Esercizi di Algoritmi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Roberto Segala

October 30, 2024

Contents

1 Esercizi sul libro

1.1 Esercizi sulla ricorrenza

1.1.1 Esercizio 1

Utilizzando il metodo di sostituzione, dimostarte che la seguente ricorrenza:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n < n_0 \\ L(n/3) + L(2n/3) & \text{se } n \geq n_0 \end{cases}$$

Dimostrare che $L(n) \in \Omega(n)$ e deducetene che $L(n) = \Theta(n)$. Sostituiamo:

$$L(n) = cn$$

Per verificare che $\Omega(n)$ sia il limite inferiore.

$$L(n) = L\left(\frac{n}{3}\right) + L\left(\frac{2n}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{?}{\geq} c\frac{n}{3} + c\frac{2n}{3} \\ &= c\left(\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}\right) \\ &= c\left(\frac{\cancel{3}n}{\cancel{3}}\right) \\ &= cn \end{aligned}$$

Siccome $cn \geq cn$ absbiamo verificato quindi che il limite asintotico inferiore è $\Omega(n)$. Inoltre, sappiamo che $cn = cn$ quindi abbiamo verificato che $L(n) \in \Theta(n)$.

1.2 Esercizio 2

Utilizzando il metodo di sostituzione, dimostarte che la seguente ricorrenza:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(n)$$

ha soluzione $T(n) = \Omega(n \log n)$ e deducetene che $T(n) = \Theta(n \log n)$.

$$L(n) = L\left(\frac{n}{3}\right) + L\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(n)$$

$$\begin{aligned}
&\overset{?}{=\geq} c\frac{n}{3}\log\frac{n}{3} + c\frac{2n}{3}\log\frac{2n}{3} + cn \\
&= c\left(\frac{n}{3}\log\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}\log\frac{2n}{3} + n\right) \\
&= c\left(\frac{n}{3}\left(\log\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}\log\frac{2n}{3} + 3\right)\right) \\
&= c\frac{n}{3}\left(\log\frac{n}{3} + 2\log\frac{2n}{3} + 3\right) \\
&= c\frac{n}{3}\left(\log\frac{n}{3} + 2\log\frac{n}{3} + 2\log 2 + 3\right) \\
&= c\frac{n}{3}\left(3\log\frac{n}{3} + 2\log 2 + 3n\right) \\
&= c\frac{n}{3}\overbrace{(3 + 2\log 2)}^{c} + cn\log\frac{n}{3} \\
&= c\frac{n}{3} + cn\log\frac{n}{3} \\
&= c\frac{n}{3} + cn\log n \\
&= \frac{\cancel{cn} + \cancel{cn}\log n}{\cancel{cn}} \geq \frac{\cancel{cn}\log n}{\cancel{cn}} \\
&= \log n + 1 \geq \log n
\end{aligned}$$