



# Sistemi

Università di Verona  
Imbriani Paolo -VR500437  
Professor Francesco Visentin

January 20, 2025

# Contents

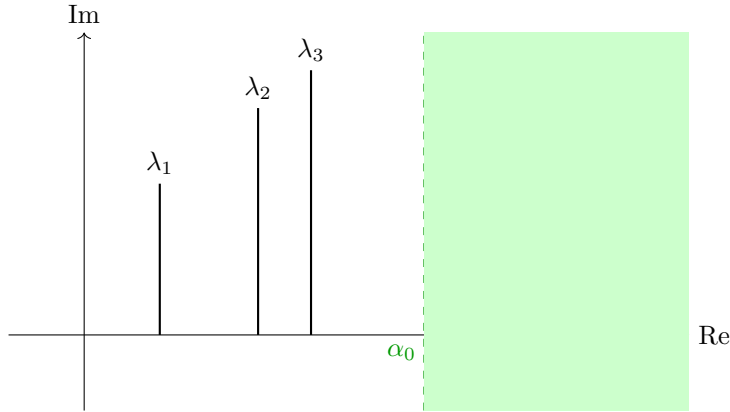
<b>1</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	<b>3</b>
1.1	Proprietà . . . . .	3
1.2	Trasformate di funzioni notevoli . . . . .	6
1.3	Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali . . . . .	10
1.3.1	Funzione di trasferimento . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Antitrasformata di Laplace</b>	<b>14</b>
2.1	Divisione polinomiale . . . . .	14
2.2	Fratti semplici . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Sistema a blocchi</b>	<b>18</b>
3.1	Controllori . . . . .	19
3.2	Forma canonica - nomenclatura . . . . .	19
3.3	Regole di trasfromazione . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Diagrammi di flusso</b>	<b>20</b>
4.1	Convertire un Sistema a blocchi in un diagramma di flusso . . . . .	21
4.2	Funzione di Mason . . . . .	21
<b>5</b>	<b>Diagrammi di Bode</b>	<b>22</b>
5.1	Motivo delle sinusoidi . . . . .	23
5.2	Rappresentazione del diagramma di Bode . . . . .	24
5.3	Risposta in frequenza . . . . .	25
5.4	Operazioni tra numeri complessi . . . . .	26
5.5	Forma di Bode . . . . .	26
5.5.1	Quattro possibili diagrammi di Bode . . . . .	29
5.6	Diagrammi di Bode Totale . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>36</b>
6.1	Winding Frequency e la quasi-trasformata di Fourier . . . . .	37
6.2	Segnali periodici e aperiodici . . . . .	38
6.3	Serie di Fourier . . . . .	38
6.3.1	Segnali simmetrici e asimmetrici . . . . .	39
6.3.2	Serie di Fourier troncata . . . . .	42
6.4	Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier . . . . .	43
6.4.1	Sviluppo dei coefficienti di Fourier . . . . .	46
6.4.2	Trasformata di Fourier di un segnale periodico . . . . .	47
6.4.3	Come usare la trasformata di Fourier . . . . .	48
6.5	Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier . . . . .	50
6.6	Trasformate notevoli . . . . .	51
6.7	Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	55
6.8	Campionamento e replicazione . . . . .	59
6.8.1	Treno campionatore/impulsi . . . . .	60
6.8.2	Campionamento . . . . .	60
6.8.3	Replicazione . . . . .	61
6.8.4	Teorema del campionamento ideale di Shannon . . . . .	61

# 1 Trasformata di Laplace

**Definition 1.1.**  $v(t)$  è definito nel tempo.  $V(s)$  è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st} dt$$

Figure 1:  $\alpha \geq \max\{\lambda_i\}$



## 1.1 Proprietà

La trasformata di Laplace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

**Property 1.2. Linearità:**

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) = a_1 V_1(s) + a_2 V_2(s)$$

**Property 1.3. Traslazione nel dom. del tempo:**

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = \overbrace{e^{-s\tau}}^{\tau > 0} V(s)$$

**Property 1.4. Traslazione nel dom. dei complessi:**

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = V(s - \lambda)$$

**Property 1.5. Cambio di scala:**

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$$

**Property 1.6. Proprietà delle derivate:** Se  $v(t)$  ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito  $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t)$  allora anche la sua derivata  $i$ -esima ammette TdL.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = S^i V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{i-1-k})$$

**Proof.** Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\
 &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\
 &= sV(s) - v(0^-)
 \end{aligned}$$

**Proof.** Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\
 &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= \int_0^{+\infty} [S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)]e^{-st}dt - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}
 \end{aligned}$$

**Property 1.7. Moltiplicazione per funzioni polinomiali:** Se  $v(t)$  ammette  $TdL$  e  $t$  è un polinomio allora anche  $tV(s)$  ammette  $TdL$ .

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

**Proof.** Per  $i = 1$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[tv(t)](s) &= \int_0^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt = - \int_0^{+\infty} v(t) \cdot (te^{-st})dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} v(t) \frac{d}{ds} te^{-st}dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \overbrace{\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt}^{TdL} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

**Property 1.8. Integrazione nel dom. del tempo:** Se  $v(t)$  ammette  $TdL$ , allora  $\Psi(t) = \int_0^t v(t)dt$  ammette  $TdL$

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza:  $\alpha = \max\{0, \alpha_0\}$

**Proof.**

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \implies \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) = S\mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

**Property 1.9. Integrazione nel dom. dei complessi:** Se  $v(t)$  ammette TdL e esiste  $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$  allora:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

**Proof.**

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty} \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dtd\zeta \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t) \underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t} e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

**Theorem 1.10. Teorema del valore iniziale:** Se  $v(t)$  ammette TdL ed esiste finito  $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$  allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

**Theorem 1.11. Teorema del valore finale:** Se  $v(t)$  ammette TdL ed esiste finito  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

**Property 1.12. Convoluzione nel dom. del tempo:** Siano  $u(t)$  e  $v(t)$  due funzioni causali (nulla per  $t < 0$ ) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione  $(u * v)(t)$  ammette TdL.

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

**Proof.**

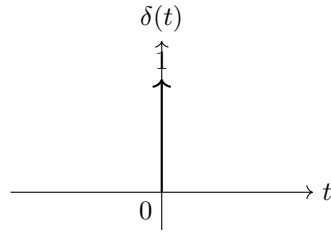
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u * v)(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left( \int_0^t u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau) v(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left( \int_{0-}^{\infty} v(t - \tau) e^{-st} dt \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Sostituiamo  $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left( \int_{0-}^{\infty} v(x) e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_0^{+\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x) e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

## 1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:  
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse  $\delta(t)$

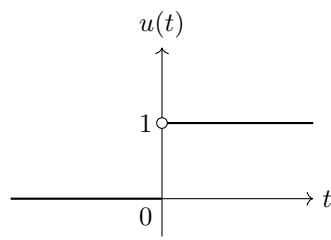
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A \overbrace{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}^1 = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

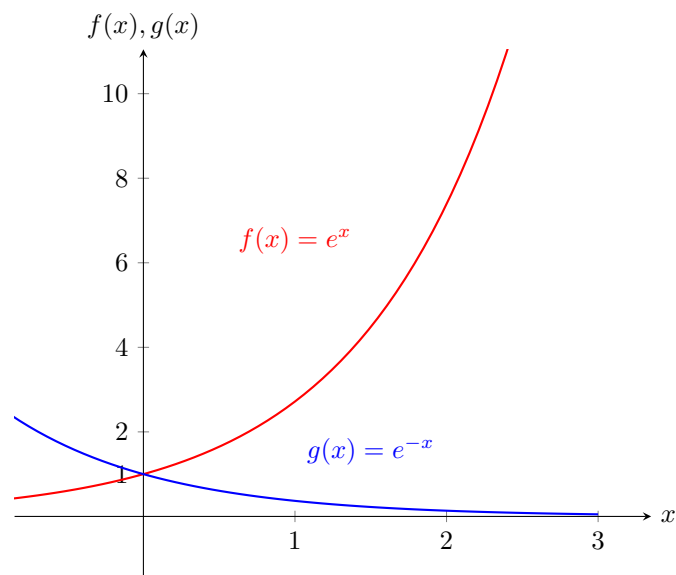


Unit Step  $u(t)$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\
 &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\
 &= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\
 &= e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\
 &= \frac{e^{-s\tau}}{s}
 \end{aligned}$$

**Esponenziale complesso causale:**  $v(t) = e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$



$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) \\ &= \frac{1}{s - \lambda}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s - \lambda}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t - \tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

**Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:**

$$v(t) = \frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!} \mathcal{L}[t^l e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &\stackrel{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{dS^l} \mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{dS^l} \frac{1}{s - \lambda} \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{l!(-1)^l}{(s - \lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}}\end{aligned}$$

#### Esempio 1

Con  $l = 1$

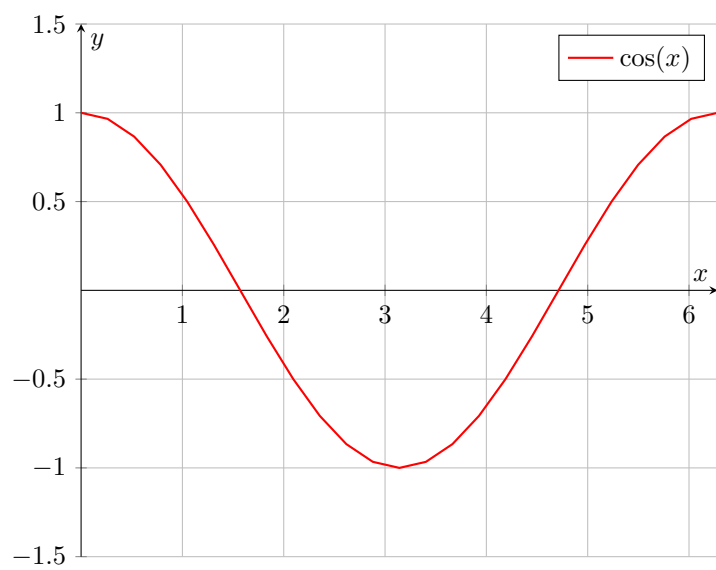
$$\mathcal{L}[te^{e^{\lambda t}}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

Con  $l = 2$

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

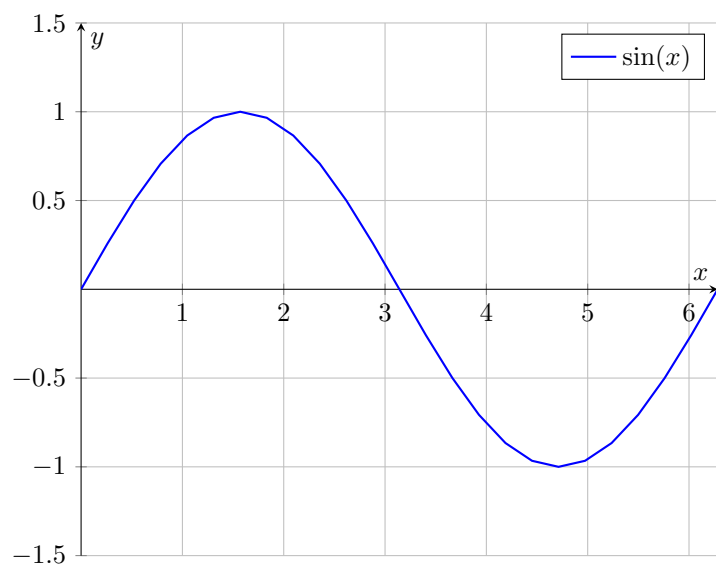
**Funzione coseno:**





$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\cos(wt)](s) &\stackrel{\text{Eulero}}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
 &= \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s - jw} + \frac{1}{s + jw} \right] \\
 &= \frac{s}{s^2 + w^2}
 \end{aligned}$$

**Funzione seno:**



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(wt)](s) &\stackrel{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
&= \frac{1}{2j} \left[ \frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s + jw} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[ \frac{s + jw - s + jw}{s^2 + w^2} \right] \\
&= \frac{w}{s^2 + w^2}
\end{aligned}$$

### 1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t) (u(t) = 0, t < 0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-), \frac{dv(0)}{dt}; \frac{d^2 v(0)}{dt^2}; \dots \frac{d^{n-1} v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se  $u(t)$  ammette TdL allora anche  $v(t)$  ammette TdL e:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) &= \mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s) \\
\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) &= \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)
\end{aligned}$$

Applicando  $n + m$  volte la regole della derivata:

$$\begin{aligned}
&a_n \left[ S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-1-k}) \right] + \\
&+ a_{n-1} \left[ S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-2-k}) \right] + \\
&+ \dots + a_0 V(s) \\
&= b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s)
\end{aligned}$$

Imponiamo le C.I.:  $u(t) \Big|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0] V(s)}_{d(s)} + \\ & - \underbrace{a_n v(0^-) S^{n-1} \left( a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) S^{n-2} - \dots - \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right)}_{p(s)} \\ & = \underbrace{(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_0) U(s)}_{n(s)} \end{aligned}$$

$$\implies d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$  è un polinomio di grado  $m$  che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonia caratteristico di  $u(t)$
- $d(s)$  è un polinomio di grado  $n$  che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate di uscita. Polinimonia caratteristico di  $v(t)$
- $p(s)$  :

$$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left( \sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

Polinomio di grado  $n-1$  che dipende solo dalle C.I di  $v(t)$

- $\frac{P(s)}{d(s)}$  è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I. del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico di  $v(t)$

$$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)} U(s)$  è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico di  $u(t)$ , dei coefficienti del polinomio caratteristico di  $v(t)$  moltiplicati per tali  $u(t)$ :

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)} U(s)$$

### Esempio

Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3 v(t)}{dt^3} + \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

↓

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L} \left[ \frac{d^3 v(t)}{dt^3} \right] + \mathcal{L} \left[ \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right] = \mathcal{L} \left[ \frac{du(t)}{dt} \right] \\
& \downarrow \\
& S^3 V(s) - S^2 v(0^-) - S \frac{dv(0^-)}{dt} - \cancel{S^2} \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} + \\
& + S^2 V(s) - S v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} = \cancel{S^2} U(s) \\
& \underbrace{(S^3 + S^2)}_{d(s)} V(s) - \underbrace{\left[ s^2 v(0) + \frac{dv(0)}{dt} S + \frac{d^2 v(0)}{dt^2} + v(0) S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}_{p(s)} = \underbrace{S}_{n(s)} U(s) \\
& V(s) = \frac{S}{(S^3 + S^2)} U(s) + \frac{\left[ s^2 v(0) + \frac{dv(0)}{dt} S + \frac{d^2 v(0)}{dt^2} + v(0) S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}{S^3 + S^2}
\end{aligned}$$

$H(s)$  è definita come TdL delle risposte impulsive  $h(t)$ . È una funzione razionale con grado del numeratore generalmente minore o uguale del denominatore.

$$\begin{aligned}
h(t) &= d_0 \delta_0(t) + \dots \left( \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right) \delta_{-1}(t) \\
&\stackrel{\mathcal{L}}{=} d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}} = H(s)
\end{aligned}$$

### 1.3.1 Funzione di trasferimento

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \\
&= \frac{b_m (S - \beta)^{\zeta_1} (S - \beta_2)^{\zeta_2} \dots (S - \beta_q)^{\zeta_q}}{a_n (S - \alpha)^{\mu_1} (S - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (S - \alpha_n)^{\mu_r}}
\end{aligned}$$

Rapporto tra i polinomi car. di  $u(t)$  e  $v(t)$

Dove  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  sono rispettivamente radici del denominatore e del numeratore.

