Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

December 2, 2024

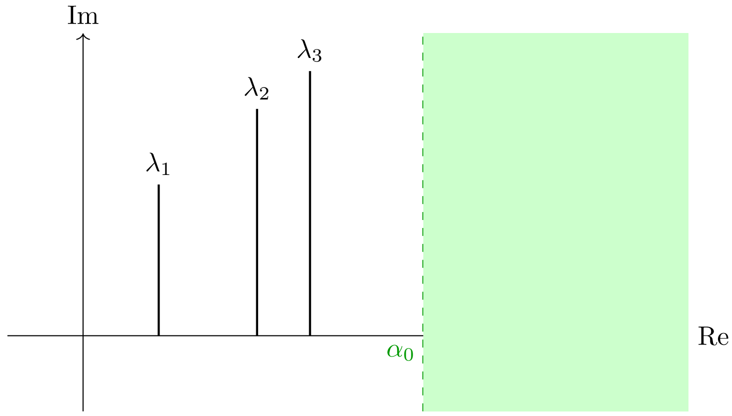
Contents

1 Trasformata di Laplace

Definition 1.1. $v(t)$ è definito nel tempo. V(s) è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st}dt$$

Figure 1: $\alpha \geq max\{\lambda_i\}$



1.1 Proprietà

La trasformata di LaPlace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

Property 1.2. ***Linearità:***

$$a_1v_1(t) + a_2v_2(t) = a_1V_1(s) + a_2V_2(s)$$

Property 1.3. ***Traslazione nel dom. del tempo:***

$$\mathcal{L}[v(t-\tau)](s) = \overbrace{e^{-st}V(s)}^{\tau>0}$$

Property 1.4. ***Tralaslazione nel dom. dei complessi:***

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}v(t)] = V(s-\lambda)$$

Property 1.5. ***Cambio di scala:***

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r}V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Property 1.6. ***Proprietà delle derivate:*** *Se $v(t)$ ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito $v(0^-) = \lim_{t\to 0} v(t)$ allora anche la sua derivata i-esima ammette TdL.*

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^iv(t)}{dt}\right] = S^iV(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^kv(t)}{d^t}\bigg|_{t=0^-}(S^{i-1-k})$$

Proof. Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\ &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\ &= sV(s) - v(0^-)\end{aligned}$$

Proof. Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\ &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= \int_0^{+\infty}\left[S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)\right] - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\ &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}\end{aligned}$$

Property 1.7. ***Moltiplicazione per funzioni polinomiali:*** *Se $v(t)$ ammette TdL e t è un polinomio allora anche $tV(s)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^iV(s)}{dS^i}$$

Proof. Per $i = 1$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tv(t)](s) = \int_{0^-}^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt &= -\int_{0^-}^{+\infty} v(t)\cdot(te^{-st})dt \\ &= -\int_0^{+\infty} v(t)\frac{d}{ds}te^{-st}dt \\ &= -\frac{d}{ds}\overbrace{\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt}^{\text{TdL}} \\ &= -\frac{d}{ds}V(s)\end{aligned}$$

Property 1.8. ***Integrazione nel dom. del tempo****: Se $v(t)$ ammette TdL, allora $\Psi(t) = \int_{0^-}^{t} v(t)dt$ ammette TdL*

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza: $\alpha = max\{0, \alpha_0\}$

Proof.

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \Longrightarrow \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) = \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) &= S\mathcal{L}[v_1'(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

Property 1.9. ***Integrazione nel dom. dei complessi****: Se $v(t)$ ammette TdL e esiste $\lim_{t\to 0^-} \frac{v(t)}{t}$ allora:*

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty}\int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-st}dtd\zeta \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t)\underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}}dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t}e^{-st}dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

Theorem 1.10. ***Teorema del valore iniziale****: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t\to 0^-} v(t)$ allora*

$$\lim_{t\to 0^-} v(t) = \lim_{s\to\infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Theorem 1.11. ***Teorema del valore finale****: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t\to\infty} v(t)$ allora*

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{s\to 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Property 1.12. ***Convoluzione nel dom. del tempo****: Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulla per $t < 0$) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL.*

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Proof.

