinamento. Come chiave di ordinamento uso la chiave x-k ovvero la differenza tra le due misure.

```
1 // Primo candidato
2 // k valore a cui voglio avvicinarmi
3 // BestCandidate e' un ulteriore candidato
4 searchClosest(x,k)
5     if x == null
6         return null
7     else if (key[x] > k)
8         bestCandidate = searchClosest(right[x], k)
9     else if (key[x] < k)
10        bestCandidate = searchClosest(left[x], k)
11
12 if bestCandidate == null || (key[x] - k) < (bestCandidate - k)
13     return x
14 else
15     return bestCandidate
```

Questo algoritmo ha complessità $O(\log n)$ poiché dobbiamo comunque passare per il cammino radice foglia.

Esempio

Ora immaginiamo questo problema: Siamo dei venditori di macchine e conteniamo i dati delle macchine all'interno di un record dove sono contenuti informazioni come: prezzo di vendita, data di vendita, ecc. Vogliamo trovare la somma dei prezzi delle macchine che abbiamo venduti fino ad una certa data. Per costruire questo tipo di albero possiamo

servirci della possibilità di aggiungere campi aggiuntivi mantenibili in tempo logaritmico.

```
1 SearchDate(x, k)
2   if(x == null)
3     return null
4   else if (date[x] <= k)
5     bestDate = SearchDate(right[x], k)
6     return best ?? x //equivalente a scrivere -> best != null ? best : x
7   else if (date[x] > k)
8     bestDate = SearchDate(left[x], k)
9     return best ?? x
```

Quindi ora abbiamo trovato il candidato migliore della data a cui possiamo applicare il rango per trovare la somma dei prezzi delle macchine vendute fino a quella data.

5.8 Strutture dati facilmente partizionabili

Vogliamo una struttura dati che sia formata da insiemi disgiunti di oggetti e possegga le seguenti operazioni:

- **MakeSet(x)**: Crea un insieme contenente l'oggetto x.
- **Union(x, y)**: Unisce gli insiemi contenenti x e y.
- **FindSet(x)**: Restituisce l'insieme contenente x. Cerca quindi il **rappresentante** dell'insieme a cui appartiene x. Quindi quando voglio capire se due oggetti appartengono allo stesso insieme posso controllare se il risultato di **FindSet(x)** e **FindSet(y)** sono uguali.

posso organizzare gli oggetti nelle liste concatenate in cui il rappresentante è il primo oggetto della lista.

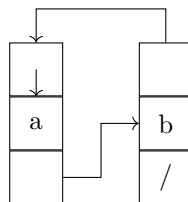


Figure 11: Esempio di una lista concatenata

in questo modo **MakeSet(x)** e **FindSet(x)** hanno complessità costante, ma la **Union(x,y)** avrebbe complessità lineare perché devo capire se i due oggetti hanno lo stesso rappresentante, poi scorrere uno dei due insiemi fino alla fine e poi cambiare il puntatore dell'insieme aggiunto al nuovo rappresentante per risolvere il primo problema che causa linearità potrei aggiungere al rappresentante il puntatore all'ultimo elemento.

5.8.1 Ottimizzazione della complessità con alberi e unione per rango

Se vengono effettuate m operazioni di cui n sono `make_set` (cioè il numero di oggetti, di conseguenza il numero di union possibili), la complessità nel caso pessimo è $O(m*n)$. Di tutte queste operazioni, le `union` saranno al massimo $n-1$ perchè non si possono unire più di n insiemi. Tutte le rimanenti saranno operazioni di tempo costante, di conseguenza un altro limite superiore corretto sarebbe $O(m+n^2)$. Un limite superiore migliore si può ottenere calcolando la complessità media di tutte le operazioni e quindi la complessità finale diventa: $O(\frac{m+n^2}{m}) = O(1 + \frac{n^2}{m})$.

Per capire se questa complessità è accurata bisogna trovare un insieme di operazioni da fare che portino ad avere quella complessità.

1. Si fanno n `make_set` creando n insiemi
2. Si uniscono le coppie di insiemi. Per la prima coppia il costo è 1, per la seconda 2 e così via. Il costo totale è:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

Per fare meglio di $\Theta(n^2)$ bisogna ottimizzare la `union`, cioè l'aggiornamento di tutti i puntatori. Si potrebbe unire l'insieme più piccolo a quello più grande, al posto di unire quello più grande a quello più piccolo e a questo punto bisogna cambiare soltanto un puntatore, nel caso in cui l'elemento più piccolo abbia un elemento. Questo metodo è chiamato **unione per rango**. Il numero massimo di volte che si può modificare il puntatore al rappresentante dopo questa tecnica diventa $\log_2 n$ perchè:

1. Se ad un insieme di un elemento viene cambiato il puntatore al rappresentante allora sappiamo che l'insieme risultante avrà minimo 2 elementi:

$$\geq 2$$

2. Se ad un insieme di due elementi viene cambiato il puntatore al rappresentante allora sappiamo che l'insieme risultante avrà al minimo 4 elementi (perchè sappiamo che bisogna unire l'insieme più piccolo ad un altro insieme, di conseguenza se sappiamo che l'insieme di due elementi è il più piccolo, l'altro insieme avrà al massimo 2 elementi):

$$\geq 4 = 2^2$$

3. ...

4. Se ad un insieme di i elementi viene cambiato il puntatore al rappresentante allora sappiamo

che l'insieme risultante avrà al minimo 2^i elementi:

$$\geq 2^i$$

Questa costruzione si chiama **iterative squaring**. La complessità con l'unione per rango diventa:

$$\frac{m + n \log n}{m} = 1 + \frac{n \log n}{m} \leq 1 + \log n$$

Per fare meglio si può rappresentare in un modo alternativo gli insiemi, quindi con degli alberi.

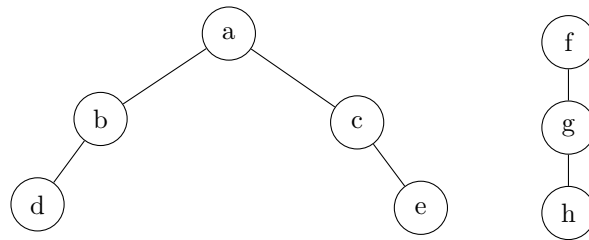


Figure 12: Esempio di alberi come insiemi

- `make_set(x)`: si crea un albero con un solo nodo

$$O(1)$$

- `find_set(x)`: si risale l'albero fino alla radice

$$O(n)$$

- `union(x,y)`: si fa diventare la radice di un albero il figlio dell'altra

$$O(n)$$

Come prima si può usare l'unione per rango per migliorare la complessità. Ogni volta che un nodo aumenta di profondità (grazie all'unione ad un altro albero), il numero di nodi raddoppia. Facendo l'unione per rango sappiamo che la complessità della ricerca del rappresentante è $O(\log n)$ e la complessità dell'unione è $O(\log n)$.

Siccome la `find_set` è $O(\log n)$ siamo comunque peggio di prima, quindi si può far puntare ogni nodo direttamente al rappresentante, ma questo viene fatto soltanto quando viene richiamata la `find_set`, in modo da non farlo più alle chiamate successive. L'algoritmo è il seguente:

```
1 find_set(x):
```

```

2  if parent(x) == x
3      return x
4  else
5      parent(x) = find_set(parent(x))
6      return parent(x)

```

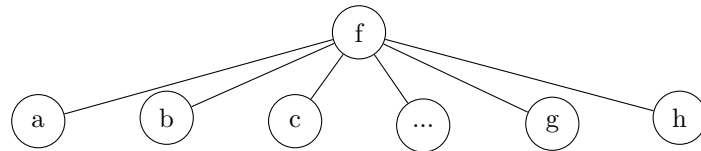
oppure più compatto:

```

1  find_set(x):
2      if parent(x) != x
3          x <- find_set(parent(x))
4      return parent(x)

```

Man mano che vengono eseguite le `find_set` la struttura si comprime (**tecnica di compressione dei cammini**):



Di conseguenza la complessità della `find_set` diventa costante.

La nuova complessità sapendo di avere m operazioni di cui n `make_set` diventa:

$$O(m\alpha(m, n))$$

dove α è l'inversa della funzione di Ackermann:

$$\alpha(m, n) = \min \left\{ i \geq 1, \left| A \left(i, \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor \right) > \log n \right. \right\}$$

$$A(i, 1) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}}^i$$

Siccome la funzione di Ackermann cresce molto velocemente, la sua inversa cresce molto lentamente. Di conseguenza non si riuscirà mai a superare una certa costante, quindi la complessità diventa costante.

5.9 Il concetto di funzione calcolabile

Le funzioni descritte in maniera **costruttiva** non sono la totalità delle funzioni esistenti perché esse sono maggiori della cardinalità stessa dei naturali (Infinito non numerabile). I fratelli maggiori Robison partendo da assiomi di Peano:

- 0 è un numero naturale

- $\forall x \in \mathbb{N}, x = x$
- $x + 0 = x$
- $x + (y + 1) = (x + y) + 1$

hanno dimostrato che l'insieme delle funzioni costruttive sono ricorsive primitive. Ackermann aveva capito che la seguente struttura confutava ciò che i Robinson avevano dimostrato:

$$x * 1 = x$$

$$x * (y + 1) = x + x * y$$

oppure

$$x^1 = x$$

$$x^{y+1} = x \cdot x^y$$

Questo dimostrava come ci fossero funzioni che non erano ricorsive primitive.

```

1 // Funzione di Ackermann in Pseudocodice
2 A(x, y)
3   if x == 0
4     return y + 1
5   else if y == 0
6     return A(x-1, 1)
7   else
8     return A(x-1, A(x, y-1))

```

5.9.1 Esempio di mantenimento di un campo in un RB-Albero

Esempio

Immaginiamo di gestire un agenda in cui poter inserire e togliere appuntamenti con inizio e fine, poi anche una funzione che preso un intervallo di tempo mi restituisce un appuntamento in cui andrebbe in collisione.

Usiamo gli RB-Alberi in cui i nodi rappresentano gli appuntamenti. In ogni nodo x teniamo il campo $max[x]$ che mantiene il massimo del tempo finale tra tutti i nodi radicati in x . Questo campo è mantenibile in tempo logaritmico.

```
1 search(x,i)
2   if x == nil || i in x
3     return x
4   else if left[x] != nil && max[left[x]] > min[i]
5     return search(left[x], i)
6   else
7     return search(right[x], i)
8
```

6 Tecniche di programmazione

Fin'ora abbiamo utilizzato la tecnica del **divide et impera**, cioè dividere il problema in parti più piccole e risolverle con lo stesso algoritmo per poi unirle per ottenere il risultato. Questa non è l'unica tecnica di programmazione esistente, ce ne sono molte altre, ad esempio la **programmazione greedy**, cioè prendere le decisioni il prima possibile e sperare che siano le migliori, oppure la **programmazione dinamica**, cioè creare un'infrastruttura prima di poter prendere una decisione.

6.1 Programmazione dinamica

Prendiamo ad esempio il problema della **moltiplicazione di matrici**. Sappiamo che se abbiamo due matrici A di dimensione $n \times m$ e B di dimensione $m \times l$, il prodotto tra le due matrici avrà complessità $\Theta(nml)$.

Se volessimo moltiplicare 3 matrici: $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ di dimensione:

$$A_1 : 10 \times 100$$

$$A_2 : 100 \times 5$$

$$A_3 : 5 \times 50$$

possiamo sfruttare la proprietà associativa:

$$(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 = A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3)$$

Solo che il numero di operazioni nei due casi è diverso, quindi per rendere minimo il numero di

operazioni è più conveniente fare: $(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3$ perchè:

$$\begin{aligned}(A_1 \cdot A_2) \cdot A_3 &= 10 \times 100 \times 5 + 10 \times 5 \times 50 = 5000 + 2500 = 7500 \\ A_1 \cdot (A_2 \cdot A_3) &= 100 \times 5 \times 50 + 10 \times 100 \times 50 = 25000 + 50000 = 75000\end{aligned}$$

Supponiamo di avere un insieme di matrici A_1, A_2, \dots, A_n , vogliamo trovare la **parentesizzazione** ottimale per minimizzare il numero di operazioni.

Un modo per affrontare il problema è quello di provare tutte le combinazioni di parentesi e vedere quale è la migliore.

C'è per forza una moltiplicazione che dovrà essere eseguita per ultima, quindi distinguiamo k come il punto in cui verrà fatta l'ultima moltiplicazione.

$$(A_1 \cdots A_k) \cdot (A_{k+1} \cdots A_n)$$

Il numero modi per moltiplicare le matrici è dato dal numero di modi per moltiplicare le matrici $A_1 \dots A_k$ e le matrici $A_{k+1} \dots A_n$.

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} P(k) + P(n-k) \in \Omega\left(\frac{4^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

La complessità è troppo alta, quindi provare tutte le combinazioni possibili non è efficace.

Supponiamo che qualcuno ci dica il valore ottimo di k , allora è sicuro che il modo in cui vengono moltiplicate le matrici $(A_1 \cdots A_k)$ e $(A_{k+1} \cdots A_n)$ è ottimale:

$$\underbrace{(A_1 \cdots A_k)}_{\text{Ottimo}} \cdot \underbrace{(A_{k+1} \cdots A_n)}_{\text{Ottimo}}$$

Questa tecnica si chiama **Sottostruttura ottimale**, un problema si può dividere in problemi della stessa natura, ma più piccoli.

Il numero di moltiplicazioni effettuate è dato da:

$$\begin{aligned}N(A_1 \cdots A_n) &= \\ &= N(A_1 \cdots A_k) + N(A_{k+1} \cdots A_n) + \text{Costo ultima moltiplicazione} \\ &= N(A_1 \cdots A_k) + N(A_{k+1} \cdots A_n) + \text{rows}(A_1) \cdot \text{cols}(A_k) \cdot \text{cols}(A_n)\end{aligned}$$

Se k è ottimo, allora $N(A_1 \cdots A_k)$ e $N(A_{k+1} \cdots A_n)$ sono ottimi perchè il risultato viene sommato e se non fossero ottimi il risultato finale non sarebbe ottimo. Il problema è che non sappiamo quale sia il valore di k ottimo.

Un possibile algoritmo per trovare k è il seguente:

```

1 // P e' un vettore che descrive le matrici come:
2 //   - P[0] = rows(A1)
3 //   - P[i] = cols(Ai)
4 // Quindi Ai ha dimensione P[i-1] x P[i]
5 // i e' l'indice di partenza
6 // j e' l'indice di fine
7 matrix_chain_order(P,i,j)
8   if i == j
9     return 0
10
11   m <- +inf
12   for k <- i to j-1
13     m <- min(m,
14       matrix_chain_order(P,i,k) +
15       matrix_chain_order(P,k+1,j) +
16       P[i-1]*P[k]*P[j])
17   return m

```

Questo algoritmo ha una complessità esponenziale.

Cerchiamo di migliorare l'algoritmo, implementando l'**albero di ricorrenza**, cioè un albero i cui nodi rappresentano le chiamate ricorsive dell'algoritmo, identificate dai parametri i e j .

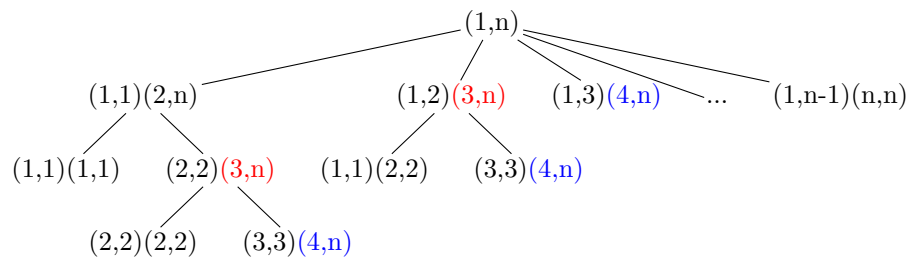


Figure 13: Albero di ricorrenza

Notiamo che ci sono molte chiamate ricorsive ripetute, ad esempio $(4,n)$, e questo aumenta la complessità dell'algoritmo inserendo istanze del problema che abbiamo già affrontato. Al massimo ci saranno n^2 istanze di un problema.