Possiamo anche riscriverla come:

$$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (S - Z_i)}{\prod_{i=1}^n (S - P_i)} \quad \text{dove} \quad k = \frac{b_m}{a_n}$$

Dove  $(S - Z_i)$  e  $(S - P_i)$  sono rispettivamente zeri e poli della funzione razionale.

**Definition 1.13.** Definiamo come zero di una funzione razionale  $H(s)$  un qualsiasi numero  $\beta \in \mathbb{C}$  t.c.  $H(\beta) = 0$ .

**Definition 1.14.** Definiamo come polo di una funzione razionale  $H(s)$  un qualunque numero  $\alpha \in \mathbb{C}$  t.c.  $H(\alpha) = \infty$ .

Dato  $H(s)$  in forma ridotta (ho eliminato le radici in comune): Siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  con  $r \leq n$  i suoi poli dopo la semplificazione se  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  per  $i = 1, \dots, r$  allora il sistema è BIBO stabile.

**Lemma 1.15.** *Un sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli giacciono nel semipiano complesso negativo.*

Per stabilizzare un sistema (BIBO stabilizzato) devo togliere gli zeri  $\lambda_i$  con  $Re(\lambda_i) > 0$ , dividendoli per il loro corrispettivo polo.

### Esempio 1

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Pol. Car degli ingressi}}{\text{Pol. Car delle uscite}} = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3}$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} = \frac{(s - 4)(s - 1)}{s - 3}$$

Poiché  $\lambda_1 = 3$  non è asintoticamente stabile poiché la sua parte reale è maggiore di 0.

Non è neanche BIBO stabile perché tutte le radici del denominatore (poli di  $H(s)$ ) hanno parte reale maggiore di 0.

### Esempio 2

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{(s - 3)(s - 1)}{(s + 1)(s + 2)}$$

Poiché  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$  sono minori di 0 allora il sistema è asintoticamente stabile. Ricordiamo che se un sistema è asintoticamente stabile allora è anche BIBO stabile.

### Esempio 3

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u(t) - 4u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} = \frac{(s + 4)\cancel{(s - 1)}}{\underbrace{(s + 3)}_{\lambda_1 = -3} \underbrace{(s + 2)}_{\lambda_2 = -2} \cancel{(s - 1)}}$$

Non è asintoticamente stabile. Tuttavia è BIBO stabile poiché tutti i poli di  $H(s)$  hanno parte reale minore di 0.

## 2 Antitrasformata di Laplace

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \implies \begin{cases} \underbrace{\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]}_{\text{Sistema proprio}} \implies A \\ \underbrace{\deg[n(s)] < \deg[d(s)]}_{\text{Sistema strett. proprio}} \implies B \end{cases}$$

A → Divisione polinomiale → Fratti semplici → Antitrasformata  
 B → Fratti complessi → Antitrasformata

### 2.1 Divisione polinomiale

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{dove} \quad \deg[r(s)] < \deg[d(s)], k \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[K\delta(t)] = K \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K\delta_0(t)$$

#### Esempio

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \quad \text{dove} \quad m = 2, n = 2$$

Quotient	2
Divisor	$s^2 - s - 1$
Step 1:	$2s^2 + 4s - 3$
Subtract:	$-(2s^2 - 2s - 2)$
Remainder:	$6s - 1$

$$V(s) = \frac{6s - 1}{s^2 - s + 1} + 2$$

### 2.2 Fratti semplici

$$\frac{r(s)}{d(s)} = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda)^{l+1}}$$

#### Esempio 1

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s+1)^2(s-2)(s+5)}$$

$$V(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

$A, B, C, D$  sono i  $c_{i,l}$

#### Esempio 2

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{c_{1,0}}{(s+4)} + \frac{c_{2,0}}{s-2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}$$

1. Metodo:

$$\frac{A(s-2) + B(s+4)}{(s+4)(s-2)} = \frac{AS - 2A + BS + 4b}{(s+4)(s+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + 4B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

$$\frac{S - 20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

2. Metodo:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1} \left( (s - \alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i-l-1}}$$

$$c_1 = A = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{d^{1-0-1} \left( (s+4)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^0} = \frac{-24}{-6} = 4$$

$$c_2 = B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1} \left( (s-2)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^0} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\frac{S - 20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

Ora si applica l'antitrasformata:

$$\begin{aligned} V(s) &= k + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}} \\ &\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{=} \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \sum_{i=0}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{c_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}} \right] (t) \\ &= k\delta_0(t) + \left[ \sum_{i=0}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \right] \end{aligned}$$

### Esempio completo

$$v''(t) - v'(t) - 2v(t) = u''(t) + 2u'(t) + u(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{3t} \delta_{-1}(t)$$

Quello che ci viene chiesto è

1. Stabilità
2. Risposta libera (nel tempo e in frequenza)
3. Risposta impulsiva

4. Risposta forzata

5. Risposta totale

Partiamo con il primo punto:

1. Polinomio caratteristico:  $s^2 - s - 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$  e  $\mu_i = 1$   
**Non è asintoticamente stabile** perché  $\lambda_1 > 0$

$$V(s) = \underbrace{\frac{p(s)}{d(s)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{\overbrace{h(s)}^{H(s)}}{d(s)}}_{V_f(s)} \cdot U(s)$$

Per garantire stabilità BIBO i poli di  $H(s)$  devono avere parte reale minore di 0.

Calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)} = \frac{s+1}{s-2}$$

**Non è BIBO stabile** perché  $\lambda_1$  (che è un polo della funzione di trasferimento) è maggiore di 0.

2a. Risposta libera nel tempo:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t}$$

$$= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t}$$

$$\begin{cases} v_l(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ v'_l(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \end{cases} \xrightarrow{t=0} \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$v_l(t) = e^{-t}$$

2b . Risposta libera in frequenza: Facciamo la trasformata di Laplace del sistema:

$$\mathcal{L}[v''(t) - v'(t) - 2v(t)] = \mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)]$$

$$\underbrace{\mathcal{L}[v''(t)]}_{(s^2 V(s) - s + 1)} - \underbrace{\mathcal{L}[v'(t)]}_{(sV(s) + 1)} - \underbrace{\mathcal{L}[v(t)]}_{2V(s)} = \underbrace{\mathcal{L}[u''(t)]}_{(s^2 U(s))} + \underbrace{\mathcal{L}[u'(t)]}_{2sU(s)} + \underbrace{\mathcal{L}[u(t)]}_{U(s)}$$

$$\underbrace{(s^2 - s - 2)}_{\text{pol. car. uscite}} V(s) - s + 2 = \underbrace{(s^2 + 2s + 1)}_{\text{pol. car entrate}} U(s)$$

$$V(s) = \frac{s-2}{(s-2)(s+1)} + \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)} U(s)$$



Vediamo ora cosa è  $U(s)$ :

$$u(t) = \underbrace{e^{-3t}\delta_{-1}(t)}_{\lambda=-3, A=1} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{v_l(s)} + \underbrace{\frac{s+1}{s-2}}_{H(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+3}}_{V_f(s)}$$

Quindi la risposta libera in Laplace è:

$$v_l(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\lambda=1, A=1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

L'unica differenza che ci sta tra risposta libera e in frequenza e che quella in frequenza, quando la andiamo a trovare dobbiamo moltiplicarla per la funzione causale, ovvero il gradino.

3. Risposta impulsiva:

$$H(s) = \frac{s+1}{s-2}$$

Facciamo la divisione tra polinomi dove otteniamo:

$$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2}$$

Applichiamo l'antitrasformata:  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \delta_0(t) + 3e^{2t}\delta_{-1}(t)$

4. Risposta forzata: Proviamo entrambi i metodi, partiamo con il primo (i fratti semplici):

$$\begin{aligned} V_f(s) &= \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3} \\ \frac{As+3A+Bs-2B}{(s-2)(s+3)} &= \frac{(A+B)s+(3A-2B)}{(s-2)(s+3)} \\ \begin{cases} A+B=1 \\ 3A-2B=1 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} A=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \\ B=\frac{2}{5} \end{cases} \\ \frac{3}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{5}\frac{1}{s+3} &= \left(\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Okay ora proviamo con il metodo dei limiti:

$$\begin{aligned} c_i &= \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{\mu-l-1}n(s)}{ds^{s-l-1}d(s)}(s-\lambda)^\mu \\ A &= \lim_{s \rightarrow +2} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{\cancel{(s-2)}(s+3)} \cancel{(s-2)} = \frac{3}{5} \\ B &= \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{(s-2)\cancel{(s+3)}} \cancel{(s+3)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

E come si vede, si ottiene il risultato medesimo con diverso metodo.

### 3 Sistema a blocchi

In generale ci sono tre modi per mettere a sistema un sistema a blocchi:

- **Sistema in serie** (o cascata) dove l'output di un sistema A diventa l'input di un sistema B

$$x_2 = y_1$$

- **Sistema parallelo** dove un input  $x$  viene separato in  $x_1$  e  $x_2$ , entrano all'interno rispettivamente dei sistemi A e B e poi vengono sommati in una singola uscita  $y$ .

$$x = x_1 = x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

- **Sistema di retroazione** dove l'uscita di un sistema A diventa l'input di un sistema B e viceversa.

$$x = x_1 + y_2$$

$$y = y_1 = x_2$$

I blocchi avranno sempre un singolo input e un singolo output (poiché sistemi SISO (Single Input Single Output)), per quanto riguarda i nodi sommatori, possono entrare infiniti numeri di archi e generalmente ne esce solo una.

Esistono 2 tipi di controlli:

1. *Il controllo ad anello aperto* è un sistema in cui l'uscita non influenza l'input. È un sistema a ciclo aperto, ovvero non c'è feedback.
2. *Il controllo ad anello chiuso* è un sistema in cui l'uscita influenza l'input. È un sistema a ciclo chiuso, ovvero c'è feedback. Dove il sistema che ritorna il feedback del sistema A si chiama funzione di trasferimento del sistema.

I sistemi che ci interessano di più sono quelli a ciclo chiuso, in quanto sono quelli che si avvicinano di più alla realtà.

Guardando la nomenclatura dei sistemi a blocchi, si ha che:

- Sistema di riferimento  $r$  è l'input del sistema
- Elemento di feedforward  $F$  è un blocco che manda un segnale di controllo al processo
- Processo  $P$  è il sistema che trasforma l'input in un output (che però può essere disturbato)
- Elemento di feedback  $B$  è un blocco che manda un segnale di feedback  $b$  al processo per correggere l'errore
- Segnale di attuazione che è in genere una sorta di errore  $e = r - b$  (in genere viene chiamato feedback negativo quando  $e = r - b$  mentre è feedback positivo quando  $e = r + b$ )

### 3.1 Controllori

I controllori sono di tre tipi con relative regole di controllo:

- P è il controllore proporzionale e la sua regola di controllo è  $u(t) = K_p e(t)$
- I è il controllore integrale e la sua regola di controllo è  $u(t) = K_i \int e(\tau) d\tau$
- D è il controllore derivativo e la sua regola di controllo è  $u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$

Possiamo anche combinarli insieme, esistono tipi "compositi" di controllori come PID, PI, PD, I, P, D.

$$\mu_{pid} = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t) dt$$

Quando abbiamo un sistema a blocchi complesso e ridurlo a un sistema a blocchi più semplice, applicando diverse regole di riduzione:

### 3.2 Forma canonica - nomenclatura

La **Forma canonica** è una forma standard di rappresentazione di un sistema a blocchi.