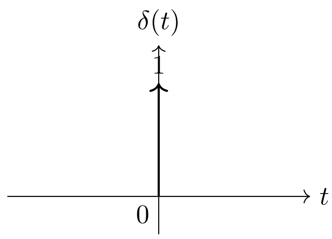
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(u*v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u*v)(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u(\tau)v(t-\tau)d\tau \right) e^{-st}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau)v(t-\tau)e^{-st}d\tau dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0^-}^{\infty} v(t-\tau)e^{-st}dt \right) d\tau
\end{aligned}$$

Sostituiamo $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0^-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0^-}^{\infty} v(x)e^{-s(x+\tau)}dx \right) d\tau \\
&= \int_0^{+\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x)e^{-sx}dt \\
&= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
\end{aligned}$$

1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse $\delta(t)$

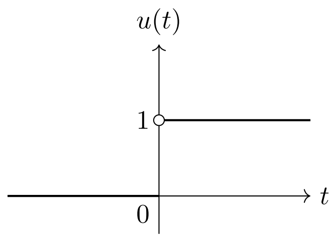
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s\cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A\overbrace{\cancel{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}}^{1} = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t-\tau)](s) = e^{-st}\mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

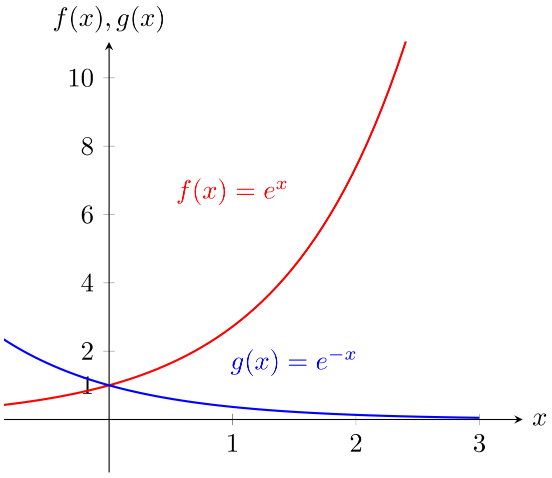


Unit Step $u(t)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\
&= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\
&= \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\
&= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\
&= e^{-s\tau}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{e^{-s\tau}}{s}
\end{aligned}
$$

Esponenziale complesso causale: $v(t) = e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s-\lambda) \\
&= \frac{1}{s-\lambda}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s-\lambda}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s-\lambda}$$

Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:

$$v(t) = \frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!}\mathcal{L}[t^l e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&\overset{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{d^l}{dS^l}\frac{1}{s-\lambda} \\
&= \frac{(-1)^l}{l!}\frac{l!(-1)^l}{(s-\lambda)^{l+1}} \\
&= \frac{1}{(s-\lambda)^{l+1}}
\end{aligned}$$

Esempio 1

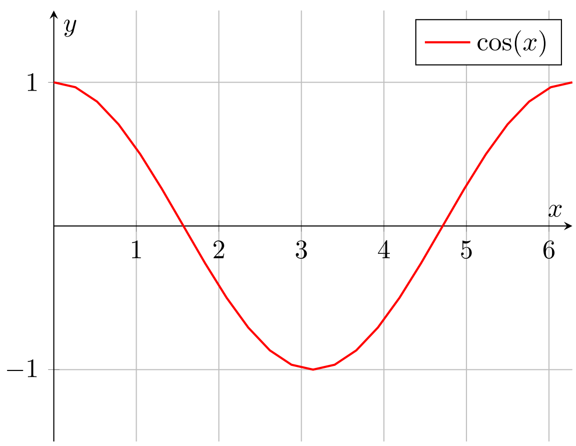
Con l = 1

$$\mathcal{L}[te^{e^{\lambda t}}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

Con l = 2

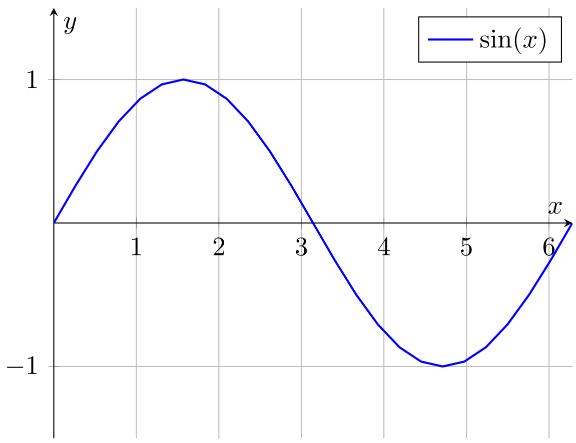
$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!}e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^3}$$

