



# Esercizi di Sistemi

Università di Verona  
Imbriani Paolo -VR500437  
Professor Francesco Visentin

November 5, 2024

## Contents

<b>1</b>	<b>Esercizi su risposta libera e impulsiva</b>	<b>3</b>
1.1	Esercizio 1 . . . . .	3
1.2	Esercizio 2 . . . . .	5
1.3	Esercizio 3 . . . . .	7

# 1 Esercizi su risposta libera e impulsiva

## 1.1 Esercizio 1

### Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t) - 5v'(t) - 6v(t) = u'(t) + 5u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Per calcolare la risposta libera iniziamo a calcolare il polinomio caratteristico:

$$s^2 - 5s - 6 = (s + 1)(s - 6)$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6$$

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$

$$v_l(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t}$$

Ora derivo  $v(t)$ :

$$v'(t) = -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t} = 3 \\ -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -c_1 + 6c_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \frac{17}{7} \\ c_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$v_l(t) = \frac{17}{7} e^{-t} + \frac{4}{7} e^{6t}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t)$$

Essendo  $n \neq m$  il sistema non è proprio perciò  $d_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} h(t) &= \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le derivate di  $h(t)$  (Questa in basso è un'equazione unica):

$$\begin{aligned} h'(t) &= (-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta_0(t) \\ h''(t) &= (d_1 e^{-t} - 36d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + (-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_0(t) + \dots \\ &\quad \dots + (-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_0(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta'(t) \end{aligned}$$

Ora poniamo  $v(t) = h(t)$  e  $u(t) = \delta(t)$  nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) - 5h'(t) - 6h(t) = \delta'(t) + 5\delta(t)$$

Sostituiamo ed elimino i gradini:

$$\begin{aligned} &\overbrace{(d_1 e^{-t} - 36d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t)(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta'(t) - \dots}^{h''(t)} \\ &\dots - 5 \overbrace{[(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta_0(t)]}^{h'(t)} - 6 \overbrace{[(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t)]}^{h(t)} \\ &= \delta'(t) + 5\delta(t) \end{aligned}$$

Ora raccolgo le funzioni delta e le metto a sistema. Ricordiamo di imporre  $t = 0$ :

$$\begin{cases} \cancel{\delta'(t)}(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) = \cancel{\delta'(t)} \\ 2\delta_0(t)(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}) - 5\delta_0(t)(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) = 5\delta(t) \\ \begin{cases} d_1 + d_2 = 1 \\ -2d_1\delta_0(t) + 12d_2\delta_0(t) - 5d_1\delta_0(t) + 5d_2\delta_0(t) = 5\delta(t) \end{cases} \\ \begin{cases} d_1 = 1 - d_2 \\ -7d_1\delta_0(t) + 17d_2\delta_0(t) = 5\delta(t) \end{cases} \\ \begin{cases} d_1 = \frac{1}{2} \\ d_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\delta_{-1}(t) + \frac{1}{2}e^{6t}\delta_{-1}(t)$$

## 1.2 Esercizio 2

### Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$2v''(t) - 3v'(t) - 2v(t) = 2u'(t) + u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$2s^2 - 3s - 2 = (2s + 1)(s - 2)$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 2$$

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$

$$v_l(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t}$$

Ora derivo  $v(t)$ :

$$v'(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t} = 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t} = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ -\frac{1}{2}(4 - c_2) + 2c_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ \frac{5}{2}c_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$v_l(t) = 4e^{-\frac{1}{2}t}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^0 \delta_0(t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate bla bla bla mi sono rotto:

$$h'(t) = \left( -\frac{1}{2}d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_0(t)$$

$$h''(t) = \left(\frac{1}{4}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 4d_2e^{2t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t}\right)\delta_0(t) + \dots$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t}\right)\delta_0(t) + (d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta'(t)$$