Anziché risolvere il problema ogni volta che lo incontriamo, possiamo risolvere ogni singolo problema una sola volta e salvare il risultato:

```

1 matrix_chain_order(P)
2   n <- length(p) - 1
3   for i <- 1 to n // n
4     // La moltiplicazione di una sola matrice costa 0 perche' non c'e' nulla da
5     // moltiplicare
6     M[i,i] <- 0 // Matrice che salva tutte le soluzioni (i,j)

```



```

7   for l <- 2 to n //          n --* Problemi composti da n matrici
8   for i <- 1 to n - l + 1 // n --*
9     j <- i + l - 1 //          | n^3
10    M[i,j] <- +inf //          |
11    for k <- i to j - 1 //      n --*
12      M[i,j] <- min(M[i,j],
13        M[i,k] + M[k+1,j] + P[i-1]*P[k]*P[j])
14
15  return m[1,n]

```

Questo ci dice quante moltiplicazioni sono necessarie per moltiplicare tutte le matrici, però per sapere la posizione dell'ultima moltiplicazione da fare invece si può riscrivere l'algoritmo precedente come:

```

1  matrix_chain_order(P)
2  ...
3    for k <- i to j - 1
4      m <- M[i,k] + M[k+1,j] + P[i-1]*P[k]*P[j]
5      if m < M[i,j]
6        M[i,j] <- m // Numero moltiplicazioni
7        S[i,j] <- k // Indice dell'ultima moltiplicazione
8  ...

```

La complessità di questo algoritmo è $O(n^3)$.

L'algoritmo precedente scritto in modo iterativo si potrebbe anche scrivere ricorsivamente e l'idea è che prima di calcolare il risultato si controlla se è già stato calcolato e si utilizza quello, altrimenti si calcola e si salva il risultato.

```

1  matrix_chain_order(P)
2  for i <- 1 to n
3    for j <- 1 to n
4      M[i,j] <- +inf
5
6  matrix_chain_order_aux(P,1,n)
7
8
9  matrix_chain_order(P,i,j)
10  if M[i,j] != +inf
11    return M[i,j]
12  else
13    if i == j
14      M[i,j] <- 0
15    else
16      m <- +inf
17      for k <- i to j-1
18        m <- min(m,
19          matrix_chain_order(P,i,k) +
20          matrix_chain_order(P,k+1,j) +
21          P[i-1]*P[k]*P[j])

```

```

22     M[i,j] <- m
23
24     return M[i,j]

```

Per ogni istanza del problema si calcola una sola volta il risultato, quindi la complessità è $O(n^3)$.

Definition 6.1. La tecnica di memorizzare i risultati già calcolati si chiama **memoizzazione**.

L'algoritmo che data la matrice S , che contiene gli indici delle parentesizzazioni ottimali e la matrice A , che contiene le matrici da moltiplicare, restituisce la moltiplicazione ottimale è il seguente:

```

1 optimal_multiply(S, A, i, j)
2   if i == j
3     return A[i]
4
5   return optimal_multiply(S, A, i, S[i,j]) *
6         optimal_multiply(S, A, S[i,j] + 1, j)

```

6.2 Programmazione Greedy

La tecnica di programmazione Greedy, o in italiano “avida” è una tecnica di programmazione simile a quella dinamica ma che non garantisce la soluzione ottimale. L'idea è quella di *prendere la decisione che sembra la migliore in quel momento*, senza pensare alle conseguenze future. Questo approccio è molto più veloce rispetto alla programmazione dinamica, ma non sempre garantisce la soluzione ottimale. A volte ci troveremo davanti a problemi non risolvibili con la programmazione greedy, ma in molti casi è possibile trovare una soluzione tramite la programmazione dinamica.

Selezione di Attività

Prendiamo come problema esempio il seguente: $S = \{1, \dots, n\}$ che è un insieme di attività. Ogni attività ha un tempo di inizio S_i e un tempo di fine F_i . Due attività sono in conflitto se i loro intervalli hanno un'intersezione non vuota. Il mio obiettivo è quello di selezionare un sottoinsieme di attività non in conflitto di cardinalità massima. Scriviamo la lista delle attività con i loro intervalli:

N	S	F
1	3	8
2	8	12
3	1	4
4	2	13
5	3	5
6	0	6
7	5	9
8	12	14
9	6	10
10	5	7
11	8	11

Un esempio di attività compatibili di cardinalità tre sono la 3 la 7 e la 8, oppure 3, 10, 11. E di cardinalità 4? Abbiamo la 3, 10, 11 e la 8. E invece cinque? Forse non esistono, ed è difficile da mostrare con una grande quantità di dati. Proviamo ad ordinare la tabella secondo i tempi di fine delle attività (reinserendo anche il numero delle attività):

N	S	F
1	1	4
2	3	5
3	0	6
4	5	7
5	3	8
6	5	9
7	6	10
8	8	11
9	8	12
10	2	13
11	12	14

Lemma 6.2. *Esiste una soluzione che contiene l'attività uno.*

Selezionando la prima attività sono sicuro di trovare una soluzione con questa attività. Ora posso eliminare tutte le attività che sono in conflitto con la prima. Questo lemma ci permette di risolvere il problema ricorsivamente, riapplicando la stessa procedura sulle attività rimanenti e quindi ad un sottoproblema della stessa natura ma più piccolo. Alla fine dell'algoritmo ottengo il mio insieme di attività compatibili. Questo algoritmo è

considerato **greedy** perché *ho selezionato un'attività senza risolvere i sottoproblemi che ne derivano e spero che la mia scelta sia la migliore.*

Proof. Sia A una soluzione al problema, cioè un insieme compatibile di cardinalità massima. Se l'attività $1 \in A$ abbiamo finito. Altrimenti sia $k \in A$ l'attività con tempo di A che termina per prima.

Allora

$$A' = (A - \{k\}) \cup 1$$

è una soluzione. Come faccio a dire che l'attività 1 è compatibile con tutte le altre attività? Questo perché:

$$f_1 < f_k$$

Sia $i \in A - \{k\}$ allora sicuramente S_i è maggiore di f_k e quindi sicuramente anche $f_1 < f_k$. Quindi sappiamo che in qualsiasi soluzione ottimale l'attività 1 è presente. Tuttavia nel caso pessimo questo algoritmo ha complessità $O(n^2)$, perché devo eliminare tutte le attività in conflitto con l'attività selezionata.

```
1 greedy_activity_selector(s,f)
2 ordina s,f per f decrescente
3 n <- length(s)
4 A <- {1}
5 j <- 1
6 for i <- 2 to n
7     if s[i] >= f[j]
8         A <- A U {i}
9         j <- i
10 return A
11
```

Questo algoritmo ha complessità $O(n \log n)$ questo a causa dell'ordinamento presente nell'algoritmo.

Un altro tipo di problema a cui ci possiamo ricondurre è il seguente: immaginiamoci dei ladri che possiedono uno zaino di capienza limitata. Ogni oggetto ha un peso e un valore, e il ladro deve scegliere quali oggetti mettere nello zaino in modo da massimizzare il valore totale degli oggetti. Questo problema è chiamato **problema dello zaino** e può essere risolto con la programmazione greedy. Questo perché bisogna per forza risolvere tutte le sottoistanze del problema per poter risolvere il problema principale in maniera ottimale. Questo problema infatti fa parte della classe di problemi **NP-completi**, cioè problemi per i quali non esiste un algoritmo polinomiale che possa risolverli in maniera ottimale. Infatti l'unico modo per risolvere il problema dello zaino in maniera ottimale è quello di provare tutte le combinazioni possibili, e questo ha complessità esponenziale, che cresce molto velocemente.

7 Tabelle di Hash

Quando per esempio stiamo scrivendo un programma e dobbiamo memorizzare delle variabili, vogliamo che ad ogni variabile sia associato un indirizzo di memoria. Per esempio:

Nome	Indirizzo
pippo	0x0001
pluto	0x0002
x	0x0003

Piuttosto che una tabella, non sarebbe comodo creare un array indicizzato da stringhe? Quale è il problema? Il problema è che il numero di stringhe componibili sono veramente tante, e quindi non possiamo creare un array di dimensione troppo grande. Ci converrebbe trasformare l'insieme delle chiavi delle stringhe in un insieme di indici, e questo è possibile tramite la **funzione di Hash**.

$$A[i] \iff A[H(i)]$$

Questo ci permette di trovare un buon compromesso per la dimensione dell'array e il numero di chiavi possibili.

Tuttavia se $H(i) = H(j)$ abbiamo un problema, e questo è chiamato **conflitto**. Per quanto sufficientemente grande possa creare l'array, non posso evitare che ci siano conflitti.

Come posso risolvere i conflitti? Dobbiamo costruire una funzione hash che minimizzi al più possibile i conflitti.

7.1 Gestione dei conflitti

Costruiamo un array di m elementi e lo riempiamo con n elementi. Chiamiamo $\alpha = \frac{n}{m}$ il fattore carico dell'array. Se $H(i)$ è casuale, in media, quanti elementi ci aspettiamo in una cella a di b ? Un elemento finisce in una cella a con probabilità $\frac{1}{m}$ e chiamiamo X_{ia} la variabile casuale che vale uno se i finisce in a . Ho in mano $X_{i1a} \dots X_{ina}$ che rappresentano gli elementi che finiscono in a . $X_{i1a} + \dots + X_{ina}$ è una variabile casuale che conta gli elementi che finiscono in a . Ma mediamente, quanti elementi mi aspetto di trovare in a ?

$$E[X_{i1a} + \dots + X_{ina}] = E[X_{i1a}] + \dots + E[X_{ina}] = \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m} = \frac{n}{m} = \alpha$$

Quindi ricapitolando: riduciamo l'insieme di chiavi in un insieme di indici tramite la funzione di Hash e poi trasformo l'array ottenuto in una lista concatenata. Così che anche se si ha $H(i) = H(j)$ ci si può ricondurre all'elemento successivo della lista concatenata.

Calcolo $H(i)$ e cerco $B[H(i)]$ e se $B[H(i)] = i$ (dove B è l'array costruito) allora ho trovato l'elemento, altrimenti vado ad aggiungere alla lista l'elemento alla lista concatenata.

Quanto costa accedere ad A ?

- Calcolare $H(i)$ ($A(1)$)
- Ricerca nella lista $B[H(i)]$ se $A(i)$ è presente α , altrimenti mediamente $\frac{\alpha}{2}$

Quindi possiamo dire che accedere ad A ha costo $O(1 + \alpha)$ che è costante ed è quindi è come accedere un array.

7.2 Creazione della funzione Hash

7.3 Metodo di divisione

Definiamo una funzione h in questo modo:

$$h(k) \triangleq k \bmod m$$

ma attenzione al valore di m ! Se m è una potenza di due, allora stiamo scartando i bit più significativi di k . Non ha senso creare una funzione Hash che permette di occupare solo una parte dell'array, sarebbe preferibile utilizzare una funzione Hash che permetta di utilizzare tutto l'array. Meglio utilizzare un m con potenze diverse da due (o da dieci). Vogliamo un valore m che sia capace di incasinare il tutto e i numeri primi fanno al caso nostro.

7.4 Metodo della moltiplicazione

Definiamo una funzione h in questo modo:

$$h(k) \triangleq (\lfloor m(ka \bmod 1) \rfloor)$$

dove A è un numero reale positivo fissato. Cosa sta succedendo qui? Stiamo moltiplicando k per A e poi prendiamo la parte frazionaria di ka e moltiplichiamo per m . Ci esce un numero compreso tra 0 e m escluso (e quindi che permette di contenere gli elementi dell'array). Quindi il valore della funzione di Hash dipende da A . Tuttavia come si sceglie il valore A ? Il valore ideale di A è $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, trovato da Knuth. Questo numero è molto vicino a 0.6180339887 che è il numero aureo. Questo valore permette di avere una distribuzione uniforme degli elementi nell'array. Questo numero appare spesso in natura, ad esempio nelle conchiglie, nelle piante, nell'arte, nell'architettura, ecc. Questo numero è anche il rapporto tra due numeri della sequenza di Fibonacci.

8 Grafi

8.1 Definizioni generali

I grafi sono indubbiamente lo strumento più usato per astrarre problemi concreti e metterli mettere su "carta". Un grafo, in maniera molto semplice, non è nient'altro che un insieme di nodi uniti da archi.

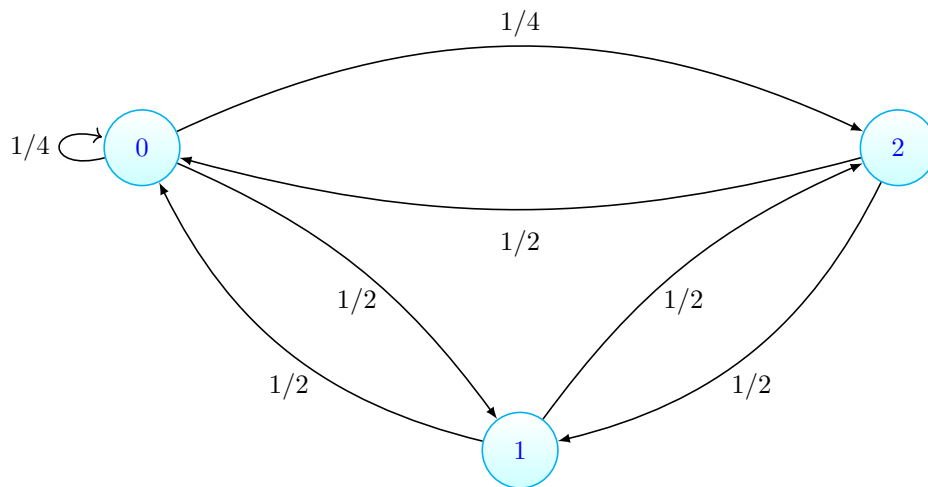


Figure 14: Esempio di grafo

La cosa interessante che si può fare con i grafi è che potremmo anche modellizzare un labirinto su di essi. Mettiamo caso che io voglia rappresentare un labirinto con un grafo.

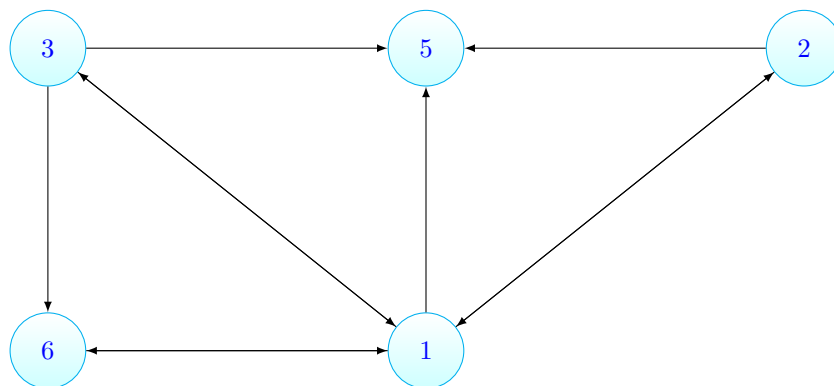
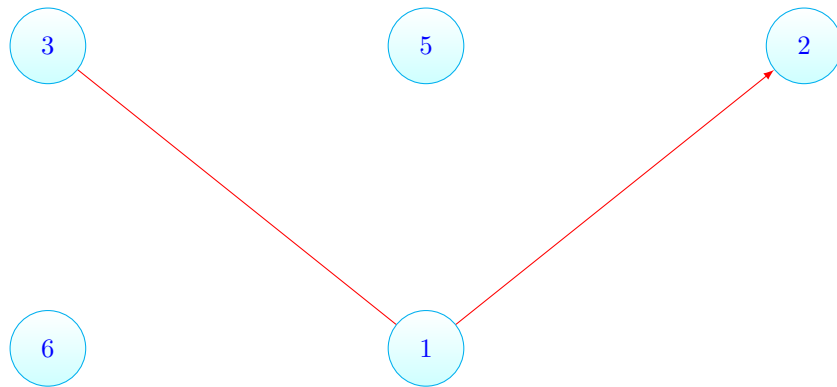


Figure 15: Esempio di "labirinto" con i grafi

Se definiamo un punto di ingresso- prendiamo per esempio il nodo 3 -e un punto di uscita- prendiamo per esempio il nodo 2 -da questo grafo, riusciamo a capire quali connessioni fare per arrivare all'uscita attraverso il minor numero di nodi. In questo caso il percorso $[3, 1, 2]$ o $[3, 5, 2]$ hanno il percorso minore.