Funzione coseno:



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[cos(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-jw} + \frac{1}{s+jw}\right] \\
&= \frac{s}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

Funzione seno:



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[sin(wt)](s) &\overset{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-jw} - \frac{1}{s+jw}\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{\cancel{s}+jw-\cancel{s}+jw}{s^2+w^2}\right] \\
&= \frac{w}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t)(u(t) = 0, t < 0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-),\ \frac{dv(0)}{dt};\ \frac{d^2v(0)}{dt^2};\ \dots\ \frac{d^{n-1}v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL allora anche $v(t)$ ammette TdL e:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \mathcal{L}\left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right](s) = \sum_{i=0}^{m} b_i \mathcal{L}\left[\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right](s)$$

Applicando $n+m$ volte la regole della derivata:

$$\begin{aligned}
&a_n \left[S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-} (S^{n-1-k})\right] + \\
&+ a_{n-1} \left[S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-} (S^{n-2-k})\right] + \\
&+ \cdots + a_0 V(s) \\
&= b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \cdots + b_0 U(s)
\end{aligned}$$

Imponiamo le C.I.: $u(t)\Big|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\underbrace{\left[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \cdots + a_0\right] V(s)}_{d(s)} +$$

$$-\underbrace{a_n v(0^-) S^{n-1} \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt}\bigg|_{t=0^-}\right) S^{n-2} - \ \ldots \ - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k}\bigg|_{t=0^-}\right)}_{p(s)}$$

$$= \underbrace{(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \cdots + b_0)}_{n(s)} U(s)$$

$$\implies d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinonio di grado m che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonio caratteristico di u(t)
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficenti delle derivate associate di uscita. Polinimonio caratteristico di v(t)
- $p(s)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_{j+1} \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}\bigg|_{t=0^-}\right)$$

Polinomio di grado $n-1$ che dipende solo dalle C.I di v(t)

- $\frac{P(s)}{d(S)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I ì del sistema e dai coefficenti del polinomio caratteristico di $v(t)$

$$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}U(s)$ è una funzione razionale che dipende dai coefficenti del polinomio caratteristico di $u(t)$, dei coefficenti del polinomio caratteristico di v(t) moltiplicati per tali u(t):

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

Esempio

Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3v(t)}{dt^3}\right] + \mathcal{L}\left[\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right] = \mathcal{L}\left[\frac{du(t)}{dt}\right]$$

$$\downarrow$$

$$S^3V(s) - S^2v(0^-) - S\frac{dv(0^-)}{dt} - \cancel{S^0}\frac{d^2v(0^-)}{dt^2} +$$

$$+S^2V(s) - Sv(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} = SU(s)$$

$$\underbrace{(S^3+S^2)}_{d(s)}V(s) - \underbrace{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt}\right]}_{p(s)} = \underbrace{S}_{n(s)}U(s)$$

$$V(s) = \frac{S}{(S^3+S^2)}U(s) + \frac{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt}\right]}{S^3+S^2}$$

H(s) è definita come TdL delle risposte impulsive $h(t)$. È una funzione razionale con grado del numeratore generalemnte minore o uguale del denominatore.

$$h(t) = d_0\delta_0(t) + ...\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l}\frac{t^l}{l!}e^{\lambda_i t}\right)\delta_{-1}(t)$$

$$\stackrel{\mathcal{L}}{=} d_0 + \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1}\frac{d_{i,l}}{(s-\lambda)^{l+1}} = H(s)$$

1.3.1 Funzione di trasferimento

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \\
&= \frac{b_m(S-\beta)^{\zeta_1}(S-\beta_2)^{\zeta_2} \dots (S-\beta_q)^{\zeta_q}}{a_n(S-\alpha)^{\mu_1}(S-\alpha_2)^{\mu_2} \dots (S-\alpha_n)^{\mu_r}}
\end{aligned}
$$

Rapporto tra i polinomi car. di u(t) e v(t)

Dove α_i e β_j sono rispettivamente radici del denominatore e del numeratore.

Possiamo anche riscriverla come:

$$
H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{m}(S-Z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(S-P_i)} \quad \text{dove} \quad k = \frac{b_m}{a_n}
$$

Dove $(S-Z_i)$ e $(S-P_i)$ sono rispettivamente zeri e poli della funzione razionale.

