Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

November 18, 2024

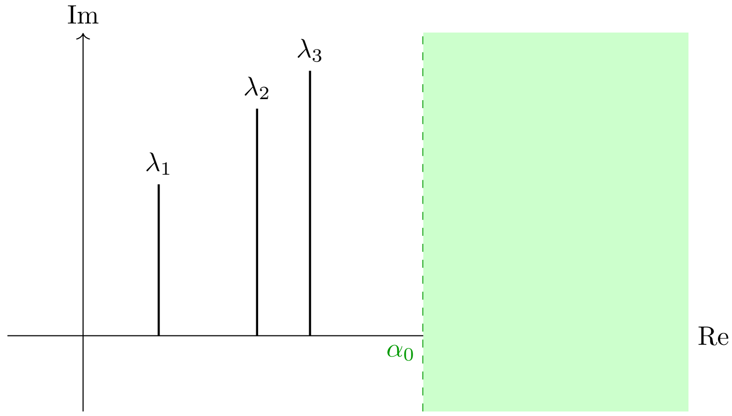
Contents

1 Trasformata di Laplace

Definition 1.1. $v(t)$ è definito nel tempo. V(s) è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st}dt$$

Figure 1: $\alpha \geq max\{\lambda_i\}$



1.1 Proprietà

La trasformata di LaPlace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

Propriety 1.2. ***Linearità:***

$$a_1v_1(t) + a_2v_2(t) = a_1V_1(s) + a_2V_2(s)$$

Propriety 1.3. ***Traslazione nel dom. del tempo:***

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)](s) = \overbrace{e^{-st}V(s)}^{\tau>0}$$

Propriety 1.4. ***Tralaslazione nel dom. dei complessi:***

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)] = V(s-\lambda)$$

Propriety 1.5. ***Cambio di scala:***

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Propriety 1.6. ***Proprietà delle derivate:*** *Se $v(t)$ ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito $v(0^-) = \lim_{t\to 0} v(t)$ allora anche la sua derivata i-esima ammette TdL.*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^iv(t)}{dt}\right] = S^iV(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^kv(t)}{d^t}\bigg|_{t=0^-}(S^{i-1-k})$$

Proof. Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\ &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^\infty v(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\ &= sV(s) - v(0^-)\end{aligned}$$

Proof. Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\ &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= \int_0^{+\infty}\left[S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)\right] - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}\end{aligned}$$

Propriety 1.7. ***Moltiplicazione per funzioni polinomiali:*** *Se $v(t)$ ammette TdL e t è un polinomio allora anche $tV(s)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{dS^i}$$

Proof. Per $i = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tv(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt &= -\int_{0^-}^{+\infty} v(t)\cdot(te^{-st})dt \\ &= -\int_0^{+\infty} v(t)\frac{d}{ds}te^{-st}dt \\ &= -\frac{d}{ds}\overbrace{\int_0^\infty v(t)e^{-st}dt}^{\text{TdL}} \\ &= -\frac{d}{ds}V(s)\end{aligned}$$

Propriety 1.8. ***Integrazione nel dom. del tempo****: Se $v(t)$ ammette TdL, allora $\Psi(t) = \int_{0^-}^t v(t)dt$ ammette TdL*

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza: $\alpha = max\{0, \alpha_0\}$

Proof.

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \Longrightarrow \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) = \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) &= S\mathcal{L}[v_1'(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

Propriety 1.9. ***Integrazione nel dom. dei complessi****: Se $v(t)$ ammette TdL e esiste* $\lim_{t\to 0^-} \frac{v(t)}{t}$ *allora:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dtd\zeta \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t)\underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}}dt \\ &= \int_0^{\infty}\frac{v(t)}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

Theorem 1.10. ***Teorema del valore iniziale****: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito* $\lim_{t\to 0^-} v(t)$ *allora*

$$\lim_{t\to 0^-} v(t) = \lim_{s\to\infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Theorem 1.11. ***Teorema del valore finale****: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito* $\lim_{t\to\infty} v(t)$ *allora*

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Propriety 1.12. ***Convoluzione nel dom. del tempo****: Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulla per $t < 0$) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Proof.