Quindi il caso migliore mi consente di attraversare solo tre nodi. Ma il caso peggiore? All'apparenza il percorso più lungo è di quattro nodi. Ma in realtà potrei continuare a girare in cerchio e non arrivare mai alla fine.

- Un'arco unisce due nodi. Quando due nodi sono uniti da un arco si dice che i due nodi sono **adiacenti**.
- Un **cammino** è una sequenza di nodi che sono uniti da archi.
- La **lunghezza** invece è il numero di archi attraversati oppure la lunghezza della sequenza meno uno.
- **Cammino semplice** è un cammino che parte da un nodo di inizio e arriva a destinazione passando per ogni nodo solo una volta.
- Un **ciclo hamiltoniano** è un ciclo che passa per ogni nodo una sola volta.

Tuttavia potrei avere un grafo con degli **archi pesati** e la definizione del cammino potrebbe cambiare in base alla necessità che ho.

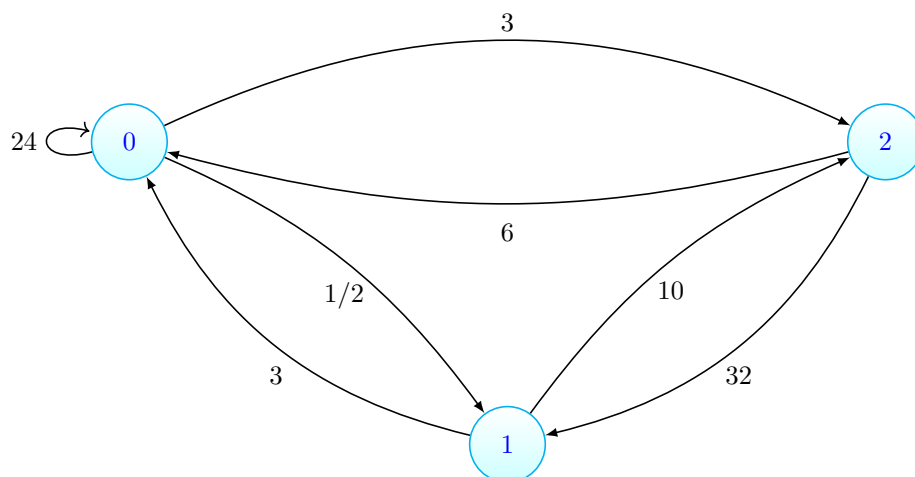


Figure 16: Esempio di grafo con archi pesati

Nel grafo sopra, si può notare come negli archi ho un verso. Questo significa che se io vado da A a B non posso tornare indietro da B ad A . Questo tipo di grafo è chiamato **grafo orientato**. Se invece non ci fosse un verso, il grafo sarebbe chiamato **grafo non orientato**. Un grafo non orientato è **connesso** se esiste un cammino tra ogni coppia di nodi.

Teorema 8.1.1

Un grafo orientato è aciclico, se e solo se non contiene cammini infiniti.

Proof. Sia G un grafo aciclico. Supponiamo per assurdo che contenga un cammino infinito.

$$v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_{n+1} \dots$$

Se n è il numero di nodi nel grafo, allora devono esistere nodi ripetuti.

Teorema 8.1.2

Un grafo orientato è ciclico, se e solo se contiene cammini infiniti.

Proof.

$$\neg B \implies \neg A$$

Possiamo definire il **grado** di un nodo come la somma tra gli archi uscenti ed entranti.

Teorema 8.1.3

In un grafo aciclico esistono nodi con grado entrante pari a zero.

Proof. Supponiamo per assurdo che dato un grafo aciclico non esista un nodo con grado entrante pari a zero. Allora:

$$v_{n+1} \rightarrow v_n \rightarrow v_{n-1} \dots v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$$

possiamo "andare indietro" fin quanto vogliamo quindi posso costruire sequenze di lunghezza arbitraria. Ma di conseguenza vuol dire che esistono nodi ripetuti. Ma ripetuto vuol dire ciclo. E per definizione questo non può essere.

Cerchiamo ora di definire il concetto di **grafo** in maniera formale.

Definizione 8.1: Grafo

Un **grafo** è una coppia (V, E) dove V è un insieme di nodi e $E \subset V \times V$ è un insieme di archi.

Esiste un arco da A a B se $(A, B) \in E$. Solitamente si rappresenta un arco con la coppia (x, y) oppure con $x \rightarrow y$.

Lemma 8.1. Se $|V|$ è la cardinalità dei nodi e $|E|$ è la cardinalità degli archi, sicuramente $|E| \leq |V|^2$.

Definizione 8.2: Cammino

Un **cammino** è una sequenza di nodi v_1, v_2, \dots, v_l tale che $\forall i \in \{1, \dots, l-1\} (v_i, v_{i+1}) \in E$.

Definizione 8.3: Cammino semplice

Un cammino è **semplice** se ogni nodo di V appare al più di una volta.

Definizione 8.4: Grado entrante

Il **grado entrante** di un nodo v è definito come

$$d_{in}(v) \triangleq |\{(u, v) \in E\}| = |(V \times \{v\}) \cap E|$$

📌 Definizione 8.5: Grado uscente

Il **grado uscente** di un nodo v è definito come

$$d_{out}(v) \triangleq |(\{v\} \times V) \cap E|$$

📌 Definizione 8.6: Grado

$$\text{Grado}(v) \triangleq |E \cap (V \times \{v\} \cup \{v\} \times V)|$$

8.2 Rappresentanza di un grafo

Un grafo può essere rappresentato in diversi modi:

- Liste di adiacenza
- Matrice di adiacenza

Creo una lista di nodi dove a loro a volta inserisco una lista di nodi adiacenti.

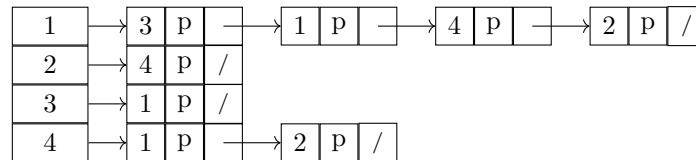


Figure 17: Rappresentazione per liste di adiacenza

Mentre con una matrice di adiacenza, posso inserire 1 nel punto (i, j) se questo arco è contenuto in E , 0 altrimenti. I vantaggi della lista di adiacenza sono che occupa meno spazio, mentre la matrice di adiacenza è più veloce per trovare se due nodi sono adiacenti, ma occupa più spazio perché contiene esattamente $|V|^2$ elementi.

/	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	0	0	1
3	1	0	0	0
4	1	1	0	0

Table 1: Rappresentazione per matrice di adiacenza

🖋 Esemplio 8.1

Supponiamo di voler rappresentare con un grafo la rete stradale italiana dove gli archi rappresentano il numero di incidenti. Si andrebbe a creare una matrice con molte celle vuote e poche celle piene. Questo tipo di matrici sono dette **sparse**.

Quindi solitamente si usa liste di adiacenza per grafi sparsi e matrici di adiacenza per grafi densi. Se volessi calcolare il grado uscente di un nodo in una lista di adiacenza, dovrei scorrere tutta la lista per contare quanti elementi ci sono. Di conseguenza, un algoritmo che calcola il grado di un nodo in una lista di adiacenza ha complessità $O(out_{deg}(v))$ dove $out_{deg}(v)$ è il numero di nodi adiacenti. Mentre per una matrice di adiacenza, il grado uscente di un nodo si calcolerebbe con complessità $O(V)$ dove passare per ogni possibile nodo.

```

1 all_out_deg(G)
2   for i <- 1 to |V|
3     out_deg(i) <- 0
4     for j <- 1 to Adj[V]
5       out_deg(i)++
6   return out_deg

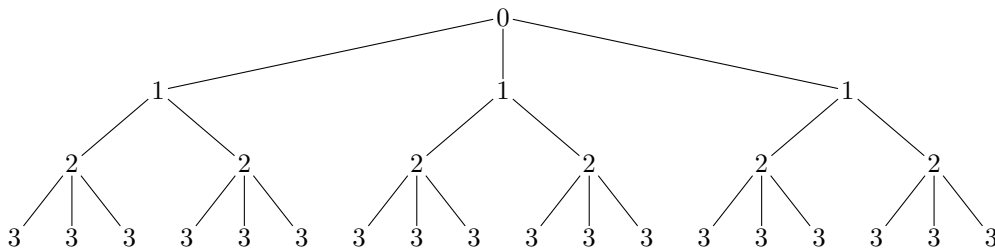
```

L'algoritmo ha complessità pari al numero di archi più il numero di nodi $\Theta(E + V)$. Mentre per la matrice ha complessità $\Theta(V^2)$.

8.3 Visita di un grafo

8.3.1 Visita in ampiezza

La visita in ampiezza è un algoritmo che permette di visitare tutti i nodi di un grafo a partire da un nodo di partenza. Anche chiamata **BFS** (Breadth First Search), l'algoritmo visita tutti i nodi adiacenti al nodo di partenza, poi tutti i nodi adiacenti a questi nodi e così via. Ovviamente l'algoritmo non visita mai due volte lo stesso nodo.



```

1 BFS(G, S)
2 # WHITE se non ho ancora visitato il nodo
3 # GRAY se ho visitato il nodo ma non ho ancora visitato i suoi vicini
4 # BLACK se ho visitato il nodo e i suoi vicini
5 $forall u \in V[G]$
6   color[u] <- WHITE
7   d[u] <- $infty$
8   $pi[u] <- NIL$
9 color[S] <- GRAY
10 d[S] <- 0 # Distanza dal nodo di partenza a se stesso (quindi 0)
11 Q <- {S} # Inizializzo una coda FIFO che contiene i nodi che
12 # ho già visto ma non ho ancora visitato i vicini

```

```

13 while Q $\neq \emptyset$
14   u <- Q.dequeue()
15   $\forall v \in \text{Adj}[u]$ # Scorro tutti i nodi adiacenti a u
16     if color[v] == WHITE
17       color[v] <- GRAY
18       d[v] <- d[u] + 1
19       $\pi[v]$ <- u
20       Q.enqueue(v)
21   Q.dequeue()
22   color[u] <- BLACK

```

Il primo ciclo ha come complessità $\Theta(V)$ poiché bisogna inizializzare tutti i nodi del grafo. , mentre il secondo ciclo ha complessità $\Theta(E)$ perché dobbiamo attraversare tutti gli archi che sono presenti nel grafo per visitarlo completamente. Quindi la complessità totale dell'algoritmo è $\Theta(V + E)$. Ora che abbiamo delle informazioni sui nodi, possiamo calcolare la distanza tra due nodi.

```

1 path(u)
2   if u != s
3     path($\pi[u]$)
4   print(u)

```

La BFS non solo permette di visitare tutti i nodi di un grafo, ma permette anche di calcolare la distanza tra il nodo s e qualsiasi altro nodo del grafo. Non solo, ma permette anche di calcolare il cammino più *corto* tra due nodi. Vogliamo dimostrare che la BFS calcola un albero dei cammini minimi da un nodo di partenza s dove si minimizza la lunghezza (numeri archi). Abbiamo bisogno dei lemmi che ci torneranno utili per la dimostrazione.

Lemma 8.2. $\forall (u, v) \in E, \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$

Questo lemma ci dice che la distanza tra due nodi è minore o uguale alla distanza tra un nodo e un suo vicino più uno. In poche parole, se troviamo un cammino più corto, allora il cammino più lungo non è sicuramente migliore di quello che ho trovato.

Lemma 8.3. Dopo BFS, $d[v] \geq \delta(s, v) \quad \forall v \in E$

Quando eseguo $d[v] = d[u] + 1$ sto analizzando un arco (u, v) . Noi sappiamo che $d[v] = d[u] + 1$, ma sappiamo anche che $d[u] \geq \delta(s, u)$. Di conseguenza $d[u] + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)$.

Lemma 8.4. *In Q ci sono sempre al più due valori di d e Q è ordinata per d . Se*

$$Q = v_1, \dots, v_r \quad d[v_1] \leq d[v_2] \leq \dots \leq d[v_r] \leq d[v_1] + 1$$

Nel senso che nella coda, i nodi sono ordinati per distanza. Se io prendo un nodo v e lo metto in coda, la sua distanza sarà sempre maggiore o uguale alla distanza del nodo precedente più uno.

Teorema 8.3.1

Per ogni nodo $v \in V$, esiste un momento in cui:

- v è grigio
- $\delta(s, v)$ assegnato a $d[v]$
- $v \neq s, \pi[v] = v$ con $\delta(s, u) = \delta(s, v) - 1$
- v inserito in coda

Proof. $\forall k$, sia V_k l'insieme dei nodi v con $\delta(s, v) = k$. Per induzione su k :

- Per V_0 c'è solo s che viene inizializzato.
- Supponiamo che sia vero per $V_0 \dots V_k$ e dimostriamolo per V_{k+1} . Sia $v \in V_{k+1}$
 - Quando avremo inserito in coda tutti i nodi di V_k il nodo v non sarà ancora stato visto altrimenti $d[v] \leq k + 1$ che va contro il lemma (8.3) che avevamo enunciato.
 - La coda Q è ordinata, quindi analizzeremo la lista di adiacenza di ogni nodo V_k prima di qualsiasi nodo con distanza superiore a k .
 - Tra i nodi di V_k ne esiste uno $u \in V_k$ t.c. $(u, v) \in E$.
 - Quando analizziamo u troviamo $v \in Adj[u]$ ed in quel momento:
 - * v è grigio
 - * assegniamo $d[v] = d[u] + 1 = k + 1$
 - * $\pi[v]$ prende $v \in V_k$
 - * v inserito in coda

```

1 BFS(G)
2   for u in V[G]
3     color[u] <- WHITE
4     d[u] <- $infinity$
5     $pi[u] <- NIL$
6   count = 0

```

```

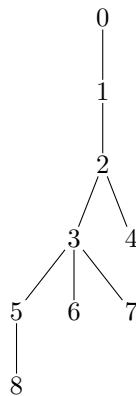
7   for u in V[g]
8       if color[u] == WHITE
9           BFS(G, u, count)
10
11
12 BFS(G, S, count)
13     color[s] <- GRAY
14     d[s] <- 0
15     $\pi[s] <- NIL$
16     while $Q \neq \emptyset$
17         u <- Q.dequeue()
18         for v in Adj[u]
19             if color[v] == WHITE
20                 color[v] <- GRAY
21                 counter[v] <- count
22                 d[v] <- d[u] + 1
23                 $\pi[v] <- u
24                 Q.enqueue(v)
25     color[u] <- BLACK

```

Decorando l'algoritmo con un contatore, posso **calcolare il numero di componenti connesse** di un grafo.

