

# Analisi II

Università di Verona Imbriani Paolo - VR500437 Professor Zivcovich Franco 11 giugno 2025

# Indice

1	Equ	Equazioni differenziali					
	1.1	Modelli differenziali	4				
	1.2	Equazioni differenziali di primo ordine	,				
		1.2.1 Generalità	,				
		1.2.2 Equazioni a variabili separabili	8				
	1.3	Equazioni lineari del primo ordine	10				
	1.4	Equazioni differenziali del secondo ordine	1:				
		1.4.1 Generalità	1:				
		1.4.2 La struttura dell'integrale generale	1				
		1.4.3 Equazioni differenziali del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti	10				
		1.4.4   Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee: Metodo di somiglianza   .	1'				
2	Cal	colo infinitesimale per le curve	20				
	2.1	Richiami di calcolo vettoriale	20				
	2.2	Funzioni a valore vettoriale, alcune definizioni	2				
	2.3	Calcolo differenziale e integrale per funzioni a valori vettoriali	2				
	2.4	Curve regolari	25				
	2.5	Lunghezza di un arco di curva	$2^{2}$				
	2.6	Il parametro arco	2				
	2.7	Integrali di linea	26				
3	Cal	Calcolo infinitesimale per funzioni reali a più variabili					
	3.1	Grafico, linee di livello e domini	29				
	3.2	Limiti e continuità	3				
	3.3	Analisi delle forme di indeterminazione	32				
4	Cal	colo differenziale per funzioni reali a più variabili	3				
	4.1	Nozioni topologiche di base	3				
	4.2	Derivate parziali, derivabilità e piano tangente	36				
	4.3	Piano tangente	38				
	4.4	Differenziabilità	39				
5	Rec	cupera sezione	40				
6	Cal	colo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali	4				
	6.1	Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni di più variabili a valori vettoriali	4:				
	6.2	Ottimizzazione vincolata	4:				
		6.2.1 Caso $n = 2$	4				
		6 2 2 Caso n = 2: metodo dei moltiplicatori di Lagrange	4				

7	Cal	colo integrale per funzioni di più variabili	47
	7.1	Integrali doppi	47
	7.2	Funzioni integrabili su domini non rettangolari	50
		7.2.1 Proprietà dell'integrale doppio	52
		7.2.2 Integrali doppi: riduzione per domini semplici	53
	7.3	Calcolo per integrali doppi: cambiamento di variabili	54
	7.4	Integrali tripli	55
		7.4.1 Integrazione per "strati"	55
		7.4.2 Formula di cambiamento delle variabili	56

# 1 Equazioni differenziali

# 1.1 Modelli differenziali

I fisici, per descrivere dei fenomeni, usano la matematica come strumento per formalizzare dei modelli naturali e in particolare vorrei concentrarmi sull'uso delle equazioni differenziali. Per esempio, si denota x(t) lo spostamento nel tempo. Con la derivata prima x'(t) si denota la velocità della particella in quell'istante e con la derivata seconda x''(t) l'accelerazione. Quindi quando andiamo a tradurre matematicamente le leggi che governano modelli naturali può essere naturale dover lavorare con equazioni che coinvolgono una funzione incognita e qualcuna delle sue derivate.

#### Esempio 1.1

La seconda legge del moto di Newton F=ma, che stabilisce la posizione x(t) al tempo t di un corpo di massa m costante, soggetto a una forza F(t), deve soddisfare l'equazione differenziale:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t)$$
 equazione del moto

Quindi le equazioni differenziali nascono per descrivere fenomeni fisici e naturali. Possono essere classificate in modi diversi. Abbiamo infatti:

1. Equazioni differenziali ordinarie (ODE) se vengono coinvolte solo le derivate rispetto ad una sola variabile oppure equazioni differenziali parziali (PDE) se vengono coinvolte derivate parziali dell'incognita rispetto a più variabili.

#### Esempio 1.2

L'equazione:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

rappresenta l'equazione delle onde che modellizza lo spostamento trasversale u(x,t) nel punto x al tempo t di una corda tesa che può vibrare.

2. Classificazione in base all'ordine: l'ordine di una ED è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione.

#### **Esempio** 1.3

L'equazione:

$$\frac{dy^2}{dt^2} + ty^3 - \cos y = \sin t \quad \text{è di ordine 2}$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2t \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = y \frac{dy^2}{dt^2} - e^t \quad \text{è di ordine 3}$$

Possiamo dunque formalizzare i concetti finora introdotti attraverso la seguente definizione:

#### ☼ Definizione 1.1: Equazione differenziale

Si dice equazione differenziale di ordine n un'equazione del tipo

$$F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 (1.1.1)$$

dove y(t) è la funzione incognita e F è una funzione assegnata delle n+2 variabili  $t, y, y', \ldots, y(n)$  a valori reali.

Si dice **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione.

Si dice soluzione (o curva integrale) di (1.1.1) nell'intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  una funzione  $\varphi$ , definita almeno in I e a valori reali per cui risulti:

$$F(t, \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

Infine si dice integrale generale dell'equazione (1.1.1) una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione (1.1.1), eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuti.

#### Esempio 1.4

Consideriamo una popolazione di individui, animali o vegetali che siano, e sia N(t) il numero degli individui. Osserviamo che N è funzione di del tempo t, assume solo valori interi ed è a priori una funzione discontinua di t; tuttavia può essere approssimata da una funzione continua e derivabile purché il numero degli individui sia abbastanza grande. Supponiamo che la popolazione sia isolata e che la proporzione degli individui in età riproduttiva e la fecondità siano costanti. Se escludiamo i casi di morte, immigrazione, emigrazione, allora il tasso di accrescimento coincide con quello di natalità e se indichiamo con  $\lambda$  il tasso specifico di natalità (i.e. il numero di nati per unità di tempo) l'equazione che descrive il modello diventa:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)$$

Questo processo risulta realistico solo in popolazioni che crescono in situazioni ideali e sono assenti tutti i fattori che ne impediscono la crescita.

La stessa equazione compare anche in altri modelli relativi a sistemi fisiologici ed ecologici.

#### Esempio 1.5

Studiamo ora il modello di crescita (dovuto a Malthus, 1978) relativo all'evoluzione di una popolazione isolata in presenza di risorse limitate ed in assenza di predatori o antagonisti

all'utilizzo delle risorse. In questo caso l'equazione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

dove come prima  $\lambda$  è il tasso di natalità mentre  $\mu$  è il tasso di mortalità (cioè rispettivamente il numero di nati e morti nell'unità di tempo). Il numero  $\varepsilon = \lambda - \mu$  è detto **potenziale** biologico.

Ci chiediamo ora come possiamo trovare una soluzione del problema studiato nell'Esempio 1.5. Supponiamo per il momento che sia  $N \neq 0$ . Allora:

$$N = \varepsilon N = \frac{N}{N} = \varepsilon \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\log |N|) = \varepsilon,$$

da cui otteniamo:

$$\log |N(t)| = \varepsilon t + c_1 \Longrightarrow |N(t)| = e^{c_1} e^{\varepsilon t} =: k^2 e^{\varepsilon t}$$

dove abbiamo posto  $e^{c_1} =: k^2 > 0$  costante positiva e arbitraria. A questo punto allora:

$$N(t) = \pm k^2 e^{\varepsilon t}$$

Quindi possiamo dire sicuramente che:

$$N(t) = Ce^{\varepsilon t} \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Tutto questo vale se  $N \neq 0$ ; ma è banale verificare che anche N=0 soddisfa l'equazione di partenza, quindi possiamo dire che l'integrale generale è:

$$N(t) = Ce^{\varepsilon t} = Ce^{(\lambda - \mu)t} \quad C \in \mathbb{R}$$

In particolare dall'ultima riga leggiamo che:

- 1. Se  $\lambda > \mu$  allora N(t) è una funzione che cresce in maniera esponenziale.
- 2. Se  $\lambda < \mu$  allora N(t) è una funzione che decresce fino ad estinguersi.
- 3. Se  $\lambda = \mu$  allora N(t) è una funzione stabile nel tempo.

Osserviamo in particolare che non abbiamo trovato solo una soluzione, ma infinite soluzioni, dipendenti da una costante arbitraria.

# 1.2 Equazioni differenziali di primo ordine

#### 1.2.1 Generalità

Le equazioni differenziali di primo ordine sono le più semplici da trattare e sono di fondamentale importanza in quanto sono alla base di molte applicazioni pratiche. Esse sono della forma:

$$F(t, y, y') = 0 (1.2.1)$$

con F funzione assegnata delle tre variabili t, y, y' a valori reali.

#### Esempio 1.6

La ricerca delle primitive di una funzione f continua su un intervallo I equivale a risolvere l'equazione differenziale y'(t) = f(t) che ammette infinite soluzioni del tipo

$$y(t) = \int f(t) dt + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Si dimostra che l'insieme delle soluzioni di una EDO del primo ordine è costituito da una famiglia di funzioni dipendenti da un parametro  $C: t \mapsto \varphi(t; c)$ . Tale famiglia prende il nome di integrale generale dell'equazione differenziale. La condizione supplementare  $y(t_0) = y_0$  permette di selezionare una soluzione specifica.

#### 🗘 Definizione 1.2: Problema di Cauchy

Il problema di risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
 (1.2.2)

prende il nome di problema di Cauchy.

#### ☼ Definizione 1.3: Forma Normale

Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine si dice in **forma normale** se è scritta nella forma:

$$y'(t) = f(t, y)$$
 (1.2.3)

Per equazioni di questo tipo si può assicurare, sotto larghe ipotesi, che il problema di Cauchy (1.2.2) ammette un'unica soluzione almeno localmente (cioè per valori di t in un intorno di  $t_0$ ).

Le soluzioni dell'ED espresse dall'integrale generale potrebbero talvolta essere definite su insiemi diversi a seconda del valore della costante o anche su insiemi più complicati di un intervallo (es.  $t \neq 0$ ). Tuttavia quando parleremo di soluzione del problema di Cauchy andremo sempre a intendere una funzione che:

- a) è definita su un intervallo I contenente  $t_0$  in cui è assegnata la condizione iniziale.
- b) è derivabile in ogni punto di I e soddisfa l'equazione in ogni punto di I.

#### Esempio 1.7

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} N'(t) = 3N(t) \\ N(0) = 7 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione data da  $N(t) = ce^{3t}$ . Imponendo il dato iniziale otteniamo  $N(t) = 7e^{3t}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$  (o  $\mathbb{R}^+$  se si sta parlando di problema di Cauchy che modellizza un fenomeno fisico).

#### 1.2.2 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono una particolare clase di ED ordinarie del primo ordine del tipo (1.2.3) che sono caratterizzate dalla presenza di una funzione f prodotto di due funzioni, una della sola variabile t e l'altra solo dell'incognita y. Più nel dettaglio, sono equazioni del tipo:

$$y'(t) = a(t)b(y) \tag{1.2.4}$$

con a funzione continua su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  e b funzione continua su un intervallo  $J \subset \mathbb{R}$ . Cerchiamo di capire come determinare l'integrale generale di questo tipo di equazioni. Distinguiamo due casi:

- Se  $\overline{y}$  è soluzione dell'equazione  $b'(\overline{y}) = 0$  allora  $y(t) = \overline{y}$  è soluzione dell'ED (1.2.4). Infatti in tal caso si annulla il secondo membro della (1.2.4) e di conseguenza anche il primo membro (perchè la derivata della funzione costante è zero).
- Supponiamo ora che  $b(y) \neq 0$ . Allora la (1.2.4) può essere riscritta come:

$$\frac{y'}{b(y)} = a(t)$$

Quindi un'ipotetica soluzione soddisfa l'identità:

$$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))} dt = \int a(t) dt + C$$

Con C costante arbitraria. Ora si può effettuare il cambio di variabile dove y'(t)dt = dy:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t) \ dt + C$$

Quindi questo è l'integrale generale dell'equazione (1.2.4). Se B(y) è una primitiva di  $\frac{1}{b(y)}$  e A(t) è una primitiva di a(t), allora l'integrale generale della ED è assegnato dall'equazione (in

forma implicita):

$$B(y) = A(t) + C$$
 con C costante arbitraria

Osserviamo che non è detto che si riesca a ricavare y esplicitamente o a ridurre la precedente equazione in forma normale. In generale, per le equazioni a variabili separabili, vale il seguente:

#### Teorema 1.2.1

Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

con a continua in un intorno I di  $t_0$  e b continua in un intorno J di  $y_0$ . Allora esiste un intorno di  $t_0$  che denoteremo con  $I' \subset I$  e una funzione continua y definita su I' con derivata anch'essa continua su I' tale che y sia soluzione del problema di Cauchy. Inoltre se anche b' è continua su J (o b ha un rapporto incrementale limitato in J anche se non è derivabile) allora tale soluzione è anche unica.

