Esercizi di Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

December 2, 2024

Contents

1 Esercizi su risposta libera e impulsiva

1.1 Esercizio 1

Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t) - 5v'(t) - 6v(t) = u'(t) + 5u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Per calcolare la risposta libera iniziamo a calcolare il polinomio caratteristico:

$$s^2 - 5s - 6 = (s+1)(s-6)$$
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6$$
$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$
$$v_l(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t}$$

Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t} = 3 \\ -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -c_1 + 6c_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = \frac{17}{7} \\ c_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\boxed{v_l(t) = \tfrac{17}{7} e^{-t} + \tfrac{4}{7} e^{6t}}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t)$$

Essendo $n \neq m$ il sistema non è proprio perciò $d_0 = 0$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le derivate di $h(t)$ (Questa in basso è un'equazione unica):

$$h'(t) = (-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta_0(t)$$

$$h''(t) = (d_1e^{-t} - 36d_2e^{6t})\delta_{-1}(t) + (-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_0(t) + ...$$
$$... + (-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_0(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta'(t)$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) - 5h'(t) - 6h(t) = \delta'(t) + 5\delta(t)$$

Sostituiamo ed elimino i gradini:

$$\overbrace{\cancel{(d_1e^{-t} - 36d_2e^{6t})\delta_{-1}(t)} + 2\delta_0(t)(-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t}) + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta'(t)}^{h''(t)} - ...$$

$$...-5\overbrace{\left[\cancel{(-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_{-1}(t)} + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta_0(t)\right]}^{h'(t)} -6\overbrace{\cancel{\left[(d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta_{-1}(t)\right]}}^{h(t)}$$
$$= \delta'(t) + 5\delta(t)$$

Ora raccolgo le funzioni delta e le metto a sistema. Ricordiamo di imporre $t = 0$:

$$\begin{cases} \cancel{\delta'(t)}(d_1e^{-t} + d_2e^{6t}) = \cancel{\delta'(t)} \\ 2\delta_0(t)(-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t}) - 5\delta_0(t)(d_1e^{-t} + d_2e^{6t}) = 5\delta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 1 \\ -2d_1\delta_0(t) + 12d_2\delta_0(t) - 5d_1\delta_0(t) - 5d_2\delta_0(t) = 5\delta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 - d_2 \\ -7d_1\cancel{\delta_0(t)} + 7d_2\cancel{\delta_0(t)} = 5\cancel{\delta(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{7} \\ d_2 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$\boxed{h(t) = \tfrac{1}{7}e^{-t}\delta_{-1}(t) + \tfrac{6}{7}e^{6t}\delta_{-1}(t)}$$

1.2 Esercizio 2

Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$2v''(t) - 3v'(t) - 2v(t) = 2u'(t) + u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$2s^2 - 3s - 2 = (2s+1)(s-2)$$
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 2$$
$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$
$$v_l(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t}$$

Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -\frac{1}{2} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t} = 4 \\ -\frac{1}{2} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t} = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -\frac{1}{2} c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ -\frac{1}{2}(4 - c_2) + 2c_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ \frac{5}{2} c_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$\boxed{v_l(t) = 4e^{-\frac{1}{2}t}}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^{0} \delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le deritate bla bla bla mi sono rotto:

$$h'(t) = \left(-\frac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_0(t)$$

$$\begin{aligned} h''(t) = &\left(\frac{1}{4} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + \left(-\frac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_0(t) + ... \\ &+ \left(-\frac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_0(t) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta'(t) \end{aligned}$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$2h''(t) - 3h'(t) - 2h(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