8.3.2 Visita in profondità

La visita in profondità, a differenza della visita in ampiezza, visita un nodo e poi si sposta in profondità, visitando tutti i nodi adiacenti a questo nodo per poi tornare indietro. Anche chiamata **DFS** (Depth First Search).



```

1 DFS(G)
2   // per ogni nodo del grafo
3   for u in V[G]
4       color[u] <- WHITE
5       $\pi[u] <- NIL$
6       time <- 0

```

```

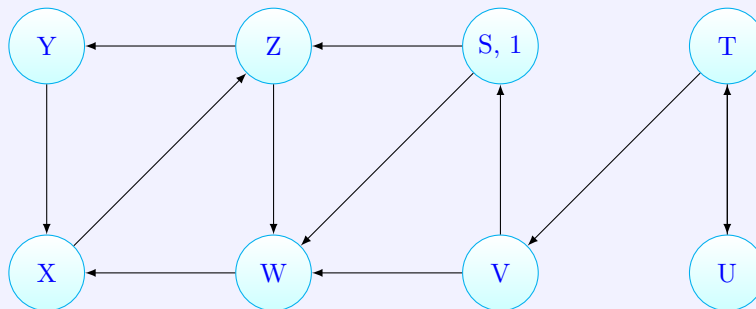
7  for u in V[G]
8      if color[u] == WHITE
9          DFS-Visit(G, u)
10
11
12 DFS-Visit(G, u)
13     color[u] <- GRAY
14     time <- time + 1
15     d[u] <- time
16     for v in Adj[u]
17         if color[v] == WHITE
18              $\pi[v]$  <- u
19             DFS-Visit(G, v)
20     color[u] <- BLACK
21     time <- time + 1
22     f[u] <- time

```

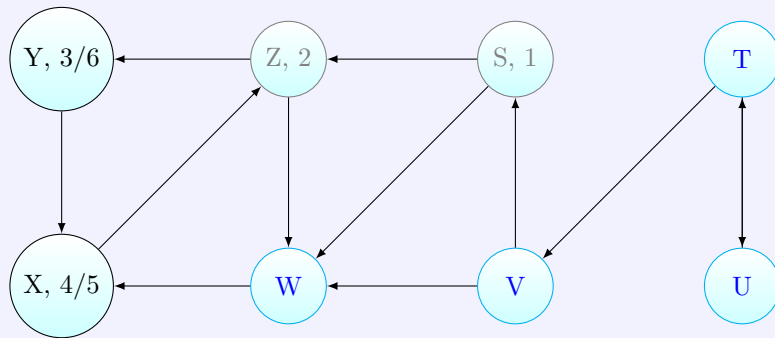
In questo algoritmo può sembrare che non ci sia l'utilizzo di una coda, come invece è esplicito nella BFS, ma in questo caso la coda è implicita all'interno di DFS-Visit definita ricorsivamente.

Esempio 8.2

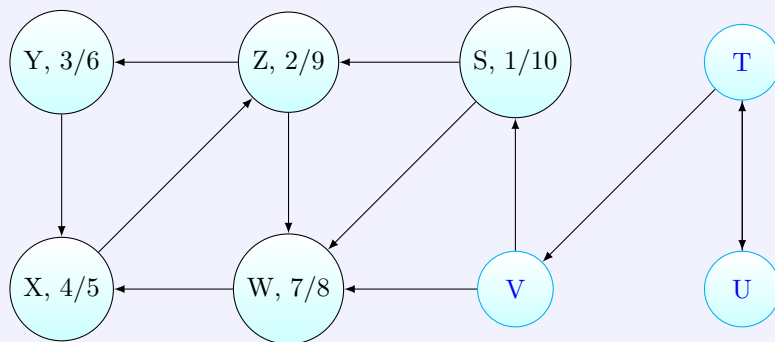
Consideriamo un grafo G di nodi V e archi E di questo tipo: tutti i nodi sono bianchi, tranne il nodo s che è grigio perché sarà il nostro punto di partenza e il suo tempo sarà 1.



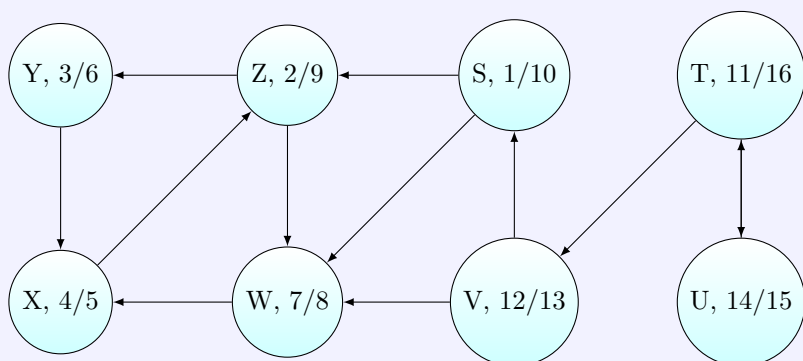
Una volta aver visitato il primo nodo s , dobbiamo entrare dentro la funzione DFS-Visit che ci fa visitare tutti i suoi nodi adiacenti. Nella lista di adiacenza di s abbiamo W e Z . Visitando per primo Z cadiamo ricorsivamente dentro la funzione DFS-Visit che ci porta a visitare tutti i nodi adiacenti a Z . Una volta che arriviamo ad un nodo a cui viene completata la lista di adiacenza di nodi non ancora visitati, dobbiamo incrementare $f[u]$ di uno. Quindi in questo nostro primo caso passeremo per Z che poi entra in Y che a sua volta entra in X che una volta arrivato lì, l'unico suo nodo adiacente è Z che però è già stato visitato.



Tornando a Z dobbiamo ancora visitare le sue liste di adiacenza tra cui W . Quindi a tempo 7 arriviamo in W e a tempo 8 completiamo la lista di adiacenza di W . Continuiamo finché non torniamo ad s dove anche lui finisce la sua lista di adiacenza e incrementa il tempo di uno.



Ora che abbiamo finito con questa prima iterazione, dobbiamo andare avanti con i nodi bianchi rimasti, supponiamo di trovare T come prossimo nodo. Facciamo lo stesso procedimento per quest'ultima iterazione e otterremo un grafo del genere:



In questa maniera abbiamo ottenuto due alberi, uno per ogni componente connessa.

Tuttavia, c'era un modo migliore per scegliere un nodo iniziale da cui partire e ottenere un albero singolo? Se fossimo partiti dal nodo T nell'esempio precedente avremmo ottenuto un singolo albero.

Teorema 8.3.2

\forall coppia di nodi u, v gli intervalli sono disgiunti oppure sono uno sottointervallo dell'altro.

Proof. Prendendo u, v ci sono due casi.

- $d[u] < d[v]$
- $d[v] < d[u]$

Ipotizziamo che $d[u] < d[v]$ senza perdita di generalità (questo perché dimostrare un caso o un altro è equivalente). Questo vuol dire che u è stato visitato prima di v . Distinguiamo due casi:

- Caso a : $f[u] < d[v]$, tuttavia se è così, vuol dire che sono disgiunti. $[d[u], f[u]]$ $[d[v]]$
- Caso b : $d[v] < f[u]$, se invece è così, vuol dire che v è stato visitato prima di u e quindi $[d[v], f[v]] \subseteq [d[u], f[u]]$ e di conseguenza sono sottointervalli.

Teorema 8.3.3

In una foresta DFS di un grafo G , un nodo v discende da u se e solo se al tempo $d[u]$, v è raggiungibile da u con un cammino di solo nodi bianchi.

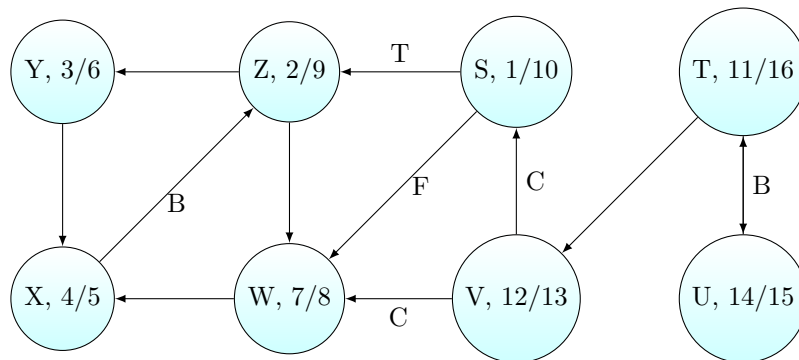
Proof.

\Rightarrow Supponiamo che v discenda da u e sia w un nodo nel cammino da u a v nella foresta DFS. Se w discende da u allora per il teorema 8.3.2 $d[u] < d[w] < f[w] < f[u]$.

\Leftarrow Supponiamo che al tempo $d[u]$ esiste un cammino da u a v fatto di soli nodi bianchi. Supponiamo per assurdo che v non discenda da u . Sia w il predecessore di v e assumiamo che w discenda da u . Allora

$$d[u] < d[w] < d[v] < f[v] < f[w] < f[u]$$

Ci sono alcuni archi nel grafo che possiedono nomenclature diverse in base ai movimenti che fanno. Per esempio, nel grafo di esempio precedente, l'arco (V, S) è un arco di ritorno che noi chiameremo "backward", mentre l'arco (S, W) è un arco di attraversamento che chiameremo "forward". Ci sono alcuni archi invece che vanno da un ramo all'altro si chiamano crossing.

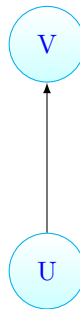


Perché ci servono queste classificazioni? Gli diamo dei nomi perché ci permettono di capire meglio la struttura del grafo.

Teorema 8.3.4

Un grafo è aciclico se e solo se la DFS non trova archi all'indietro.

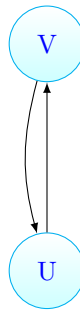
Proof. Supponiamo che DFS trova un arco (u, v) all'indietro.



Se è un arco all'indietro vuol dire che v sarà di colore grigio. Ciò vuol dire che u è un discendente di v .

$$d[v] < d[u] < f[u] < f[v]$$

Tuttavia essere grigio nella foresta DFS ed essere discendente di un grigio vuol dire che esiste un cammino che va da v a u .



Questo arco completa il ciclo, di conseguenza, G è ciclico.

Supponiamo che G sia ciclico. Prendiamo un ciclo qualsiasi nel nostro grafo. Sia u il primo nodo del ciclo visitato da DFS. Sia v il predecessore di u nel ciclo. Al tempo $d[u]$ tutti i nodi del ciclo tranne u sono bianchi. Quindi al tempo $d[u]$ il nodo v è raggiungibile da u con un cammino di soli nodi bianchi. Ma se così è, per il teorema 8.3.3 v discende da u . v sarà visitato quando u è ancora grigio. Ma durante la visita di v si analizzerà l'arco (v, u) e di conseguenza si troverà un arco all'indietro. \square

Qual è la complessità del problema di verificare se un grafo è aciclico? Sicuramente non peggio della complessità della DFS. Ma quanto è la complessità della DFS?

- Inizializzazione: $\Theta(V)$
- DFS-Visit: $\Theta(E)$

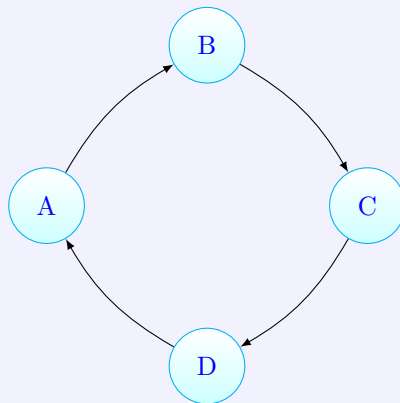
Quindi la complessità totale è $\Theta(V + E)$. Di conseguenza la complessità del problema di verificare se un grafo è aciclico è $O(V + E)$.

Esempio 8.3

Esempio da tema d'esame: Burocraziland è un paese che possiede una burocrazia molto complessa. Sei stato assunto come nuovo presidente per risanare le falle del governo e devi fare in modo che all'interno dei documenti di questo paese non ci siano circoli di approvazione. Immaginiamo di avere un grafo in cui i nodi sono i documenti e gli archi sono le approvazioni.



In questo caso posso decidere se dire che per avere il documento A mi serve il documento B o viceversa. Facciamo che in questo caso, per avere il documento A mi serve il documento B .



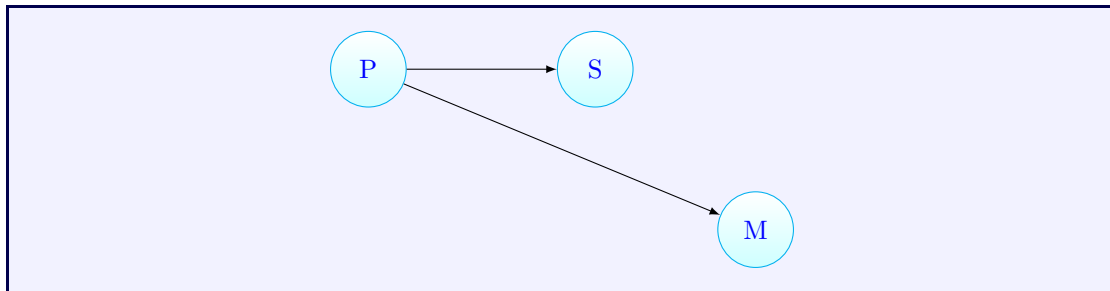
Se io volessi sapere tutti i documenti che non si possono ottenere a causa di un circolo di approvazione, come potrei fare? La soluzione è quella di fare una DFS e vedere se trovo un arco all'indietro. Se trovo un arco all'indietro, allora ho trovato un circolo di approvazione. Tuttavia, questa operazione la dovrei fare per ogni singolo nodo nel grafo, quindi la complessità sarebbe $O(V(V + E))$. Ma c'è un modo più efficiente per farlo. Osservando che se trovo un arco all'indietro, allora ho trovato un circolo di approvazione, posso fare in modo che se trovo un arco all'indietro, allora **tutti i nodi che sono raggiungibili da quel nodo** sono parte di un circolo di approvazione.

8.4 Ordinamento topologico

Ci sono casi in cui abbiamo bisogno di ordinare i nodi di un grafo in modo tale che il grafo venga visitato in un certo ordine.

Esempio 8.4

Immaginiamo di avere un robot che deve andare a vestire per andare a lavoro. Il robot ha bisogno di indossare prima i pantaloni e poi la maglietta, ma non può indossare le scarpe prima di aver indossato i pantaloni. In questo momento stiamo ponendo delle restrizioni su come il robot può vestirsi. Questo tipo di restrizioni possono essere rappresentate da un grafo orientato in cui i nodi sono gli oggetti da indossare e gli archi sono le restrizioni. Quindi per esempio se abbiamo i nodi P (pantaloni), S (scarpe) e M (maglietta), avremo gli archi (P, S) e (P, M) .



Il problema non sta nella costruzione del grafo, poiché quello che ci viene dato, ma nel trovare un modo per visitare i nodi in modo tale che le restrizioni siano rispettate e che il robot possa vestirsi correttamente. In maniera formale:

📌 Definizione 8.7: Ordinamento topologico

Ordinare i nodi del grafo in modo tale che $\forall (u, v) \in E$ t.c. $u < v$ si chiama **ordinamento topologico** di un grafo orientato.

Un termine comodo seppur non preciso, può essere "linearizzare" il grafo, poiché quello che andremo a fare sarà quello di disporre il grafo con tutti archi che vanno da sinistra a destra su una linea di nodi.

```

1 topological_sort(G)
2   usa DFS per calcolare f
3   se ciclico set false
4   restituisci nodi per f decrescente

```

Utilizzare la DFS e le sue proprietà ci aiuta a risolvere il problema di ordinamento topologico.