1.  $G$ : Funzione di trasferimento diretta
2.  $H$ : Funzione di trasferimento di feedback
3.  $GH$ : Funzione di trasferimento del loop (o anello)
4.  $\frac{C}{R}$  = Funzione di trasferimento dell'anello chiuso

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} = \frac{\text{eq. car. dell'ingresso}}{\text{eq. car. dell'uscita}}$$

5.  $\frac{E}{R}$ : rapporto del segnale di attuazione =  $\frac{1}{1 \pm GH}$
6.  $\frac{B}{R}$ : rapporto di feedback =  $\frac{GH}{1 \pm GH}$

L'obiettivo è di compattare il sistema fino ad arrivare ad un sistema a blocchi uguale alla forma canonica. Prendiamo per esempio il sistema massa molla smorzatore:

$$\begin{aligned} ma &= \sum F \\ mx'' &= F_{ext} - kx - bx' \\ F_{ext} &= kx + bx' + mx'' \\ F_{ext}(s) &= kX(s) + bsX(s) + ms^2X(s) \\ X(s) &= \frac{F_{ext}(s)}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

### 3.3 Regole di trasfromazione

1. **Combinazione di blocchi in serie:** dati due blocchi  $A$  e  $B$  in serie, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di  $AB$ .
2. **Combinazione di blocchi in parallelo:** dati due blocchi  $A$  e  $B$  in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è (in base al sommatore)  $A \pm B$ .
3. **Rimozione di blocchi in parallelo:** dati due blocchi  $A$  e  $B$  in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di  $AB$  diviso la somma di  $AB$ .
4. **Rimozione di anello feedback:** dati due blocchi  $A$  e  $B$  in feedback, riducendolo otteniamo un singolo blocco che diventa  $\frac{A}{1 \pm AB}$
5. **Rimozione del loop:** dati due blocchi  $A$  e  $B$  in loop, possiamo spostare il blocco retroattivo all'inizio del blocco iniziale
6. **Riorganizzazione degli input:** posso organizzare gli input del sistema a blocchi come voglio, l'importante è che alla fine si arrivi ad un sistema a blocchi canonico.
7. **Spostamento dei nodi di somma prima di un blocco:** posso spostare i nodi di somma prima di un blocco
8. **Spostamento dei nodi di somma dopo un blocco:** posso spostare i nodi di somma dopo un blocco
9. **Spostamento dei nodi prima di un blocco:** posso spostare i nodi prima di un blocco
10. **Spostamento dei nodi dopo un blocco:** posso spostare i nodi dopo un blocco

## 4 Diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono una rappresentazione grafica di un sistema a blocchi. Guardiamo ora le diverse componenti di un diagramma di flusso:

- **Percorso in avanti:** Un cammino che unisce un nodo di input ad un nodo di output
- **Percorso ad anello:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e senza passare più volte in altri nodi intermedi
- **→ Self loop:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e non tocca altri nodi intermedi
- **Guadagno:** prodotto di tutti i pesi degli archi lungo un percorso

## 4.1 Convertire un Sistema a blocchi in un diagramma di flusso

Per convertire un sistema a blocchi in un diagramma flussi (così che sia più facile da gestire) dobbiamo convertire gli archi e i nodi nel seguente modo:

1. Individuiamo i nodi di input e output
2. Per ogni nodo somma si aggiunge un nodo
3. Per ogni nodo dello schema a blocchi si aggiunge un nodo al diagramma di flusso
4. Unisco i nodi con gli archi il cui peso è la funzione dentro al blocco. Se tra un nodo e l'altro non ci sono blocchi, il suo peso vale 1.

## 4.2 Funzione di Mason

**Definition 4.1.** La funzione di Mason è una funzione che permette di calcolare la funzione di trasferimento di un sistema a blocchi.

$$T = \sum_i \frac{P_i \Delta_i}{\Delta}$$

dove

- $P_i$  è il guadagno del percorso  $i$
- $\Delta_i$  è il determinante del percorso  $i$
- $\Delta$  è il determinante del sistema

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk} \\ &= 1 - \left( \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} + \dots \right) \\ &= 1 - \left( \begin{array}{c} \text{Somma dei guadagni di tutti gli} \\ \text{alberi} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Somma dei guadagni} \\ \text{dei prodotti degli anelli} \\ \text{che non toccano a due} \end{array} \right) \\ &\quad + \left( \begin{array}{c} \text{somma dei guadagni dei prodotti} \\ \text{degli anelli che non si toccano 3} \\ \text{a 3} \end{array} \right) + \dots\end{aligned}$$

### Esempio 1

Prendiamo come esempio il diagramma di flusso visto a lezione (guarda gli appunti) e calcoliamo la funzione di Mason. Troviamo i guadagni per ogni percorso:

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

$$P_{1,1} = (x_2, x_3) = -GH$$

L'ordine in cui vengono chiamati i percorsi è arbitrario. Sono stati scelti

semplicemente nell'ordine in cui li abbiamo notati. I guadagni che hanno 1 non vengono considerati. Calcoliamo ora il determinante del sistema:

$$\Delta = 1 - (P_{1,1}) = 1 + GH$$

Annullo tutti gli archi che toccano il percorso i-esimo:

$$\Delta_1 = 1 - \cancel{P_{1,1}} = 1 - 0 = 1$$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G \cdot 1}{1 + GH} = \frac{G}{1 + GH}$$

### Esempio 2

TODO...

	Anelli	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$
$A_1^1$	-AB			1	1						
$A_2^1$	-CD							1	1	1	
$A_3^1$	FCE	1	1				1	1	1	1	
$A_4^1$	FGE	1	1				1	1	1	1	1
$A_5^1$	ACE	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$A_6^1$	AGE	1	1	1	1	1	1		1	1	1

## 5 Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono un modo per rappresentare graficamente la risposta in frequenza di un sistema.

### Esempio

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{rad}{s} \alpha Hz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v(t) &= 2u(t) + \int u(t) dt \\
&= 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\
&= 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) - 2\cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\
&= \sqrt{2^2 + 2^2} \sin\left(\frac{1}{2}t + a \tan\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\
&= 2.83 \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\
&= A \sin(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Questo diagramma ci aiuta a capire come si comporta un sistema descritto da segnali **sinusoidali**.

## 5.1 Motivo delle sinusoidi

I sistemi descritti da segnali sinusoidali sono utili perchè vedremo che qualsiasi segnale può essere rappresentato come una somma di sinusoidi.

Un sistema LTI causale permette le seguenti operazioni:

- $u(t) \cdot a$
- $\frac{du(t)}{dt}$
- $\int u(t) dt$
- $u_1(t) + u_2(t)$

L'output del sistema è un'onda scalata rispetto all'ampiezza o ritardata rispetto al tempo:

### Esempio

Prendiamo ad esempio il seguente sistema:

$$\begin{aligned}
u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\
\omega &= \frac{1}{2} \frac{rad}{s} = \alpha Hz
\end{aligned}$$

Calcoliamo l'ingresso:

$$\begin{aligned}
v(t) &= 2 \cdot u(t) + \int u(t) dt \\
&= 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\
&= 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) - 2\cos\left(\frac{1}{2}t\right)
\end{aligned}$$

Utilizziamo un'identità trigonometrica, cioè:

$$\begin{aligned} a \sin(x) + b \cos(x) &= \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \rho) \end{aligned}$$

dove:  $\rho = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \quad a \geq 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= \overbrace{\frac{a}{2}}^a \sin\left(\overbrace{\frac{1}{2}t}^x\right) \overbrace{-2}^b \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \operatorname{atan}\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{8} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \operatorname{atan}(-1)\right) \\ &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\ &= A \cdot \sin(\omega + \phi) \end{aligned}$$

## 5.2 Rappresentazione del diagramma di Bode

Il diagramma di bode permette di rappresentare il comportamento di un sistema LTI formato da sinusoidi, di seguito guardiamo un diagramma semi-logaritmico (cioè con un asse lineare e uno logaritmico) che rappresenta l'ampiezza e la fase di un sistema LTI:

**Osservazione:**

Il decibel  $dB$  è un unità di misura inventata nel 1920 per misurare quanto si disperde il segnale acustico su una transmission unit ( $1TU = 10 \log_{10} \Delta_{\text{Potenza}}$ ). Quindi un decibel è il minimo di potenza che un orecchio umano può percepire.

$$\text{Potenza} = \text{Ampiezza}^2$$

$$1\text{bel} = 1TU = 10 \log_{10} A^2 = 20 \log_{10} A$$

$$1\text{dB} = \frac{1}{10}\text{bel}$$

### Esempio

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \quad \omega = \frac{1}{2} \\ v(t) &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \end{aligned}$$

Studiamo il sistema in frequenza:

$$\begin{aligned} V(s) &= \left(2 + \frac{1}{s}\right) U(s) \\ \frac{V(s)}{U(s)} &= 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s + 1}{s} \quad \text{Funzione di trasferimento del sistema} \end{aligned}$$



$s$  è un numero complesso:

$$s = \sigma + j\omega$$

Con la risposta in frequenza la  $s$  diventa solo  $s = j\omega$ , quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{2j\omega + 1}{j\omega} \\ &= \frac{2j\cancel{\omega}}{j\cancel{\omega}} + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} \\ &= 2 - \frac{1}{\omega} \cdot j\end{aligned}$$

La risposta del sistema nel piano dei complessi è: dove:

$$\text{Ampiezza} = l = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$$

$$\text{Fase} = \theta = \text{atan2}(\Im, \Re)$$

$$\text{atan2}(\sigma, j\omega) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \text{se } \sigma > 0, \omega \in \mathbb{R} \\ \text{segno}(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} & \text{se } \sigma = 0, \omega \neq 0 \\ \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi \cdot \text{segno}(\omega) & \text{se } \sigma < 0, \text{ o } \sigma = 0, \omega \geq 0 \end{cases}$$

Il diagramma di Bode sarà:

### 5.3 Risposta in frequenza

$$u(t) = Ae^{\omega_0 t + \phi} \implies Ae^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \implies LTIBIO \implies v(t)$$

$$A \in \mathbb{R}_+, \phi, \omega \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}H(j\omega) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad \text{per ogni } \omega \in \mathbb{R} \\ &:= \mathcal{L}[h(t)] \Big|_{s=j\omega}(s)\end{aligned}$$

Prendiamo come esempio un fasore:

$$u(t) = Ae^{j\phi} e^{j\omega t}$$

$$u(t) \rightarrow [h(t)] \rightarrow v(t)$$

$$\begin{aligned}
v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)Ae^{j\phi}e^{j\omega(t-\tau)}d\tau \\
&= Ae^{j\phi}e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \\
&= Ae^{j\phi}e^{j\omega t}H(j\omega) = Ae^{j\phi}e^{j\omega t}A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \\
&= AA(\omega)e^{j(\phi+\phi(\omega))}e^{j\omega t}
\end{aligned}$$

Dove  $A$  è l'ampiezza di  $u(t)$ ,  $A(\omega)$  è l'ampiezza della risposta in frequenza,  $\phi$  è la fase di  $u(t)$  e  $\phi(\omega)$  è la fase della risposta in frequenza,  $\omega$  è la frequenza iniziale e rimane invariata. *Bode ci serve a capire il comportamento del sistema al variare della frequenza del segnale d'ingresso.* Che sia un fasore o una sinusoide ci dice cosa succede se aumentiamo o diminuiamo la frequenza del nostro segnale d'ingresso.

## 5.4 Operazioni tra numeri complessi

**Property 5.1.** *Siano  $a$  e  $b$  due numeri complessi, allora:*

- $|ab| = |a||b|$
- $\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$
- $|a/b| = |a|/|b|$
- $\arg(a/b) = \arg(a) - \arg(b)$
- $|a^n| = |a|^n$
- $\arg(a^n) = n \arg(a)$

**Property 5.2.** *Sia  $s$  un numero complesso con  $x \in \mathbb{C}t.c.$  :*

$$\log s = x \iff s = e^x$$

*E scrivendo  $S$  in forma esponenziale e  $x$  in forma complessa:*

$$S = \rho e^{j\omega} \quad x = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned}
\log s &= x \\
&= \log \rho + j\phi \\
&= \log |s| + j\arg(s)
\end{aligned}$$

## 5.5 Forma di Bode

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{\sum_j b_j S^j}{\sum_i a_i S^i} U(s) \\
&= K \frac{(s - z_1)^{\mu_1} \dots (s - z_e)^{\mu_e}}{(s - p_1)^{\gamma_1} \dots (s - z_r)^{\gamma_r}}
\end{aligned}$$

Molteplicità delle soluzioni algebriche:

$$l \leq m, \mu_1 + \dots + \mu_e = m$$

$$r \leq n, \gamma_1 + \dots + \gamma_r = n$$

**Theorem 5.3.** *La forma di Bode di un sistema LTI è:*

$$H(s) = K_b \frac{\prod_i (1 + s\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_k \left(1 + 2\zeta'_k \frac{s}{\omega'_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega'_{n,k})^2}\right)^{\mu'_k}}{(S^{r_1}) \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}}$$

$K_b$ : è il termine costante (o guadagno di Bode)

$S^r$ : raggruppa tutti le radici nulle

$(1 + s\tau_i)^{\mu_i}$ : raggruppa la singola radice reale

$\left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}$ : raggruppa la singola radice complessa coniugata

Per arrivare a questa forma dobbiamo raccogliere le "costanti":

#### Esempio

$$H(s) = 4 \frac{s^3 + s^2 - 2s}{s^3 + s^2}$$

1. Poli/Zeri Nulli

$$H(s) = 4 \frac{s(s+2)(s-1)}{s^2(s+1)} = 4 \frac{1}{2} \frac{s^2 + s - 2}{s + 1}$$

2. Poli e zeri reali e cerco di arrivare alla forma di bode:  $(1 + s\tau)^\mu$

$$\begin{aligned}
H(s) &= 4 \frac{1}{s} \frac{s^2 + s - 2}{s + 1} \\
&= 4 \frac{1}{s} \frac{(s+2)(s-1)}{s+1} \\
&= 4 \frac{1 - (1-s)2 \left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s(1+s)} \\
&= \frac{-8}{1} \frac{1}{s} \frac{(1-s) \left(1 - \frac{s}{2}\right)}{1+s} \\
&= -8 \frac{1}{s} \frac{(1-s) \left(1 + \frac{s}{2}\right)}{1+s} \\
&= -8 \frac{1}{s} \frac{(1-s) + \left(1 + \frac{s^2}{2}\right)}{1+s} \\
&= K_b \frac{1}{s^\mu} \frac{(1 + s\tau_1)^{\mu_i} (1 + s\tau_2)^{\mu_2}}{(1 + s\tau_1)^{mu_1}}
\end{aligned}$$

3. Polo o zero complesso coniugato

$$\begin{aligned}
&= (s - (\sigma + j\omega))(s - (\sigma - j\omega)) = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2 \\
&= (s^2 - s\sigma + sj\omega - s\sigma - sj\omega + |z|^2) \\
&= (s^2 - 2s\sigma + |z|^2)^\mu \\
&= |z|^{2\mu} \left(1 - 2\frac{2\sigma}{|z|^2}s + \frac{s^2}{|z|^2}\right)^\mu \\
&= |z|^{2\mu} \left(1 - 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu
\end{aligned}$$

dove  $\zeta = \frac{-\sigma}{|z|} = -\frac{Re(z)}{|z|}$  è il coeff. di smorzamento e  $\omega_n = |z|$  ovvero la pulsazione naturale.