Ora sostituiamo ed eliminiamo i gradini (Questa è un'equazione unica):

$$2\overbrace{\left[\cancel{\left(\frac{1}{4}d_1e^{-\frac{1}{2}t}+4d_2e^{2t}\right)}\delta_{-1}(t)+2\delta_0(t)\left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t}+2d_2e^{2t}\right)+(d_1e^{-\frac{1}{2}t}+d_2e^{2t})\delta'(t)\right]}^{h''(t)}-$$

$$-3\overbrace{\left[\cancel{\left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t}+2d_2e^{2t}\right)}\delta_{-1}(t)+(d_1e^{-\frac{1}{2}t}+d_2e^{2t})\delta_0(t)\right]}^{h'(t)}\cancel{-2\overbrace{(d_1e^{-\frac{1}{2}t}+d_2e^{2t})\delta_{-1}(t)}^{h(t)}}$$

$$=2\delta'(t)+\delta(t)$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta:

$$\begin{cases}\cancel{\delta'(t)}(d_1e^{-\frac{1}{2}t}+d_2e^{2t})=\cancel{\delta'(t)}\\ 2\delta_0(t)\left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t}+2d_2e^{2t}\right)+\delta_0(t)(d_1e^{-\frac{1}{2}t}+d_2e^{2t})=\delta(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}d_1+d_2=1\\ \cancel{-d_1\delta_0(t)}+4d_2\delta_0(t)+\cancel{d_1\delta_0(t)}+d_2\delta_0(t)=\delta_0(t)\end{cases}$$

$$\begin{cases}d_1=1-d_2\\ \cancel{\delta_0(t)}5d_2=\cancel{\delta_0(t)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}d_1=\frac{4}{5}\\ d_2=\frac{1}{5}\end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$\boxed{h(t)=\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{2}t}\delta_{-1}(t)+\frac{1}{5}e^{2t}\delta_{-1}(t)}$$

1.3 Esercizio 3

Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t)+2v'(t)+v(t)=u''(t)+u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases}v(0)=4\\ v'(0)=-2\end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$s^2+2s+1=(s+1)^2$$

$$\lambda_1 = -1, \mu_1 = 2$$

$$r = 1$$

$$v(t) = c_{1,0}e^{-t} + c_{1,1}e^{-t}t$$

Per semplicità chiamerò $c_{1,0} = c_1$ e $c_{1,1} = c_2$. Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -c_1e^{-t} - c_2e^{-t}t + c_2e^{-t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 \overbrace{e^{-t}}^{1} + \overbrace{c_2e^{-t}t}^{0} = 4 \\ -c_1 \overbrace{e^{-t}}^{1} - \overbrace{c_2e^{-t}t}^{0} + c_2 \overbrace{e^{-t}}^{1} = -2 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$\boxed{v_l(t) = 4e^{-t} + 2e^{-t}t}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^{0}\delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^{r}\sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l}e^{\lambda_i t}\frac{t^l}{l!}\right]\delta_{-1}(t) \\ &= (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate di $h(t)$:

$$h'(t) = (-d_1e^{-t} + -d_2e^{-t}t + d_2e^{-t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta_0(t)$$

$$h''(t) = (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t - 2(d_2e^{-t}))\delta_{-1}t + 2\delta_0(t)((-d_1e^{-t} + -d_2e^{-t}t + d_2e^{-t})) + ...$$
$$... + (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta'(t)$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta(t)$$

Sostituiamo ed eliminiamo i gradini:

$$\overbrace{\cancel{(d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t - 2(d_2e^{-t}))\delta_{-1}t} + 2\delta_0(t)((-d_1e^{-t} + -d_2e^{-t}t + d_2e^{-t})) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta'(t)}^{h''(t)} + ...$$

$$2\overbrace{\left[\cancel{(-d_1e^{-t} + -d_2e^{-t}t + d_2e^{-t})\delta_{-1}(t)} + (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta_0(t)\right]}^{h'(t)} + \cancel{(d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta_{-1}(t)}$$

$$= \delta''(t) + \delta(t)$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta e poniamo $t = 0$:

$$\begin{cases} 0 = \delta''(t) \\ (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t)\delta'(t) = 0 \\ 2\delta_0(t)((-d_1 e^{-t} + \cancel{-d_2 e^{-t} t} + d_2 e^{-t})) + 2\delta_0(t)(d_1 e^{-t} + \cancel{d_2 e^{-t} t}) = \delta_0(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ 2\delta_0(t)(-d_1 + d_2) + 2d_1\delta_0(t) = \delta_0(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ -2d_1\cancel{\delta_0(t)} + 2d_2\cancel{\delta_0(t)} + 2d_1\cancel{\delta_0(t)} = \cancel{\delta_0(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ 2d_2 = 1 \Longrightarrow d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$\boxed{h(t) = \tfrac{1}{2} e^{-t} t \delta_{-1}(t)}$$