Teorema 8.4.1

$\forall (u, v) \in E$, $f[v] < f[u]$ ogni volta che f è il tempo di fine visita di una DFS su grafo aciclico.

Proof. Sia $(u, v) \in E$ e quando (u, v) viene visitato distinguiamo 3 casi:

- v bianco, v discenda da u , quindi $d[u] < d[v] < f[v] < f[u]$.
- v grigio, impossibile perché G è aciclico.
- v nero, abbiamo già terminato la visita di v ma non quella di u e quindi $f[v] < f[u]$

8.5 Componenti connesse

Come calcolare le componenti connesse di un grafo data una qualsiasi visita? Ricordiamo le funzioni che abbiamo imparato negli scorsi capitoli:

- `MakeSet(x)`: Crea un insieme contenente l'oggetto x .
- `Union(x, y)`: Unisce gli insiemi contenenti x e y .

```

1 CC(G)
2   per ogni V in V[G]
3     make_set(v)
4   per ogni V E[G]
5     union(u,v)

```

Si può facilmente vedere come alla fine dell'algoritmo si ottengono le connessioni tra i nodi del grafo. Alla fine dell'algoritmo, ogni nodo sarà parte di un insieme che rappresenta una componente connessa del grafo. La complessità di questo algoritmo è $O(V + E)$, poiché dobbiamo visitare tutti i nodi e tutti gli archi del grafo.

8.6 Componenti fortemente connesse

Le componenti fortemente connesse sono un concetto che si applica ai grafi orientati.

Definizione 8.8: Componente fortemente connessa (SCC)

Una componente fortemente connessa è un sottoinsieme di nodi $C \subseteq V$ tale che $\forall (u, v) \in C$ esiste un cammino da u a v e viceversa.

```

1 SCC(G)
2   Usa DFS per calcolare f (V+E)
3   Calcola G^t (grafo trasposto, il senso degli archi e' invertito) (V+E)
4   Usa DFS su G^t esplorando i nodi per f decrescente (V+E)
5   Gli alberi della foresta DFS risultante sono le SCC

```

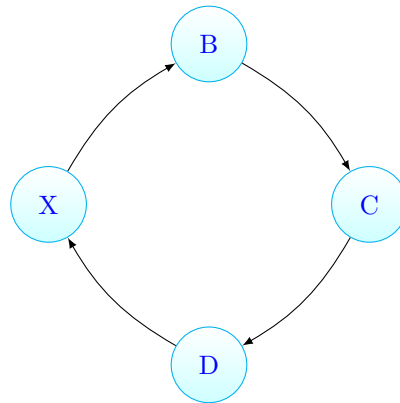
Quindi la complessità di questo algoritmo è $O(V + E)$, poiché dobbiamo visitare tutti i nodi e tutti gli archi del grafo.

Lemma 8.5. *Alla fine della DFS, ogni SCC (Strongly Connected Component) è interamente contenuta in un albero.*

Proof. Prendiamo una SCC, ci sarà un nodo u che sarà il primo nodo visitato della SCC. Tutti gli altri nodi sono raggiungibili da un cammino di soli nodi bianchi, quindi per il teorema 8.3.3, sono tutti discendenti di u e quindi appartengono allo stesso albero.

Ricordiamoci burocraziland (Esempio 8.3) e proviamo a risolvere il problema. Se abbiamo un nodo A connesso ad un nodo con il verso orientato su B vuol dire che per avere certificato B bisogna prima avere A . Le *conditio sine qua non*, per cui non si può ottenere un documento x sono:

- sicuramente se x appartiene un ciclo.



- Anche se x è raggiungibile da un ciclo, allora x non può essere ottenuto.

I problemi sono i seguenti:

- Stabilire se esistono documenti che non si possono ottenere \rightarrow basta verificare se il grafo è ciclico.
- Trovare un esempio di documento non ottenibile \rightarrow quando trovo un arco (u, v) all'indietro restituisco v .
- Dato x stabilire se è ottenibile \rightarrow lancia DFS Visit da x sul grafo trasposto, restituisci true se trovi un ciclo.
- Trovare tutti i documenti NON ottenibili \rightarrow
 1. Lancia DFS e marca tutti i nodi raggiunti da archi all'indietro. (per ogni ciclo nel grafo, ci sta almeno un nodo che viene marcato)
 2. Lancia nuovamente DFS, ma come nodi di partenza, usa quelli marcati. Ora *marca* tutti nodi che raggiungi. Tutti i nodi marcati, appartenenti ad un ciclo vengono raggiunti e dunque marcati. *Tuttavia vengono marcati tutti e soli i nodi raggiungibili da un ciclo.*

Esempio 8.5

Vediamo il seguente problema: dati (G, S, F) , $F \subseteq V[G]$, $S \in V[G]$ stabilire se da S esiste un cammino infinito che passa infinite volte da stati (nodi) di F . Una soluzione potrebbe essere: guardiamo le SCC del grafo G e costruiamo un nuovo grafo G' i cui nodi sono le SCC di G arco (u, v) di G con $u \in A$ e $v \in B$.

Questo grafo rispetta le seguenti proprietà:

- G è aciclico. Questo perché se G fosse ciclico, allora vorrebbe dire che le due SCC collaserebbero in un unico nodo, ma questo non è possibile perché ogni SCC è un

sottoinsieme di nodi che sono raggiungibili tra loro, quindi se ci fosse un ciclo, allora tutti i nodi sarebbero raggiungibili tra loro.

- Ogni cammino infinito resterà definitivamente all'interno di una singola SCC
- Affinché il cammino infinito possa contenere infinite istanze di stati di F la SCC in cui si resterà definitivamente deve contenere almeno uno stato di F

Quindi devo trovare una SCC raggiungibile da S che

- contiene cammini infiniti
- contiene almeno uno stato di F

8.7 Alberi di copertura di costo minimo

8.7.1 Minimum Spanning Tree (MST)

Venezia. Un evento atmosferico distrugge tutti i suoi ponti. Tutti i ponti da riparare per ogni ponte c'è un costo specifico di riparazione. Dobbiamo garantire la raggiungibilità via terra di ciò che era raggiungibile prima. Dobbiamo spendere il meno possibile. Propongo un algoritmo per scegliere i ponti da riparare. Per risolvere questo problema potrei mappare il problema in un grafo in cui i nodi sono le isole e gli archi sono i ponti. Quando vado a vedere la mappa generale dei ponti potrei andare ad eliminare tutti i ponti che non sono necessari per garantire la raggiungibilità tra le isole, come per esempio quegli archi che sono in un ciclo. Finché il grafo ha cicli, posso eliminare gli archi che sono in un ciclo e il grafo rimarrà connesso. Quindi il grafo che otterremo sarà un grafo aciclico. Questo oggetto che otteniamo è in realtà **un albero** di copertura, dove copertura si intende che tutti i nodi del grafo sono raggiungibili da un nodo qualsiasi dell'albero.

📌 Definizione 8.9: Taglio di un grafo

Il taglio di un grafo $G = (V, E)$ è una **bipartizione** (S, T) di V . Quando parliamo di taglio vuol dire che stiamo dividendo il grafo in due parti, S e T e a questo punto possiamo distinguere gli archi che vanno da S a T e quelli che vanno da T a S (archi del taglio).

L'arco del taglio è detto **sicuro** se tra gli archi del taglio ha un costo minimo.

Lemma 8.6. *Dato un arco sicuro (u, v) per un taglio (S, T) esiste un MST di G che contiene (u, v) .*

Proof. Prendi un taglio (S, T) supponiamo che (u, v) sia un arco sicuro per questo taglio e sia A una soluzione. Distinguiamo due casi:

- $(u, v) \in A$, allora A è una soluzione valida.
- $(u, v) \notin A$, allora esiste un cammino da u a v che non passa per (u, v) , quindi possiamo sostituire l'arco (u, v) con questo cammino e ottenere una soluzione valida.

$(A - \{(s, t)\}) \cup \{(u, v)\}$ è pure un albero di copertura.

```

1 MST(G)
2   A <- 0
3   finche A non e un albero di copertura
4     sia (S,T) un taglio che non contiene archi di A
5     sia (u,v) un arco sicuro per (S,T)
6     A <- A + (u,v)

```

8.7.2 Algoritmo di Kruskal

L'algoritmo di Kruskal è un algoritmo che permette di trovare un albero di copertura di costo minimo in un grafo pesato.

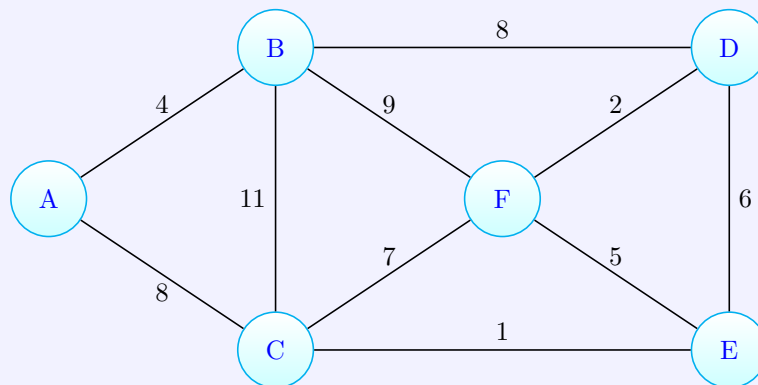
```

1 // G e il grafo e w e la matrice dei pesi
2 Kruskal(G, w)
3   A <- 0
4   per ogni v in V[G] make_set(v)
5   ordina E[G] per peso non decrescente
6   per ogni (u,v) in E[G] preso in ordine
7     if find_set(u) != find_set(v) then
8       A <- A + (u,v)
9       union(u,v)

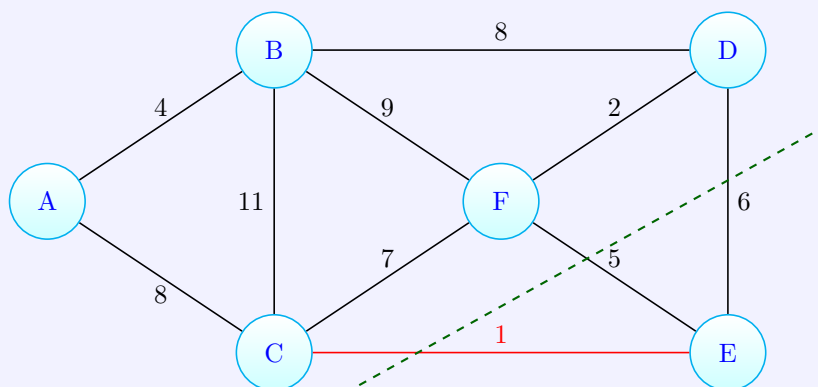
```

Esempio 8.6

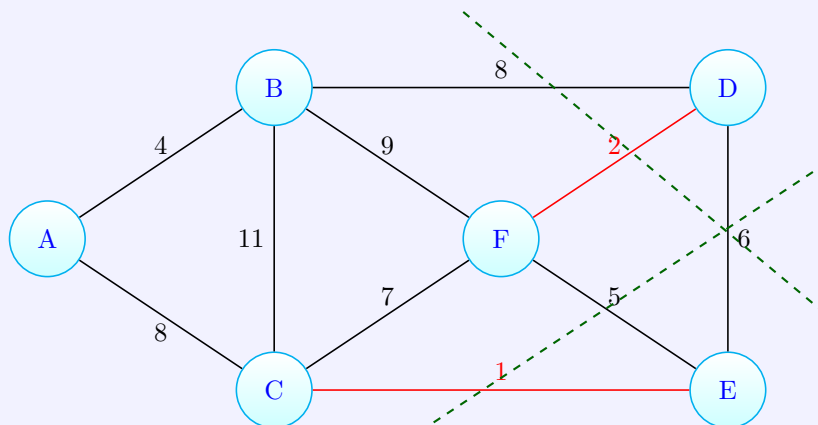
Immaginiamo di avere un grafo pesato G con la seguente struttura:



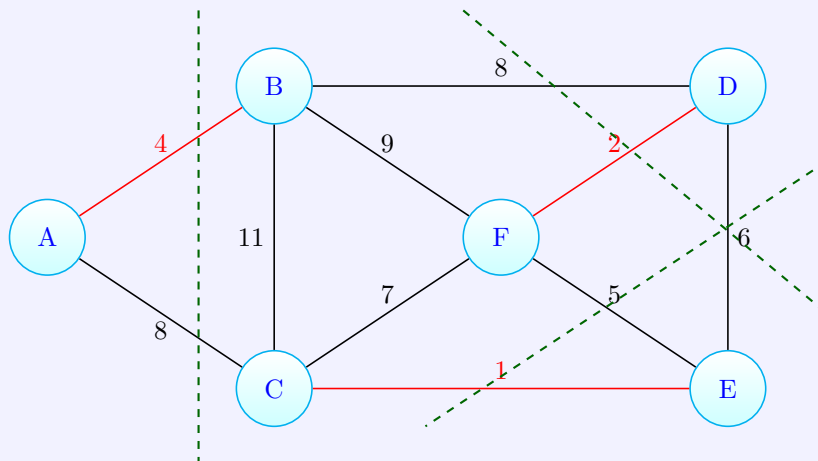
Per prima cosa, nell'algoritmo di Kruskal, ogni nodo diventa un insieme singoletto. Subito dopo, ordiniamo gli archi per peso non decrescente, il primo arco che andremo a prendere (ovvero l'arco con il peso minore) sarà (C,E) con peso 1. Quando ci chiediamo se `if find set(u) != find set(v)` ci stiamo chiedendo se C ed E appartengono allo stesso insieme. Essendo singoletti, per forza di cose non lo sono, quindi andiamo aggiungere questo arco all'insieme A e unire i due insiemi. Basta prendere un taglio che abbia il nodo C da una parte e il nodo E dall'altra e noi scopriamo che tutti gli archi che appartengono a questo taglio, non fanno parte della soluzione perché sono tutti archi che pesano di più o uguali dell'arco (C,E) di peso 1. Inoltre, è un arco sicuro e quindi può far parte della soluzione.



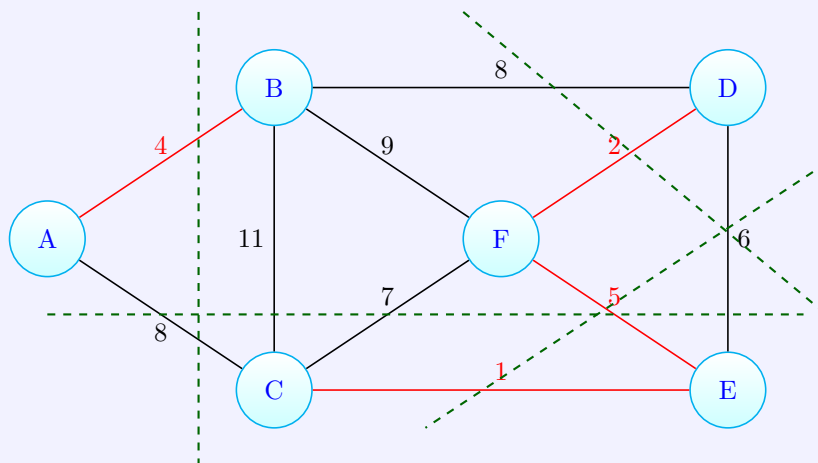
Ora bisogna considerare il secondo arco con peso minore, che è (F,D) con peso 2. Anche in questo caso, facciamo un taglio che ha F da una parte e D dall'altra. Non fanno parte dello stesso insieme, quindi possiamo aggiungere l'arco (F,D) all'insieme A e unire i due insiemi.