#### Esempio 1.8

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ty^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Prima di tutto si osserva che y=0 è integrale singolare per l'equazione data. Quindi se  $y \neq 0$ , separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int tdt + C$$
$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{t^2}{2} + C$$
$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{C - t^2}}$$

Imponendo il dato di Cauchy si osserva che l'unica soluzione è quella che si ottiene per k=1 e considerando il segno positivo davanti alla radice, cioè

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

# Esempio 1.9

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} yy' = 2\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Integrando ambo i membri della ED proposta si ottiene:

$$\int y \, dy = \int 2 \, dt \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = 2t + C \Longrightarrow y = \pm \sqrt{4t + 2C}$$

quindi per ogni  $C \in \mathbb{R}$  esistono due soluzioni (corrispondenti ai due segni davanti alla radice) definite solo per  $t \geq -\frac{C}{2}$ . Imponendo il dato di Cauchy si ottiene  $y(0) = \pm \sqrt{2C = 1}$ , quindi per compatibilità occorre scegliere il segno positivo davanti alla radice. La soluzione del problema proposto è dunque y = 4t + 1, definita solo per  $t \geq -\frac{1}{4}$ . Andiamo a controllare se sono soddisfatte le condizioni del teorema: a(t) = 2 che è dunque una funzione continua e derivabile ovunque; b(t) = 1/y che è continua e derivabile se  $y \neq 0$ . Quindi il problema di Cauchy per questa equazione ha una e una sola soluzione purché la condizione iniziale non sia del tipo  $y(t_0) = 0$ . Infatti l'equazione non è soddisfatta in questo punto perché si otterrebbe 0 = 2. Quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} yy' = 2\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

non ha soluzione. Quindi abbiamo trovato un esempio di problema di Cauchy in cui viene a mancare l'esistenza di soluzioni. In altre situazioni potrebbe venire a mancare l'unicità delle soluzioni, come mostra l'esempio successivo.

# 1.3 Equazioni lineari del primo ordine

In questa sezione andremo a trattare un caso particolare di ED ordinarie del primo ordine, il caso in cui F sia una funzione lineare rispetto a y e y'. In questo caso tali equazioni si possono scrivere nella forma:

$$a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

con  $a_1, a_0, g$  funzioni continue su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ . Se il coefficiente  $a_1(t)$  non si annulla, allora l'ED lineare si può scrivere nella forma:

$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t) (1.3.1)$$

Anche in questo caso supporremo a e f sia funzioni continue su un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ . Se f non è identicamente nulla, la (1.3.1) è detta **equazione completa**. Se  $f \equiv 0$  invece, l'equazione si dice **omogenea** e di solito, vista l'importanza che riveste tale equazione nella struttura dell'integrale generale, si è soliti indicare con una lettera usualmente la z, la soluzione di tale equazione, che

diventa perciò:

$$z'(t) + a(t)z(t) = 0 (1.3.2)$$

Vale il seguente teorema:

#### Teorema 1.3.1

L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene aggiungendo all'integrale generale dell'equazione omogenea una particolare soluzione dell'equazione completa.

Dal teorema 1.3.1 sappiamo dunque che dobbiamo occuparci prima dello studio dell'equazione omogenea e poi alla ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa.

Ricerca dell'integrale generale dell'equazione omeogenea: Sia A(t) una primitiva di a(t) (tale per cui si abbia A'(t) = a(t)). Moltiplichiamo entrambi i membri di (1.3.2) per  $e^{A(t)}$ ; si ottiene:

$$e^{A(t)}z'(t) + a(t)e^{A(t)}z(t) = 0$$

da cui:

$$\frac{d}{dt}[z(t)e^{A(t)}] = 0$$

e cioè se  $z(t)e^{A(t)}=C$  che si riscrive come:

$$z(t) = Ce^{-\int a(t) \, dt} \tag{1.3.3}$$

Ricerca di una soluzione particolare dell'equazione completa: Si utilizza il metodo delle variazioni delle costanti. L'idea è di ricercare una soluzione simile alla (1.3.3); stavolta però C non è più una costante, ma una funzione C(t) da determinare. Cerchiamo dunque una soluzione della forma:

$$\overline{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

La C(t) deve essere determinata in modo tale che  $\overline{y}$  così strutturata sia la soluzione dell'equazione completa (1.3.1). Quindi osserviamo che:

$$\overline{y}'(t) = C'(t)e^{-A(t)} - C(t)a(t)e^{-A(t)}$$

si deduce inserendo le corrispondenti informazioni all'interno dell'equazione completa (1.3.1)

$$e^{-A(t)}[C'(t)-C(t)a(t)]+a(t)C(t)e^{-A(t)}=f(t)$$

cioè

$$e^{-A(t)}C'(t) = f(t)$$

da cui  $C'(t) = e^{-A(t)} f(t)$  e dunque:

$$C(t) = \int e^{A(s)} f(s) \ ds$$

Quindi la soluzione particolare dell'equazione completa (1.3.1) è:

$$\overline{y}(t) = e^{-A(t)} \int f(s)e^{A(s)} ds$$

Quindi riassumendo l'integrale generale dell'equazione completa (1.3.1) ha la forma:

$$y(t) = ce^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int f(s)e^{A(s)} ds$$
 (1.3.4)

Risoluzione del problema di Cauchy: la costante arbitraria nella (1.3.4) è determinata dalla condizione iniziale  $y(t_0) = y_0$ . Scegliendo una primitiva tale per cui  $A(t_0) = 0$  (cioè  $A(t) = \int_{t_0}^{t_1} a(s) \ ds$ ) l'integrale generale che soddisfa il dato di Cauchy è:

$$y(t) = e^{-A(t)} \left[ y_0 + \int_{t_0}^t f(s)e^{A(s)} ds \right]$$
 (1.3.5)

Vale il seguente teorema:

Teorema 1.3.2 Problema di Cauchy per un'equazione differenziale lineare del primo ordine

Siano a, f funzioni continue su un intervallo  $I \ni t_0$  e sia  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione  $y \in C^1(I)$  (dove  $C^k(I)$  è l'insieme delle funzioni continue derivabili fino all'ordine k e con tutte le derivate fino all'ordine k continue); tale soluzione è assegnata alla (1.3.5).

# 1.4 Equazioni differenziali del secondo ordine

#### 1.4.1 Generalità

#### ♦ Definizione 1.4

Un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine è un'equazione lineare se è del tipo:

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t)$$
(1.4.1)

dove i coefficienti  $a_i$  e il termine noto g sono funzioni definite in un certo intervallo I e continue nello stesso intervallo. L'equazione si dice omogenea se g è identicamente nullo; in caso contrario si dice

completa. L'equazione si dice a coefficienti costanti se i coefficienti  $a_i$  sono costanti (per inciso, il termine noto può invece dipendere da t); in caso contrario si dice a coefficienti variabili. Infine se  $a_1$  non si annulla mai, l'equazione si può riscrivere in forma nornmale come:

$$y''(t) + a(t)y(t) + b(t)y = f(t)$$
(1.4.2)

Osservazione: consideriamo il seguente operatore

$$L: C^2(I) \to C^0(I)$$

$$L: y \mapsto Ly$$

dove gli spazi  $C^k(I)$ , sono gli spazi delle funzioni continue derivabili fino all'ordine k e con tutte le derivate fino all'ordine k continue e dove abbiamo indicato con Ly il primo membro dell'equazione (1.4.1). Prima di tutto l'operatore è ben definito, perché se  $y \in C^2$  si ha che  $Ly \in C^0(I)$  e questo grazie alla continuità dei coefficienti  $a_i$ . Inoltre è facile dimostrare che L è un operatore lineare, nel senso che per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , per ogni  $y_1, y_2 \in C^2(I)$  si ha:

$$L(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L y_1 + \lambda_2 L y_2$$

Questa proprietà dell'operatore L giustifica il motivo per cui l'equazione (1.4.1) è detta lineare.

#### Esempio 1.10

Il più semplice esempio di equazione differenziale del secondo ordine:

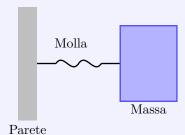
$$y''(t) = 0$$

Essa naturalmente equivale a dire  $y'(t) = C_1$  e da cui  $Y(t) = C_1t + C_2$ , con  $C_1, C_2$  costanti arbitrarie. Quindi le soluzioni di questa equazione sono tutte e soli polinomi di primo grado.

#### **ℰ** Esempio 1.11 (Oscillatore armonico)

Consideriamo un punto materiale di massa n che rimane libero di muoversi in linea orizzontale, attaccato a una molla che esercita una forza di richiamo di tipo elastico. Denotiamo con y(t) la posizione del punto sulla retta (rispetto alla configurazione di riposo). Allora si può dimostrare che y soddisfa l'equazione:

$$my'' = -ky$$



dove k > 0 denota la costante elastica del sistema. Siccome ovviamente  $m \neq 0$ , allora si può riscrivere l'equazione in forma normale come:

$$y'' + \omega^2 y = 0 (1.4.3)$$

dove  $\omega^2 = \frac{k}{m} > 0$ . L'equazione prende il nome dell'oscillatore armonico. L'equazione (1.4.3) è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea e a coefficienti costanti. Se sul punto agisce una forza esterna (dipendente solo dal tempo t) l'equazione si riscrive come:

$$y'' + \omega^2 y = f(t)$$

nel caso venga presa in considerazione lo smorzamento dovuto all'attrito, l'equazione si trasforma in

$$y'' + hy' + \omega^2 y = 0$$

con h > 0. Sarà chiaro in seguito che l'integrale generale di una qualunque equazione lineare del secondo ordine dipende da due parametri arbitrarie. Quindi per determinare una soluzione specifica è necessario conoscere due condizioni iniziali.

#### ♪ Definizione 1.5

Si dice **problema di Cauchy** per un'equazione differenziale lineare del secondo ordine (per semplicità la consideriamo espressa in forma normale), il problema

$$\begin{cases} y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$
 (1.4.4)

#### Teorema 1.4.1 Esistenza e unicità per il problema di Cauchy (1.4.4)

Siano a, b, f funzioni continue in un intervallo  $I \ni t_0$ . Allora per ogni  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$  il problema di Cauchy (1.4.4) ha una e una sola soluzione  $y \in C^2(I)$ .

Questo risultato è analogo al corrispondente enunciato per le equazioni differnziali lineari del primo

ordine. Anche in questo caso, la soluzione sarà ottenuta imponendo le condizioni iniziali nell'espressione che individua l'integrale generale dell'equazione (1.4.1). Quindi il problema si riduce a comprendere come si possa determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del secondo ordine (1.4.1).