Dobbiamo trasformare  $H(s) \rightarrow H(j\omega)$ : Analisi in frequenza

$$H(j\omega) = K_b \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_k \left(1 + j2\zeta'_k \frac{j\omega}{\omega'_{n,k}} - \frac{(j\omega)^2}{(\omega'_{n,k})^2}\right)^{\mu'_k}}{(S^{r_1}) \prod_i (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + j2\zeta_k \frac{j\omega}{\omega_{n,k}} - \frac{(j\omega)^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}}$$

### Esempio 2

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2 - 2s^2 - 8s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2} = \frac{s(s^2 - 2s - 8)}{s^2(s^2 - 2s + 2)} = \frac{s^2 - 2s - 8}{s(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{(s-4)(s+2)}{s(s^2 - 2s + 2)} \\ &= \frac{-4\left(1 - \frac{s}{4}\right)2\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s(2)\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} = -4 \frac{1}{s} \frac{\left(1 - \frac{s}{4}\right)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} \end{aligned}$$

Ora vediamo ogni singolo  $(1 + s\tau)^\mu$ :

- $\left(1 - \frac{s}{4}\right)$  dove  $\tau_1 = -\frac{1}{4}$
- $\left(1 + \frac{s}{2}\right)$  dove  $\tau_2 = \frac{1}{2}$
- $\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)$  dove  $w_n^2 = 2 \rightarrow w_n = \sqrt{2}$

$$\frac{2\zeta}{w_n} = -1 \Rightarrow \frac{2\zeta}{\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow \zeta = \frac{-1\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

#### 5.5.1 Quattro possibili diagrammi di Bode

1. Termine costante  $K_b$
2. Uno zero o un polo nullo  $S^\mu$  dove  $\mu$  è la molteplicità
3. Polo o zero reale  $(1 + s\tau)^\mu$
4. Polo o zero complesso coniugato  $\left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$  dove  $\zeta$  è il coefficiente di smorzamento e  $\omega_n$  è la pulsazione naturale.

Partiamo dal primo:

1.

$$A = |H(j\omega)| = |K_b|$$

Un numero reale ha 2 fasi:

$$\phi = \text{atan2}(\sigma + j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \sigma > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}$$

2. Polo nullo con  $\mu \in \mathbb{Z}, \mu > 0$  zero,  $\mu < 0$  polo

$$H(s) = H(j\omega) = (j\omega)^\mu$$

Consideriamo l'ampiezza di  $H(j\omega)$ :

$$|H(s)| = |(j\omega)^\mu| = |\omega|^\mu = \omega^\mu$$

$$A(\omega) = |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega^\mu = 20\mu \log_{10} \omega$$

Questa è una retta che cresce/decrece di  $20\mu$  dB/decade. Cosa succede invece alla fase?

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(j\omega)^\mu = \mu \cdot \text{atan2}(j\omega) = \mu 90^\circ$$

Retta costante che passa per per  $\mu$  di  $90^\circ$ . Consideriamo i seguenti zeri e poli di  $H(j\omega)$ :

$\omega$	$S^1$	$S^{-1}$	$S^{-2}$
$10^{-2}$	-40	40	80
$10^{-1}$	-20	20	40
$10^0$	0	0	0
$10^1$	20	20	40
$10^2$	40	-40	80

### 3. Zeri e poli reali

I poli possono essere scritti così:

$$\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(\sqrt{\Re^2 + \Im^2})$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(\Im, \Re)$$

$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$A(\omega) = 20 \log_{10} 1 = 0$ $\phi(\omega) = \text{atan2}(1) = 0$	$A(\omega) = 20 \log_{10} \sqrt{-2} = -3db$ $\phi(\omega) = \text{atan2}(2) = -45^\circ$	$A(\omega) = 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} = 20db$ $\phi(\omega) = \text{atan2}(\omega \tau) = -90^\circ$

### 4. Poli e zeri complessi coniugati

$$H(s) = \left(1 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$$

Partiamo del caso di un polo:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \xrightarrow{\text{Bode}} \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{1 + 2j\omega \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Fattorizziamo:

$$\Re = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Se  $\omega \ll \omega_0$

$$A(\omega) = -20 \log_{10}(1) = 0$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(0) = 0^\circ$$

- Se  $\omega \gg \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

È una retta che decresce di 40db/decade

$$\phi(\omega) = \text{atan2} \left( 2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right) = -180^\circ$$

- $\omega = \omega_0 = \omega_n$  Per  $\zeta \geq 0.5$ :

$$A(\omega) = -20 \log_{10}(2\zeta) = 0$$

Il grafico passa per  $\omega_0$ , ma se  $\zeta < 0.5$ ? Picco di risonanza. Se  $\zeta = 0$  c'è discontinuità.

$$\phi(\omega) = -90^\circ$$

In generali le fomule per calcolare l'ampiezza di un polo o zero complesso coniugato sono:

–  $\omega \gg \omega_0$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -40 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\phi(\omega) = \mu \text{sgn}(\zeta) = -180^\circ$$

- \*  $\zeta = 0$  asintoto verticale in  $A(\omega)$  in  $\omega_n$
- \*  $0 < \zeta \leq 0.5$  picco di risonanza, per cui la pulsazione naturale:  $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$  e l'ampiezza del picco:  $M_r = 20\mu \log_{10}(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})$
- \*  $\zeta = 0.5$   $A(\omega) = 0$
- \*  $0.5 > \zeta > 1$  "Passa sotto" il grafico asintotico

### Esempio

$$H(s) = \frac{s^2(s+1)(s^2+3s+16)}{(2s-1)}$$

1. Portare la funzione di trasferimento in forma di Bode. Se si dovessero trovare trinomi scomponibili, ricordarsi di scomporli. In questo caso il trinomio al denominatore ha soluzioni coniugate com-

plesse e quindi non lo andremo a scomporre.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{s^2(1) \left(1 + \frac{s}{1}\right)^1 (16) \left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)^1}{-(1-2s)^1} \\
 &= -16 \frac{s^2(1+s) \left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)}{(1-2s)}
 \end{aligned}$$

2. Cominciamo a calcolare i diagrammi di Bode dei diversi termini:

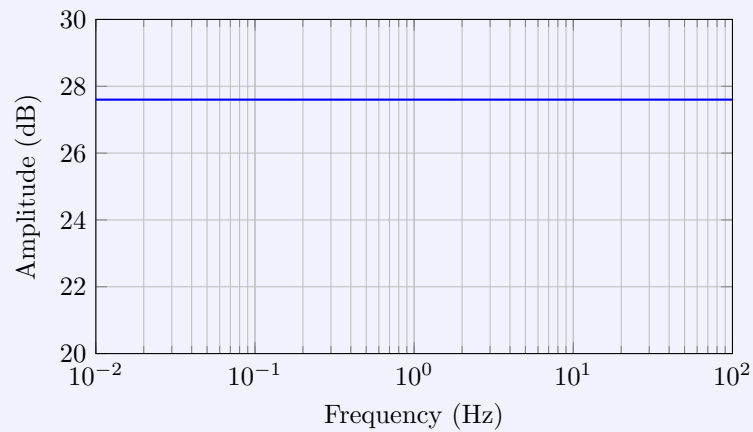
- $K_b = -16$ :

$$A = 20 \log_{10}(|-16|) = 24$$

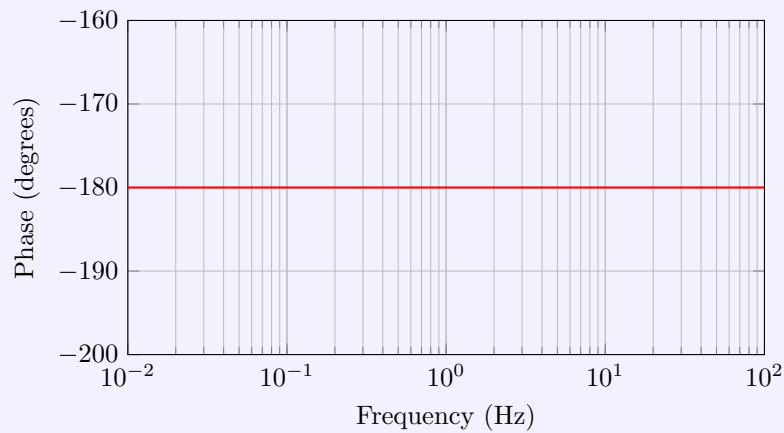
$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } K_b > 0 \\ -180^\circ & \text{se } K_b < 0 \end{cases}$$

Quindi  $\phi = -180^\circ$

Bode Plot: Amplitude



Bode Plot: Phase





- $(1 + s)$  dove  $\mu = 1$  e  $\tau = 1$  e quindi  $\omega = \frac{1}{|\tau|} = 1$ :

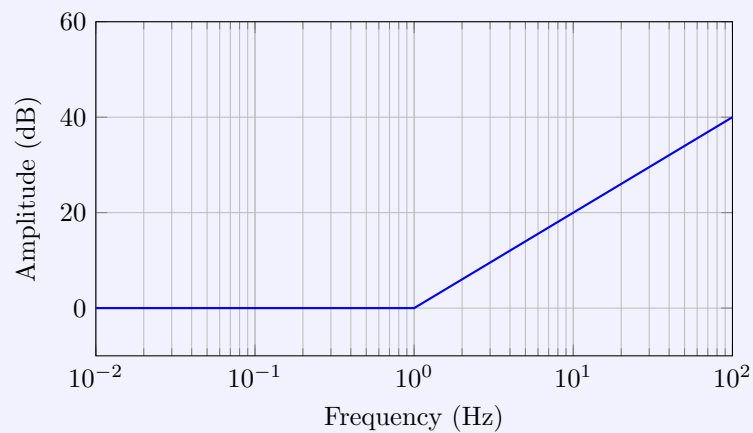
$$A = 20 \log_{10} \omega_n = 0$$

Quindi prima di  $10^0$  il grafico è piatto in 0. Ma per ogni decade il grafico sale di 20db poichè  $A = 20\mu \log_{10}(\omega|\tau|)$ . La fase ha un comportamento molto simile.

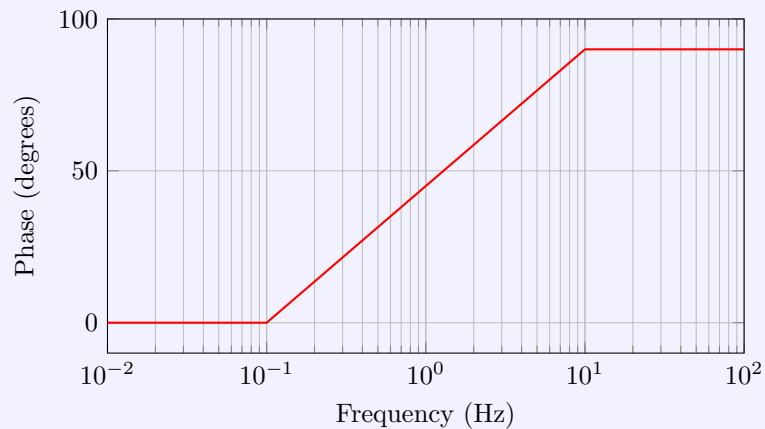
$$\phi = \mu \operatorname{sgn}(\tau) 90^\circ = 90^\circ$$

Quindi prima di  $(10^{-1}, 0^\circ)$   $\phi = 0$  e da  $(10^1, 90^\circ)$  la fase è di  $90^\circ$ .

Bode Plot: Amplitude



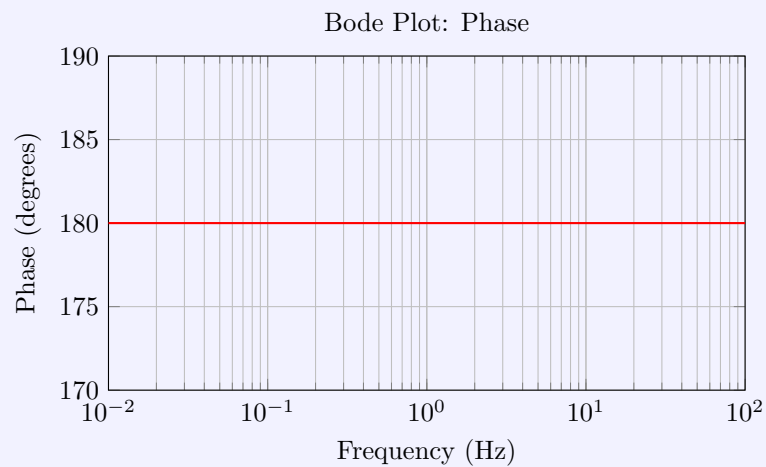
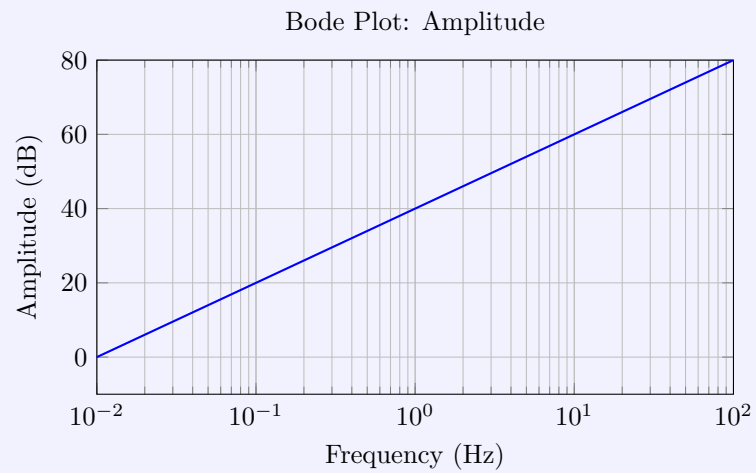
Bode Plot: Phase