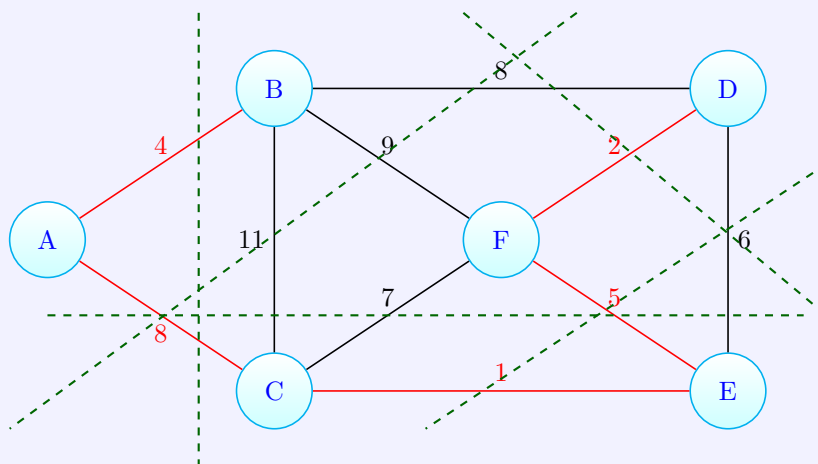
Il prossimo arco è (A, B) con peso 4. Facciamo un taglio che ha A da una parte e B dall'altra. Di questo taglio, l'arco (A, B) è sicuro, perché tutti gli archi che attraversano il taglio non sono ancora stati considerati, gli archi vengono presi in ordine non decrescente di peso, quindi tutti gli archi che attraversano il taglio hanno un peso maggiore o uguale a 4. Uniamo i due insiemi e aggiungiamo l'arco (A, B) all'insieme A .



Il prossimo arco è (F, E) con peso 5. Facciamo un taglio che ha F da una parte e E dall'altra. Non sono nello stesso insieme quindi possiamo aggiungere l'arco (F, E) all'insieme A e unire i due insiemi.



Il prossimo arco è (D, E) con peso 6. Tuttavia D e E **NON** sono nello stesso insieme, quindi non possiamo aggiungere l'arco (D, E) all'insieme A . Andiamo al prossimo: anche (C, F) con peso 7 non può essere aggiunto all'insieme A perché C e F sono nello stesso insieme. Subito dopo abbiamo due archi che pesano 8, ovvero (B, D) e (C, A) . Facciamo finta che l'algoritmo di ordinamento abbia ordinato prima (C, A) e poi (B, D) , quindi prendiamo l'arco (C, A) . Esiste un taglio che separa C da A e che non separa elementi che stanno nello stesso insieme e quindi possiamo aggiungere l'arco (C, A) all'insieme A e unire i due insiemi. Anche l'arco (B, D) poteva andare bene, perché



Ora abbiamo un albero di copertura di costo minimo, che è l'insieme A . Nonostante parliamo di tagli in questo esempio, a livello di codice sappiamo già di averli in mano.

Quanto è complesso l'algoritmo di Kruskal? Ordinare gli archi richiede $O(E \log E)$, mentre l'operazione di unione e `find_set` richiede $O(E)$. Salta fuori che la complessità dell'algoritmo di

Kruskal è $O(V + E \log E)$, quindi l'algoritmo di ordinamento è il collo di bottiglia dell'algoritmo. Nonostante ciò è comunque un algoritmo molto efficiente e utilizzato in molti contesti essendo un algoritmo di tipo greedy, ovvero che prende la soluzione migliore in ogni passo.

8.7.3 Algoritmo di Prim

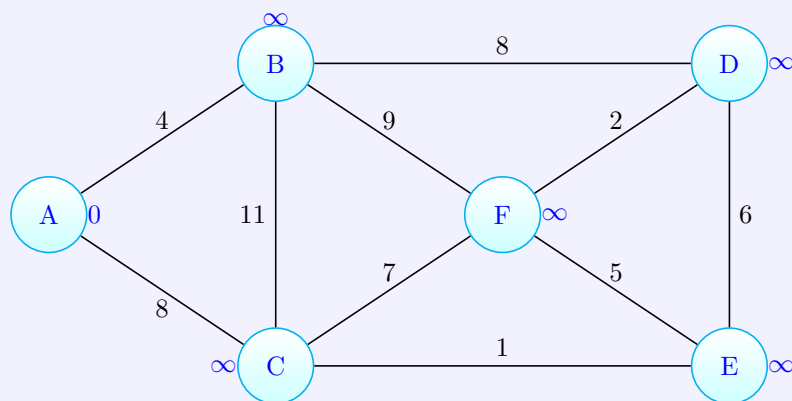
```

1 // G grafo
2 // w matrice dei pesi
3 // r nodo da cui partiamo
4 Prim(G, w, r)
5   Q <- V[g] // coda di priorit 
6   per ogni u in V[g]
7     key[u] <- inf
8   key[r] <- 0
9   pi[r] <- nil
10  while Q non   vuota
11    u <- extract_min(Q)
12    per ogni v in Adj[v]
13      if v in Q and w(u,v) < key[v] then
14        pi[v] <- u
15        key[v] <- w(u,v)

```

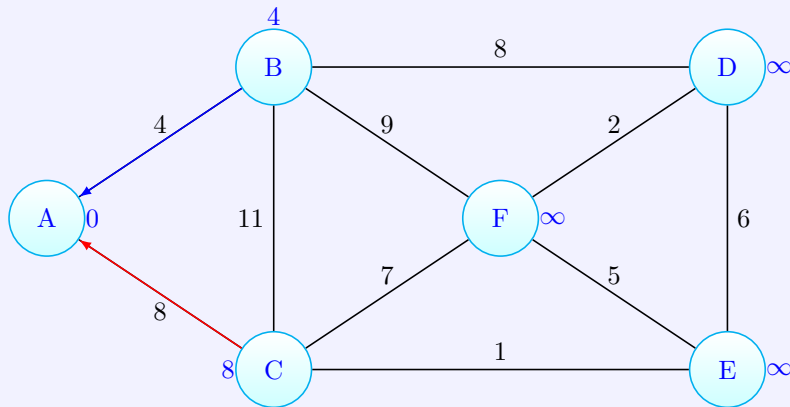
Esempio 8.7

Proviamo ad eseguire questo algoritmo su questo grafo. Settiamo tutti i nodi con chiave infinita, tranne il nodo A che ha chiave 0.

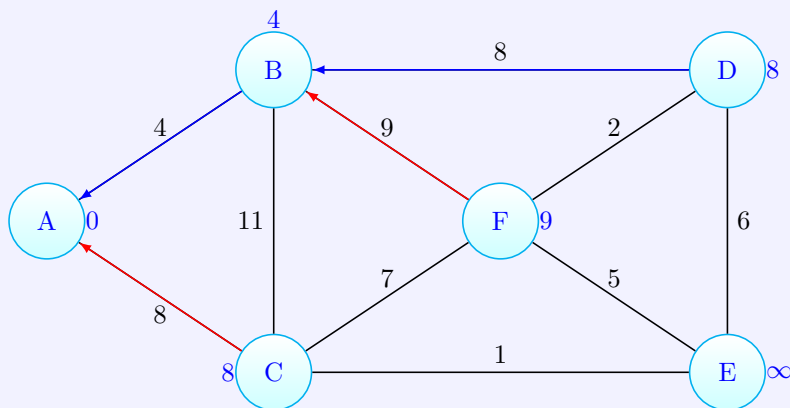


Facciamo l'extract min, che ci restituisce il nodo A e andiamo ad aggiornare tutti i nodi nella lista di adiacenza di A . In questo esempio segner  con le frecce blu i tagli sicuri che costruiranno la soluzione e con le frecce rosse i parent. Andiamo a prendere l'arco (A, B) con peso 4, che   minore di ∞ e quindi andiamo ad aggiornare la chiave di B a 4 e il suo predecessore a A . Stessa cosa per l'arco (A, C) con peso 8, che   minore di ∞ e quindi

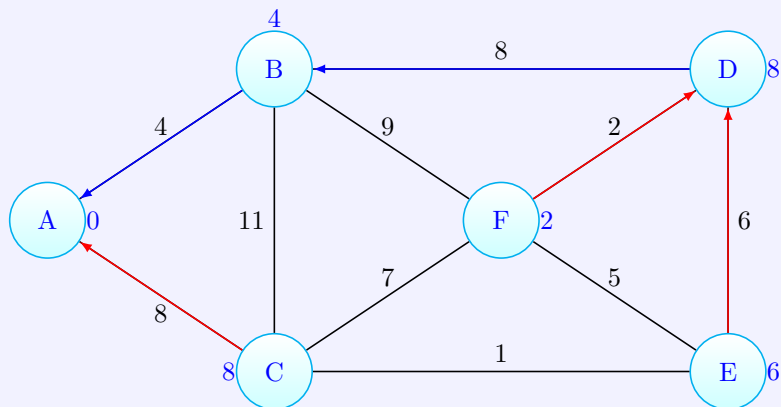
andiamo ad aggiornare la chiave di C a 8 e il suo predecessore a A .



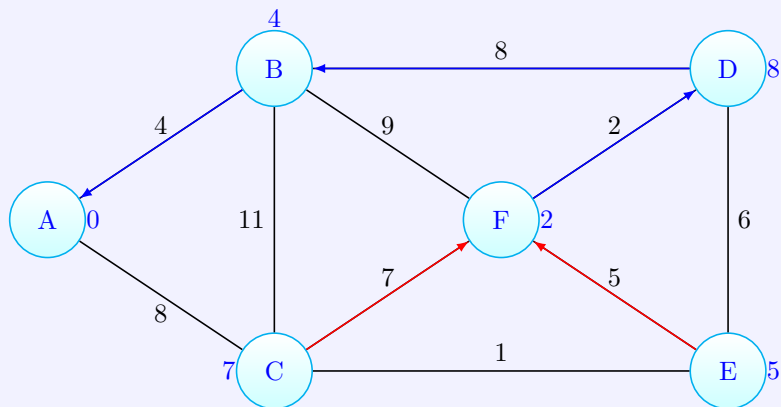
Una volta aver visitato le liste di adiacenza di A , andiamo a fare l'extract min, che ci restituisce il nodo B . Abbiamo già visto A e quindi non lo consideriamo, mentre andiamo a considerare D che ha chiave 8, che è minore di ∞ e quindi andiamo ad aggiornare la chiave di D a 8 e il suo predecessore a B . Stessa cosa per l'arco (B, F) con peso 9, che è minore di ∞ e quindi andiamo ad aggiornare la chiave di F a 9 e il suo predecessore a B . Tuttavia il nodo C ha chiave 8 che è minore di 11 (l'arco (B, C)) e quindi non lo consideriamo.



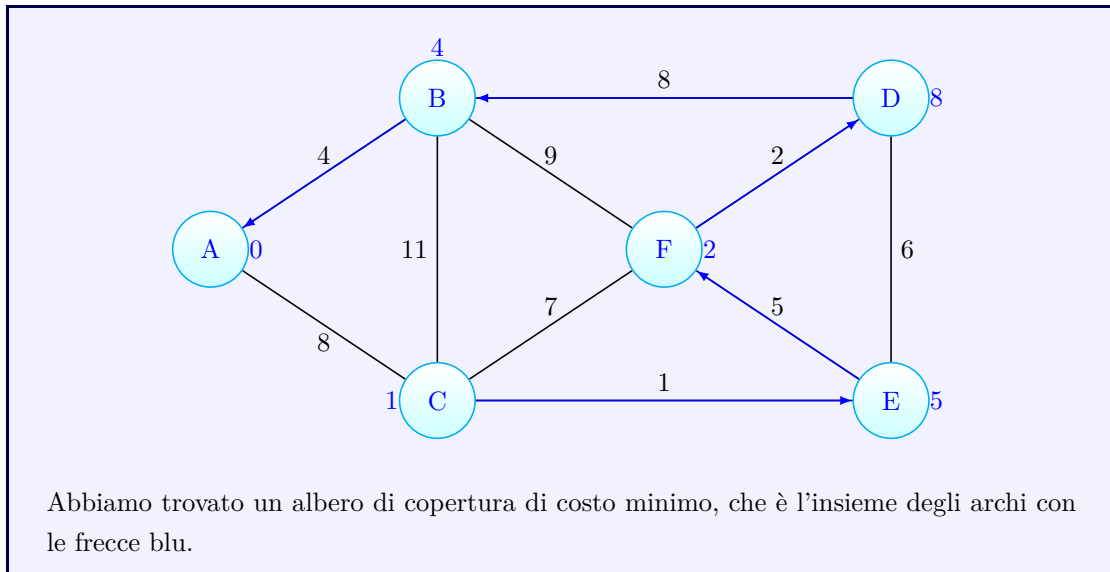
Nel prossimo extract min, possiamo decidere se prendere C o D essendo che pesano uguali. Prendiamo D . Guardando i vicini di D , arriviamo ad F dove 2 è minore di 9 e quindi andiamo ad aggiornare la chiave di F a 2 e il suo predecessore a D . Inoltre, la freccia che prima collegava F e B viene eliminata perché ora sappiamo che l'arco (D, F) è più conveniente. Stessa cosa per l'arco (D, E) con peso 6, che è minore di ∞ e quindi andiamo ad aggiornare la chiave di E a 6 e il suo predecessore a D .



Successivamente facciamo l'extract min e prendiamo F che ha due ed è il nodo più piccolo. Prendiamo C, F e notiamo come $7 < 8$ di conseguenza aggiorniamo il suo parent e la sua chiave. Stessa cosa per F, E .



Ora facciamo l'extract min e prendiamo E che ha chiave 5. Vediamo come l'arco (E, C) con peso 1 è minore di 7 e quindi andiamo ad aggiornare la chiave di C a 1 e il suo predecessore a E . Il prossimo extract min è C che è l'unico rimasto, sappiamo che 1 è un taglio sicuro e quindi viene connesso ad E .



Settare il primo nodo a 0 va bene solo se sappiamo che il grafo ha solo pesi positivi o comunque sia il primo ad essere estratto. Ecco perché una chiave come $-\infty$ sarebbe stata più corretta. Settare tutti gli altri nodi a ∞ ha complessità $O(V)$ e poi V volte l'extract min richiede $O(V \log V)$.

8.8 Cammini minimi

In questo caso, non voglio più un albero di copertura che colleghi tutti i nodi, ma voglio trovare il cammino minimo da un nodo di partenza ad un nodo di arrivo. Un algoritmo per il cammino minimo avrà come input un grafo $G = (V, E)$ (con la sua w che è la matrice dei pesi) e un nodo di partenza $s \in V$ e come output un cammino di costo minimo. Di cammini minimi ne potrebbero esistere molti, come zero. Non abbiamo la garanzia che esista un cammino minimo anche se il grafo è connesso, perché ci potrebbero essere dei cicli negativi e questo la rende la soluzione impossibile.

Lemma 8.7. Sia P un cammino minimo da s a v e sia u il predecessore di v in p .

$$P : s \rightarrow u \rightarrow v$$

Allora il prefisso di P da s a u è un cammino minimo da s a u .

Conseguenza di questo lemma: possiamo rappresentare alcuni insieme di cammini minimi con un albero radicato in s (albero dei cammini minimi). Quindi possiamo ricollegarci ad un problema di cammini minimi.