#### 1.4.2 La struttura dell'integrale generale

L'equazione Lz = 0 si dice equazione omogenea associata all' equazione completa Ly = f. Il seguente teorema permette di determinare facilmente la struttura dell'integrale generale dell'equazione (1.4.1). Questo risultato non usa il fatto che Ly = f sia un'equazione differenziale e non dipende dall'ordine dell'equazione, sfrutta solamente il fatto che L sia un operatore lineare.

#### Teorema 1.4.2 Struttura dell'integrale generale dell'equazione linaere completa

Si può dimostrare che:

- 1. L'insieme delle soluzioni all'equazione omogenea Lz = 0 in un dato intervallo I è uno spazio vettoriale di dimensione 2 (sottospazio di  $C^2(I)$ ).
- 2. L'integrale generale dell'equazione completa si ottiene sommando l'integrale generale dell'equazione omeogene e una soluzione particolare dell'equazione completa.

#### Esempio 1.12

Si consideri l'equazione  $t^2z'' - 3tz' + 3z = 0$ . Sia  $z_1 = t$ . Allora  $z_1'(t) = 1, z_2''(t) = 0$  da cui  $t^20 - 3t \cdot 1 + 3t = -3t + 3t = 0$ ; quindi  $z_1$  è una soluzione delli'equazione data. Sia ora  $z_2 = t^3$ . Allora  $z_2'(t) = 3t^2, z_2''(t) = 6t$  da cui inserendo le informazioni nell'equazione si ottiene  $t^26t - 3t3t^2 + 3t^3 = 6t^3 - 9t^3 + 3t^3 = 0$ ; quindi  $z_2$  è una soluzione dell'equazione data. Le due soluzioni sono linearmente indipendenti, quindi l'integrale generale dell'equazione data à:

$$z(t) = C_1 t + C_2 t^3$$

al variare di  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Nel caso precendente è particolarmente facile vedere che le due soluzioni proposte sono linearmente indipendenti; In generale può non essere così immediato. Il seguente critico generale permette di decidere qualora due soluzioni proposte siano o meno linearmente indipendenti.

#### Teorema 1.4.3 Determinante wroskiano e indipendenza

Siano  $z_1, z_2$  due funzioni  $C^2(I)$  soluzioni dell'equazione lineare omogenea:

$$Lz \equiv z'' + a(t)z' + b(t) = 0$$

nell'intervallo I. Allora esse sono linearmente indipendenti in  $C^2(I)$  se e soltanto se la seguente

matrice:

$$W(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) & z_2(t) \\ z'_1(t) & z'_2(t) \end{pmatrix}$$

detta matrice Wronskiana ha determinante diverso da zero per ogni  $t \in I$  (dalla regolarità delle soluzioni, è sufficiente che il determinante di tale matrice sia diverso da zero in un punto  $t_0 \in I$ ).

Quindi per determinare l'integrale generale dell'equazione lineare completa occorre:

- 1. Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea, quindi serve determinare due soluzioni  $z_1(t), z_2(t)$  dell'equazione omogenea linearmente indipendenti;
- 2. Determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. A questo punto l'integrale generale dell'equazione completa è dato da:

$$\overline{y}(t) + C_1 z_1(t) + C_2 z_2(t)$$

al variare di  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

#### 1.4.3 Equazioni differenziali del secondo ordine omogenee a coefficienti costanti

Consideriamo l'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$z''(t) + az'(t) + bz(t) = 0$$
 con a, b costanti

In analogia con il caso delle equazioni differenziali del primo ordine, che ammette gli esponenziali come soluzioni, si cerca anche qui una soluzione del tipo  $t\mapsto e^{rt}$  con  $r\in\mathbb{C}$ . Sostituendo tale soluzione nell'equazione omogenea si ottiene:

$$z'(t) = re^{rt} \qquad z''(t) = r^2 e^{rt}$$

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0$$

Siccome l'esponenziale è sempre positiva, affinché l'equazione precedente abbia soluzione è necessario che la costante r sia una radice dell'equazione di secondo grado:

$$r^2 + ar + b = 0$$

che viene detta equazioen caratteristica dell'equazione differenziale. Si possono avere tre casi in base al segno del discriminante:

Discriminante	Soluzione 1	Soluzione 2
$\Delta > 0$	$e^{r_1t}$	$e^{r_2t}$
$\Delta = 0$	$e^{rt}$	$te^{rt}$
$\Delta < 0$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$

#### Esempio 1.13

Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} z'' - 2z' - 3z = 0 \\ z(0) = 1 \\ z'(0) = 2 \end{cases}$$

L'equazione proposta è differenziale ordinaria del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti e omogenea. La sua equazione caratteristica è:

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

che ha soluzioni  $r_1 = 3, r_2 = -1$ . Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}$$

al variare di  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$z(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$z'(0) = 3C_1 - C_2 = 2$$

da cui

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 3C_2 = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = \frac{1}{4} \\ C_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy proposto è:

$$z(t) = \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-t}$$

#### 1.4.4 Equazioni lineari del secondo ordine non omogenee: Metodo di somiglianza

Consideriamo l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti:

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t)$$
 con  $a, b$  costanti

nel caso in cui il termine noto f abbia una forma particolare. Un metodo più generale si basa sul metodo di variazione delle costanti, che permette di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Quando f è semplice si cerca una soluzione che assomiglia nel senso che andremo a specificare:

• Se  $f(t) = p_r(t)$  è un polinomio di grado r, si cerca una soluzione che sia anch'essa un polinomio, con le seguenti caratteristiche:

- Se  $f(t) = Ae^{\lambda t}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . In tal caso, si cerca una soluzione del tipo:  $y(t) = e^{\lambda t} \gamma(t)$  con  $\gamma(t)$  polinomio di grado opportuno.
- Se infine  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$  e  $2\lambda + a = 0$  allora si ha  $\gamma(t) = A$  da cui:

$$\gamma(t) = \frac{A}{2}t^2 \qquad \overline{y}(t) = \frac{A}{2}t^2e^{\lambda t}$$

Quindi si ha una soluzione particolare:

$$\overline{y}(t) = Ct^2 e^{\lambda t}$$

con  $C \in \mathbb{R}$ . Osserviamo che in questa classe particolare di termini noti del tipo  $Ae^{\lambda t}$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$  rientrano anche in casi:

$$\cos \omega t, \sin \omega t, e^{\mu t} \cos \omega t, e^{\mu t} \sin \omega t \quad \text{con } \omega \in \mathbb{R}$$

#### Esempio 1.14

Si trovi una soluzione particolare dell'equazione differenziale:

$$y'' + 3y = t + 2\cos t$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea dobbiamo cercare una funzione f(t) tale che:

$$f(t) = t + 2\cos t$$

Questo termine è la somma di due funzioni:

- $\bullet$  t, un polinomio di primo grado
- $2\cos t$ , una funzione trigonometrica

Per questo motivo cerchiamo una soluzione particolare come la somma di due soluzioni, ciascuna ciascuna associata a uno dei due termini:

$$y_p = y_{p1} + y_{p2}$$

Quindi andiamo per step e cerchiamo di trovare una soluzione per il termine t e un'altra per il termine  $2\cos t$ .

• Per il termine t che è un polinomio di primo grado, si cerca una funzione del tipo:

$$y_{A_1}(t) = C_1 t + C_0$$

dove A, B sono coefficienti da determinare. Calcoliamo le derivate:

$$y'_{\Delta 1}(t) = C_1$$

$$y_{A1}^{\prime\prime}(t) = 0$$

Ora sostituiamo le derivate nell'equazione differenziale:

$$y'' + 3y = t$$
$$0 + 3(C_1t + C_0) = t$$
$$3C_1 + 3C_0 = t$$

Quindi  $C_1 = 1/3$  e  $C_0 = 0$ . Quindi la soluzione per il termine t è:

$$y_{p1}(t) = \frac{1}{3}t$$

• Procediamo ora per  $2\cos t$  che è una funzione trigonometrica. Si cerca una soluzione del tipo:

$$y_{A2}(t) = A\gamma(t)e^{\lambda t}$$

dove  $\gamma(t)$  è ancora sconosciuta,  $\lambda = i$  e A = 2. Quindi:

$$y_{A2}(t) = 2\gamma(t)e^{it}$$

Troviamo  $\gamma(t)$ , dato a=0 e b=3, si ha:

$$\gamma'' + (2\lambda + a)\gamma' + (\lambda^2 + \lambda a + b)\gamma = A$$
 
$$\gamma'' + 2i\gamma'' + 2\gamma = 2$$
 
$$2\gamma = 2 \Longrightarrow \gamma = 1$$

Quindi la soluzione per il termine  $2\cos t$  è:

$$y_{p2}(t) = 2e^{it}$$

Di conseguenza sommando le due soluzioni particolari si ottiene la soluzione particolare dell'equazione non omogenea:

$$y_p(t) = \frac{1}{3}t + 2e^{it}$$

# 2 Calcolo infinitesimale per le curve

#### 2.1 Richiami di calcolo vettoriale

Per lo studio del calcolo infinitesimale in più variabili occorre un certo uso del calcolo vettoriale. In questo paragrafo andiamo a richiamare le nozioni di base che verranno incontrate nel seguito. Ambientiamo tutto in  $\mathbb{R}^n$ ; gli elementi di  $\mathbb{R}^n$  li chiamano vettori e vengono indicati con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Gli  $x_i$ ,  $i = 1, \dots n$  si dicono componenti del vettore. Il modulo di un vettore è definito come:

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

mentre si dice un versore un vettore di modulo unitario e si indica con:

$$vers(x) = \frac{x}{|x|}$$

 $\mathbb{R}^n$  è dotato della base canonica:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

e ogni vettore  $x \in \mathbb{R}^n$  si può scrivere come combinazione lineare della base canonica:

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n = \sum_{i=1}^n x_je_j$$

I versori della base canonica sono soliti indicati con i, j, k (in  $\mathbb{R}$ ). Per due vettori  $x, y \in \mathbb{R}^n$  si definisce il prodotto scalare:

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Il risultato di un prodotto scalare è uno scalare. Se  $x \cdot y = 0$  allora i due vettori si dicono ortogonali. Si usa la notazione  $x \cdot y = |x||y|\cos\theta$ , dove  $\theta$  è l'angolo tra i due vettori.

$$\cos\theta = \frac{u\cdot v}{|u||v|}$$

Infinite introduciamo anche un'altra operazione che agisce tra due vettori di  $\mathbb{R}^3$  e che da come risultato un vettore. Questa operazione è il prodotto vettoriale. Si indica con  $u \times v$ .

# 2.2 Funzioni a valore vettoriale, alcune definizioni

#### ♦ Definizione 2.1

Sia  $f:A\subset\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$  con A dominio e f la legge che ad ogni elemento di A associa un solo elemento di f(A) (chiamata immagine di A tramite f) anch'esso reale.

- Si dice *funzione ad una variabile* una funzione definita su  $A \in \mathbb{R}$ .
- Si dice *funzioni di più variabili* una funzione definita su  $A \subset \mathbb{R}^n$  con n > 1.
- Si dice **funzioni a valori reali** una funzione che ha immagine  $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ .
- Si dice **funzioni a valori vettoriali** una funzione che ha immagine  $f(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ .

# 2.3 Calcolo differenziale e integrale per funzioni a valori vettoriali

Concentriamoci ora su elementi del tipo  $f:A\subset\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^m, m>1$ . Questo è il caso più semplice di funzioni a valori vettoriali. Nel caso m=2,3 vedremo che le funzioni hanno il significato geometrico di curve nel piano o nello spazio. Sia dunque  $r:I\mapsto\mathbb{R}^m$  con  $I\subset\mathbb{R}$  un intervallo. Sia  $t_0\in I$  e sia  $I\in\mathbb{R}^m$ .