Definition 1.13. Definiamo come zero di una funzione razionale $H(s)$ un qualiasi numero $\beta \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\beta) = 0$.

Definition 1.14. Definiamo come polo di una funzione razionale $H(s)$ un qualunque numero $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\alpha) = \infty$.

Dato H(s) in forma ridotta (ho eliminato le radici in comune): Siano $\lambda_1, \dots \lambda_r$ con $r \leq n$ i suoi poli dopo la semplificazione se $Re(\lambda_i) < 0$ per $i = 1, \dots r$ allora il sistema è BIBO stabile.

Lemma 1.15. *Un sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli giacciono nel semipiano complesso negativo.*

Per stabilizzare un sistema (BIBO stabilizzato) devo togliere gli zeri λ_i con $Re(\lambda_i) > 0$, dividendoli per il loro corrispettivo polo.

Esempio 1

$$
v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)
$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico:

$$
s - 3 = s^2 - 5s + 4
$$

$$
H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Pol. Car degli ingressi}}{\text{Pol. Car delle uscite}} = \frac{s^2-5s+4}{s-3}
$$

$$
H(s) = \frac{s^2-5s+4}{s-3} = \frac{(s-4)(s-1)}{s-3}
$$

Poiché $\lambda_1 = 3$ non è asintonticamente stabile poiché la sua parte reale è maggiore di 0.
Non è neanche BIBO stabile perché tutte le radici del denominatore (poli di $H(s)$) hanno parte reale maggiore di 0.

Esempio 2

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

Poiché $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ sono minori di 0 allora il sistema è asintonticamente stabile. Ricordiamo che se un sistema è asintonticamente stabile allora è anche BIBO stabile.

Esempio 3

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u(t) - 4u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} = \frac{(s+4)\cancel{(s-1)}}{\underbrace{(s+3)}_{\lambda_1=-3}\underbrace{(s+2)}_{\lambda_2=-2}\cancel{(s-1)}}$$

Non è asintonticamente stabile. Tuttavia è BIBO stabile poiché tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale minore di 0.

2 Antitrasformata di Laplace

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \Longrightarrow \begin{cases} \underbrace{deg[n(s)] \geq deg[d(s)]}_{\text{Sistema proprio}} \Longrightarrow A \\ \underbrace{deg[n(s)] < deg[d(s)]}_{\text{Sistema strett. proprio}} \Longrightarrow B \end{cases}$$

A → Divisione polinomiale → Fratti semplici → Antitrasformata
B → Fratti complessi → Antitrasformata

2.1 Divisione polinomiale

$$V(S) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{dove} \quad deg[r(s)] < deg[d(s)], k \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[K\delta(t)] = K \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} K\delta_0(t)$$

Esempio

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \quad \text{dove} \quad m = 2, n = 2$$

Quotient	2
Divisor	$s^2 - s - 1$
Step 1:	$2s^2 + 4s - 3$
Subtract:	$-(2s^2 - 2s - 2)$
Remainder:	$6s - 1$

$$V(s) = \frac{6s - 1}{s^2 - s + 1} + 2$$

2.2 Fratti semplici

$$\frac{r(s)}{d(s)} = d_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} \frac{d_{i,l}}{(s-\lambda)^{l+1}}$$

Esempio 1

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s+1)^2(s-2)(s+5)}$$

$$V(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

A, B, C, D sono i $c_{i,l}$

Esempio 2

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{c_{1,0}}{(s+4)} + \frac{c_{2,0}}{s-2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}$$

1. Metodo:

$$\frac{A(s-2)+B(s+4)}{(s+4)(s-2)} = \frac{AS - 2A + BS + 4b}{(s+4)(s+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + 4B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

2. Metodo:

$$c_{i,l} = \lim_{s \to \alpha_i} \frac{d^{\mu_i - l - 1}\left((s-\alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)}\right)}{ds^{\mu_i - l - 1}}$$

$$c_1 = A = \lim_{s \to -4} \frac{\cancel{d^{1-0-1}}\left((s+4)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)}\right)}{ds^0} = \frac{-24}{-6} = 4$$

$$c_2 = B = \lim_{s \to 2} \frac{d^{1-0-1}\left((s-2)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)}\right)}{\cancel{ds^0}} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