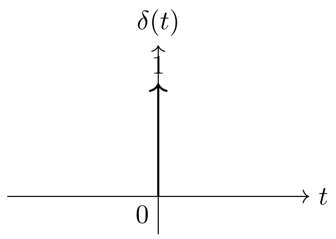
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(u*v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u*v)(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0^-}^{\infty} v(t-\tau)e^{-st}dt \right) d\tau
\end{aligned}$$

Sostituiamo $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-s(x+\tau)}dx \right) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x)e^{-sx}dt \\
&= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
\end{aligned}$$

1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse $\delta(t)$

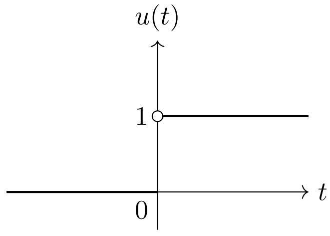
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A\,\overbrace{\cancel{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}}^{1} = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t-\tau)](s) = e^{-st}\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

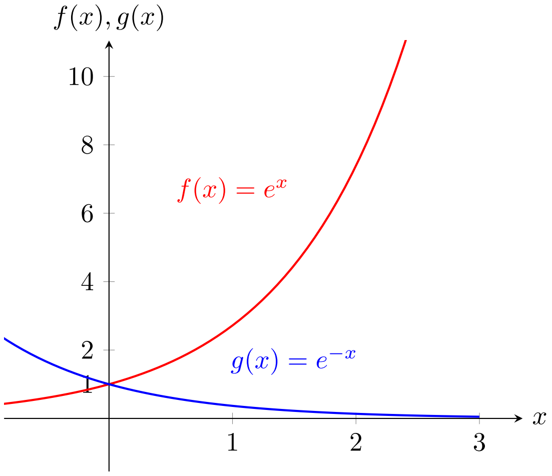


Unit Step $u(t)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\
&= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\
&= e^{-s\tau}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{e^{-s\tau}}{s}
\end{aligned}$$

Esponenziale complesso causale: $v(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) \\
&= \frac{1}{s - \lambda}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s-\lambda}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s-\lambda}$$

Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:

$$v(t) = \frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!}\mathcal{L}[t^l e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&\overset{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\frac{1}{s-\lambda} \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{l!(-1)^l}{(s-\lambda)^{l+1}} \\
&= \frac{1}{(s-\lambda)^{l+1}}
\end{aligned}$$

Esempio 1

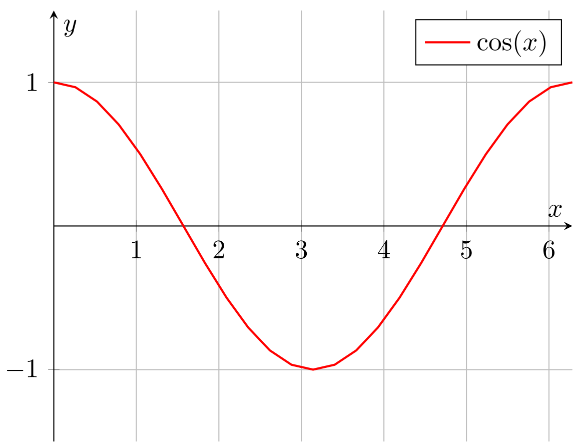
Con l = 1

$$\mathcal{L}[te^{e^{\lambda t}}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

Con l = 2

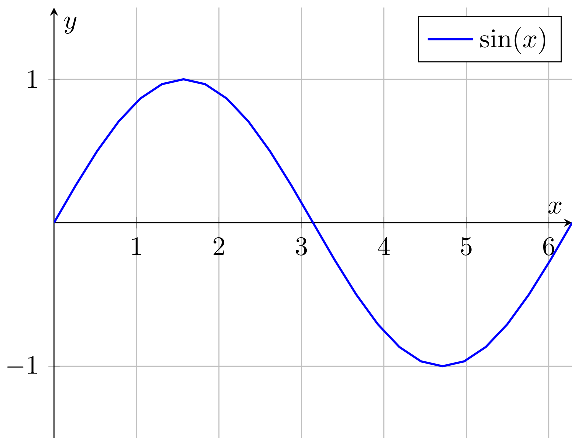
$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^3}$$

