



Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

November 21, 2024

Contents

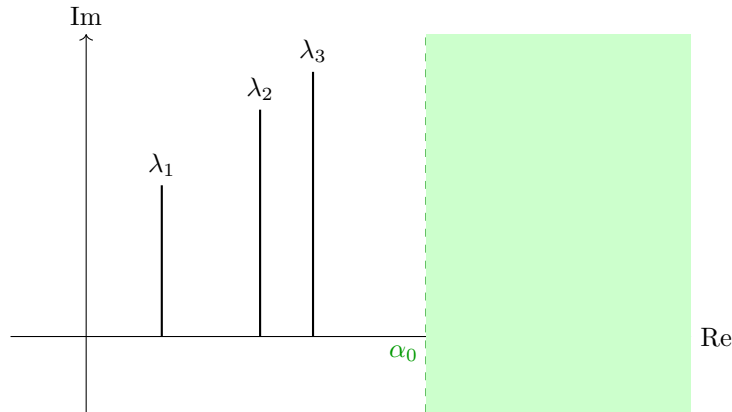
1	Trasformata di Laplace	3
1.1	Proprietà	3
1.2	Trasformate di funzioni notevoli	6
1.3	Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali	9
1.3.1	Funzione di trasferimento	12
2	Antitrasformata di Laplace	13
2.1	Divisione polinomiale	13
2.2	Fratti semplici	14

1 Trasformata di Laplace

Definition 1.1. $v(t)$ è definito nel tempo. $V(s)$ è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st} dt$$

Figure 1: $\alpha \geq \max\{\lambda_i\}$



1.1 Proprietà

La trasformata di Laplace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

Propriety 1.2. Linearità:

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) = a_1 V_1(s) + a_2 V_2(s)$$

Propriety 1.3. Traslazione nel dom. del tempo:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = \overbrace{e^{-s\tau}}^{\tau > 0} V(s)$$

Propriety 1.4. Traslazione nel dom. dei complessi:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = V(s - \lambda)$$

Propriety 1.5. Cambio di scala:

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Propriety 1.6. Proprietà delle derivate: Se $v(t)$ ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ allora anche la sua derivata i -esima ammette TdL.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = S^i V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{i-1-k})$$

Proof. Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\
 &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\
 &= sV(s) - v(0^-)
 \end{aligned}$$

Proof. Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\
 &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= \int_0^{+\infty} [S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)]e^{-st}dt - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}
 \end{aligned}$$

Propriety 1.7. Moltiplicazione per funzioni polinomiali: Se $v(t)$ ammette TdL e t è un polinomio allora anche $tV(s)$ ammette TdL.

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

Proof. Per $i = 1$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[tv(t)](s) &= \int_0^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt = - \int_0^{+\infty} v(t) \cdot (te^{-st})dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} v(t) \frac{d}{ds} te^{-st}dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \overbrace{\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt}^{\text{TdL}} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

Propriety 1.8. Integrazione nel dom. del tempo: Se $v(t)$ ammette TdL, allora $\Psi(t) = \int_0^t v(t)dt$ ammette TdL

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza: $\alpha = \max\{0, \alpha_0\}$

Proof.

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \implies \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) = S\mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

Propriety 1.9. Integrazione nel dom. dei complessi: Se $v(t)$ ammette TdL e esiste $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$ allora:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty} \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-s\zeta}dtd\zeta \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t) \underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

Theorem 1.10. Teorema del valore iniziale: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Theorem 1.11. Teorema del valore finale: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Propriety 1.12. Convoluzione nel dom. del tempo: Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulla per $t < 0$) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL.

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Proof.

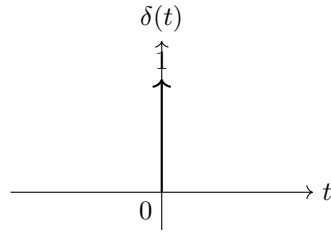
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u * v)(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau) v(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0-}^{\infty} v(t - \tau) e^{-st} dt \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Sostituiamo $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0-}^{\infty} v(x) e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_0^{+\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x) e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse $\delta(t)$

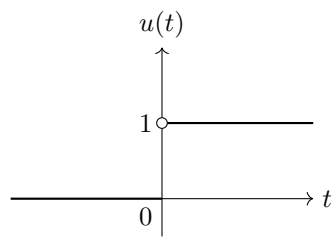
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A \overbrace{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}^1 = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