Ora si applica l'antitrasformata:

$$\begin{aligned}
V(s) &= k + \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \\
&\overset{\mathcal{L}^{-1}}{=} \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \sum_{i=0}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}}\right](t) \\
&= k\delta_0(t) + \left[\sum_{i=0}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l}\frac{t^l}{l!}e^{\lambda_i t}\delta_{-1}(t)\right]
\end{aligned}$$

Esempio completo

$$v''(t) - v'(t) - 2v(t) = u''(t) + 2u'(t) + u(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{3t}\delta_{-1}(t)$$

Quello che ci viene chiesto è

1. Stabilità
2. Risposta libera (nel tempo e in frequenza)
3. Risposta impulsiva
4. Risposta forzata
5. Risposta totale

Partiamo con il primo punto:

1. Polinomio caratteristico: $s^2 - s - 2 = 0 \to \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ e $\mu_i = 1$
   Non è asintonticamente stabile perché $\lambda_1 > 0$

   $$V(s) = \underbrace{\frac{p(s)}{d(s)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\overbrace{\frac{h(s)}{d(s)}}^{H(s)} \cdot U(s)}_{V_f(s)}$$

   Per garantire stabilità BIBO i poli di $H(s)$ devono avere parte reale minore di 0.
   Calcoliamo la funzione di trasferimento:

   $$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^{\cancel{2}}}{(s-2)\cancel{(s+1)}} = \frac{s+1}{s-2}$$

   Non è BIBO stabile perché λ_1 (che è un polo della funzione di trasferimento) è maggiore di 0.

2a. Risposta libera nel tempo:

$$v_l(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l}\frac{t^l}{l!}e^{\lambda_i t}$$
$$= c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$$

$$\begin{cases} v_l(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ v_l'(t) = 2c_1e^{2t} - c_2e^{-t} \end{cases} \overset{t=0}{\rightarrow} \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

$$v_l(t) = e^{-t}$$

2b . Risposta libera in frequenza: Facciamo la trasformata di Laplace del sistema:

$$\mathcal{L}[v''(t) - v'(t) - 2v(t)] = \mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)]$$

$$\overbrace{(s^2V(s) - s + 1)}^{\mathcal{L}[v''(t)]} - \overbrace{(sV(s) + 1)}^{\mathcal{L}[v'(t)]} - \overbrace{2V(s)}^{\mathcal{L}[v(t)]} = \overbrace{(s^2U(s)}^{\mathcal{L}[u''(t)]} + \overbrace{2sU(s)}^{\mathcal{L}[u'(t)]} + \overbrace{U(s)}^{\mathcal{L}[u(t)]}$$

$$\overbrace{(s^2 - s - 2)}^{\text{pol. car. uscite}} V(s) - s + 2 = \overbrace{(s^2 + 2s + 1)}^{\text{pol. car entrate}} U(s)$$

$$V(s) = \frac{s-2}{(s-2)(s+1)} + \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)}U(s)$$

Vediamo ora cosa è $U(s)$:

$$u(t) = \underbrace{e^{-3t}\delta_{-1}(t)}_{\lambda=-3, A=1} \overset{\mathcal{L}}{\Longrightarrow} U(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{v_l(s)} + \overbrace{\underbrace{\frac{s+1}{s-2}}_{H(s)} \cdot \frac{1}{s+3}}^{V_f(s)}$$

Quindi la risposta libera in Laplace è:

$$v_l(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\lambda=1, A=1} \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

L'unica differenza che ci sta tra risposta libera e in frequenza e che quella in frequenza, quando la andiamo a trovare dobbiamo moltiplicarla per la funzione causale, ovvero il gradino.

3. Risposta impulsiva:

$$H(s) = \frac{s+1}{s-2}$$

Facciamo la divisione tra polinomi dove otteniamo:

$$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2}$$

Applichiamo l'antitrasformata: h(t) $= \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \delta_0(t) + 3e^{2t}\delta_{-1}(t)$

4. Risposta forzata: Proviamo entrambi i metodi, partiamo con il primo (i fratti semplici):

$$V_f(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\frac{As+3A+Bs-2B}{(s-2)(s+3)} = \frac{(A+B)s+(3A-2B)}{(s-2)(s+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-2B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5} \\ B = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{3}{5}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{5}\frac{1}{s+3} = \left(\frac{3}{5}e^{2t} + \frac{2}{5}e^{-3t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Okay ora proviamo con il metodo dei limiti:

$$c_i = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{d^{\mu-l-1} n(s)}{ds^{s-l-1} d(s)} (s-\lambda)^{\mu}$$

$$A = \lim_{S \to +2} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{\cancel{(s-2)}(s+3)} \cancel{(s-2)} = \frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{S \to -3} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{(s-2)\cancel{(s+3)}} \cancel{(s+3)} = \frac{2}{5}$$

E come si vede, si ottiene il risultato medesimo con diverso metodo.