#### ♪ Definizione 2.2

Si dice che:

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = l$$

se

$$\lim_{t \to t_0} |r(t) - l| = 0 \tag{2.3.1}$$

Geometricamente la (2.3.1) significa che la distanza tra r(t) e l tende a zero per t che tende a  $t_0$  e questo è possibile solo se le distanze tra le componenti di r(t) e l tendono a zero rispettivamente. Quindi se  $r(t) = (r_1(t), r_2(t), \ldots, r_m(t))$  con  $r_i(t)$  funzioni a valori reali, si ha:

$$\lim_{t \to t_0} r(t) = l \Longleftrightarrow \lim_{t \to t_0} r_i(t) = l_i \quad i = 1, \dots, m$$
(2.3.2)

#### Esempio 2.1

Sia  $r: I \to \mathbb{R}^3$  definita da  $r(t) = (\cos t + \pi, e^t - 1, \sin t^2)$ . Calcoliamo  $\lim_{t\to 0} r(t)$ . Dalla (2.3.2) si ha che:

$$\lim_{t \to 0} r(t) = \lim_{t \to 0} (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = \left(\lim_{t \to 0} (\cos t + \pi), \lim_{t \to 0} (e^t - 1), \lim_{t \to 0} (\sin t^2)\right) = (1 + \pi, 0, 0)$$

#### ♪ Definizione 2.3

Sia  $r: I \mapsto \mathbb{R}^m$  e sia  $t_0 \in I$ . Si dice che r è derivabile in  $t_0$  se esiste finito:

$$r'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{r(t_0 + h) - r(t_0)}{h}$$

$$= \left(\lim_{h \to 0} \frac{r_1(t_0 + h) - r_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \to 0} \frac{r_m(t_0 + h) - r_m(t)}{h}\right)$$

$$\stackrel{(2.3.2)}{=} (r'_1(t_0), \dots, r'_m(t_0))$$

I limiti di funzioni a valori vettoriali si fanno componente per componente. Quindi anche la derivata di una funzione a valori vettoriali si calcola si fa componente per componente: il vettore derivata è il vettore delle derivate delle componenti.

#### ♣ Definizione 2.4

Se r è derivabile in tutto I e inoltre la funzione r' è continua in I, si dice che r è di classe  $C^1(I)$  e si scrive  $r \in C^1(I)$ . Analogamente si definiscono le derivate di ordine successivo e le funzioni di classe  $C^k(I)$  per k > 1.

#### Teorema 2.3.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se  $r:[a,b]\mapsto \mathbb{R}^m$  è di classe  $C^1([a,b])$  allora:

$$\int_{b}^{a} r'(t)dt = r(b) - r(a)$$

Un altro risultato importante è il seguente:

$$\left| \int_{a}^{b} r(t)dt \right| \leq \int_{a}^{b} |r(t)|dt$$

Osserviamo che il primo membro è l'integrale di una funzione a valori vettoriali, mentre il secondo è l'integrale di una funzione a valori scalari, cioè |r(t)|. In entrambi i casi, i moduli che compaiono nella formula sono moduli di vettori e non valori assoluti.

# 2.4 Curve regolari

Consideriamo un punto materiale che si muove nello spazio tridimensionale lungo una certa traiettoria; le sue coordinate sono funzioni del tempo, quindi la sua posizione all'istante t può essere descritta come da una funzione di questo tipo:

$$r:[t_1,t_2]\mapsto \mathbb{R}^3$$

dove r = (x, y, z) e

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

con  $t \in [t_1, t_2]$ . Quindi si può riscrivere:

$$r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

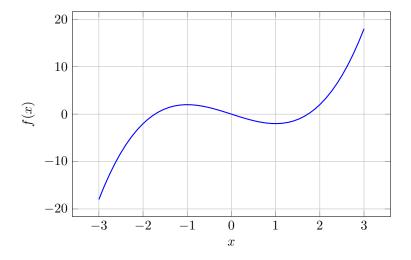
usando la notazione vettoriale che abbiamo usato in precedenza:

$$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

#### ♪ Definizione 2.5:

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo. Si dice arco di curva continua o cammino in  $\mathbb{R}^m$  una funzione  $r: I \to \mathbb{R}^m$  che sia continua, nel senso che le sue componenti sono funzioni continue.

Se si pensa alla variabile t come al tempo, allora r(t) è la posizione del punto materiale al tempo t.



#### ♦ Definizione 2.6

Un arco di curva continua si dice **chiusa** se r(a) = r(b) con I = [a, b] (cioè punto iniziale e punto finale coincidono). Si dice **semplice** se non ripassa mai dallo stesso punto. Si dice **piana** se esiste un piano che contiene il suo sostegno.

Si dice **regolare** se l'arco di una curva  $r: I \mapsto \mathbb{R}^m$  tale che  $r \in C^1(I)$  e  $r'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ .

Quindi il vettore derivato esiste in ogni punto, varia con continuità e non è mai nullo. Di

conseguenza, per le curve regolari è ben definito il versore tangente:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

che inoltre dipende con continuità da t.

# 2.5 Lunghezza di un arco di curva

Sia  $r:[a,b]\mapsto\mathbb{R}^m$  la parametrizzazione di un arco di curva  $\gamma$  continuo e consideriamo una partizione:

$$\mathcal{P} = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n_1}, t_n = b\}$$

dell'intervallo [a, b] con  $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$  non necessariamente equispaziati. Alla partizione  $\mathcal{P}$  risulta associata la poligonale inscritta in  $\gamma$  costituita da n segmenti di estremi  $R(t_{i-1})$  e  $R(t_i)$ . Sia  $\mathcal{L}(P)$  la lunghezza di tale poligonale, da cui si ha:

$$\mathcal{L}(P) = \sum_{i=1}^{n} |r(t_i) - r(t_{i-1})|$$

Siccome intuitivamente il segmento è la linea più breve che congiunge due punti, l'idea è che  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  approssimi la lunghezza di  $\gamma$ ; per cui facendo variare in tutti i modi possibili la partizione  $\mathcal{P}$  e prendendo l'estremo superiore delle  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  si ottenga la lunghezza dell'arco di curva  $\gamma$ . Si ha perciò la seguente definizione:

#### ♣ Definizione 2.7

Si dice che  $\gamma$  è **rettificabile** se

$$\sup \mathcal{L}(\mathcal{P}) = \mathcal{L}(\gamma) < \infty$$

dove il sup è preso su tutte le partizioni  $\mathcal{P}$  dell'intervallo [a,b]. In tal caso si dice **lunghezza** di  $\gamma$ .

#### Teorema 2.5.1

Sia  $r:[a,b]\mapsto \mathbb{R}^m$  la parametrizzazione di un arco di curva  $\gamma$  regolare. Allora  $\gamma$  è rettificabile e:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{a}^{b} |r'(t)| dt$$

Una classe particolare di curve piane è data dalle curve che si ottengono come grafici di funzioni di una variabile, ossia y = f(x) per  $x \in [a, b]$ . In tal caso la curva può essere scritta in forma

parametrica ponendo:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$$

per  $t \in [a, b]$ . Una curva espressa come grafico di una funzione f ha le seguenti proprietà:

- 1. è continua se e solo se f è continua in [a, b];
- 2. è regolare se e solo se f è derivabile in [a, b].
- 3. è regolare a tratti se e solo se f è a tratti derivabile in [a, b].
- 4. non è mai chiusa
- 5. è sempre semplice

Nel caso di una curva espressa come grafico di una funzione, per calcolare la lunghezza della curva si usa la formula:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + f'(t)^{2}} dt = \int_{a}^{b} ||(1, f'(t))|| dt$$

Curve piane in forma polare: una forma alternativa per descrivere una curva piana è data dalle curve in forma polare. Una curva in forma polare è data da un'equazione del tipo:

$$\rho = f(\theta), \qquad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

da cui possiamo osservare che:

$$r'(\theta) = (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta - f(\theta)\cos\theta)$$

da cui

$$|r'(\theta)| = \sqrt{f'(\theta)^2 + f(\theta)^2}$$

# 2.6 Il parametro arco

Si osserva che la lunghezza di un arco di una curva  $r(\tau)$  per  $\tau \in [t_0, t]$  è una funzione di t e si ha

$$s(t) = \int_{a}^{t} |r'(\tau)| d\tau$$

se si è in grado di calcolare esplicitamente tale funzione e poi invertirla, esprimendo t in funzione di s, allora è possibile riparametrizzare la curva in funzione del parametro s detto **parametro arco** o ascissa curvilinea. Il vantaggio è che s è esattamente lo spazio percorso dal punto mobile quando il parametro passa da 0 a s.

# 2.7 Integrali di linea

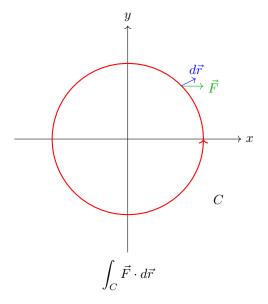
#### 🗘 Definizione 2.8: Integrale di linea

Sia  $r:[a,b]\mapsto \mathbb{R}^m$  un arco di curva regolare di sostegno  $\gamma$  e sia f una funzione a valori reali, definita su un sottoinsieme  $A\subset \mathbb{R}^m$  contenente  $\gamma$ , cioè  $f:\mathbb{R}^m\mapsto \mathbb{R}$  con  $\gamma\subset A$ . Allora si dice integrale di linea (di prima specie) di f lungo  $\gamma$ :

$$\int_{\gamma} f \, ds = \int_{a}^{b} f(r(t))|r'(t)|dt$$

Significato geometrico dell'integrale di linea di prima specie: se m=2, f è positiva e continua e  $\gamma$  è parametrizzata con il parametro arco, il precedente integrale ha un'interessante interpretazione geometrica. Infatti sia S la superficie in  $\mathbb{R}^3$  formata dai segmenti che congiungono i punti di  $\gamma$  con il grafico di f. Visto che  $\gamma$  è parametrizzata con il parametro arco, se pensiamo di sviluppare in un piano (x,y) la superficie S in modo da far coincidere  $\gamma$  con l'asse delle x allora il parametro arco coincide con l'ascissa x e l'integrale  $\int_{\gamma} f ds$  rappresenta l'area della superficie sviluppata e quindi l'area della superficie originale.

L'integrale di f di prima specie lungo  $\gamma$  è invariante per parametrizzazioni equivalenti ed anche per cambiamento di orientazione su  $\gamma$ .



#### Esempio 2.2

Nel piano  $\mathbb{R}^2$  consideriamo la funzione a due variabili  $f(x,y)=x^2+y^2$  e vogliamo determinare

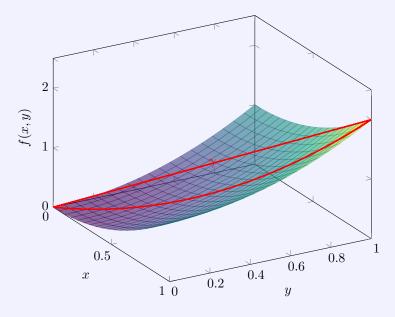
l'integrale di linea di f lungo l'arco di curva  $\gamma$  di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

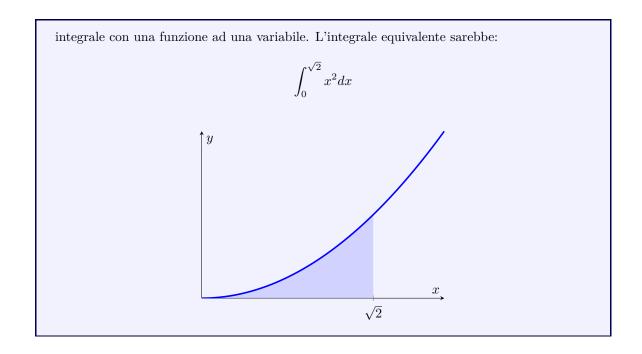
con  $t \in [0,1]$ . La curva  $\gamma$  è un segmento di retta che congiunge i punti (0,0) e (1,1). La parametrizzazione di  $\gamma$  è data da r(t) = (t,t) con  $t \in [0,1]$ . Calcoliamo l'integrale di linea di f lungo  $\gamma$ :

$$\begin{split} \int_{\gamma} f(x,y) ds &= \int_{a}^{b} f(x(t),y(t)) \sqrt{(x')^{2} + (y')^{2}} dt \\ &= \int_{0}^{1} (t^{2} + t^{2}) \sqrt{1^{2} + 1^{2}} dt \\ &= \int_{0}^{1} 2t^{2} \sqrt{2} dt \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} [t^{3}]_{0}^{1} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{split}$$

Il significato geometrico dell'integrale di linea di f lungo  $\gamma$  è l'area della superficie formata dai segmenti che congiungono i punti di  $\gamma$  con il grafico di f.