Funzione coseno:



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[cos(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s - jw} + \frac{1}{s + jw}\right] \\
&= \frac{s}{s^2 + w^2}
\end{aligned}
$$

Funzione seno:



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[sin(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s + jw}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{\cancel{s} + jw - \cancel{s} + jw}{s^2 + w^2}\right] \\
&= \frac{w}{s^2 + w^2}
\end{aligned}
$$

1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t)(u(t) = 0, t < 0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-),\ \frac{dv(0)}{dt};\ \frac{d^2v(0)}{dt^2};\ \ldots\ \frac{d^{n-1}v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL allora anche $v(t)$ ammette TdL e:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

Applicando $n+m$ volte la regole della derivata:

$$\begin{aligned}
&a_n\left[S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}(S^{n-1-k})\right] + \\
&+ a_{n-1}\left[S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}(S^{n-2-k})\right] + \\
&+ \cdots + a_0 V(s) \\
&= b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \cdots + b_0 U(s)
\end{aligned}$$

Imponiamo le C.I.: $u(t)\Big|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\underbrace{\left[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0\right] V(s)}_{d(s)} +$$

$$\underbrace{- a_n v(0^-) S^{n-1}\left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt}\bigg|_{t=0^-}\right) S^{n-2} - \ \ldots \ - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}\right)}_{p(s)}$$

$$= \underbrace{(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0)}_{n(s)} U(s)$$

$$\implies d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinonio di grado m che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonio caratteristico di u(t)
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate di uscita. Polinimonio caratteristico di v(t)
- $p(s)$:

  $$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{j+1} \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\bigg|_{t=0^-}\right)$$

  Polinomio di grado $n-1$ che dipende solo dalle C.I di v(t)

- $\frac{P(s)}{d(S)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I ì del sistema e dai coefficenti del polinomio caratteristico di $v(t)$

$$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}U(s)$ è una funzione razionale che dipende dai coefficenti del polinomio caratteristico di $u(t)$, dei coefficenti del polinomio caratteristico di v(t) moltiplicati per tali u(t):

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

Esempio

Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3v(t)}{dt^3}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right]$$

$$\downarrow$$

$$S^3V(s) - S^2v(0^-) - S\frac{dv(0^-)}{dt} - \cancel{S^0}\frac{d^2v(0^-)}{dt^2} +$$

$$+S^2V(s) - Sv(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} = SU(s)$$

$$\underbrace{(S^3+S^2)}_{d(s)}V(s) - \underbrace{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt}\right]}_{p(s)} = \underbrace{S}_{n(s)}U(s)$$

$$V(s) = \frac{S}{(S^3+S^2)}U(s) + \frac{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt}\right]}{S^3+S^2}$$

1.3.1 Funzione di trasferimento

$\frac{n(s)}{d(s)}$ funzione di trasferimento $H(s)$:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}$$
$$= \frac{b_m(S-\beta)^{\zeta_1}(S-\beta_2)^{\zeta_2} \dots (S-\beta_q)^{\zeta_q}}{a_n(S-\alpha)^{\mu_1}(S-\alpha_2)^{\mu_2} \dots (S-\alpha_n)^{\mu_r}}$$

Rapporto tra i polinomi car. di u(t) e v(t)

H(s) è definita come TdL delle risposte impulsive $h(t)$. È una funzione razionale con grado del numeratore generalemnte minore o uguale del denominatore.

$$h(t) = d_0\delta_0(t) + ... \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right) \delta_{-1}(t)$$

$$\overset{\mathcal{L}}{=} d_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} \frac{d_{i,l}}{(s-\lambda)^{l+1}} = H(s)$$

Definition 1.13. Definiamo come zero di una funzione razionale $H(s)$ un qualiasi numero $\beta \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\beta) = 0$.