3 Sistema a blocchi

In generale ci sono tre modi per mettere a sistema un sistema a blocchi:

- **Sistema in serie** (o cascata) dove l'output di un sistema A diventa l'input di un sistema B
$$x_2 = y_1$$
- **Sistema parallelo** dove un input x viene separato in x_1 e x_2, entrano all'interno rispettivamente dei sistemi A e B e poi vengono sommati in una singola uscita y.
$$x = x_1 = x_2$$
$$y = y_1 + y_2$$
- **Sistema di retroazione** dove l'uscita di un sistema A diventa l'input di un sistema B e viceversa.
$$x = x_1 + y_2$$
$$y = y_1 = x_2$$

I blocchi avranno sempre un singolo input e un singolo output (poiché sistemi SISO (Single Input Single Output)), per quanto riguarda i nodi sommatori, possono entrare infiniti numeri di archi e generalmente ne esce solo una.
Esistono 2 tipi di controlli:

1. *Il controllo ad anello aperto* è un sistema in cui l'uscita non influenza l'input. È un sistema a ciclo aperto, ovvero non c'è feedback.
2. *Il controllo ad anello chiuso* è un sistema in cui l'uscita influenza l'input. È un sistema a ciclo chiuso, ovvero c'è feedback. Dove il sistema che ritorna il feedback del sistema A si chiama funzione di trasferimento del sistema.

I sistemi che ci interessano di più sono quelli a ciclo chiuso, in quanto sono quelli che si avvicinano di più alla realtà.
Guardando la nomenclatura dei sistemi a blocchi, si ha che:

- Sistema di riferimento r è l'input del sistema
- Elemento di feedforward F è un blocco che manda un segnale di controllo al processo
- Processo P è il sistema che trasforma l'input in un output (che però può essere disturbato)
- Elemento di feedback B è un blocco che manda un segnale di feedback b al processo per correggere l'errore
- Segnale di attuazione che è in genere una sorta di errore $e = r - b$ (in genere viene chiamato chiamato feedback negativo quando $e = r - b$ mentre è feedback positivo quando $e = r + b$)

3.1 Controllori

I controllori sono di tre tipi con relative regole di controllo:

- P è il controllore proporzionale e la sua regola di controllo è $u(t) = K_p e(t)$
- I è il controllore integrale e la sua regola di controllo è $u(t) = K_i \int e(\tau) d\tau$
- D è il controllore derivativo e la sua regola di controllo è $u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$

Possiamo anche combinarli insieme, esistono tipi "compositi" di controllori come PID, PI, PD, I, P, D.

$$\mu_{pid} = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t) dt$$

Quando abbiamo un sistema a blocchi complesso e ridurlo a un sistema a blocchi più semplice, applicando diverse regole di riduzione:

3.2 Forma canonica - nomenclatura

La **Forma canonica** è una forma standard di rappresentazione di un sistema a blocchi.

1. G: Funzione di trasferimento diretta
2. H: Funzione di trasferimento di feedback
3. GH: Funzione di trasferimento del loop (o anello)

4. $\frac{C}{R}$ = Funzione di trasferimento dell'anello chiuso

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} = \frac{\text{eq. car. dell'ingresso}}{\text{eq. car. dell'uscita}}$$

5. $\frac{E}{R}$: rapporto del segnale di attuazione = $\frac{1}{1 \pm GH}$

6. $\frac{B}{R}$: rapporto di feedback = $\frac{GH}{1 \pm GH}$

L'obiettivo è di compattare il sistema fino ad arrivere ad un sistema a blocchi uguale alla forma canonica. Prendiamo per esempio il sistema massa molla smorzatore:

$$\begin{aligned} ma &= \sum F \\ mx'' &= F_{ext} - kx - bx' \\ F_{ext} &= kx + bx' + mx'' \\ F_{ext}(s) &= kX(s) + bsX(s) + ms^2X(s) \\ X(s) &= \frac{F_{ext}(s)}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

3.3 Regole di trasfromazione

1. **Combinazione di blocchi in serie**: dati due blocchi A e B in serie, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di AB.