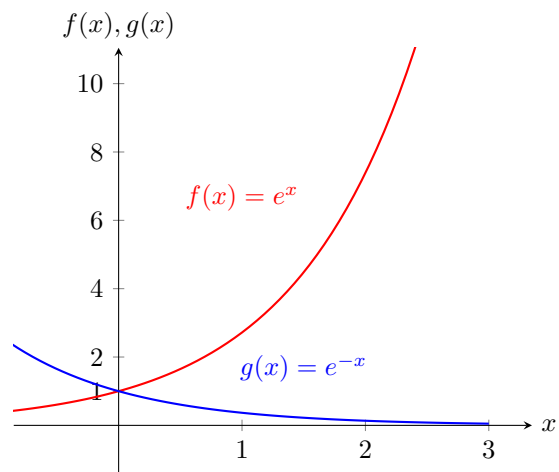


Unit Step $u(t)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\
 &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\
 &= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\
 &= e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\
 &= \frac{e^{-s\tau}}{s}
 \end{aligned}$$

Esponenziale complesso causale: $v(t) = e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$



$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) \\
 &= \frac{1}{s - \lambda}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s-\lambda}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s-\lambda}$$

Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:

$$v(t) = \frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!} \mathcal{L}[t^l e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &\stackrel{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{ds^l} \mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{ds^l} \frac{1}{s-\lambda} \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{l!(-1)^l}{(s-\lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s-\lambda)^{l+1}} \end{aligned}$$

Esempio 1

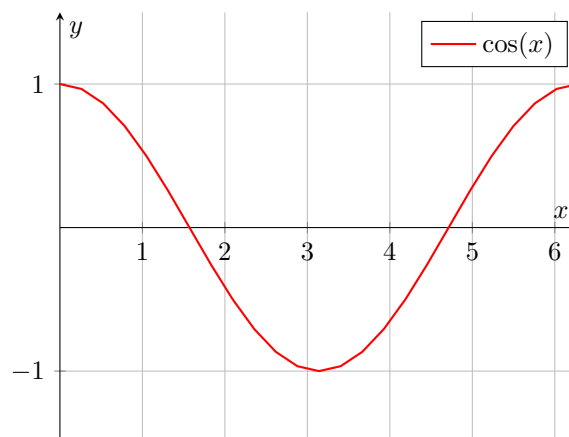
Con $l = 1$

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

Con $l = 2$

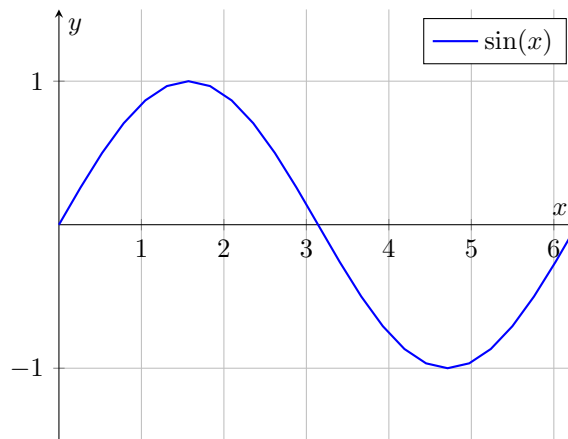
$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^3}$$

Funzione coseno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(wt)](s) &\stackrel{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - jw} + \frac{1}{s + jw} \right] \\
&= \frac{s}{s^2 + w^2}
\end{aligned}$$

Funzione seno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(wt)](s) &\stackrel{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s + jw} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{s + jw - s + jw}{s^2 + w^2} \right] \\
&= \frac{w}{s^2 + w^2}
\end{aligned}$$

1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t) (u(t) = 0, t < 0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-), \frac{dv(0)}{dt}; \frac{d^2 v(0)}{dt^2}; \dots \frac{d^{n-1} v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL allora anche $v(t)$ ammette TdL e:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right] (s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L} \left[\frac{d^i u(t)}{dt^i} \right] (s)$$

Applicando $n + m$ volte la regole della derivata:

$$\begin{aligned} & a_n \left[S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-1-k}) \right] + \\ & + a_{n-1} \left[S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-2-k}) \right] + \\ & + \dots + a_0 V(s) \\ & = b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s) \end{aligned}$$

Imponiamo le C.I.: $u(t) \Big|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0] V(s)}_{d(s)} + \\ & - \underbrace{a_n v(0^-) S^{n-1} \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) S^{n-2} - \dots - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right)}_{p(s)} \\ & = \underbrace{(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_0) U(s)}_{n(s)} \end{aligned}$$

$$\implies d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinomio di grado m che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonia caratteristico di $u(t)$
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate di uscita. Polinimonia caratteristico di $v(t)$
- $p(s)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left(\sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \frac{d^{n-j} v(t)}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

Polinomio di grado $n - 1$ che dipende solo dalle C.I di $v(t)$

- $\frac{P(s)}{d(s)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I. del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico di $v(t)$

$$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}U(s)$ è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico di $u(t)$, dei coefficienti del polinomio caratteristico di $v(t)$ moltiplicati per tali $u(t)$:

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

Esempio

Dato un sistema LTI:

$$\begin{aligned} \frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} &= \frac{du(t)}{dt} \\ \downarrow \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^3v(t)}{dt^3} \right] + \mathcal{L} \left[\frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] &= \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} \right] \\ \downarrow \\ S^3V(s) - S^2v(0^-) - S \frac{dv(0^-)}{dt} - S^2 \frac{d^2v(0^-)}{dt^2} + \\ + S^2V(s) - Sv(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} &= SU(s) \\ \underbrace{(S^3 + S^2)}_{d(s)} V(s) - \underbrace{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}_{p(s)} &= \underbrace{S}_{n(s)} U(s) \\ V(s) = \frac{S}{(S^3 + S^2)} U(s) + \frac{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}{S^3 + S^2} \end{aligned}$$

$H(s)$ è definita come TdL delle risposte impulsive $h(t)$. È una funzione razionale con grado del numeratore generalmente minore o uguale del denominatore.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0\delta_0(t) + \dots \left(\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right) \delta_{-1}(t) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda)^{l+1}} = H(s) \end{aligned}$$

1.3.1 Funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m (S - \beta)^{\zeta_1} (S - \beta_2)^{\zeta_2} \dots (S - \beta_q)^{\zeta_q}}{a_n (S - \alpha)^{\mu_1} (S - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (S - \alpha_n)^{\mu_r}}$$

Rapporto tra i polinomi car. di $u(t)$ e $v(t)$

Dove α_i e β_j sono rispettivamente radici del denominatore e del numeratore.

Possiamo anche riscriverla come:

$$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (S - Z_i)}{\prod_{i=1}^n (S - P_i)} \quad \text{dove} \quad k = \frac{b_m}{a_n}$$

Dove $(S - Z_i)$ e $(S - P_i)$ sono rispettivamente zeri e poli della funzione razionale.

Definition 1.13. Definiamo come zero di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi numero $\beta \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\beta) = 0$.

Definition 1.14. Definiamo come polo di una funzione razionale $H(s)$ un qualunque numero $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\alpha) = \infty$.

Dato $H(s)$ in forma ridotta (ho eliminato le radici in comune): Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con $r \leq n$ i suoi poli dopo la semplificazione se $Re(\lambda_i) < 0$ per $i = 1, \dots, r$ allora il sistema è BIBO stabile.

Lemma 1.15. Un sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli giacciono nel semipiano complesso negativo.

Per stabilizzare un sistema (BIBO stabilizzato) devo togliere gli zeri λ_i con $Re(\lambda_i) > 0$, dividendoli per il loro corrispettivo polo.

Esempio 1

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Pol. Car degli ingressi}}{\text{Pol. Car delle uscite}} = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3}$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} = \frac{(s - 4)(s - 1)}{s - 3}$$

Poiché $\lambda_1 = 3$ non è asintoticamente stabile poiché la sua parte reale è maggiore di 0.

Non è neanche BIBO stabile perché tutte le radici del denominatore (poli di $H(s)$) hanno parte reale maggiore di 0.

Esempio 2

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

Poiché $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ sono minori di 0 allora il sistema è asintoticamente stabile. Ricordiamo che se un sistema è asintoticamente stabile allora è anche BIBO stabile.

Esempio 3

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u(t) - 4u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} = \frac{(s+4)\cancel{(s-1)}}{\underbrace{(s+3)}_{\lambda_1=-3} \underbrace{(s+2)}_{\lambda_2=-2} \cancel{(s-1)}}$$

Non è asintoticamente stabile. Tuttavia è BIBO stabile poiché tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale minore di 0.

2 Antitrasformata di Laplace

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]}_{\text{Sistema proprio}} \Rightarrow A \\ \underbrace{\deg[n(s)] < \deg[d(s)]}_{\text{Sistema strett. proprio}} \Rightarrow B \end{cases}$$

A \rightarrow Divisione polinomiale \rightarrow Fratti semplici \rightarrow Antitrasformata

B \rightarrow Fratti complessi \rightarrow Antitrasformata

2.1 Divisione polinomiale

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{dove} \quad \deg[r(s)] < \deg[d(s)], k \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[K\delta(t)] = K \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K\delta_0(t)$$

Esempio

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \quad \text{dove} \quad m = 2, n = 2$$

Quotient	2
Divisor	$s^2 - s - 1$
Step 1:	$2s^2 + 4s - 3$
Subtract:	$-(2s^2 - 2s - 2)$
Remainder:	$6s - 1$

$$V(s) = \frac{6s - 1}{s^2 - s - 1} + 2$$

2.2 Fratti semplici

$$\frac{r(s)}{d(s)} = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s-\lambda)^{l+1}}$$