Definition 1.14. Definiamo come polo di una funzione razionale $H(s)$ un qualunque numero $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\alpha) = \infty$.

Dato H(s) in forma ridotta (ho eliminato le radici in comune): Siano λ_1, ... λ_r con $r \leq n$ i suoi poli dopo la semplificazione se $Re(\lambda_i) < 0$ per $i = 1$, ... r allora il sistema è BIBO stabile.

Lemma 1.15. *Un sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli giaciono nel semipiano complesso negativo.*

Per stabilizzare un sistema (BIBO stabilizzato) devo togliere gli zeri λ_i con $Re(\lambda_i) > 0$, dividendoli per il loro corrispettivo polo.

Esempio 1

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Pol. Car degli ingressi}}{\text{Pol. Car delle uscite}} = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3}$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} = \frac{(s-4)(s-1)}{s-3}$$

Poiché $\lambda_1 = 3$ non è asintonticamente stabile poiché la sua parte reale è maggiore di 0.
Non è neanche BIBO stabile perché tutte le radici del denominatore (poli di $H(s)$) hanno parte reale maggiore di 0.

Esempio 2

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

Poiché $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ sono minori di 0 allora il sistema è asintonticamente stabile. Ricordiamo che se un sistema è asintonticamente stabile allora è anche BIBO stabile.

Esempio 3

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u(t) - 4u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} = \frac{(s+4)\cancel{(s-1)}}{\underbrace{(s+3)}_{\lambda_1=-3}\underbrace{(s+2)}_{\lambda_2=-2}\cancel{(s-1)}}$$

Non è asintonticamente stabile. Tuttavia è BIBO stabile poiché tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale minore di 0.

2 Antitrasformata di Laplace

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \Longrightarrow \begin{cases} \underbrace{deg[n(s)] \geq deg[d(s)]}_{\text{Sistema proprio}} \Longrightarrow A \\ \underbrace{deg[n(s)] < deg[d(s)]}_{\text{Sistema strett. proprio}} \Longrightarrow B \end{cases}$$

A $\rightarrow$ Divisione polinomiale $\rightarrow$ Fratti semplici $\rightarrow$ Antitrasformata
B $\rightarrow$ Fratti complessi $\rightarrow$ Antitrasformata

2.1 Divisione polinomiale

$$V(S) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{dove} \quad deg[r(s)] < deg[d(s)], k \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[K\delta(t)] = K \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} K\delta_0(t)$$

Esempio

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \quad \text{dove} \quad m = 2, n = 2$$

Quotient	2
Divisor	$s^2 - s - 1$
Step 1:	$2s^2 + 4s - 3$
Subtract:	$-(2s^2 - 2s - 2)$
Remainder:	$6s - 1$

$$V(s) = \frac{6s - 1}{s^2 - s + 1} + 2$$

2.2 Fratti semplici

$$\frac{r(s)}{d(s)} = d_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda)^{l+1}}$$

Esempio 1

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s+1)^2(s-2)(s+5)}$$

$$V(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

A, B, C, D sono i $c_{i,l}$

Esempio 2

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{c_{1,0}}{(s+4)} + \frac{c_{2,0}}{s-2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}$$

1. Metodo:

$$\frac{A(s-2)+B(s+4)}{(s+4)(s-2)} = \frac{AS-2A+BS+4b}{(s+4)(s+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A+4B=-20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=4 \\ B=-3 \end{cases}$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

2. Metodo:

$$c_{i,l} = \lim_{s\to\alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1}\left((s-\alpha_i)^{\mu_i}\frac{r(s)}{d(s)}\right)}{ds^{\mu_i-l-1}}$$

$$c_1 = A = \lim_{s\to-4} \frac{\cancel{d^{1-0-1}}\left((s+4)^1\frac{s-20}{(s+4)(s-2)}\right)}{ds^0} = 4$$

$$c_2 = B = \lim_{s\to2} \frac{d^{1-0-1}\left((s-2)^1\frac{s-20}{(s+4)(s-2)}\right)}{\cancel{ds^0}} = 3$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$