2 Esercizi sulla convoluzione e la risposta forzata

2.1 Esercizio 1

calcolare il prodotto di convoluzione tra:

$$h(t) = \delta_0(t) - 2e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

$$u(t) = (1 + e^{-t})\delta_{-1}(t)$$

Procediamo con il calcolo della convoluzione utilizzando l'integrale:

$$\begin{aligned} v_f(t) = (h * u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_0(\tau) - 2e^{-\tau}\delta_{-1}(\tau))(1 + e^{-(t-\tau)})\delta_{-1}(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{\cancel{-\infty}\,0^-}^{\cancel{+\infty}\,0^+} \delta_0(\tau)\cancel{\delta_{-1}(t-\tau)}d\tau + \int_{\cancel{-\infty}\,0^-}^{\cancel{+\infty}\,0^+} \delta_0(\tau)\cancel{\delta_{-1}(t-\tau)}e^{-(t-\tau)}d\tau \\ &- 2\int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\cancel{+\infty}\,t} e^{-\tau}\cancel{\delta_{-1}(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)}d\tau - 2\int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\cancel{+\infty}\,t} e^{-\tau}e^{-(t-\tau)}\cancel{\delta_{-1}(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)}d\tau \\ &= -2\int_0^t e^{-\tau}d\tau - 2e^{-t}\int_0^t d\tau = -2\left[-e^{-\tau}\Big|_0^t\right] - 2e^{-t}\left[\tau\Big|_0^t\right] \\ &= -2[-e^{-t} + 1] - 2e^{-t}t \\ &= (2e^{-t} - 2 - 2e^{-t}t)\underbrace{\delta_{-1}(t)}_{\text{causale}} \end{aligned}$$

2.2 Esercizio 2

Dato il seguente sistema LTI:

$$v'(t) + 4v(t) = u(t)$$

Calcolare la risposta forzata considerando la seguente funzione in input:

$$u(t) = \delta_0(t) + e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

Polinimonio caratteristico: $s + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = -4, \mu = 1, l = 0$
Risposta impulsiva: $h(t) = d_1 e^{-4t}\delta_{-1}(t)$
Riscrivo l'eq sostituendo:

$$h'(t) + 4h(t) = \delta_0(t)$$

$$\begin{gathered} h'(t) = -4d_1 e^{-4t}\delta_{-1}(t) + d_1 e^{-4t}\delta_0(t) \\ \cancel{-4d_1 e^{-4t}\delta_{-1}(t)} + d_1 e^{-4t}\delta_0(t) + \cancel{4d_1 e^{-4t}\delta_{-1}(t)} = \delta_0(t) \\ d_1 e^{-4t}\cancel{\delta_0(t)} = \cancel{\delta_0(t)} \\ d_1 = 1 \end{gathered}$$

Quindi

$$h(t) = e^{-4t}\delta_{-1}(t)$$

Ora facciamo la convoluzione tra $h(t)$ e $u(t)$:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_0(t) + e^{-\tau}\delta_{-1}(\tau))e^{-4(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{\cancel{-\infty}\,0^-}^{\cancel{+\infty}\,0^+} \cancel{\delta_0(t)\delta_{-1}(t-\tau)}e^{-4(t-\tau)}d\tau + \int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\cancel{+\infty}\,t} \cancel{\delta_0(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)}e^{-\tau}e^{-4t+4\tau}d\tau \\ &= \cancel{e^{-4t}\int_{0^-}^{0^+} e^{4\tau}d\tau} + e^{-4t}\int_0^t e^{3\tau}d\tau \\ &= e^{-4t}\left[\frac{1}{3}e^{3\tau}\bigg|_0^t\right] = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t})\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