**Osservazione**: Se ruotassimo la curva  $\gamma$  attorno all'asse z di  $-\frac{\pi}{4}$ , otterremo un normalissimo



# 3 Calcolo infinitesimale per funzioni reali a più variabili

# 3.1 Grafico, linee di livello e domini

#### ♦ Definizione 3.1

Sia  $f:A\subset\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$  una funzione a due variabili. Si dice **grafico** di f l'insieme:

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Un altro modo per rappresentare graficamente una funzione reale a più variabili reali è tramite gli insiemi di livello.

#### ♦ Definizione 3.2

Sia  $f:A\subset\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$  una funzione a più variabili. Allora gli insiemi di livello (o ipersuperfici di livello) per una funzione reale di più variabili sono gli insiemi

$$x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c$$

al variare di  $c \in \mathbb{R}$ .

Se n=2 si parla di linee di livello alla superficie di equazione z=f(x,y),

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in A\}$$

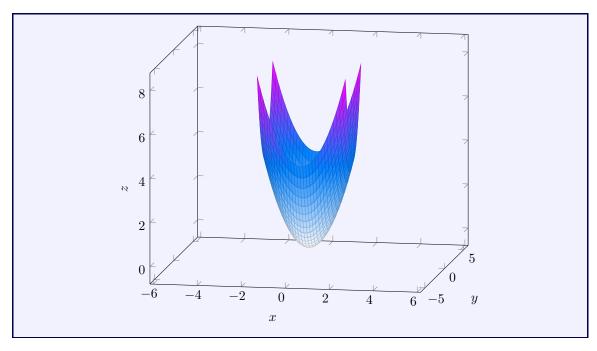
mentre se n=3 si parla di superfici di livello alla funzione di tre variabili f(x,y,z).

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in A\}$$

Le curve di livello rappresentano il luogo dei punti dove f ha valore costante, quindi danno informazioni sulla funzione implicitamente. Ad esempio sono linee che vengono tracciate sulle carte topografiche ad indicare luoghi che hanno la stessa altitudine oppure nelle carte delle previsioni del tempo ad indicare le isobare, cioè i luoghi che hanno la stessa pressione atmosferica.

#### Esempio 3.1

Sia  $f(x,y) = x^2 + y^2$ . Questa superficie prende il nome di **paraboloide**. È una funzione definita su tutto  $\mathbb{R}^2$  ed è sempre positiva o nulla. Il paraboloide ha simmetria radiale.



Se pensiamo di andare a selezionare la precedente superficie con il piano y=0 otteniamo una parabola di equazione  $z=x^2$ . Naturalmente anche le funzioni a più variabili sono definite all'interno di un dominio naturale che è il pià grande sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  dove ha senso scrivere la f.

#### Esempio 3.2

Trovare il dominio della seguente funzione:

$$f(x,y) = \sqrt{\tan xy} \sin e^{\sqrt{xy}}$$

Si osserva che la radice quadrata è ben definita se il suo argomento è definito o nullo. L'esponenziale è ben definito ovunque così come la funzione seno; la funzione tangente invece è ben definita se il suo argomento è diverso da  $\frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Dunque le condizioni da porre sono:

$$\begin{cases} \tan xy \ge 0 \\ xy \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ xy \ge 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k\pi \le xy < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ xy \ne \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ xy \ge 0 \end{cases}$$

Quindi la condizione da porre è:

$$k\pi \le xy < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$$

#### 3.2 Limiti e continuità

#### ♣ Definizione 3.3

Data ua successione  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  di punti in  $\mathbb{R}^n$  e un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  si dice che:

$$x_k \to x_0 \text{ per } k \to \infty \text{ se } |x_k - x_0| \to 0 \text{ per } k \to \infty$$

Si dice **intorno sferico di centro**  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e raggio r > 0 l'insieme:

$$U_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$$

r si dice raggio dell'intorno;  $x_0$  si dice centro dell'intorno.

# ☼ Definizione 3.4: Definizione successionale di limite o limiti per successioni

Sia  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  definita almeno in un intorno sferico di  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  escluso al più il punto  $x_0$  stesso. Sia  $L \in \mathbb{R}^*$  dove  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \pm \infty$ . Allora diremo che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

1

 $\forall \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$  di punti tale che  $x_k \to x_0$  per  $k \to \infty$  (con  $x_k \neq x_0$  per ogni k) si ha che  $\lim_{k \to \infty} f(x_k) = L$ 

Più in generale si ha la seguente:

#### ☼ Definizione 3.5: Definizione topologica di limite

Sia  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  definita almeno in un intorno sferico di  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  (escluso al più  $x_0$  stesso e sia  $L \in \mathbb{R}$ ). Si dice che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

1

 $\forall \varepsilon > 0, \, \exists \delta > 0 \text{ tale che se } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ allora } |f(x) - L| < \varepsilon.$ 

Si dice che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$$

1

 $\forall M>0, \exists \delta>0$ tale che se $0<|x-x_0|<\delta$ allora  $f(x)>M\;(f(x)<-M)$ 

#### ☼ Definizione 3.6: Continuità

Si dice che  $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  è continua in  $x_0$  se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Come conseguenza del teorema sui limiti valgono i teoremi della continuità della somma, del prodotto, del quoziente di funzioni continue (quando hanno senso e il denominatore non si annulla) e della composizione di funzioni continue.

# 3.3 Analisi delle forme di indeterminazione

Se  $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$  allora significa che f si avvicina a L indefinitamente quando la distanza tra x e  $x_0$  si avvicina a zero *indipendentemente* da come si avvicina x a  $x_0$ . Quindi in generale si distinguono due casi:

- Il limite esiste.
- Il limite non esiste.

Se il limite esiste allora l'esistenza del limite va dimostrata; in particolare, può essere utile passare a coordinate polari. Infatti in questo caso, per esempio n=2 si riesce a mettere in evidenza la dipendenza di f(x,y) dalla distanza tra (x,y) e (0,0) attraverso  $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ . A questo punto è indispensabile che una volta operata la trasformazione, la  $f(\rho,\theta)$  non dipenda più da  $\theta$ . Vale il seguente criterio generale per funzione di due variabili:

#### ☼ Definizione 3.7: Criterio generale

Per dimostrare  $f(x,y) \to L$  se  $(x,y) \to (0,0)$  è sufficiente riuscire a scrivere una maggiorazione del tipo:

$$|f(\rho, \theta) - L| \le g(\rho) \quad g(\rho) \to 0$$

L'essenziale è dunque che g non dipenda da  $\theta$ .

Se  $(x,y) \to (x_0,y_0) \neq (0,0)$  il criterio si può ancora applicare con  $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$  cioò si pone:

$$x = x_0 + \rho \cos \theta$$

$$y = y_0 + \rho \sin \theta$$

Naturalmente, non riuscire a dimostrare questa maggioranza **non significa** che il limite NON esiste. Il criterio può essere generalizzato al caso n variabili.

#### Esempio 3.3

Si calcoli:

$$\lim_{(x,y)\to (1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2}$$

• Soluzione 1: Ricordiamo che

$$f \to 0 \iff |f| \to 0$$

A questo punto dunque osservando che  $\frac{y^2}{z^2+y^2} \leq 1$  per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ :

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 |\log x|}{(x-1)^2 + y^2}$$
$$= \lim_{(z,y)\to(0,0)} \frac{y^2 |\log (z+1)|}{z^2 + y^2}$$
$$\le \lim_{(z,y)\to(0,0)} |\log (z+1)| = 0$$

• Soluzione 2: Si può anche passare a coordinate polari ponendo  $x=1+\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta.$  Si ottiene

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 \sin^2 \theta \log 1 + \rho \cos \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \to 0} \rho \sin^2 \theta \cos \theta = 0$$

Poiché  $\sin^2\theta\cos\theta$  è una quantità limitata in modulo da 1.

I limiti possono essere usati anche nello studio della continuità delle funzioni a più variabili.

#### Esempio 3.4

Data la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0\\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- 1. Si stabilisca se f è continua (0,0).
- 2. Si stabilisca se è continua in  $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|y|\leq x\leq 1\}$
- (1) Per  $x \neq 0$  la funzione è continua. Per concludere occorre analizzare la continuità della funzione data lungo la retta x=0. Per fare questo bisogna calcolare il limite per  $x\to 0$  con y qualunque di f(x,y) e verificare se esso è uguale a 0 che è il valore assunto lungo l'asse delle y. Questo è falso dato che consideriamo la curva  $y=\sqrt{x}$  allora f(x,y) vale constantemente 1 e dunque non può tendere a 0 al tendere di  $x\to 0$ . Dunque la funzione data non è continua in (0,0).
- (2) Usando la condizione imposta dal dominio D si ottiene:

$$0 \le \lim_{x \to 0} \frac{y^2}{x} \le \lim_{x \to 0} x = 0$$

Non dobbiamo considerare i valori assoluti, perché dato il dominio sappiamo sicuramente che x > 0. A questo punto il teorema del confronto permette di concludere che il limite considerato

esiste e fa 0, dunque la funzione è continua in D. Notiamo tramite questo esempio che una funzione può essere discontinua in un punto mentre una sua restrizione ad un sottoinsieme del dominio, si può escludere un insieme rilevante di curve lungo le quali calcolare i limiti.

Per mostrare invece il limite **non esiste** per  $x \to x_0$  invece, è sufficiente determinare due curve passanti per  $x_0$  lungo le quali la funzione tende a due limiti diversi.

#### Esempio 3.5

Determinare il dominio di definizione della funzione:

$$f(x,y) = x^{-1}[\sin^2 x + y^2] \tan(e^{x+y})$$

e studiarne il comportamento per  $x \to 0$  e  $y \to 0$ .

Innanzitutto la funzione  $\tan{(e^{x+y})}$  è definita per  $e^{x+y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Se  $k \in \mathbb{Z}^-$  questo è sicuramente verificato quindi basterà imporre:

$$e^{x+y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

Inoltre il denominatore non deve essere nullo, quindi:

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \neq \log\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \land x \neq 0\}$$

Per quanto riguarda il comportamento per  $(x,y) \to (0,0)$ , dimostriamo che il limite:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)}} \frac{\left(\sin^2 x + y^2\right)\tan\left(e^{x+y}\right)}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali il limite tende a due valori diversi.

Si ha ad esempio, sulla curva  $y = \sqrt{x}$ :

$$\lim_{x \to 0} f(x, \sqrt{x}) = \frac{\left(\sin^2 x + x\right) \tan\left(e^{x + \sqrt{x}}\right)}{x} = \tan 1$$

D'altra parte restringiamo sulla curva y = x e calcoliamo il limite:

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \frac{(\sin^2 x + x^2) \tan(e^{2x})}{x} = \sin x + x$$

Questo basta per concludere che il limite non esiste.

# 4 Calcolo differenziale per funzioni reali a più variabili

# 4.1 Nozioni topologiche di base

Si ricordi la definizione di intorno sferico già introdotto precedentemente (3.3).