Partiamo ad una stima iniziale:

- Un cammino di costo minimo da s a v se esiste, ha costo 0.
- Tutti gli altri nodi sono raggiungibili con costo infinito.

```

1 init(G,s)
2   forall u in V[G]
3     d[u] <- inf
4     pi[u] <- nil
5   d[s] <- 0

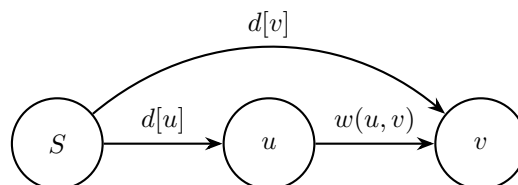
```

Cerchiamo di migliorare questa stima iniziale, tramite il rilassamento degli archi.

```

1 relax(u,v,w)
2   if d[v] > d[u] + w(u,v) then
3     d[v] <- d[u] + w(u,v)
4     pi[v] <- u

```



In poche parole se il percorso alternativo è migliore di quello attuale, allora aggiorniamo il cammino minimo. Aggiorniamo anche il predecessore di v a u . Se ho un albero dei cammini minimi, allora nessun arco è rilassabile.

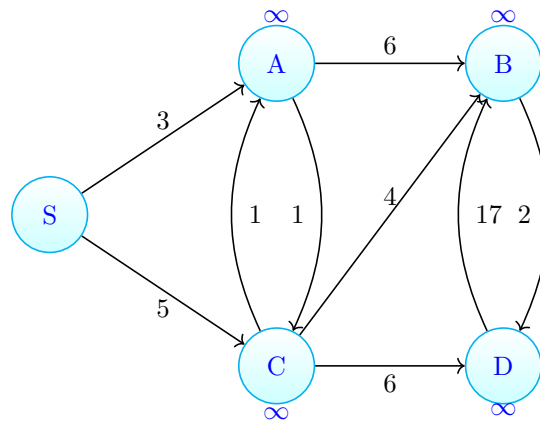
$$\forall (u, v \in E[G] \quad d[v] \leq d[u] + w(u, v))$$

Se questa condizione è vera (Disuguaglianza di Bellman) allora abbiamo trovato un albero dei cammini minimi. Come potremmo rilassare gli archi di un grafo in modo da arrivare ad un albero dei cammini minimi? Proponiamo l'algoritmo di Dijkstra, che funziona solo se non esistono archi negativi.

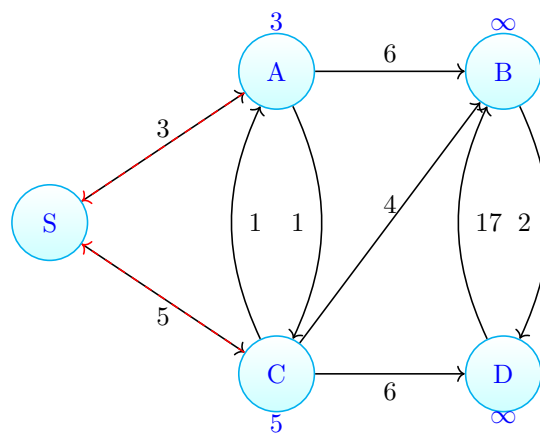
```

1 Dijkstra(G,w,s)
2   Init(G,w)
3   Q <- V[G] // coda di priorità ordinata su d
4   while Q non è vuota
5     u <- extract_min(Q) // nodo con d[u] minimo
6     per ogni v in Adj[u]
7       relax(u,v,w)

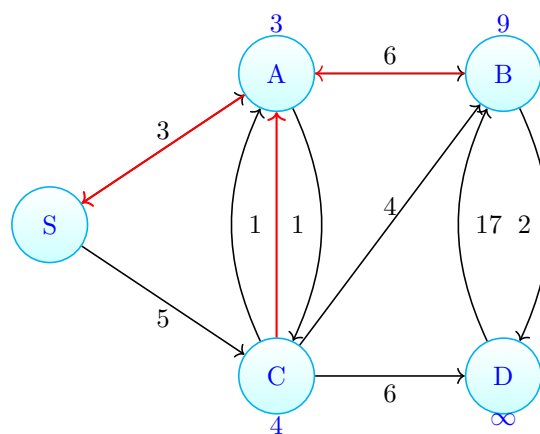
```



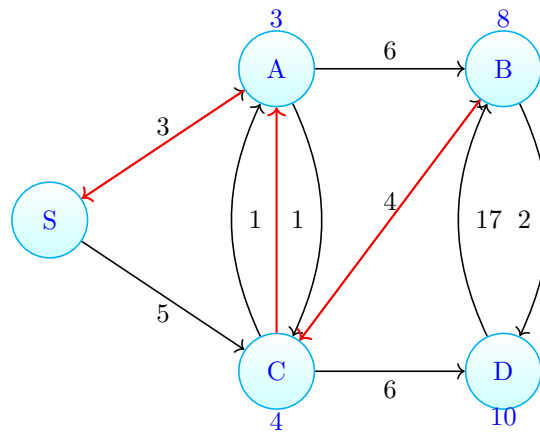
Iniziamo a rilassare gli archi partendo da S .



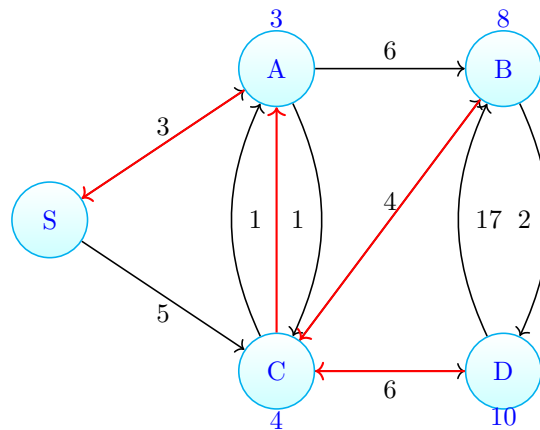
Ogni volta che rilassiamo un arco con Dijkstra, lo stiamo rilassando da un nodo che ha già un cammino minimo. Procediamo rilassando gli archi di A.



Ora rilassiamo gli archi di C .



Ora rilassiamo gli archi di B .



Rilassando gli archi di D non otteniamo nessun miglioramento, perché il cammino minimo da S a D è 10 e non 8. Fatto ciò discutiamo la complessità dell'algoritmo di Dijkstra. La Init richiede $O(V)$, l'extract min richiede $O(V)$ e rilassare un arco richiede una riduzione di chiave che richiede $O(E)$. Di base ho

$$V + E + VC(ExtMin) + EC(RedKey)$$

quindi dipende dalla struttura dati che utilizziamo per la coda di priorità e come implementata la riduzione di chiave.

- Lista ordinata: $O(V^2 + E + EV) = O(V + E + EV)$
- Lista non ordinata: $O(V + E + V^2 + E) = O(V^2 + E) = O(V^2)$, mi costa molto mantenerla ordinata quindi è più conveniente non tenerla ordinata.

- Heap: $O(V + E + V \log V + E \log V) = O((V + E) \log V)$, questo perché l'extract min richiede $O(\log V)$ e la riduzione di chiave richiede $O(\log V)$. Tuttavia, se il grafo è sparso conviene ma se fosse completo allora conviene utilizzare la lista non ordinata.

```

1 BellMan-Ford(G,w,s)
2   Init(G,s)
3   for i <- 1 to V[G] - 1 do
4     for (u,v) in E[G] do
5       relax(u,v,w)

```

BellMan-Ford semplicemente rilassa tutti gli archi $V - 1$ volte, perché sappiamo che un cammino minimo non può avere più di $V - 1$ archi.

```

1 per ogni (u,v) in E[G]
2   if d[v] > d[u] + w(u,v) then
3     return false // questo accade se esiste un ciclo negativo
4 return true // albero dei cammini minimi

```

Lemma 8.8. *Dopo i iterazione tutti i cammini minimi tra quelli che contengono al più i archi sono stati trovati.*

Proof. Base: $i = 0$, S è l'unico nodo con un cammino minimo, quindi è vero. Induzione: supponiamo sia vero per i , dimostriamo $i + 1$. Consideriamo un cammino minimo P da S a v con al più $i + 1$ archi, quindi ha un predecessore u che ha al più i archi. Per ipotesi induttiva, dopo i iterazioni, il cammino minimo da S a u è stato trovato e quindi rilassando l'arco (u, v) otteniamo il cammino minimo da S a v .

La complessità di BellMan-Ford è $O(VE)$, perché rilassiamo tutti gli archi $V - 1$ volte e quindi abbiamo $O(VE)$. Supponiamo che esista un ciclo negativo ma che BF non se ne accorga. Sia $\{v_0, v_1, \dots, v_n, v_0\}$ un ciclo negativo. Supponiamo BF non restituisca *false*. Andiamo a controllare ogni singolo arco di questo ciclo.

$$\begin{aligned}
 d[v_1] &\leq d[v_0] + w(v_0, v_1) \\
 d[v_2] &\leq d[v_1] + w(v_1, v_2) \\
 &\vdots \\
 d[v_n] &\leq d[v_{n-1}] + w(v_{n-1}, v_n) \\
 d[v_0] &\leq d[v_n] + w(v_n, v_0) \\
 \hline
 \sum_{i=0}^n d[v_i] &\leq \sum_{i=0}^n d[v_i] + \sum_{i=0}^n w(v_i, v_{i+1})
 \end{aligned}$$

Tuttavia

$$\sum_{i \neq 0}^n d[v_i] \leq \sum_{i \neq 0}^n d[v_i] + \underbrace{\sum_{i=0}^n w(v_i, v_{i+1})}_{\text{Costo del ciclo}}$$

Quindi rimane

$$0 \leq \sum_{i=0}^n w(v_i, v_{i+1})$$

Ma questo è falso, perché abbiamo presupposto che il ciclo fosse negativo. Quindi l'algoritmo di Bellman-Ford non può sbagliare se il grafo ha cicli negativi. Proviamo a vedere se esistono algoritmi per grafi aciclici.

```

1 DAG_SP(G, w, s)
2   Init(G, s)
3   Calcola ordinamento topologico di G
4   per ogni u in V[G] in ordine topologico
5     for ogni v in Adj[u]
6       relax(u, v, w)

```

Grazie all'ordinamento topologico possiamo direttamente sapere se il grafo è aciclico o meno, perché altrimenti non riuscirebbe a trovarne un ordinamento topologico. L'ordinamento topologico ha come complessità $O(V + E)$, la relax la facciamo una volta per ogni arco e quindi la complessità è $O(V + E)$. E se noi volessimo calcolare il cammino di costo **massimo**? In questo caso ci basterebbe invertire i segni dei pesi e applicare l'algoritmo di Dijkstra e adattare l'algoritmo e ricondurmi al problema del cammino minimo. Se qualcuno volesse rendere massimo il prodotto? Posso utilizzare i logaritmi, perché il logaritmo di un prodotto è la somma dei logaritmi e di conseguenza ricondurmi nuovamente al problema del cammino minimo.

8.9 Cammini minimi con sorgente multipla

Dobbiamo risolvere ora il problema di cammini minimi non con una singola sorgente ma per ogni coppia di nodi (da un nodo A ad un nodo B). Si potrebbe risolvere facilmente applicando un qualsiasi algoritmo per cammini minimi per ogni nodo sorgente. La complessità di questo approccio sarebbe applicare Bellman-Ford ($O(VE)$) per ogni nodo e quindi la complessità finale sarebbe $O(V^2E)$. Si può ottenere un algoritmo più efficiente, cercando di rappresentare il nostro problema come una matrice, dove D_{ij} è il costo del cammino minimo da i a j e π_{ij} è il predecessore del nodo j nel cammino da i a j .

```

1 print_path(pi, i, j)
2   if pi[i][j] == nil then
3     print(i, j)
4   else
5     print_path(pi, i, pi[i][j])
6     print(pi[i][j], j)

```

Vediamo di visualizzare il problema con un esempio. Facciamo una init per ogni riga.

$$D^0 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \dots & \dots & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \dots & \vdots \\ \vdots & \infty & 0 & \infty & \vdots \\ \vdots & \infty & \infty & 0 & \vdots \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad D^0 \leftarrow \text{Init}(G, w)$$

```

1 extend_sp(D, W)
2   n <- rows(D)
3   sia D' una matrice n x n
4   for i <- 1 to n
5     for j <- 1 to n
6       D'[i][j] <- infinito
7       for k <- 1 to n
8         D'[i][j] <- min(D[i][j], D[i][k] + W[k][j]) // il rilassamento
9         // non e nient altro che un minimo
10  return D'
11
12 all_pairs_sp(G, w)
13  D^0 <- Init(G, w)
14  for l <- 1 to |V(G)| - 1 do
15    D^l <- extend_sp(D^{l-1}, W)
16  D^{|V(G)|} <- extend_sp(D^{|V(G)|-1}, W)
17  if D^{|V(G)|}[i][i] != D^{|V(G)|-1} then
18    return false // esiste un ciclo negativo
19  else
20    return D^{|V(G)|}

```

Come possiamo vedere la complessità è di fare un extend-sp per ogni nodo e l'extend shortest path ha come complessità $O(V^3)$ che devo fare V volte e quindi la complessità finale è $O(V^4)$. Siamo abituati a lavorare con somma e prodotti, ora stiamo lavorando con min e somma. Quindi quello che stiamo facendo è un **algebra di min-somma**. Quello che stiamo facendo in realtà non è nient'altro che moltiplicazioni di matrici ma con un'algebra diversa.

$$D^0 \cdot W^{V-1}$$

Possiamo notare come la matrice D^0 non è nient'altro che la matrice identità ma con l'algebra di min-somma.

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Questo perché 1 è l'elemento neutro della somma e 0 è l'elemento neutro del min. Mentre per la matrice D_0 l'elemento neutro della somma è ∞ e l'elemento neutro della somma è 0. Stiamo

anche calcolando una potenza di W e per ora abbiamo visto come il prodotto di matrici ha come complessità $O(V^4)$. Si può fare meglio di così?

```

1 Floyd-Warshall(W)
2   Dk[i][j] costo minimo da i a j che usa solo nodi di {1 ... k} come nodi
   intermedi
3   n <- rows(W)
4   D0 <- W // le distanze iniziali coincidono con i pesi degli archi
5   for k <- 1 to N
6     for i <- 1 to n
7       for j <- 1 to n
8         Dk[i][j] <- min(D{k-1}[i][j], D{k-1}[i][k] + D{k-1}[k][j])

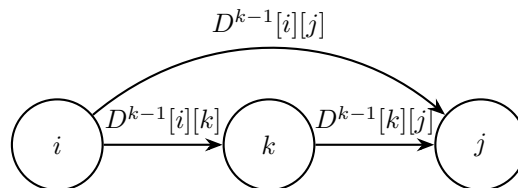
```

Questo è il modo in cui rappresentiamo il rilassamento:

$$D^k[i][j] \leftarrow \min(D^{k-1}[i][j], D^{k-1}[i][k] + D^{k-1}[k][j])$$

Tra i e j uso:

- O lo stesso per corso percorso precedente (senza passare per k)
- Oppure un nuovo percorso che passa per k se è migliore



Questo algoritmo ha come complessità $O(V^3)$, perché abbiamo tre cicli annidati che iterano su V . Supponiamo ora che tutti pesi non negativi, possiamo usare l'algoritmo di Dijkstra per ogni nodo sorgente $(V + E) \log V$. La complessità finale è $V(V + E) \log V = V^2 \log V + VE \log V$. Se il grafo è sparso ($E = \Theta(V)$) allora la complessità è $O(V^2 \log V)$ che è meglio di Floyd-Warshall. Quindi un algoritmo migliore di Floyd-Warshall esiste solo se il grafo è sparso e non ci sono pesi negativi. E se ci fossero pesi negativi invece? Johnson, un famoso ricercatore disse: "e se trasformassimo i pesi del grafo in modo da non avere pesi negativi?". Una soluzione ovvia potrebbe essere di sommare una costante che potrebbe essere opposta al valore più basso nei pesi del grafo. Tuttavia se applicassimo questo metodo vorrebbe dire che se esistesse un ciclo negativo (che di base non ha soluzione) allora sarebbe trasformato in un ciclo positivo e questo porterebbe ad una soluzione, quindi per contraddizione questo metodo non è applicabile. L'idea che ha avuto Johnson è quello di prendere un **super nodo** s e collegarlo a tutti i nodi del grafo con archi di peso 0. Usare ora BF per calcolare i cammini minimi da s a tutti gli altri nodi. Sia d la funzione distanza minima. Sia $h \triangleq d$. La complessità: $VE + VE \log V = VE \log V$ per grafi sparsi, diventa $V^2 \log V$.