- $s^2$  dove  $\mu = 2$ :

$$A = 20\mu \log(\mu) = 40 \text{ db/dec}$$

$$\phi = \mu 90^\circ = 180^\circ$$



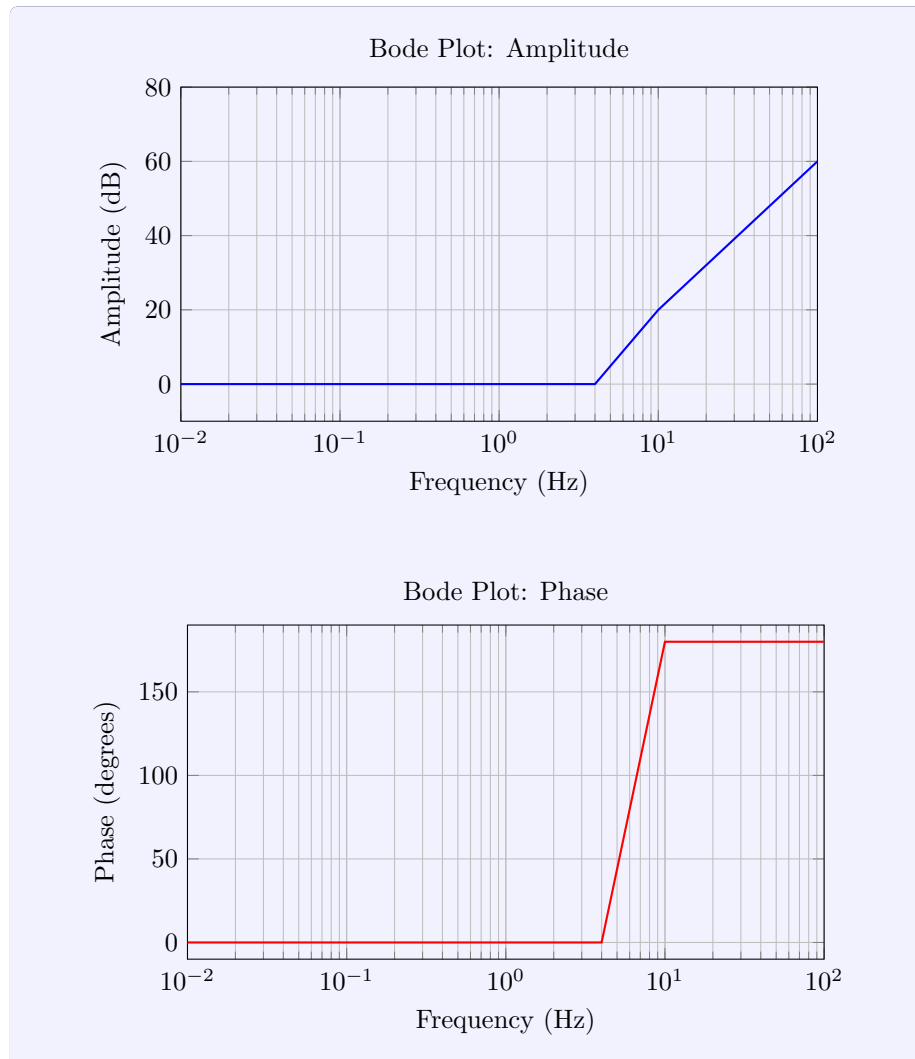
- $\left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)$  dove  $\mu = 1$  e  $\omega_n = \sqrt{16} = 4$  e  $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{3}{16} \Rightarrow \zeta = \frac{3}{8}$ :

$$A = 40\mu \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right) = 40 \text{ db/decade}$$

quindi prima di 4,  $A = 0$  e dopo 4,  $A = 40 \text{ db/decade}$ . Ora calciamo  $\omega_r$  e  $M_r$ : ... Per la fase

$$\phi = 180\mu \text{sgn}(\zeta) = 180^\circ$$

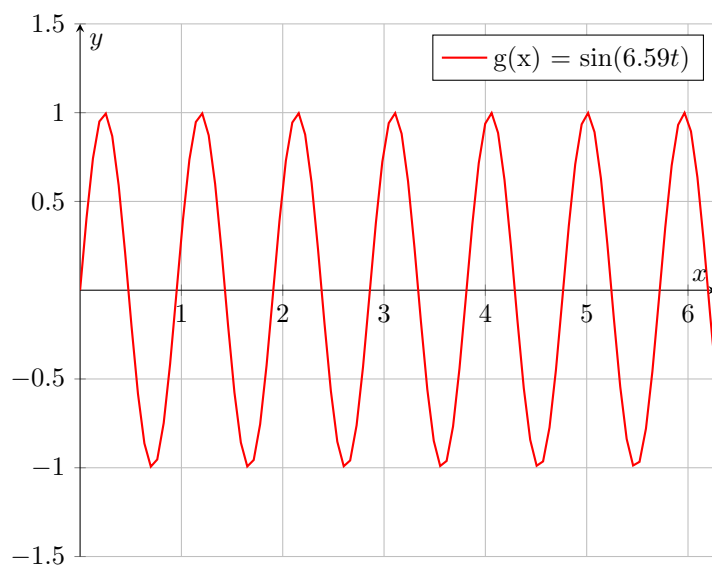
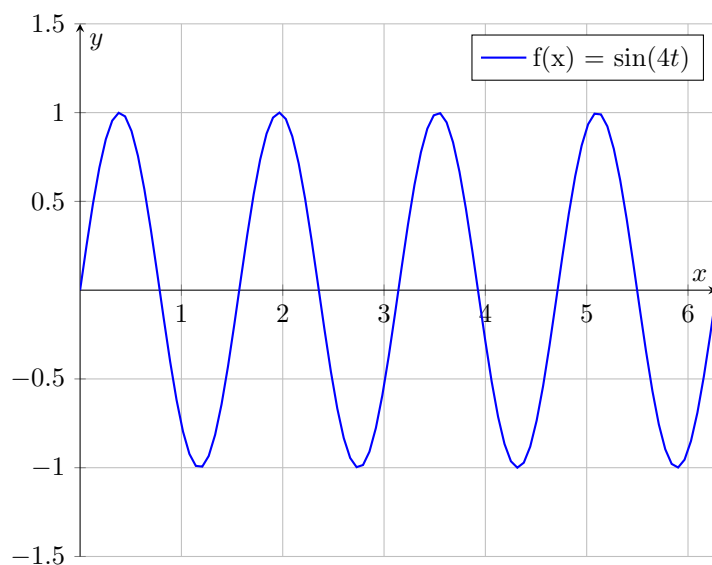
Dopo  $\omega_n$  la fase è di  $180^\circ$  mentre prima la fase rimane a  $\phi = 0^\circ$



## 5.6 Diagrammi di Bode Totale

## 6 Trasformata di Fourier

Fourier ha scoperto che qualsiasi segnale periodico (o aperiodico) può essere scomposto in una somma di sinusoidi. Con Fourier si riesce a rappresentare con somma di frequenze che non sono necessariamente armoniche. Le trasformate di Fourier vengono usate in molti campi come la comunicazione, analisi del suono, modulazione o demodulazione dei segnali, meccanica, cambiamento climatico, ecc.



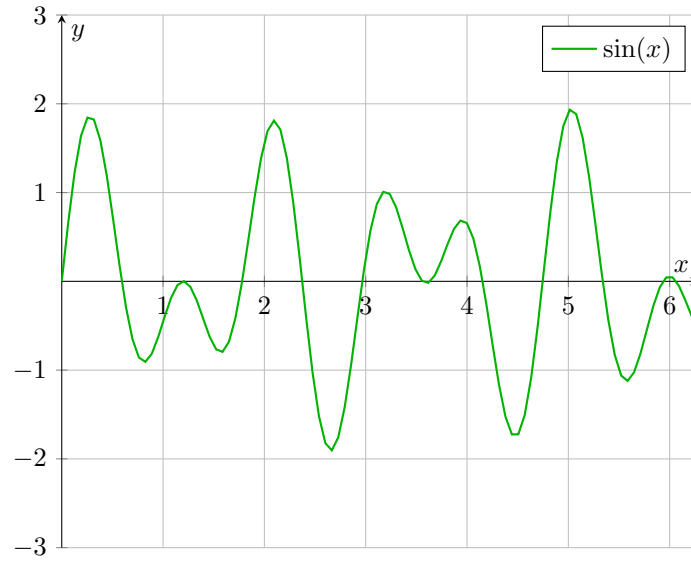


Figure 2: Somma di  $f(x)$  e  $g(x)$

Ci sono diversi tipi di onde che possono essere sommate per creare un segnale complesso. Come per esempio le onde quadre, triangolari, ecc.

## 6.1 Winding Frequency e la quasi-trasformata di Fourier

Calcoliamo il centro di massa come la media dei punti sul grafico:

$$cdm = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(t_k) e^{-2\pi f_0 t}$$

per cui possiamo trovare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(t_k) e^{-2\pi f_0 t} = \underbrace{\frac{1}{t_2 - t_1} \Big|_{t_1}^{t_2} - g(t_k i f_0 t) dt}_{\text{Quasi TdF}}$$

Quindi:

$$TdF = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i f_0 t} dt$$

Proprio come la trasformata di Laplace ci è utile spostarsi nel dominio delle frequenze da quello del tempo.

$$\underbrace{e^{j\omega_k t}}_{\text{input}} \rightarrow LTI \rightarrow \underbrace{H(\omega_k)}_{\text{Transf. Fun}} e^{j\omega_k t}$$

Questo è il principio di sovrapposizione. Il principio di sovrapposizione dice che se un sistema è lineare e invariante nel tempo, allora la risposta a una somma di segnali è la somma delle risposte ai singoli segnali.

## 6.2 Segnali periodici e aperiodici

Se abbiamo un segnale **periodico** possiamo scomporlo in una somma (finita) di funzioni elementari tramite la serie di Fourier. Invece per un segnale **aperiodico**, quindi privo di periodicità, andremo ad utilizzare la trasformata di Fourier. Mentre nella serie di Fourier le funzioni sono strettamente *collegate* a livello armonico, nella trasformata di Fourier le funzioni sono *indipendenti*.

## 6.3 Serie di Fourier

Prendiamo come un segnale periodico  $x(t)$  con periodo  $t_0$ :

$$x(t) = x(t + t_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi f_0 \leftarrow \text{funzione fondamentale}$$

Se passiamo alla rappresentazione complessa:

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{k\omega_0}$$

Questa è una famiglia di funzioni che sono armonicamente collegate perché come si può vedere i loro periodi sono soltanto multipli interi del periodo fondamentale. Riscriviamo  $x(t)$  come combinazione lineare di  $\phi_k$ :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Dove  $a_k$  sono i coefficienti della serie di Fourier.

**Theorem 6.1.** *Si può riscrivere un segnale periodico in somme di segnali elementari.*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

dove  $a_k$  sono i coefficienti della serie di Fourier,  $k$  è l'indice di armonica e  $\omega_0$  è la frequenza fondamentale. Viene anche chiamata **equazione di sintesi**.

I coefficienti  $a_k$  si possono calcolare come:

$$\begin{aligned} a_k &= A_k e^{j\theta_k} \\ &= B_k + jC_k \end{aligned}$$

Quindi modificando trigonometricamente:

$$\begin{aligned}
 e^{jk\omega_0 t} &= \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t) \\
 x(t) &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \\
 \text{oppure} &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - iC_k \sin(k\omega_0 t)]
 \end{aligned}$$

Come facciamo a calcolare i coefficienti  $a_k$ ?

$$\begin{aligned}
 a_k &= \int_{t_0} e^{-jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} t_0 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \\
 &= \int_{t_0} \cos(k\omega_0 t) dt - j \int_{t_0} \sin(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

Si fa quindi l'integrale sul periodo di  $x(t)$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0} x(t) e^{-jN\omega_0 t} dt &= \int_{t_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jN\omega_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\int_{t_0} e^{-j(k-N)\omega_0 t} dt}_{\begin{cases} t_0 & \text{se } k = N \\ 0 & \text{se } k \neq N \end{cases}}
 \end{aligned}$$

**Theorem 6.2.** *L'equazione di analisi di Fourier è:*

$$a_k = \frac{1}{t_0} \int_{t_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

### 6.3.1 Segnali simmetrici e asimmetrici

- Segnale periodico non-simmetrico

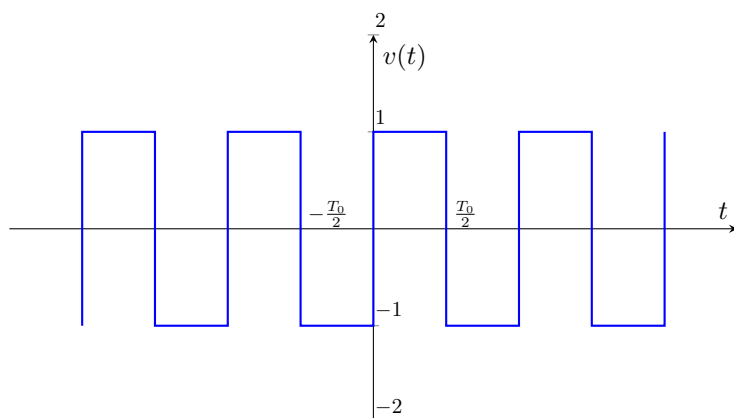


Figure 3: Segnale periodico non-simmetrico

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-1) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} 1 \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$\vdots$   
 $\downarrow$

$$a_k = \frac{1}{j\pi k} [1 - (-1)^k] \quad k \neq 0$$

Il grafico dei coefficienti è il seguente:

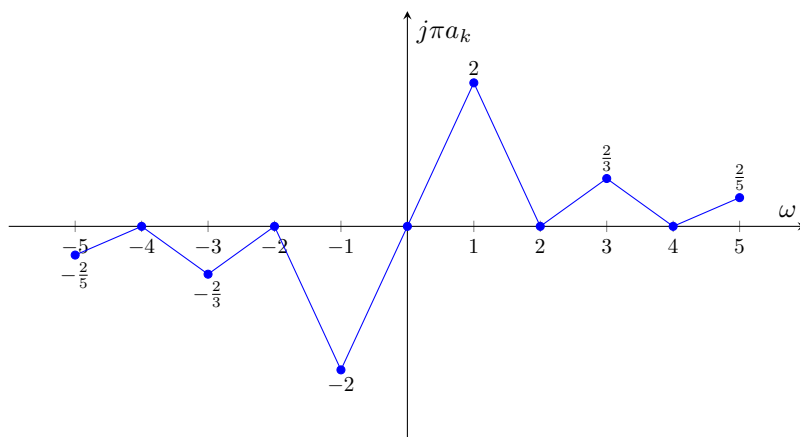


Figure 4: Coefficienti  $a_k$  per segnale non-simmetrico

- Armoniche dispari
- $a_k$  immaginari
- $a_k = -a_{-k}$  antisimmetrico



Siccome tutti i coefficienti sono immaginari si ha una serie di seni e si può riscrivere come:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{2j}_{\text{Per avere termini reali}} \cdot a_k \sim (k\omega_0 t)$$

• **Segnale periodico simmetrico**

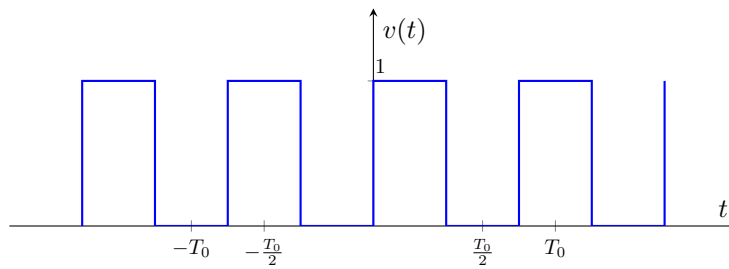


Figure 5: Segnale periodico simmetrico

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{\pi k} & k \neq 0 \end{cases}$$

Il grafico dei coefficienti è il seguente:

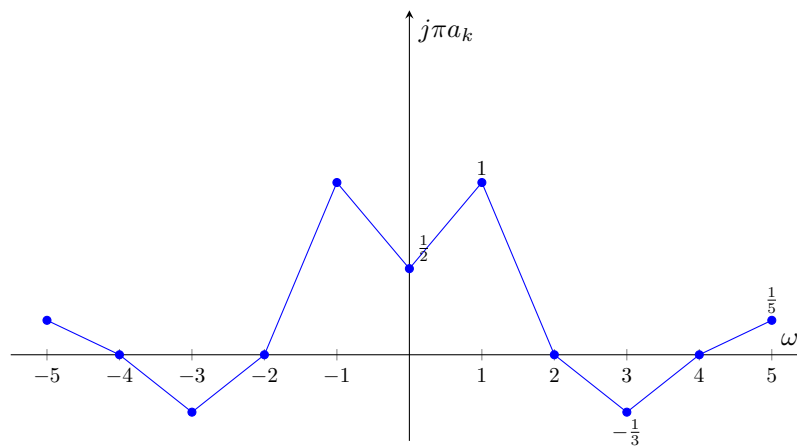


Figure 6: Coefficienti  $a_k$  per segnale simmetrico

- Armoniche dispari
- $a_k$  è reale
- $a_k = a_{-k}$  simmetrico

Siccome tutti i coefficienti sono reali si ha una serie di coseni e si può riscrivere come:

$$v(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \cdot a_k \cos(k\omega_0 t)$$

### 6.3.2 Serie di Fourier troncata

Serve per limitare la sommatoria a  $N$  termini.