#### ♪ Definizione 4.1

Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Un punto  $x_0 \in E$  si dice:

- interno ad E se  $\exists U_r(x_0) \subseteq E$
- esterno ad E se  $\exists U_r(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash E$
- di frontiera per E se  $\forall U_r(x_0), U_r(x_0) \cap E \neq \emptyset$  e  $U_r(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \backslash E) \neq \emptyset$

#### ♪ Definizione 4.2

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **aperto** se ogni suo punto è interno all'insieme; si dice **chiuso** se il complementare è aperto.

L'unione di una famiglia qualsiasi (anche infinita) di aperti e l'intersezione di una famiglia finita di aperti sono aperti. L'unione finita di chiusi e l'intersezione qualsiasi (anche infinita) di chiusi è ancora un chiuso. Non è difficile rendersi conto che l'unione qualsiasi di due chiusi può non essere un chiuso e l'unione qualsiasi di due aperti può non essere un aperto. Sia  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  una funzione definita e continua in tutto  $\mathbb{R}^n$ . Allora gli insiemi:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

sono insieme aperti; invece:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \ge 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le 0\}$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

sono chiusi.

#### Esempio 4.1

Gli insiemi di livello di una funzione f(x,y) sono insiemi del tipo f(x,y) = C e quindi sono chiusi se f è continua!

# 4.2 Derivate parziali, derivabilità e piano tangente

Come abbiamo imparato da Analisi 1, la derivata di una funzione in un punto ha un interessante significato geometrico: essa rappresenta la pendenza della retta tangente al grafico della funzione in quel punto. inoltre la funzione è derivabile se e soltanto se è ben definita la retta tangente in quel punto. Cercheremo ora di estendere questo concetto a funzioni a più variabili. Innanzitutto la definizione di derivata per una funzione a più variabili vista come limite del rapporto incrementale non è più applicabile, intanto non è ovvio che cosa sia un incremento in più dimensioni e secondariamente anche se si arrivasse ad una definzione accettabile, non si sa cosa voglia dire dividere per un vettore (la controparte di h nella definizone scalare di derivata). La presenza di più variabili richiede di considerare le derivate parziali, che sono le derivate rispetto ad una variabile tenendo fisse le altre.

#### ♦ Definizione 4.3

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$  una funzione di due variabili. La quantità (se esiste):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}{h}$$

si chiama derivata parziale rispetto ad x. calcolata nel punto  $(x_0, y_0)$ . Analogamente sarà lo stesso per y.

#### ♪ Definizione 4.4

Il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f rispetto a x e y si chiama **gradiente** di f e si indica con:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

#### ♪ Definizione 4.5

Una funzione  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  si dice **derivabile** in un punto  $(x_0, y_0) \in A$  se esiste in quel punto esistono tutte le derivate parziali; f si dice derivabile in tutto A se è derivabile in ogni punto di A.

In alcuni casi, quando si applicano le derivate parziali ci si può ricondurre alle regole di derivazione che si possono usare per funzioni a singola variabili trattendo le altre variabili come costanti. Ma in alcuni casi non è possibile e bisogna ricondurci alla definizione di rapporto incrementale.

#### Esempio 4.2

Sia  $f(x,y) = y\sqrt{x}$ . Calcolare se esiste la derivata parziale rispetto a x in (0,0). Si avrebbe:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{2\sqrt{x}} = \frac{0}{0}$$

ci troviamo davanti ad una forma di indecisione che potrebbe farci pensare che la derivata non esista. L'unica via percorribile è quella di calcolare il limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Osserviamo come il limite esista e sia uguale a 0. Contrariamente da quello che si possa pensare 0/h non è una forma di indecisione perché al numeratore si ha uno zero "secco" mentre al denominatore troviamo h che è una quantità che almeno prima del processo del limite è diverso da zero. Detto ciò la quantità  $\frac{0}{h}$  è sempre 0 e quindi dopo il passaggio al limite non si ha nessun problema.

#### Esempio 4.3

Sia f:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare (se esiste)  $f_x(0,0)$ .

Un errore grave e molto comune è dire: f in (0,0) vale 1 e quindi la derivata parziale rispetto a x vale 0. Questo ragionamento è errato perché non si può calcolare la derivata parziale in un punto se non si conosce il comportamento della funzione in un intorno di quel punto. Dunque calcoliamo il limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 0^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 1}{h}$$

E quest'ultimo limite non esiste perché se si fa il passaggio al limite si ottiene  $-\infty$  se  $h \to 0^+$  e  $+\infty$  se  $h \to 0^-$ . Dunque la derivata parziale di f in (0,0) non esiste e dunque f non è derivabile nella direzione dell'asse delle x.

Intuitivamente si poteva ragionare anche in questo modo: la funzione dell'esempio precedente non è continua quindi ci si aspetta che non sia derivabile. Tuttavia non è sempre così, ci sono funzioni che sono continue ma non derivabili in un punto. Quindi il comportamento di funzioni a due variabili assume situazioni che non hanno una controparte in una dimensione.

#### Esempio 4.4

Sia f la funzione di due variabili definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcolare le derivate parziali in (0,0). Per lo stesso motivo dell'esempio precedente, utilizziamo la definizione di derivata parziale in un altro punto. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) + f(0,0)}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) + f(0,0)}{h} = 0$$

Quindi le derivate parziali in (0,0) esistono e sono uguali a 0.

D'altra parte è facile notare che la funzione non è continua in (0,0) perché basta prendere la retta y=x lungo la quale f vale 1/2 e quindi abbiamo trovato un esempio di funzione che è derivabile ma non continua in un punto.

## 4.3 Piano tangente

In una dimensione sappiamo che la derivabilità è equivalente all'esistenza della retta tangente a una superficie. Ci poniamo il problema di estendere questo concetto a più variabili, quindi di vedere se esiste il piano tangente. È intuitivo pensare che se tale piano esiste, deve essere "tangente" alla funzione in quel punto e quindi "approssimare" almeno localmente la funzione a cui è tangente (per esempio  $y = \sin x$  per x vicino a 0 è approssimata dalla sua retta tangente y = x e infatti si ha che  $\sin x \sim x$  se  $x \to 0$ ). Facciamo il seguente ragionamento: supponiamo di avere la nostra superficie z = f(x, y) e consideriamo il piano verticale  $y = y_0$ ; sezioniamo la superficie con il piano: troveremo la curva data da  $z = f(x, y_0)$  (con  $y = y_0$  perché una curva in  $\mathbb{R}^3$  è sempre individuata da due equazioni). È facile immaginare che la retta tangente a tale curva, chiamiamola  $r_1$ , apparterrà al piano tangente che stiamo considerando. Analogamente, se sezioniamo la superficie con il piano verticale  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$  e  $x = x_0$  troveremo una curva individuata dalle equazioni  $x = x_0$  e  $x = x_0$ 

$$r_1 \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

$$r_2 \begin{cases} z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

quindi il piano che coincide entrambe le rette sarà:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$
(4.3.1)

La domanda che ci facciamo è la seguente: siamo sicuri che questo piano così come l'abbiamo costruito partendo da un ragionamento intuitivo sia effettivamente tangente alla nostra superficie nel senso di approssimarla localmente? La risposta purtroppo è negativa come mostra il prossimo esempio:

#### Esempio 4.5

Sia f la funzione di due variabili definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Abbiamo visto prima come calcolare le derivate parziali in (0,0) e che esse sono uguali a 0, dunque il presunto piano tangente coincide con il piano z=0 cioè il piano orizzontale xy. Ma come abbiamo già rimarcato la funzione non è continua nell'origine, addirittura lungo la bisettrice y=x la funzione vale 1/2 e quindi non è possibile che il piano z=0 non sia tangente alla funzione data nel senso che non approssima la funzione localmente. Quindi la derivabilità non è sufficiente per garantire l'esistenza del piano tangente nè la continuità.

# 4.4 Differenziabilità

Se una funzione f è differenziabile accadrà che l'incremento di f sarà uguale all'incremento calcolato lungo il piano tangente più un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla lunghezza dell'incremento (h,k) della variabili indipendentemente. In simboli:

$$\underbrace{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)}_{\text{incremento di }f} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \underbrace{h}_{\text{h}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \underbrace{k}_{\text{h}}}_{\text{incremento calcolato lungo il piano tangente}} + \underbrace{\underbrace{o(\sqrt{h^2+k^2})}_{\text{infinitesimo di ordine superiore}}}_{\text{infinitesimo di ordine superiore}}$$

$$(4.4.1)$$

dove per definizione  $o(\sqrt{h^2 + k^2})$  è tale che:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(\sqrt{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

#### ♦ Definizione 4.6

Se vale (4.4.1) allora diremo che f è **differenziabile** in  $(x_0, y_0)$ .

Se f è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  allora è f è derivabile in  $(x_0, y_0)$  e continua in  $(x_0, y_0)$ . Ricordiamo ancora che se f è continua non implica che f differenziabile.

#### ♦ Definizione 4.7

Se f è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ , si dice **differenziale** di f in  $(x_0, y_0)$  l'applicazione lineare di  $df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  definita da  $df(x_0, y_0) : (h, k) \to \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$ 

La quantità  $\nabla f(x_0, y_0) \cdot (h, k)$  rappresenta l'incremento della funzione nel passare da  $(x_0, y_0)$  a  $(x_0 + h, y_0 + k)$  lungo il piano tangente di f in  $(x_0, y_0)$ .

#### Teorema 4.4.1

Siano  $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  con A aperto e  $(x_0, y_0) \in A$ . Supponiamo che le derivate parziali esistano in un intorno di  $(x_0, y_0)$  e siano continue in  $(x_0, y_0)$ . Allora f è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  e in particolare, se le derivate parziali di f esistono e sono continue in A allora f è differenziabile in ogni punto di A. Quindi vale l'implicazione:

 $f \in \mathcal{C}^1 \Longrightarrow f$  differenziabile in A

# 5 Recupera sezione

# 6 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili a valori vettoriali

Abbiamo visto che un modo per rappresentare una curva nel piano o nello spazio è darla in forma parametrica, ovvero dare una funzione  $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$  oppure  $f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$  tale che il sostegno della curva sia rappresentato dai punti (x(t),y(t)) o (x(t),y(t),z(t)), dipendenti da un parametro t. Cosa accade per le superfici? Per le superfici abbiamo le seguenti modalità di rappresentazione:

- rappresentazione in forma implicita f(x, y, z) = 0;
- rappresentazione in forma esplicita o in forma di grafico z = g(x, y);
- rappresentazione in forma parametrica  $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

Quindi riguardo alla rappresentazione parametrica di superfici, le tre coordinate di un punto mobile sulla superficie dipenderanno stavolta da due parametri, coerentemente col fatto che un punto vincolato a muoversi su una superficie ha due gradi di libertà. Quindi:

#### ♦ Definizione 6.1

Una superficie in forma parametrica è una funzio<br/>en  $r:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$  definita da

$$(u,v) \mapsto (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

#### Esempio 6.1

La sfera di raggio  $\mathbb{R}$  e centra l'origine ha rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta & \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi] \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

# 6.1 Limiti, continuità e differenziabilità per funzioni di più variabili a valori vettoriali

#### ♦ Definizione 6.2

Sia  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  definita in un intorno del punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  salvo al più il punto  $x_0$  stesso e sia  $L \in \mathbb{R}^m$ . Allora si dice:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Se accade che

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - L| = 0$$

Se  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ , possiamo scrivere

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad conf_i : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, peri = 1, 2, \dots m$$

Le funzioni  $f_i$  si dicono **componenti di f**.

In maniera naturale si introduce il concetto di funzione continua e si dimostra che una funzione f è continua solo se e solo se tutte le sue componenti sono continue.