2. **Combinazione di blocchi in parallelo**: dati due blocchi A e B in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è (in base al sommatore) $A \pm B$.

3. **Rimozione di blocchi in parallelo**: dati due blocchi A e B in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di AB diviso la somma di AB.

4. **Rimozione di anello feedback**: dati due blocchi A e B in feedback, riducendolo otteniamo un singolo blocco che diventa $\frac{A}{1 \pm AB}$

5. **Rimozione del loop**: dati due blocchi A e B in loop, possiamo spostare il blocco retroattivo all'inizio del blocco iniziale

6. **Riorganizzazione degli input**: posso organizzare gli input del sistema a blocchi come voglio, l'importante è che alla fine si arrivi ad un sistema a blocchi canonico.

7. **Spostamento dei nodi di somma prima di un blocco**: posso spostare i nodi di somma prima di un blocco

8. **Spostamento dei nodi di somma dopo un blocco**: posso spostare i nodi di somma dopo un blocco

9. **Spostamento dei nodi prima di un blocco**: posso spostare i nodi prima di un blocco

10. **Spostamento dei nodi dopo un blocco**: posso spostare i nodi dopo un blocco

4 Diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono una rappresentazione grafica di un sistema a blocchi. Guardiamo ora le diverse componenti di un diagramma di flusso:

- **Percorso in avanti:** Un cammino che unisce un nodo di input ad un nodo di output
- **Percorso ad anello:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e senza passare più volte in altri nodi intermedi
- $\rightarrow$ **Self loop:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e non tocca altri nodi intermedi
- **Guadagno**: prodotto di tutti i pesi degli archi lungo un percorso

4.1 Convertire un Sistema a blocchi in un diagramma di flusso

Per convertire un sistema a blocchi in un diagramma flussi (così che sia più facile da gestire) dobbiamo convertire gli archi e i nodi nel seguente modo:

1. Indiviiamo i nodi di input e output
2. Per ogni nodo somma si aggiunge un nodo
3. Per ogni nodo dello schema a blocchi si aggiunge un nodo al diagramma di flusso
4. Unisco i nodi con gli archi il cui peso è la funzione dentro al blocco. Se tra un nodo e l'altro non ci sono blocchi, il suo peso vale 1.

4.2 Funzione di Mason

Definition 4.1. La funzione di Mason è una funzione che permette di calcolare la funzione di trasferimento di un sistema a blocchi.

$$T = \sum_i \frac{P_i \Delta_i}{\Delta}$$

dove

- P_i è il guadagno del percorso i
- Δ_i è il determinante del percorso i

- Δ è il determinante del sistema

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk}$$
$$= 1 - \left(\sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} + ... \right)$$
$$= 1 - \left(\text{Somma dei guadagni di tutti gli alberi}\right) + \left(\text{Somma dei dei guadagni dei prodotti degli anelli che non toccano a due}\right)$$
$$+ \left(\text{somma dei guadagni dei prodotti degli anelli che non si toccano 3 a 3}\right) + ...$$

Esempio 1

Prendiamo come esempio il diagramma di flusso visto a lezione (guarda gli punt) e calcoliamo la funzione di Mason. Troviamo i guadagni per ogni percorso:

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

$$P_{1,1} = (x_2, x_3) = -GH$$

L'ordine in cui vengono chiamati i percorsi è arbitrario. Sono stati scelti semplicemente nell'ordine in cui li abbiamo notati. I guadagni che hanno 1 non vengono considerati. Calcoliamo ora il determinante del sistema:

$$\Delta = 1 - (P_{1,1}) = 1 + GH$$

Annulo tutti gli archi che toccano il percorso i-esimo:

$$\Delta_1 = 1 - \cancel{P_{1,1}} = 1 - 0 = 1$$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G \cdot 1}{1 + GH} = \frac{G}{1 + GH}$$

Esempio 2

TODO...

	Anelli	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
A_1^1	-AB			1	1						
A_2^1	-CD							1	1	1	
A_3^1	FCE	1	1				1	1	1	1	
A_4^1	FGE	1	1				1	1	1	1	1
A_5^1	ACE	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_6^1	AGE	1	1	1	1	1	1		1	1	1