Sia  $N \in \mathbb{Z}$

$$\underbrace{v_N(t)}_{v(t) \text{ rappresentato con } N \text{ componenti}} = \sum_{k=-N}^N \tilde{a}_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad \omega_0, t \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Calcoliamo l'errore quadratico medio (MSE, Mean Square Error) che è la misura dell'errore di approssimazione

$$MSE(v(t), v_N(t)) := \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |v(t) - v_N(t)|^2 dt$$

misura l'energia della differenza di due segnali.

$$\tilde{a}_k = a_k = \lim_{N \rightarrow \infty} MSE(v(t), v_N(t)) = 0$$

#### Definizione

**Fenomeno di Gibbs:** Aumentando il numero di armoniche si ha un aumento di armoniche ad alta frequenza nei punti di discontinuità.

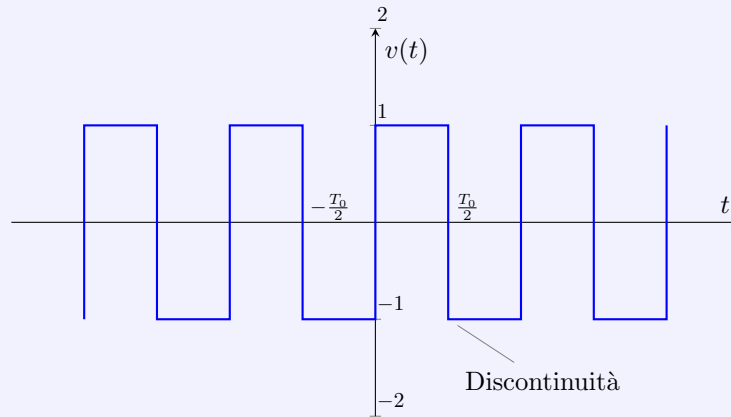


Figure 7: Discontinuità

$T = 2\pi$  Non simmetrico

$t = k\pi$

$$\begin{aligned}
v(t) &= a_0 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \sin(k\omega_0 t) \\
a_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\
&= \frac{-j}{2\pi k} (2 - 2e^{-j\pi t}) \\
a_k &= \begin{cases} \frac{-2j}{k\pi} & k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
\end{aligned}$$

## 6.4 Dalla serie di Fourier alla trasformata di Fourier

Se si ha un segnale non periodico che va da  $[-T_1, T_1]$ :

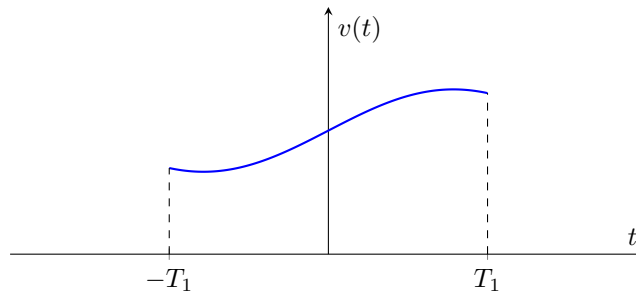


Figure 8: Segnale non periodico

$$\begin{aligned}
\underbrace{\tilde{v}(t)}_{\text{Periodico}} &= \underbrace{v(t)}_{\text{Non periodico}} \\
|t| &< \frac{T_0}{2}
\end{aligned}$$

Se  $T_0 \rightarrow \infty$  si ha che  $\tilde{v}(t) \rightarrow v(t)$ . Cioè si prende un segnale periodico e si fa tendere il periodo a infinito facendolo sembrare non periodico. Questo passaggio si può fare anche al contrario, cioè prendere un segnale non periodico e farlo diventare periodico.

- Usiamo la serie di Fourier per rappresentare  $\tilde{v}(t)$
- Facciamo tendere  $T_0$  a infinito  $T_0 \rightarrow \infty$  per rappresentare  $v(t)$

### Esempio

Partiamo da un segnale non periodico e lo replichiamo nel tempo con periodo  $T_0$

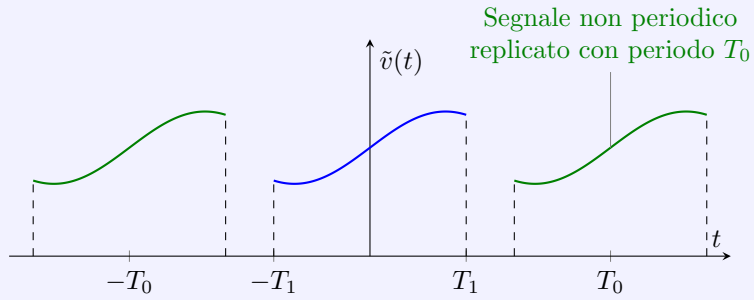


Figure 9: Segnale non periodico replicato

$$\tilde{v}(t) = v(t) \quad |t| < \frac{T_0}{2}$$

Applichiamo la serie di Fourier su  $\tilde{v}(t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \\ \omega_0 &= \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 \\ a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \tilde{v}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Rappresentiamo  $k\omega_0$  con una funzione  $V(\omega)$

$$V(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) e^{-j\omega t} dt \quad \rightarrow \quad T_0 a_k = V(\omega) \Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$V(\omega)$  è l'**inviluppo** di  $T_0 a_k$ :

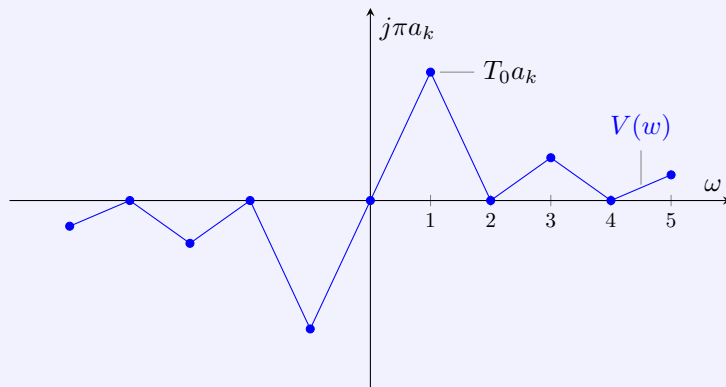


Figure 10: Inviluppo di  $T_0 a_k$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \\
&\quad \downarrow \\
\tilde{v}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t \omega_0}
\end{aligned}$$

Se  $T_0 \rightarrow \infty$  otteniamo che:

- $\omega_0 \rightarrow 0$
- $\tilde{v}(t) \rightarrow v(t)$
- $\omega_0 \rightarrow d\omega$
- $\sum \rightarrow \int$

Con queste premesse possiamo riscrivere la funzione come:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} V(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t \omega_0} \\
&\quad \downarrow \\
v(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega
\end{aligned}$$

È la trasformata di Fourier inversa.

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

È la trasformata di Fourier.

**Definition 6.3.**

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

È l'equazione di sintesi per un segnale non periodico che equivale alla trasformata **inversa** di Fourier.

$$V(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

È l'equazione di analisi per un segnale non periodico che equivale alla trasformata di Fourier.

### Esempio

Prendiamo ad esempio un segnale non periodico:

$$v(t) = e^{-at}$$

Calcoliamo la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t(a+j\omega)} dt \\ &= \frac{-1}{a+j\omega} \cdot e^{-(a+j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

Con Laplace sarebbe stato:

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= \frac{1}{s-\lambda} \\ &\downarrow \\ e^{-at} &= \frac{1}{s+a} = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned}$$

#### 6.4.1 Sviluppo dei coefficienti di Fourier

Prendiamo in considerazione il segnale rettangolare:

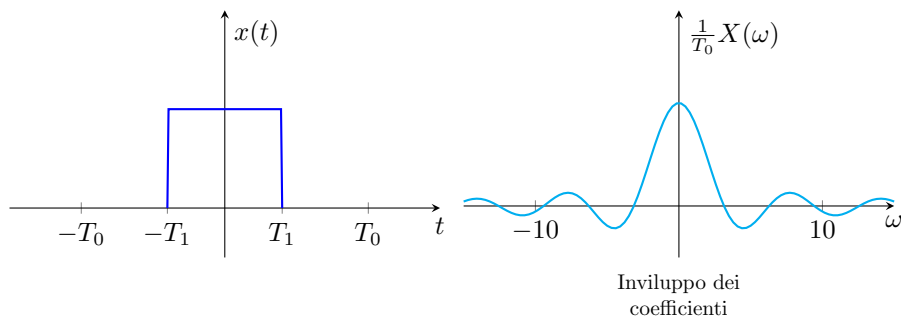


Figure 11: Segnale rettangolare

Replichiamo il segnale in un periodo  $T_0$  e osserviamo il cambiamento dei coefficienti di Fourier:

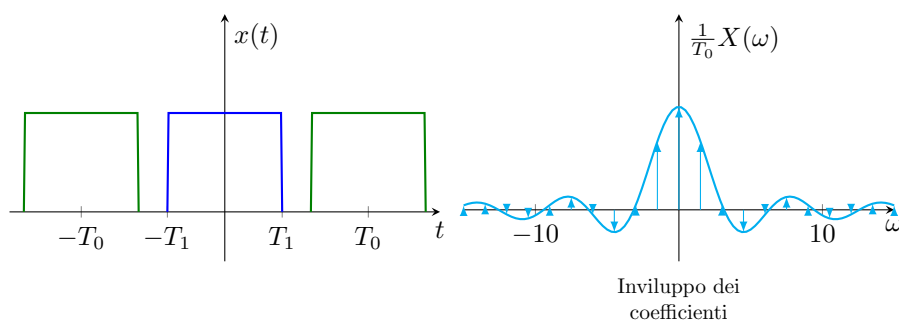


Figure 12:  $T_0 = 4T_1$

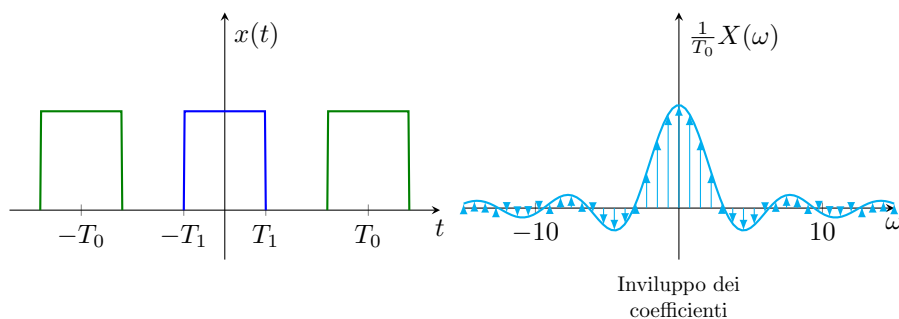


Figure 13:  $T_0 = 8T_1$

...