#### ♦ Definizione 6.3

Diremo che f è differenziabile in  $x_0$  se lo è in tutte le sue componenti. Esplicitamente questo signififca che i = 1, 2, ..., m valgono le relazioni:

$$f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) = \sum_{j=i}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) + o(|h|) \ perh \to 0$$

Queste m relazioni si possono anche scrivere in maniera compatta in forma matriciale. Infatti rappresentando f e i punti di  $\mathbb{R}^n$  come vettori colonna delle loro componenti si ha

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}, x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

A questa possiamo introdurre la matrice **Jacobiana** di f che ha per righe i gradienti delle componenti di f calcolate nel punto  $x_0$  (che si indica con  $Jf(x_0)$  oppure anche con  $DF(x_0)$ ).

$$Jf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$Jf(x_0)h = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1, h \rangle \\ \langle \nabla f_2, h \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_n, h \rangle \end{pmatrix}$$

La differenziabilità si può riscrivere tramite la seguente relazione:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Jf(x_0)h + o(h)$$
 per  $h \to 0$ 

In questo caso la quantità  $Jf(x_0)h$  indica il prodotto matriciale (quindi righe e colonne) tra la matrice jocobiana di f calcolata in  $x_0$ e l'incremento h (che è un vettore).

#### Teorema 6.1.1

Condizione sufficiente affinché  $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$  con A aperto sia differenziabile in A è che tutti gli elementi della matrice jacobiana siano funzioni continue in A

#### Teorema 6.1.2

Siano  $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ,  $g: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$  e supponiamo che la funzione composta  $g \circ f$  sia ben definita in un intorno C di  $x_0 \in A$ , cioè si abbia  $g \circ f: C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ . Supponiamo che f sia differenziabile in  $x_0$  e g è differenziabile in  $y_0 = f(x_0)$ . Allora la composta  $g \circ f$  risulta differenziabile in  $x_0$  e la sua matrice Jacobiana si ottiene come prodotto matriciale delle matrici Jacobiane di f e g, calcolate nei punti  $x_0$  e  $f(x_0)$  rispettivamente, cioè

$$J(g \circ f) = Jg(f(x_0))Jf(x_0)$$

#### 6.2 Ottimizzazione vincolata

#### 6.2.1 Caso n = 2

Formalizziamo prima di tutto il problema di estremo vincolato nel caso in cui la fiunzione obiettivo da ottimizzare dipende da due variabili legate da un'equazione di vincolo. Per semplicità lavoriamo con funzione definite su tutto il piano. Il problema dunque che ci poniamo è quello di minimizzare o massimizzare una funzione f(x,y) di classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$  sotto la condizione di vincolo g(x,y)=b. Nello spazio f(x,y) rappresenta il grafico di una superficie, il vincolo rappresenta in generale una curva. È chiaro che un punto di massimo o minimo per f soggetta al vingolo g non necessariamente è punto di massimo o minimo (nemmeno locale) per la funzione f in generale. Quindi non sitratta di andare a calcolare gli estremi liberi di f e vedere se qualcuno di questi cade nel vincolo imposto ma proprio di ottimizzare (e quindi massimizzare o minimizzare) la restrizione di f al vincolo g che in generale è appunto una funzione diversa da f. La situazione più favorevole la si ha quando il vincolo definisce esplicitamente una funzione g o g o g o popure quando la curva si esprime in

forma parametrica  $t \mapsto (x(t), y(t))$ . Allora in tal caso il problema è ricondotto a cercare gli estremi della funzione h(x) = f(x, y(x)) oppure h(y) = f(x(y), y) oppure h(t) = f(x(t), y(t)).

#### Esempio 6.2

$$MAX \ f(x,y) = x^2 + 9y - 9y^2 \ s.t. \ x^2 = y \iff MAX \ f(x,x^2) = x^2 + 9x^2 - 9x^3 \ s.t. \ x \in \mathbb{R}$$

#### Esempio 6.3

$$MAX \ f(x,y) = x^2 + 9y - 9y^4 \ s.t. \ x^2 + y^2 = 4$$
 Proviamo a trasformare in coordinate polari: 
$$MAX \ f(\rho,\theta) = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho \sin \theta - 9\rho^4 \sin^4 \theta \ s.t. \ \rho^2 = 4 \rightarrow \rho = 2$$
 Quindi la funzione che massimizziamo diventa:  $MAX \ f(2,\theta)$ 

#### 6.2.2 Caso n = 2: metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange funziona quando il vincolo è rappresentato da una curva regolare assegnata in qualsiasi forma: parametrica o cartesiana (implicita o esplicita). Cerchiamo di illustrare il metodo cercando di stabilire, in anologia con il caso di estremi liberi, una condizione necessaria del primo ordine. Nel caso degli estremi liberi, il teorema di Fermat indica che se un punto è di estremo, il suo gradiente si deve annullare e questo è abbastanza ragionevole perché il punto non ha vincoli e potendosi muovere in tutte le direzioni, il teorema di Fermat ci dice che tutte le derivate lungo ogni direzione ammissibile si devono annullare. Nel caso di un vincolo, ovviamente non sarà più così e ci saranno delle direzioni ammissibili e le derivata direzionale lungo queste direzioni ammissibili si devono annullare. Per capire quali siano queste direzioni ammissibili, supponiamo che un vincolo descriva un arco di curva regolare con retta tengente nella direzione del versore v. In tal caso la derivata parziare di f nella direzione di v si deve annullare, cioè  $(x^*, y^*)$  è un punto di estremo vincolato si dovrà avere:

$$\langle \nabla f(x^*, y^*), v \rangle = 0$$

che esprime l'ortogonalità tra il gradiente di f e il versore v. Ma ricordando che il gradiente di una funzione in ogni punto è ortogonale alla direzione della direzione della retta tangente alle sue curve di livello, se anche il vincolo è sufficientemente regolare anche

$$\langle \nabla g(x^*, y^*), v \rangle = 0$$

Ma questo significa che il gradiente di f e il gradiente di g sono paralleli, cioè esiste un numero reale  $\lambda$  tale che:

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

Formalmente si ha dunque:

#### Teorema 6.2.1 Moltiplicatori di Lagrange

Siano  $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2)$  e  $(x^*, y^*)$  punto di estremo vincolato per f sotto il vincolo g(x, y) = b. Allora se  $(x^*, y^*)$  è regolare per il vincolo, cioè  $\nabla g(x^*, y^*) \neq 0$ , allora esiste un numero reale  $\lambda \in \mathbb{R}$  (detto moltiplicatore di Lagrange) tale che:

$$\nabla f(x^*, y^*) = \lambda \nabla g(x^*, y^*)$$

ribadiamo dunque che la relazione di parallelismo tra i gradienti di f e g esprime il fatto che se  $(x^*, y^*)$  verifica le ipotesi del teorema, allora la derivata di f lungo la tangente del vincolo si deve annullare, e in tal caso diremo che  $(x^*, y^*)$  è un **punto critico vincolato**. Questa è la corretta generalizzazione del teorema di Fermat nel caso degli estremi vincolati. Introducendo la funzione  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, \lambda)$  detta **Lagrangiana** definita da:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - b)$$

vuol dire che:

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} f_x - \lambda g_x \\ f_y - \lambda g_y \\ -g(x, y) + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) \\ -g(x, y) + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### Esempio 6.4

MIN/MAX f(x,y) = xy s.t.  $x^2 + 4y^2 = 1$ 

Si ha dunque:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x^2 + 4y^2 - 1)$$

Allora calcoliamo il gradiente:

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y - 2\lambda x \\ x - 8\lambda y \\ -x^2 - 4y^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque si ha il sistema:

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 8\lambda y = 0 \\ -x^2 - 4y^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Se provassimo a ricavare  $\lambda$  dalla prima equazione, si avrebbe:

$$\lambda = \frac{y}{2x}$$

$$\lambda = \frac{x}{8y}$$

Proviamo a mettere a sistema le due equazioni:

$$\frac{x}{8y} = \frac{y}{2x} \Rightarrow 8y^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm 2y$$

Sostituendo x = 2y nella terza equazione si ha:

$$-(2y)^2 - 4y^2 + 1 = 0 \Rightarrow -4y^2 - 4y^2 + 1 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Otteniamo quindi due casi:

$$x = 2y \Rightarrow x = \pm 2\frac{\sqrt{2}}{4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

I due punti quindi sono  $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$  e  $(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ . Nel caso in cui x=-2y si ha:

$$x=-2y\Rightarrow x=\pm 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

I due punti quindi sono  $(x,y)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$  e  $(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ . Per tanto abbiamo quattro punti critici vincolati:

$$P_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), P_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), P_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Ora calcolo il valore della funzione obiettivo nei punti critici:

$$f(P_1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f(P_2) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$f(P_3) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$f(P_4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{4} = -\frac{1}{4}$$

Valore massimo di f(x,y)=xy sul vincolo  $x^2+4y^2=1$  è:  $f(P_1)=f(P_2)=\frac{1}{4}$  in  $P_1$  e  $P_2$ ; valore minimo:  $f(P_3)=f(P_4)=-\frac{1}{4}$  in  $P_3$  e  $P_4$ .

# 7 Calcolo integrale per funzioni di più variabili

### 7.1 Integrali doppi

Sia  $f:[a,b]\to\mathbb{R}$  una funzione a più variabili continua. In Analisi 1 abbiamo introdotto l'integrale definito come il limite di somme di Riemann,

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b-a}{n} f(\xi)$$

dove l'intervallo [a,b] è stato diviso in n intervallini della stessa ampiezza  $\frac{b-a}{n}$  attraverso una partizione equispaziata e  $xi_k$  è qualunque punto appartenente al k-esimo intervallino; il limite viene fatto all'infiittirsi della partizione (per  $n\to\infty$ ). La definizione di integrale attraverso le somme di Riemann si può dare anche a funzioni limitate. Se tale limite esiste finito e non dipende dalla partizione e dai punti  $\xi_k$  scelti allora si dice che f è integrabile su [a,b]. L'idea di integrale doppio nasce come la naturale estensione di tali concetti. Sia  $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$  una funzione limitata definita su un rettangolo. Prendiamo una partizione equispaziata dall'intervallo [a,b] in n intervalli di ampiezza  $\frac{b-a}{n}$  cioè sia:

$$x_h = a + h \frac{b-a}{n}$$
  $h = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 

tale che

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

e allo stesso modo prendiamo una partizione equispaziata dell'intervallo [c,d] in m intervalli di ampiezza  $\frac{d-c}{m}$ , cioè:

$$y_k = c + k \frac{d-c}{n}$$
  $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$ 

tale che

$$y_0 = c < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$$

queste due partizioni induconon una partizione del rettangolo  $[a,b] \times [c,d]$  in  $n^2$  rettangolini che denomineremo

$$I_{hk} = [x_h, x_{h+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$$
  $h, k = 1, 2, 3, \dots, n$ 

ciascuno di un'area pari a:

$$|I_{hk}| = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{n} = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$$

Sia  $p_{hk}(x_{hk}, y_{hk})$  un generico punto appartenente al generico  $I_{hk}$ , allora la somma di Riemann

$$s_n = \sum_{h,k=1}^n |I_{hk}| f(p_{hk}) \tag{7.1.1}$$

La somma di Riemann quindi rappresenta il volume di una certa regione tridimensionale che sta tra il grafico f e il piano xy e che è delimitata dalla superficie.