Esempio 1

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s+1)^2(s-2)(s+5)}$$

$$V(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

A, B, C, D sono i $c_{i,l}$

Esempio 2

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{c_{1,0}}{(s+4)} + \frac{c_{2,0}}{s-2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}$$

1. Metodo:

$$\frac{A(s-2) + B(s+4)}{(s+4)(s-2)} = \frac{AS - 2A + BS + 4B}{(s+4)(s-2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + 4B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

2. Metodo:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1} \left((s-\alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i-l-1}}$$

$$c_1 = A = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{\cancel{d^{1-0-1}} \left((s+4)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^0} = \frac{-24}{-6} = 4$$

$$c_2 = B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1} \left((s-2)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^0} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

Ora si applica l'antitrasformata:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= k + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \\
 &\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{=} \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \sum_{i=0}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \right] (t) \\
 &= k\delta_0(t) + \left[\sum_{i=0}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \right]
 \end{aligned}$$

Esempio completo

$$v''(t) - v'(t) - 2v(t) = u''(t) + 2u'(t) + u(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{3t} \delta_{-1}(t)$$

Quello che ci viene chiesto è

1. Stabilità
2. Risposta libera (nel tempo e in frequenza)
3. Risposta impulsiva
4. Risposta forzata
5. Risposta totale

Partiamo con il primo punto:

1. Polinomio caratteristico: $s^2 - s - 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ e $\mu_i = 1$
Non è asintoticamente stabile perché $\lambda_1 > 0$

$$V(s) = \underbrace{\frac{p(s)}{d(s)}}_{V_I(s)} + \underbrace{\frac{\overbrace{h(s)}^{H(s)}}{d(s)}}_{V_F(s)} \cdot U(s)$$

Per garantire stabilità BIBO i poli di $H(s)$ devono avere parte reale minore di 0.

Calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^2}{(s-2)(\cancel{s+1})} = \frac{s+1}{s-2}$$

Non è BIBO stabile perché λ_1 (che è un polo della funzione di trasferimento) è maggiore di 0.

2a. Risposta libera nel tempo:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \\ = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} v_l(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ v'_l(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \\ v_l(t) = e^{-t}$$

2b . Risposta libera in frequenza: Facciamo la trasformata di Laplace del sistema:

$$\mathcal{L}[v''(t) - v'(t) - 2v(t)] = \mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)] \\ \overbrace{(s^2 V(s) - s + 1)}^{\mathcal{L}[v''(t)]} - \overbrace{(sV(s) + 1)}^{\mathcal{L}[v'(t)]} - \overbrace{2V(s)}^{\mathcal{L}[v(t)]} = \overbrace{(s^2 U(s) + 2sU(s) + U(s))}^{\mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)]} \\ \underbrace{(s^2 - s - 2)}_{\text{pol. car. uscite}} V(s) - s + 2 = \underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{\text{pol. car entrate}} U(s) \\ V(s) = \frac{s-2}{(s-2)(s+1)} + \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)} U(s)$$

Vediamo ora cosa è $U(s)$:

$$u(t) = \underbrace{e^{-3t} \delta_{-1}(t)}_{\lambda=-3, A=1} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{v_l(s)} + \underbrace{\frac{s+1}{s-2} \cdot \frac{1}{s+3}}_{H(s)}$$

Quindi la risposta libera in Laplace è:

$$v_l(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\lambda=1, A=1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} \delta_{-1}(t)$$

L'unica differenza che ci sta tra risposta libera e in frequenza è che quella in frequenza, quando la andiamo a trovare dobbiamo moltiplicarla per la funzione causale, ovvero il gradino.

3. Risposta impulsiva:

$$H(s) = \frac{s+1}{s-2}$$

Facciamo la divisione tra polinomi dove otteniamo:

$$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2}$$

Applichiamo l'antitrasformata: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \delta_0(t) + 3e^{2t}\delta_{-1}(t)$

4. Risposta forzata: Proviamo entrambi i metodi, partiamo con il primo (i fratti semplici):

$$V_f(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\frac{As+3A+Bs-2B}{(s-2)(s+3)} = \frac{(A+B)s+(3A-2B)}{(s-2)(s+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-2B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \\ B=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{3}{5} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{5} \frac{1}{s+3} = \left(\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t} \right) \delta_{-1}(t)$$

Okay ora proviamo con il metodo dei limiti:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{\mu-l-1}r(s)}{ds^{\mu-l-1}}(s-\lambda)$$

$$A = \lim_{s \rightarrow +2} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{\cancel{(s-2)}(s+3)} \cancel{(s-2)} = \frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{(s-2)\cancel{(s+3)}} \cancel{(s+3)} = \frac{2}{5}$$

E come si vede, si ottiene il risultato medesimo con diverso metodo.