Ora poniamo  $v(t) = h(t)$  e  $u(t) = \delta(t)$  nell'equazione del sistema iniziale:

$$2h''(t) - 3h'(t) - 2h(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

Ora sostituiamo ed eliminiamo i gradini (Questa è un'equazione unica):

$$2 \overbrace{\left[ \left( \frac{1}{4}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 4d_2e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t) \left( -\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t} \right) + (d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta'(t) \right]}^{h''(t)} -$$

$$-3 \overbrace{\left[ \left( -\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta_0(t) \right]}^{h'(t)} - \overbrace{2(d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta_{-1}(t)}^{h(t)}$$

$$= 2\delta'(t) + \delta(t)$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta:

$$\begin{cases} \delta'(t)(d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t}) = \delta'(t) \\ 2\delta_0(t) \left( -\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t} \right) + \delta_0(t)(d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t}) = \delta(t) \\ d_1 + d_2 = 1 \\ -d_1\delta_0(t) + 4d_2\delta_0(t) + d_1\delta_0(t) + d_2\delta_0(t) = \delta_0(t) \\ d_1 = 1 - d_2 \\ \delta_0(t)5d_2 = \delta_0(t) \\ d_1 = \frac{4}{5} \\ d_2 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$h(t) = \frac{4}{5}e^{-\frac{1}{2}t}\delta_{-1}(t) + \frac{1}{5}e^{2t}\delta_{-1}(t)$$

### 1.3 Esercizio 3

#### Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t) + 2v'(t) + v(t) = u''(t) + u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$$

$$\lambda_1 = -1, \mu_1 = 2$$

$$r = 1$$

$$v(t) = c_{1,0}e^{-t} + c_{1,1}e^{-t}t$$

Per semplicità chiamerò  $c_{1,0} = c_1$  e  $c_{1,1} = c_2$ . Ora derivo  $v(t)$ :

$$v'(t) = -c_1e^{-t} - c_2e^{-t}t + c_2e^{-t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \overbrace{e^{-t}}^1 + c_2 \overbrace{e^{-t}t}^0 = 4 \\ -c_1 \overbrace{e^{-t}}^1 - c_2 \overbrace{e^{-t}t}^0 + c_2 \overbrace{e^{-t}}^1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$v_l(t) = 4e^{-t} + 2e^{-t}t$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^0 \delta_0(t) + \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate di  $h(t)$ :

$$h'(t) = (-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}t + d_2 e^{-t}) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta_0(t)$$

$$h''(t) = (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t - 2(d_2 e^{-t})) \delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t)((-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}t + d_2 e^{-t})) + \dots$$

$$\dots + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) \delta'(t)$$

Ora poniamo  $v(t) = h(t)$  e  $u(t) = \delta(t)$  nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta(t)$$

Sostituiamo ed eliminiamo i gradini:

$$\begin{aligned} & \overbrace{(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t - 2(d_2 e^{-t})) \delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t)((-d_1 e^{-t} + -d_2 e^{-t} t + d_2 e^{-t})) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) \delta'(t) + \dots}^{h''(t)} \\ & \overbrace{2 \left[ (-d_1 e^{-t} + -d_2 e^{-t} t + d_2 e^{-t}) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) \delta_0(t) \right] + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) \delta_{-1}(t)}^{h'(t)} \\ & = \delta''(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta e poniamo  $t = 0$ :

$$\begin{cases} 0 = \delta''(t) \\ (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) \delta'(t) = 0 \\ 2\delta_0(t)((-d_1 e^{-t} + -d_2 e^{-t} t + d_2 e^{-t})) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) \delta_0(t) = \delta_0(t) \\ d_1 = 0 \\ 2\delta_0(t)(-d_1 + d_2) + d_1 \delta_0(t) = \delta_0(t) \\ d_1 = 0 \\ -2d_1 \delta_0(t) + 2d_2 \delta_0(t) + d_1 \delta_0(t) = \delta_0(t) \\ d_1 = 0 \\ 2d_2 = 1 \implies d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} t \delta_{-1}(t)$$