#### ♦ Definizione 7.1

Si dice che la funziene  $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$  è integrabile nel rettangolo  $R=[a,b]\times[c,d]$  se esiste il limite finito  $\lim_{n\to\infty}s_n$  data da (7.1.1) e inoltre tale limite non dipende dalla scelta dei punti  $p_{hk}$ . In tal caso tale limite si dice **integrale doppio** di f su R e si indica con:

$$\iint_{R} f(x,y)dxdy = \lim_{n \to \infty} \sum_{h,k=1}^{\infty} |I_{hk}| f(p_{hk})$$

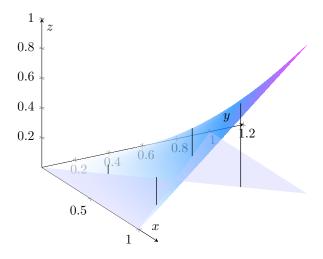


Figura 1:  $\iint f(x,y)dA$  su  $R = [0,1] \times [0,1]$  con f(x,y) = xy

#### Esempio 7.1

Cosideriamo la funzione  $f:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$  definita da:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

se i punti  $p_{hk}$  sono scelti con prima coordinata tra i razionali allora presa una partizione

equispaziata del rettangolo  $R:=[0,1]\times[0,1]$  con rettanoglini  $\frac{1}{n^2}$  si ha

$$s_n = \sum_{h,k=1}^{n} |I_{hk}| f(p_[hk]) = \sum_{h,k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{h,k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2} n^2 = 1$$

mentre se i punti  $p_{hk}$  sono scelti con prima coordinata tra i numeri irrazionali allora si ha che  $s_n = 0$ . Quindi il limite non esiste e la funzione f non è integrabile su R.

Vale il seguente teorema:

#### Teorema 7.1.1

Se  $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$  è continua su  $[a,b]\times[c,d]$  allora è integrabile.

Teorema 7.1.2 Di riduzione dell'integrale doppio su un rettangolo a integrali iterati

Sia  $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$  continua, allora il suo integrale doppio su  $R:[a,b]\times[c,d]$  si può calcolare come integrale iterato nel modo seguente.

$$\iint_R f(x,y) dx dx y = \int_a^b \left( \int_c^d f(x,y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x,y) dx \right) dy$$

il significato dell'ultimo teorema è che di fatto si può ridurre il calcolo di un integrale doppio su un rettangolo a due integrali semplici di una variabile in sequenza. Mentre si fa il primo integrale naturalmente la variabile rispetto alla quale non si sta integrando va trattata come una costante.

#### Esempio 7.2

Si calcoli

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} y e^{xy} dx dy$$

Calcoliamo usando il metodo appena scoperto:

Calcoliamo l'integrale interno:

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} y e^{xy} dx dy = \int_0^2 \left( \int_0^1 y e^{xy} dx \right) dy$$
$$= \int_0^2 \left( [e^{xy}]_0^1 \right) dy$$
$$= \int_0^2 (e^y - y) dy$$
$$= [e^y - y]_0^2$$
$$= e^2 - 3$$

#### Teorema 7.1.3 Funzioni a variabili separate

Quando si integra su un rettangolo una funzione prodotto di due funzioni ciascuna in una sola delle due variabili, per esempio f(x)g(y) allora è facile vedere che l'integrale doppio si calcola come il prodotto di due integrali semplici:

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} \underbrace{f(x)g(y)}_{h(x,y)} dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x)g(y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x)g(y)dx \right) dy$$
$$= \left( \int_c^d g(y)dy \right) \left( int_a^b f(x)dx \right)$$

e analogamente per l'altra integrazione.

# 7.2 Funzioni integrabili su domini non rettangolari

Sia  $f:R\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$  una funzione continua su un dominio R che non è necessariamente un rettangolo. Si potrebbe di considerare un rettangolo  $\Omega\subseteq R$  e calcolare

$$\iint_{R} \tilde{f} dx dy$$

dove  $\tilde{f}$  è una funzione continua che coincide con f su  $\Omega$  e che si annulla fuori da  $\Omega$ . Tuttavia in generale, senza nessuna ipotesi di continuità su  $\Omega$ , f non risulterà integrabile, nemmeno se continua e limitata, come mostra il prossimo esempio.

#### Esempio 7.3

Sia

$$\Omega := \{ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x \in \mathbb{Q} \}$$

e si consideri

$$\iint_{\Omega} 1 dx dy$$

Allora estendendo la funzione integranda (che è constantemente uguale a 1) a zero fuori dalla  $\Omega$  otteniamo la stessa funzione del primo esempio del capitolo, che sappiamo già non essere integrabile.

Sulla base di questo esempio (si noti che la funzione costante 1 è continua e limitata) ci si convince che occorre individuare condizioni sul dominio  $\Omega$  che garantiscano l'integrabilità (almeno) di una funzione continua e limitata.

#### ♦ Definizione 7.2

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice y-semplice se è del tipo

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \le y \le g_2(x)\}\$$

con  $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$  due funzioni continue.

Geometricamente un insieme y-semplice è tale che se si taglia E con una retta del tipo x = c con  $c \in [a, b]$ , si ottiene un segmento verticale che varia con continuità al variare della retta.

#### ♦ Definizione 7.3

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice x-semplice se è del tipo

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \le x \le h_2(y)\}\$$

con  $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$  due funzioni continue.

Geometricamente un insieme x-semplice è tale che se si taglia E con una retta del tipo y = c con  $c \in [c, d]$ , si ottiene un segmento orizzontale che varia con continuità al variare della retta.

#### ♦ Definizione 7.4

Un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice **semplice** se è sia x-semplice che y-semplice. Si dice **regolare** se è unione di un numero finito di insiemi semplici.

#### Esempio 7.4

I rettangoli e i quadrati sono domini semplici. I triangoli sono domini semplici. L'insieme

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \sqrt{x} \le y \le 1\}$$

è sia x-semplice che y-semplice, quindi è un dominio semplice. L'insieme

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4, |x| \le y\}$$

non è un dominio semplice perché non è né x-semplice né y-semplice, ma può essere ottenuto come unione di due insiemi semplici: quindi è un dominio regolare.

Un insieme semplice è per definizione anche chiuso e limitato, quindi lo stesso vale per un insieme regolare. In particolare una funzione definita su insieme regolare, dal teorema di Weirstrass, ha sempre massimo e minimo, dunque è limitata.

#### Teorema 7.2.1

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un dominio regolare e  $f:\Omega \to \mathbb{R}$  continua. Allora f è integrabile in  $\Omega$ .

#### ☼ Definizione 7.5: Insieme misurabile

Un insieme limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  si dice **misurabile** (secondo Peano-Jordan) se la funzione costante 1 è integrabile su  $\Omega$ . In tal caso chiameremo **misura** o **area** di  $\Omega$  il numero:

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} 1 dx dy$$

#### 7.2.1 Proprietà dell'integrale doppio

Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un insieme limitato e misurabile. Siano f e g integrabili su  $\Omega$  e sia  $c \in \mathbb{R}$  una costante. Allora valgono le seguenti proprietà:

• Linearità:

$$\iint_{\Omega} (f(x,y) + g(x,y)) dx dy = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy + \iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$$
$$\iint_{\Omega} (cf(x,y)) dx dy = c \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$$

• Positività e monotonia:

$$f \ge 0 \quad \text{in} \quad \Omega \Longrightarrow \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \ge 0$$
 
$$f \ge g \quad \text{in} \quad \Omega \Longrightarrow \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \ge \iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$$
 
$$|f(x,y)| \le c \Longrightarrow \left| \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \right| \le \iint_{\Omega} |f(x,y)| dx dy \le c |\Omega|$$

Valgono altre proprietà di additività e monotonia sull'integrale rispetto al dominio di integrazione.

#### 7.2.2 Integrali doppi: riduzione per domini semplici

#### Teorema 7.2.2

Sia  $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}$  una funzione continua e sia  $\Omega$  un dominio x-semplice,cioè

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

con  $h_1,h_2:[c,d] \to \mathbb{R}$  funzioni continue. Allora l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{c}^{d} \left( \int_{h_{1}(y)}^{h_{2}(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

Analogamente se  $\Omega$  è un dominio y-semplice, cioè

$$\Omega := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

con  $g_1,g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$  funzioni continue. Allora l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{a}^{b} \left( \int_{g_{1}(x)}^{g_{2}(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Se  $\Omega$  è sia x-semplice che y-semplice, valgono entrambe le formule.

#### Esempio 7.5

Si calcoli

$$\iint_A 2x dx dy$$

con

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1\}$$

Il dominio di A è y-semplice, allora possiamo riscrivere il dominio come:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \le y \le \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right\}$$

da cui

$$\iint_{A} 2x dx dy = \int_{0}^{1} 2x dx \left( \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{1 - \frac{x^{2}}{4}}} dy \right) = \int_{0}^{1} 2x \left( \sqrt{1 - \frac{x^{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$= \int_{0}^{1} 2x \sqrt{1 - \frac{x^{2}}{4}} dx - \sqrt{3} \int_{0}^{1} x dx = -\left(1 - \frac{x^{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} 4 \Big|_{0}^{1} - \frac{\sqrt{3}}{2} x^{2} \Big|_{0}^{1}$$

$$= -\frac{3}{2} \sqrt{3} + \frac{8}{3}$$

## 7.3 Calcolo per integrali doppi: cambiamento di variabili

#### Teorema 7.3.1

Sia  $D\subseteq\mathbb{R}^2$  un dominio regolare,  $f:D\mapsto\mathbb{R}$  una funziona continua e  $T':D'\mapsto D$  una trasformazione di coordinate, più precisamente un diffeomorfismo globale tra D e D' con (x,y)=T(u,v) e:

$$\begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases}$$

Allora

$$\iint_D f(x,y) \; dx \; dy = \iint_{D'} f(g(u,v),h(u,v)) |det JT(u,v)| du dv$$

dove

$$JT(u,v) = \begin{pmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{pmatrix}$$

indica la matrice Jacobiana della trasformazione.

#### Esempio 7.6

Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_D (y^2 + 1) dx dy$$

dove D è la parte dell'ellisse  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \le 1\}$  contenuta nel secondo quadrante. Si può usare il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{\rho}{2} \sin \theta \end{cases}$$

con  $\rho \in [0,1]$  e  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ . Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana:

$$J = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta & \frac{\rho}{2} \cos \theta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J = \frac{\rho}{2}\cos^2\theta + \frac{\rho}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}\rho$$

Quindi l'integrale diventa:

$$\begin{split} \iint_D y^2 + 1 \; dx dy &= \int_0^1 \rho \; d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} \rho \left( \frac{1}{4} \rho^2 \sin^2 \theta + 1 \right) d\theta \\ &= \frac{1}{8} \left( \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) + \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \rho d\rho \right) \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{8} \frac{\rho^4}{4} \bigg|_0^1 \left( \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \right) \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{2} \bigg|_0^1 \theta \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{128} + \frac{\pi}{8} = \frac{17}{128} \pi \end{split}$$

## 7.4 Integrali tripli

Tutto quanto detto fino ad ora si può generalizzare per dimensioni superiori. Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

con D dominio regolare e  $g_1, g_2: D \to \mathbb{R}$  continue. Allora se anche  $f: \Omega \to \mathbb{R}$  è una funzione continua e integrabile su  $\Omega$ , allora l'integrale triplo si può calcolare mediante la formula:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) \ dxdydz = \iint_{D} \left( \int_{g_{1}(x,y)}^{g_{2}(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

#### 7.4.1 Integrazione per "strati"

Sia ora

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h_1 \le z \le h_2, (x, y) \in \Omega(z)\}$$

con  $z \in [h_1, h_2]$  e  $\Omega(z)$  un dominio regolare nel piano. Allora se  $f : \Omega \to \mathbb{R}$  continua e integrabile su  $\Omega$  allora l'integrale triplo si può calcolare tramite la formula:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{h_1}^{h_2} \left( \iint_{\Omega(z)} f(x, y, z) dx dy \right) dz$$

#### Formula di cambiamento delle variabili

#### Teorema 7.4.1

Sia  $D\subseteq\mathbb{R}^3$  un dominio regolare,  $f:D\mapsto\mathbb{R}$  una funzione continua e  $T':D'\mapsto D$  una trasformazione di coordinate, più precisamente un diffeomorfismo globale tra D e D', con (x, y, z) = T(u, v, w) e

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Allora

allora 
$$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{D'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w) \det JT(u,v,w) du dv dw)$$