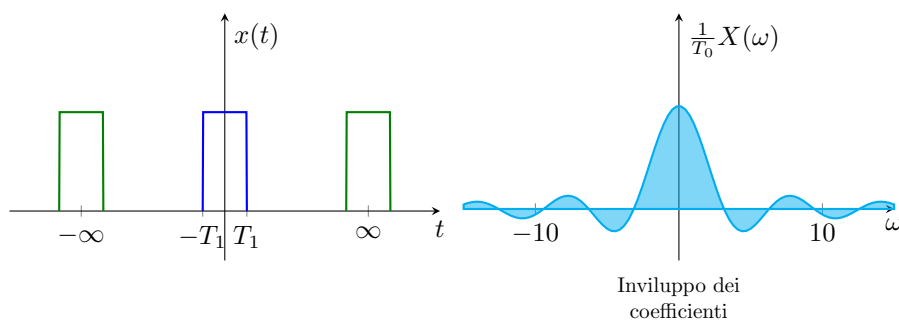


Figure 14:  $T_0 \rightarrow \infty$

#### 6.4.2 Trasformata di Fourier di un segnale periodico

$\tilde{v}(t) \leftrightarrow a_k$  Coefficienti delle serie di Fourier

$\tilde{v}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{V}(\omega)$  Trasformata di Fourier

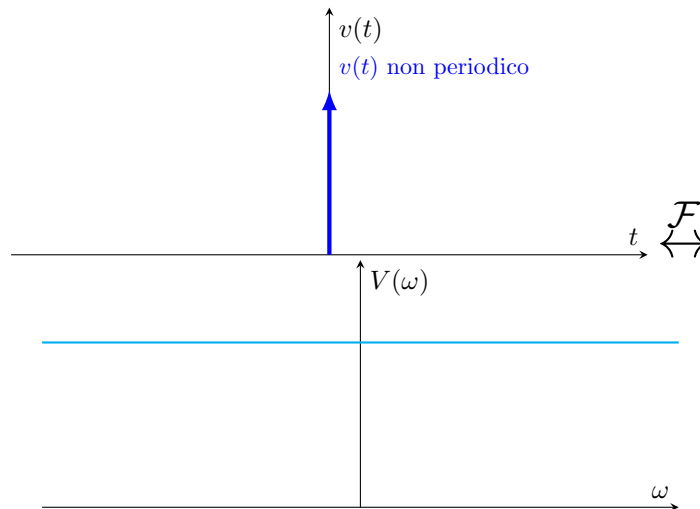
$$\tilde{v}(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0) \text{ Treno di impulsi}$$

$$\begin{aligned}\tilde{v}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{V}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) \cdot e^{-j\omega t} d\omega}_{e^{-jk\omega_0 t}}\end{aligned}$$

### 6.4.3 Come usare la trasformata di Fourier

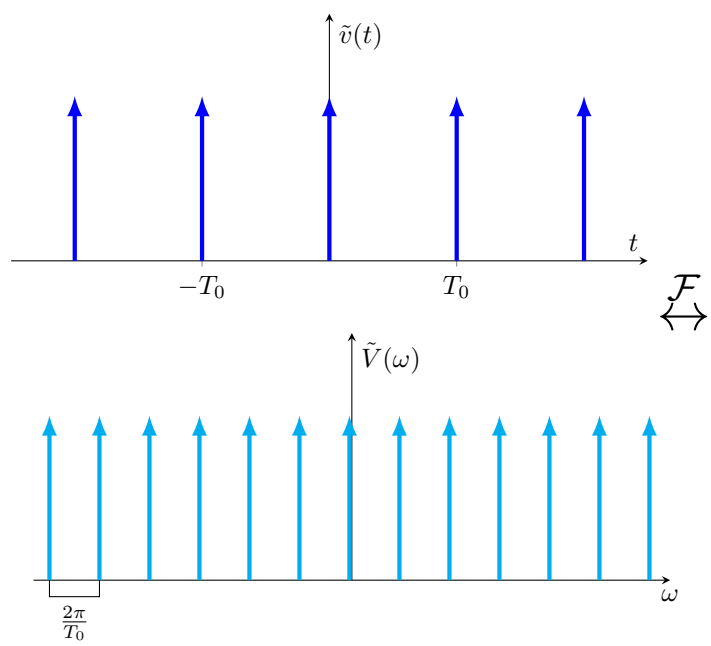
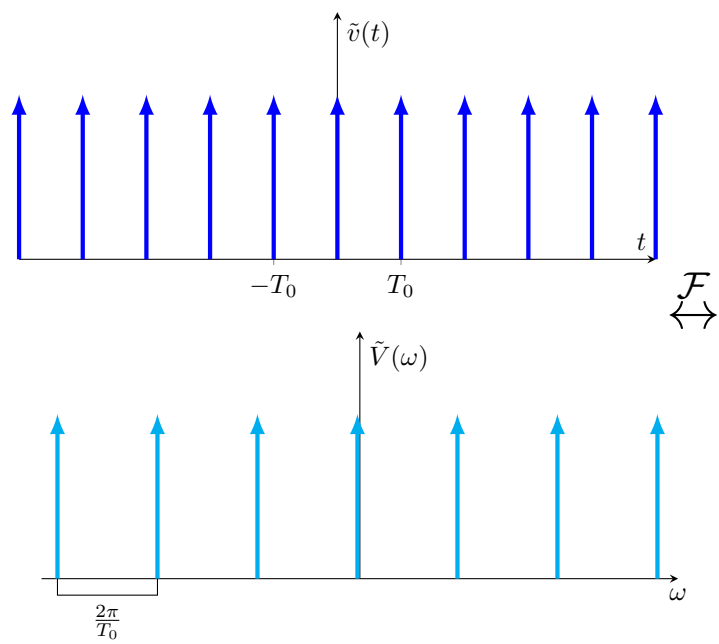
1.  $v(t)$  non periodico
  - Costruisco un segnale periodico  $\tilde{v}(T)$  in cui il singolo periodo è definito da  $v(t)$
  - $\tilde{v}(t)$  ha serie di fourier
  - All'aumentare del periodo  $\tilde{v}(t) \rightarrow v(t)$  e la serie di Fourier di  $\tilde{v}(t) \rightarrow TdF$  di  $v(t)$
2.  $\tilde{v}(t)$  è periodico,  $v(t)$  rappresenta il singolo periodo
  - Coefficienti della serie di Fourier =  $\frac{1}{T_0} \cdot$  campioni delle TdF di  $v(t)$
3.  $\tilde{v}(t)$  è periodico
  - La trasformata di Fourier di  $\tilde{v}(t)$  è definita come **treno di impulsi**

$$\tilde{V}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$



Se  $T_0 \rightarrow \infty$  allora il treno di impulsi diventa sempre più fitto fino ad una retta costante:





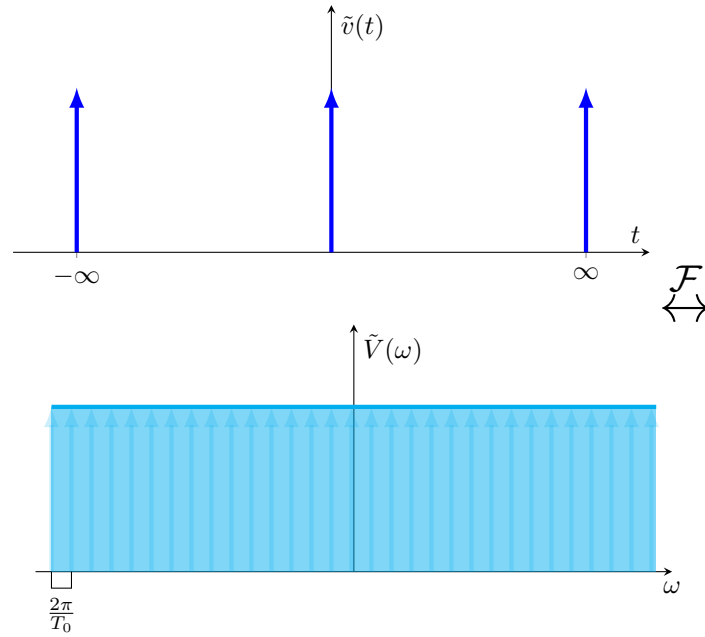


Figure 15: Trasformata di Fourier all'aumentare di  $T_0$

## 6.5 Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier

**Definition 6.4** (Equazione di sintesi). Sia  $v(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  un segnale a valori reali o complessi, si definisce la trasformata di Fourier del segnale come:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) := \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) \cdot e^{-j\omega_0 t} dt = V(f)$$

Dove  $V$  è una funzione che va da  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $f \in \mathbb{R}$ . Questa viene chiamata **equazione di sintesi**.

**Definition 6.5** (Equazione di analisi). Data una funzione  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  si definisce anti-trasformata di Fourier la funzione:

$$\mathcal{F}^{-1}[V(f)](t) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V(f) \cdot e^{j\omega_0 t} df = v(t)$$

Dove  $v$  è una funzione che va da  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , con  $t \in \mathbb{R}$ . Questa viene chiamata **equazione di analisi**.

**Condizioni di esistenza della trasformata di Fourier:**

**Theorem 6.6.** *Sia  $v(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  un segnale a valori reali o complessi. Se almeno una delle seguenti condizioni è vera, allora la funzione è trasformabile secondo  $\mathcal{F}$ :*

1.  $v(t)$  è sommabile, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)| dt < \infty$$

e a variabile limitata su ogni intervallo finito di  $\mathbb{R}$ , cioè è esprimibile come differenza di funzioni limitate non decrescenti.

2.  $v(t)$  è un segnale di energia, cioè:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 dt < \infty$$

3.  $v(t)$  è un segnale di potenza, cioè:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |v(t)|^2 dt < \infty$$

bisogna però "**finestrare**" il segnale, cioè moltiplicarlo per una finestra rettangolare

## 6.6 Trasformate notevoli

Le trasformate di Fourier notevoli sono le seguenti:

- Impulso

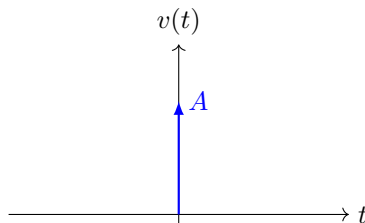


Figure 16: Impulso unitario

La trasformata di Fourier è:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[A\delta_0(t)](f) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \\ &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(t) \cdot 1 dt \\ &= A \end{aligned}$$

(per le regole del campionamento)

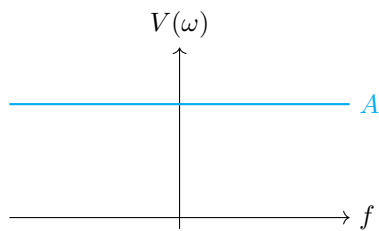


Figure 17: Trasformata di Fourier dell'impulso

- **Esponenziale causale**

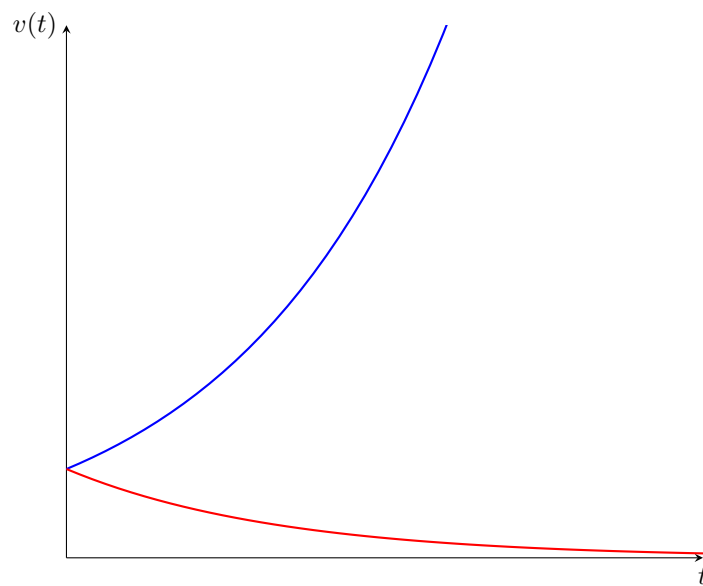


Figure 18: Esponenziale causale

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F} \left[ A e^{j\phi} e^{\lambda t} \underbrace{\delta_{-1}(t)}_{\text{Causalità}} \right] (t) = \frac{A e^{j\phi}}{j2\pi f - \lambda}$$

La trasformata di Laplace è molto simile, basta infatti sostituire la  $s$  con  $j\omega = j2\pi f$  e si ottiene la trasformata di Fourier:

$$\mathcal{L} [A e^{j\phi} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)] (s) = \frac{A e^{j\phi}}{s - \lambda}$$

- **Finestra rettangolare di altezza  $A$  e supporto  $T$**

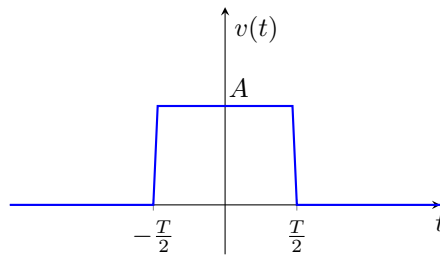


Figure 19: Finestra rettangolare

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F} \left[ A \Pi \left( \frac{t}{T} \right) \right] (f) = AT \cdot \text{sinc}(fT)$$

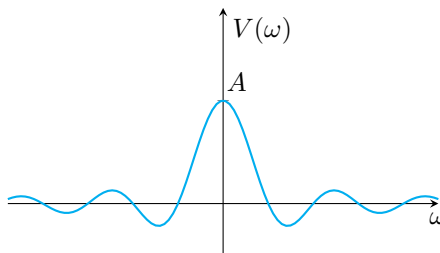


Figure 20: Trasformata di Fourier della finestra rettangolare

Questa funzione è chiamata **sinc**.

- **Funzione costante**

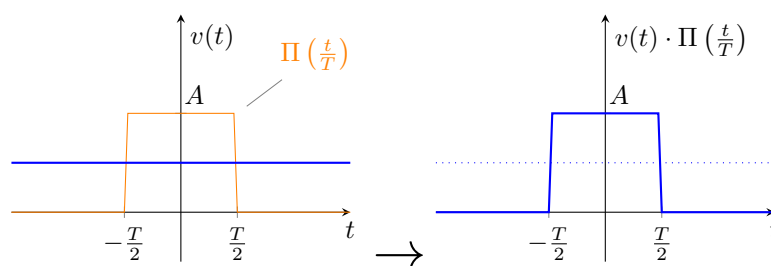


Figure 21: Funzione costante

La funzione costante non può essere trasformata facilmente, quindi bisogna "finestrarla", cioè moltiplicare il segnale per una finestra rettangolare:

$$v(t) = A \rightarrow v_T(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La sua trasformata di Fourier è la stessa del segnale rettangolare:

$$\mathcal{F} \left[ \underbrace{v(t)}_{\text{Ampiezza} = A} \cdot \underbrace{\Pi\left(\frac{t}{T}\right)}_{\text{Ampiezza} = 1} \right] (f) = AT \cdot \text{sinc}(fT)$$

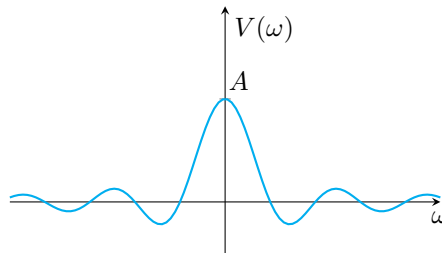


Figure 22: Trasformata di Fourier della funzione costante

- **Fasore**

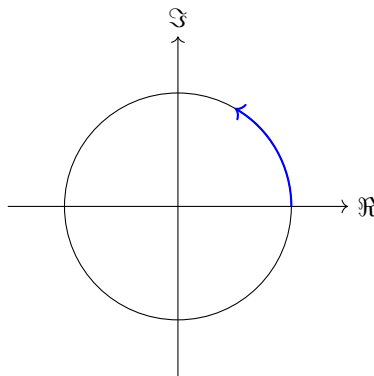


Figure 23: Fasore

$$v(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Anche in questo caso bisogna moltiplicare per il segnale rettangolare:

$$v_T(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}[v_T(t)](f) = AT \cdot \text{sinc}((f - f_0) \cdot t)$$

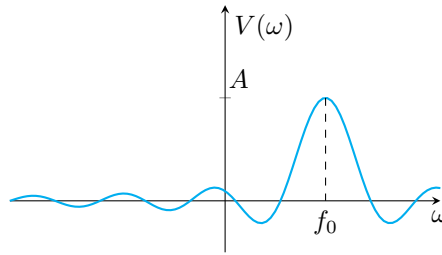


Figure 24: Trasformata di Fourier del fasore

- **Seno** Possiamo derivare il seno utilizzando la formula di Eulero su un fasore:

$$v(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t)$$

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = \frac{A}{2j} (\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0))$$

Il seno è solo la parte immaginaria del fasore.