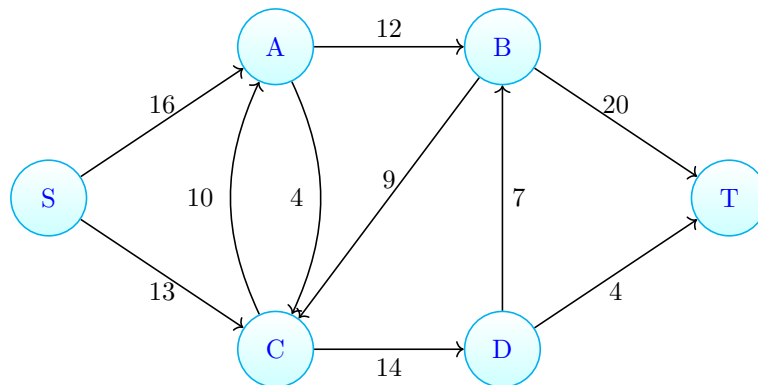
Proof. Sia $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ dove $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h[u] - h[v]$. L'algoritmo di Johnson per funzionare deve trovare una funzione h buona che soddisfi l'equazione prima citata. Utilizzeremo la funzione di distanza come funziona h . Ricordiamo che BF si accorge se ci sono cicli negativi, quindi se ne trova uno si ferma subito e afferma che non esiste un albero dei cammini minimi. Se invece non trova cicli negativi, allora trova sicuramente una soluzione. Ci basta fare l'algoritmo di BF solo una volta e poi andare di Dijkstra sapendo che non ci sono cicli negativi.

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E[G] \quad d[v] &\leq d[u] + w(u, v) \\ 0 &\leq d[u] + w(u, v) - d[v] \\ &= w(u, v) + d[u] - d[v] = \hat{w}(u, v) \end{aligned}$$

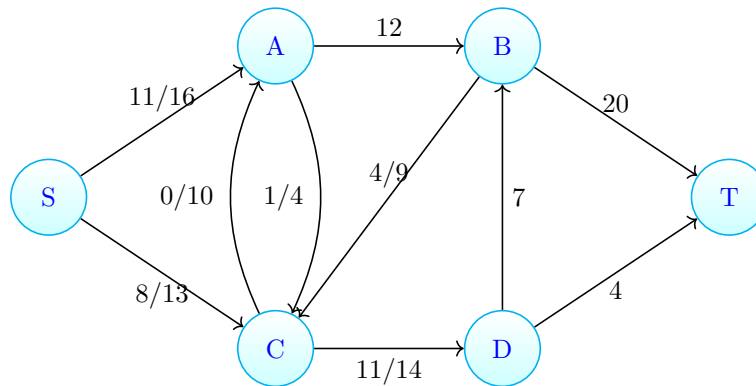
Se io invece volessi in qualche modo evitare i cicli negativi e comunque trovare una soluzione da un nodo A e un nodo B nello stesso grafo? Un modo potrebbe essere quello di considerare solo i nodi che sono raggiungibili da A e che possono raggiungere B solo questi nodi possono essere considerati per il calcolo del cammino minimo. Per capire quali nodi sono raggiungibili da A e possono raggiungere B possiamo utilizzare un DFS o BFS da entrambi i nodi. Prima faccio una visita dal nodo A e li marco, subito dopo faccio la stessa cosa da B ma questa volta in modo inverso, tramite il grafico trasposto. E quindi rimuovo tutti i nodi che non sono stati marcati in entrambi i casi e applico il cammino minimo su questo grafo ridotto.

8.10 Flusso massimo

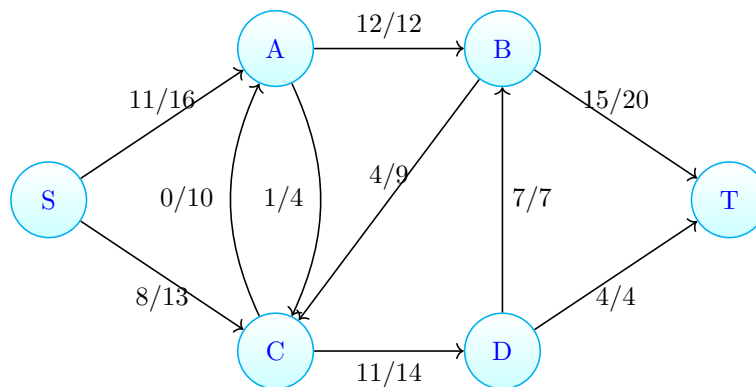
I problemi di flusso massimo sono un argomento molto importante in informatica, perché sono alla base di molti algoritmi e applicazioni pratiche. Il problema del flusso massimo è quello di trovare il flusso massimo in un grafo diretto con capacità sugli archi. La rete di flusso è un grafo diretto $G = (V, E)$ con una funzione di capacità $c : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ e due nodi speciali: la sorgente s e il pozzo t . La capacità deve essere tale che $c(u, v) \geq 0$ per ogni arco $(u, v) \in E$ e $c(u, v) = 0$ se $(u, v) \notin E$.



Dobbiamo cercare di trovare un flusso massimo da S a T . Non posso utilizzare un approccio greedy dove mando tutto il flusso possibile da S a T perché non è detto che sia ottimo.



Ora da A a B posso mandare un flusso di 12.



Cercherò di rappresentare il flusso come funzione $F : V \times V \rightarrow R^+$, dove $F(u, v)$ è il flusso che va da u a v . La nostra funzione deve soddisfare le seguenti proprietà:

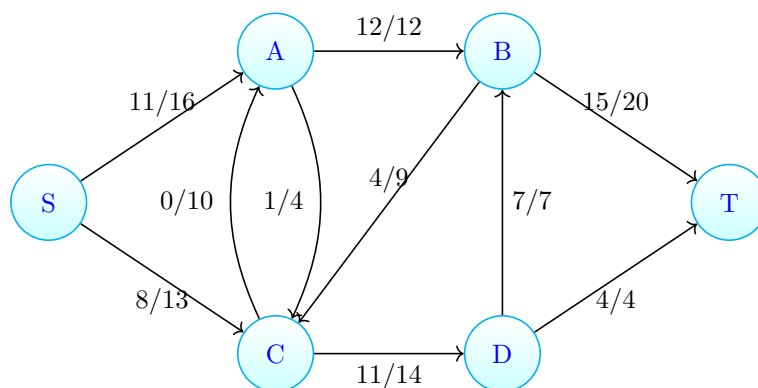
- **Capacità:** $F(u, v) \leq c(u, v)$ per ogni arco $(u, v) \in E$.
- **Antisimmetria:** $\forall (u, v) \quad f(u, v) = -f(v, u)$
- **Conservazione:** $\forall v \in V \setminus \{s, t\} \quad \sum_{u \in V} F(u, v) = \sum_{w \in V} F(v, w)$, ovvero la somma dei flussi entranti in un nodo deve essere uguale alla somma dei flussi uscenti.

Proviamo ora a spezzare il grafo in due parti U e V tale che $s \in U$ e $t \in V$. La capacità $c(u, v)$ del taglio è definita come la somma delle capacità degli archi che passano per il taglio che vanno da U a V . Il flusso $f(u, v)$ attraverso il taglio è definito come la somma dei flussi degli archi che passano per il taglio che vanno da U a V . In questo caso sicuramente

$$f(u, v) \leq c(u, v)$$

un'altra proprietà interessante è che dato un qualsiasi taglio, se per esempio faccio uscire 19 da S allora in qualsiasi taglio il flusso sarà 19.

Posso ora ottenere un flusso migliore? Definiamo la **capacità residua** $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$, ovvero la capacità residua di un arco è la capacità originale meno il flusso che passa attraverso l'arco. Anche questa è una rete di flusso, ma con capacità c_f . Questa è anche chiamata **rete residua** $G_f = (V, E_f)$, dove $E_f = \{(u, v) \in E : c_f(u, v) > 0\}$.



Un cammino aumentante è un cammino da s a t nella rete residua G_f . Lungo questo cammino posso aumentare il flusso. Posso aumentare il flusso di più dell'arco con capacità residua minima lungo il cammino (quindi più del collo di bottiglia). Proponiamo un algoritmo per trovare un flusso massimo.

```

1 Fold-Fulkerson:
2   Parti dal flusso nullo
3   Finche nella rete residua esistono cammini aumentanti
4     sia P un cammino aumentante
5     aumenta il flusso lungo P di una quantita pari alla capacita
6     residua dell arco critico

```

Se Fold-Fulkerson termina, siamo sicuri di avere un flusso massimo?

Teorema 8.10.1

Sia f una funzione di flusso. Sono equivalenti le seguenti proprietà:

1. f è un flusso massimo
2. G_f non ha cammini aumentanti
3. $f(u, v) = c(u, v)$ per un taglio (u, v) (Esiste un taglio saturo)

La complessità di Fold Fulkerson è $O(|F^*|(V + E))$ dove $|F^*|$ è il modulo del flusso massimo. Supponiamo di usare BFS per la ricerca di un cammino aumentante. Sia d_i la funzione distanza calcolata dalla BFS alla iterazione i .

Lemma 8.9. $\forall i < j, \forall u \quad d_i[u] \leq d_j[u]$

Quante volte è possibile che un arco (u, v) sia critico in un cammino aumentante? d non può eccedere V quindi (u, v) non può essere critico più di $\frac{V}{2}$ volte. Visto che ogni cammino aumentante c'è un arco critico non possiamo trovare cammini aumentanti più di $E \cdot \frac{V}{2}$ volte. Quindi la complessità dell'algoritmo di Karp (che non è nient'altro che FF ma usando la BFS per trovare il cammino aumentante) è $O(EV(V + E))$. Quindi

$$O(\min(EV(V + E), |f^*|(V + E)))$$

così da poter usare l'algoritmo in base a quale conviene di più. Trovare un flusso massimo o un taglio di costo minimo è la stessa cosa.

Esempio 8.8

Siamo i gestori di un'agenzia matrimoniale e abbiamo n uomini e m donne. Dobbiamo intervistare le persone e decidere chi accoppiare con chi. Il nostro obiettivo come gestori è quello di massimizzare il profitto e quindi dobbiamo cercare che le coppie siano contente del loro *match*. Come possiamo rappresentare questo problema come un problema di flusso massimo? Costruiamo un grafo bipartito dove da una parte ci sono gli uomini e dall'altra ci sono le donne. Dobbiamo cercare di formare coppie tra uomini e donne, in base al più alto livello di compatibilità. Se ci sono 8 persone (4 uomini e 4 donne) allora il numero massimo di coppie che posso formare è 4. Un grafo è bipartito quando posso dividere il grafo in due insiemi distinti con la garanzia che tutti gli archi collegano nodi di un insieme con nodi dell'altro insieme. Voglio formare il più alto numero di coppie possibili che siano tra loro disgiunti. Questo è anche chiamato problema del **problema del matching massimale su grafo bipartito** che può essere risolto con un algoritmo di flusso massimo.

Risoluzione: costruiamo un super nodo s che collega tutti gli uomini e un super nodo t che viene raggiunto da tutte le donne. Dal nodo s assegneremo capacità 1 a tutti gli archi che collegano s agli uomini e capacità 1 a tutti gli archi che collegano le donne a t . In questa maniera ci assicuriamo che un uomo sarà accoppiato con una sola donna e viceversa. La capacità a 1 verrà assegnata anche agli archi che collegano gli uomini alle donne. In questo caso *rendere massimo il numero di coppie* non è nient'altro che *massimizzazione* nel grafo bipartito.

8.11 Programmazione lineare

Proviamo a lavorare con problemi concreti che si possono risolvere con la programmazione lineare. Immaginiamo di essere in una fabbrica di cioccolatini dove ci sono due tipi di cioccolatini:

- Normali che mi danno 1 euro per scatola
- Deliziosi che mi danno 6 euro per scatola

Inoltre ho i seguenti limiti:

- Max 200 scatole di cioccolatini normali
- Max 300 scatole di cioccolatini deliziosi
- Max 400 scatole di cioccolatini in totale

Definiamo x_1, x_2 come il numero di scatole di cioccolatini normali e deliziosi rispettivamente. Devo trovare il valore di x_1 e x_2 che massimizza il profitto totale ($\max x_1 + 6x_2$) rispettando i vincoli:

$$\begin{cases} x_1 & \leq 200 \\ x_2 & \leq 300 \\ x_1 + 6x_2 & \leq 400 \end{cases}$$

Questo è un sistema di disequazioni lineari. Questo sistema è molto semplice e si può risolvere graficamente, ma in generale non è sempre possibile farlo, perché problemi di questo genere potrebbero arrivare a complessità \mathbb{R}^n con n molto grande. Per esempio, introduciamo in questo nuovo problema un nuovo vincolo e una nuova variabile: i cioccolatini deluxe che costano 13 euro per scatola e consumano il triplo del materiale dei deliziosi. Se x_3 è il numero di scatole di deluxe:

$$\begin{cases} x_1 & \leq 200 \\ x_2 & \leq 300 \\ x_3 & \leq 400 \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq 400 \\ x_2 + 3x_3 & \leq 600 \end{cases}$$

Voglio rendere massimo $\max x_1 + 6x_2 + 13x_3$. Se scegliamo $x_1, x_2, x_3 = 0, 300, 100$ il profitto è $300 \cdot 6 + 100 \cdot 13 = 3100$. La domanda è: questa soluzione è ottima o esistono altre soluzioni che mi danno un profitto maggiore? Faccio una combinazione lineare ottengo la nostra equazione obiettivo:

$$x_1 + 6x_2 + 13x_3 \leq 3100$$

che ci dimostra che abbiamo trovato l'equazione ottima. Tuttavia non è facile trovare questa funzione obiettivo, dobbiamo capire se si possono trovare sempre e se si possono costruire. Trasformiamo un problema dove devo trovare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ che combinando nella combinazione lineare mi possa dare l'equazione obiettivo. Torniamo al primo esempio. Qua tocca collegarci alle nozioni imparate da algebra lineare.

$$(\alpha_1 + \alpha_2)x_1 + (y_2 + y_3)x_2 \leq 200\alpha_1 + 300\alpha_2 + 400\alpha_3$$

Noi abbiamo la funzione obiettivo $max x_1 + 6x_2$ quindi se

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \geq 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq 6 \end{cases}$$

$$A'\alpha \leq b'$$

Allora la disequazione sopra mi produce un limite superiore pari a $200\alpha_1 + 300\alpha_2 + 400\alpha_3$ al valore di $x_1 + 6x_2$. Voglio scegliere $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per rendere minimo il limite superiore. Voglio quindi

$$\min 200\alpha_1 + 300\alpha_2 + 400\alpha_3$$

Riscriviamolo in forma matriciale:

$$c' = (200 \quad 300 \quad 400)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$Ax \leq b \quad \max \quad cx$$

$$A'\alpha \geq b' \quad \min \quad c'\alpha$$

$$A' = A^t \quad b' = c^t \quad c' = b^t$$

I due problemi sono molto simili, scambia i vincoli con gli obiettivi e i minore uguale con i maggiore uguale. Quindi questo tipo di problema si chiama **problema duale**. Il problema duale serve per trovare dei limiti al **problema primale**.