- **Coseno**

$$v(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t)$$

La trasformata di Fourier è:

$$\mathcal{F}[v(t)](f) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

Il coseno è solo la parte reale del fasore.

## 6.7 Proprietà della trasformata di Fourier

La trasformata di Laplace è un caso specifico della trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} TdL &\rightarrow TdF \\ s &\rightarrow j\omega \end{aligned}$$

Quindi alcune proprietà di Laplace valgono anche per Fourier.

### 1. Linearità

$$av_1(t) + bv_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} aV_1(f) + bV_2(f)$$

### 2. Riflessione e coniugazione

$$\begin{aligned} v(-t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} V(-f) \quad \text{Riflessione} \\ \left. \begin{aligned} v^*(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} V^*(-f) \\ v^*(-t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} V^*(f) \end{aligned} \right\} &\text{Coniugazione} \end{aligned}$$

### 3. Convoluzione nel dominio del tempo

$$[v_1 * v_2](t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V_1(f) \cdot V_2(f)$$

### 4. Traslazione nel dominio del tempo

$$v(t - \tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi f\tau} \cdot V(f)$$

### 5. Traslazione nel dominio delle frequenze

$$e^{j2\pi f_0 t} \cdot v(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} V(f - f_0)$$

### 6. Modulazione/Prodotto nel dominio del tempo

$$v_1(t) \cdot v_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} [V_1 * V_2](f)$$

#### Esempio

Consideriamo il seguente sistema a blocchi:

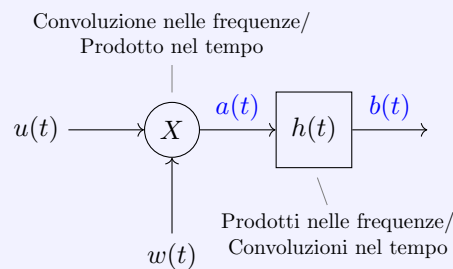


Figure 25: Sistema a blocchi

Vogliamo capire come si comporta questo segnale nelle frequenze ( $a(t)$ ) e cosa succede quando viene alterato dalla sequenza degli operatori ( $b(t)$ ).

$$u(t) = 3 \cdot \cos(6\pi t) + \cos(2\pi t)$$

$$w(t) = 2 \cdot \cos(4\pi t)$$

$$h(t) = 4 \cdot \text{sinc}(4t)$$

$$b(t) = ?$$

Possiamo risolvere in maniera grafica questo problema:

1. Applichiamo le trasformate di Fourier per andare nel dominio delle frequenze:

$$\text{Trasformata notevole: } A \cos(2\pi f_0 t) = \frac{A}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$



$$\begin{aligned}
3 \cdot \cos(2\pi \cdot 3 \cdot t) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{3}{2} (\delta(f-3) + \delta(f+3)) \\
\cos(2\pi \cdot t) &\stackrel{\mathcal{F}}{=} \frac{1}{2} (\delta(f-1) + \delta(f+1)) \\
U(f) &= \frac{3}{2} (\delta(f-3) + \delta(f+3)) + \frac{1}{2} (\delta(f-1) + \delta(f+1))
\end{aligned}$$

$$W(f) = \frac{2}{2} (\delta(f-2) + \delta(f+2)) = \delta(f-2) + \delta(f+2)$$

Trasformata notevole:  $AT \operatorname{sinc}(tT) = A\Pi\left(\frac{f}{T}\right)$

$$H(f) = 1 \cdot \Pi\left(\frac{f}{4}\right) = \Pi\left(\frac{f}{4}\right)$$

2. Disegniamo tutti i singoli elementi su un grafico:

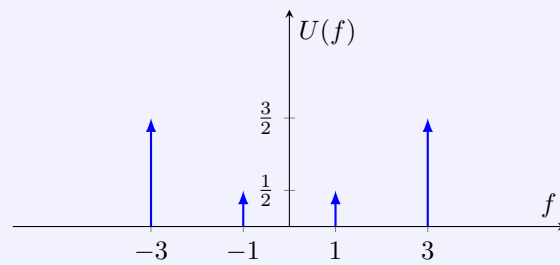


Figure 26: Segnale  $U(f)$

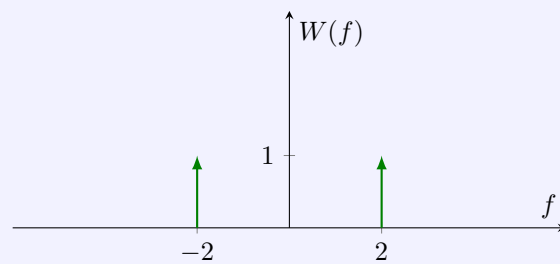


Figure 27: Segnale  $W(f)$

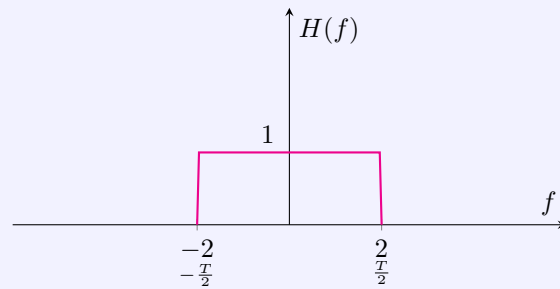


Figure 28: Segnale  $H(f)$

3. Calcoliamo la convoluzione tra  $U(f)$  e  $W(f)$  per trovare  $A(f)$  :  
Eseguiamo la convoluzione tra  $U(f)$  e  $W(f)$  fissando un segnale

e spostare l'altro specchiato. A livello più alto il segnale che si muove viene replicato ogni volta che l'asse centrale corrisponde con il segnale fermo:

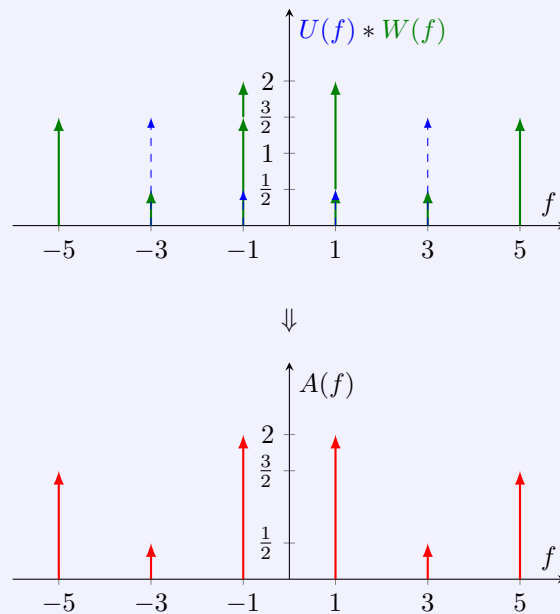


Figure 29: Segnale  $A(f)$

Le altezze dei nuovi segnali replicati saranno la moltiplicazione dei segnali che si sovrappongono sommata alle altezze dei diversi segnali che si sovrappongono nello stesso punto.

4. Calcoliamo il prodotto tra  $A(f)$  e  $H(f)$  per trovare  $B(f)$ :

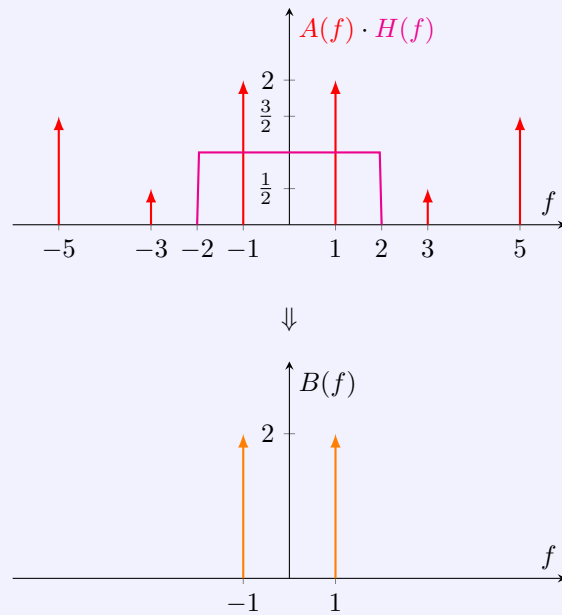


Figure 30: Segnale  $B(f)$

## 6.8 Campionamento e replicazione

Prendiamo in considerazione il seguente sistema a blocchi

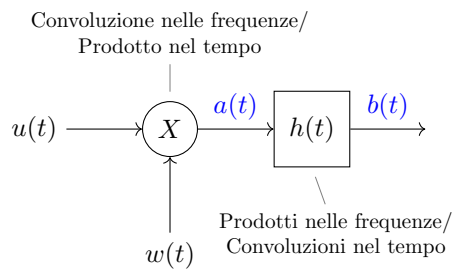


Figure 31: Sistema a blocchi

$$a(t) = u(t) \cdot w(t)$$

$$b(t) = [h(t) * a(t)](f)$$

Esiste un operatore chiamato **campionatore** che si chiude a intervalli regolari derivati da  $T_c$  (**frequenza di campionamento**  $[Hz]$ ) e "compone" il segnale. È il componente che permette di passare dal segnale a tempo continuo a quello a tempo discreto.

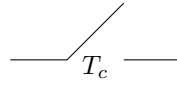


Figure 32: Campionatore

Quindi se prendiamo in considerazione il seguente segnale si ha un passaggio da continuo a discreto:

Nella realtà dopo il campionatore si inserisce uno **zero-holder** che mantiene il valore del segnale fino al prossimo campione:

Un segnale discreto può essere **quantizzato**, cioè approssimato ad un valore discreto. Questo processo è chiamato **quantizzazione**.

Inoltre un segnale quantizzato può essere **codificato** in binario, cioè rappresentato da una sequenza di bit, ovvero segnali alti e bassi:

### 6.8.1 Treno campionatore/impulsi

Un treno di impulsi a distanza  $T_c$  moltiplicato per un altro segnale fa ottenere un segnale campionato in quel punto  $kT_c$ :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{T_c}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_c) \\ &\quad \updownarrow \mathcal{F} \\ \frac{1}{T_c} \hat{\delta}_{\frac{1}{T_c}}(f) &= \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_c})\end{aligned}$$

### 6.8.2 Campionamento

**Definition 6.7.** Dato un segnale  $v(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e un periodo di campionamento  $0 < T_c \in \mathbb{R}$ , il campionamento è definito come:

$$[sampler_{T_c} v](t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT_c)$$

↓ Per la proprietà del campionamento dell'impulso

$$\begin{aligned}[sampler_{T_c} v](t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(kT_c) \cdot \delta(t - kT_c) \\ &= v(t) \cdot \hat{\delta}_{T_c}(t)\end{aligned}$$

### 6.8.3 Replicazione

**Definition 6.8.** Sia un segnale  $v(t), t \in \mathbb{R}$  e un periodo di campionamento  $0 < T_c \in \mathbb{R}$ , la replicazione è definita come:

$$\begin{aligned} [rep_{T_c} v](t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t - kT_c) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} v(t) * \delta(t - kT_c) \\ &= [v * \hat{\delta}_{T_c}](t) \end{aligned}$$

Se si replica nel tempo si ottiene un campionamento scalato nelle frequenze

$$[rep_{T_c} v](t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_c} [samp_{T_c} V](f)$$

Se si campiona nel tempo si ottiene una replicazione scalata nelle frequenze

$$[samp_{T_c} v](t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{T_c} [rep_{T_c} V](f)$$

### 6.8.4 Teorema del campionamento ideale di Shannon

**Theorem 6.9.** Sia  $v(t), t \in \mathbb{R}$  un segnale campionato con frequenza di campionamento  $f_c = \frac{1}{T_c}$  ottenendo:

$$\begin{aligned} v(k) &= v_0(kT_c) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_0(t) \cdot \delta(t - kT_c) \\ &= [samp_{T_c} v_0](t) \end{aligned}$$

Se:

1.  $v_0(t)$  è limitato in banda, cioè esiste almeno un  $B > 0$  tale che  $V_0(f) = 0$  per frequenze  $|f| > B$ , e  $B$  è il più piccolo per cui questo è vero. Ad esempio:
2. e la frequenza di campionamento  $f_c$  è tale per cui  $f_c > 2B$ , dove  $2B$  è detta **frequenza di Nyquist**. Ad esempio: Se:

$$B = 10Hz$$

$$f_c = 5Hz$$

$$f_c > 2B \rightarrow 5 > 20 \text{ (FALSO)}$$

Se:

$$B = 5Hz$$

$$f_c = 20Hz$$

$$f_c > 2B \rightarrow 20 > 10 \text{ (VERO)}$$

Allora  $v_0(t)$  è ricostruibile a partire dal segnale campionato  $[samp_{T_c} v_0](t)$  utilizzando un filtro di ricostruzione  $H_r$ :

$$H_r(f) = T_c \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right) = \frac{1}{f_c} \Pi\left(\frac{f}{2f_L}\right)$$

$$B < f_L < f_c - B$$

Quindi:

$$v_0(t) = \left[ (samp_{T_c} v_0) * \underbrace{h(T)}_{\text{sinc}\left(\frac{t}{T_c}\right)} \right] (t)$$

Se  $f_c < 2B$  si presenta il fenomeno di **aliasing** Cioè il segnale si mescola con le repliche delle bande laterali e la ricostruzione da origine ad un segnale diverso da quello originale.