2.3 Esercizio 3

Dato il seguente sistema LTI:

$$v''(t) - v'h(t) + 4v(t) = u''(t) + 3u'(t) + 2u(t)$$

E il seguente input $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$. Calcolare la risposta forzata del sistema.
Polinomio caratteristico: $s^2 - s + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = (s-2)^2 \Longrightarrow \lambda_1 = 2, \mu_1 = 2$

$$h(t) = d_0\delta_0(t) + (d_1 e^{2t} + d_2 e^{2t}t)\delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= d_0\delta'(t) + (2d_1 e^{2t} + 2d_2 e^{2t}t + d_2 e^{2t})\delta_{-1}(t) + (d_1 e^{2t} + d_2 e^{2t}t)\bigg|_{t=0}\delta_0(t) \\ &= d_0\delta'(t) + (2d_1 e^{2t} + 2d_2 e^{2t}t + d_2 e^{2t})\delta_{-1}(t) + d_1\delta_0(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h''(t) &= d_0\delta''(t) + (4d_1e^{2t} + 4d_2e^{2t}t + 2d_2e^{2t} + 2d_2e^{2t})\delta_{-1}(t) \\
&+ (2d_1e^{2t} + 2d_2e^{2t}t + d_2e^{2t})\Big|_{t=0} \delta_0(t) + d_1\delta'(t) \\
&= d_0\delta''(t) + (4d_1e^{2t} + 4d_2e^{2t}t + 2d_2e^{2t} + 2d_2e^{2t})\delta_{-1}(t) \\
&+ (2d_1 + d_2e^{2t})\delta_0(t) + d_1\delta'(t)
\end{aligned}
$$

Ora riscriviamo sostituendo $v(t) = u(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ ed eliminando i gradini:

$$
\begin{gathered}
d_1\delta''(t) + (2d_1 + d_2)\delta_0(t) + d_1\delta' t - 4(d_0\delta'(t) + d_1\delta_0(t)) + d_0\delta_0(t) \\
= 3\delta''(t) + 3\delta'(t) + 2\delta(t)
\end{gathered}
$$

Ora mettiamo a sistema i corrispettivi delta:

$$
\begin{cases}
d_1\delta''(t) = \delta''(t) \\
d_1\delta'(t) - 4d_0\delta'(t) = 3\delta'(t) \\
(2d_1 + d_2)\delta_0(t) - 4d_1\delta_0(t) + d_0\delta_0(t) = 2\delta_0(t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
d_1 = 1 \\
d_0 = \frac{1}{2} \\
2 + d_2 - 4 + \frac{1}{2} = 2 \Longrightarrow d_2 = \frac{7}{2}
\end{cases}
$$

$$
h(t) = \frac{1}{2}\delta_0(t) + \left(e^{2t} + \frac{7}{2}e^{2t}t\right)\delta_{-1}(t)
$$

Ora facciamo la convoluzione con $u(t)$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\delta_0(t) + \left(e^{2t} + \frac{7}{2}e^{2t}t\right)\delta_{-1}(t)\right)(3\delta_{-1}(t)) \\
&= \frac{3}{2} + 3\left[e^{2\tau}\right]_0^t + \frac{21}{2}\left[\frac{\tau e^{2\tau}}{2} - \frac{e^{2\tau}}{4}\right]_0^t \\
&= 3e^{2t} + \frac{21}{2}te^{2t} - \frac{21}{8}e^{2t} - \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

2.4 Esercizio 4

Dato il seguente sistema LTI:

$$
v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t)
$$

Calcolare la risposta forzata del sistema tramite questo input:

$$
u(t) = e^{-2t}\delta_{-1}(t)
$$

$$
h(t) = (d_1e^{-2t} + d_2e^{-t})\delta_{-1}(t)
$$

$$
h'(t) = (-2d_1e^{-2t} - d_2e^{-t})\delta_{-1}(t) + (d_1 + d_2)\delta_0(t)
$$

$$
h''(t) = (-4d_1e^{-2t} + d_2e^{-t})\delta_{-1}(t) + (-2d_1 - d_2)\delta(t) + (d_1 + d_2)\delta'(t)
$$

Ora sostituiamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema:

$$-(2d_1 + d_2)\delta(t) + (d_1 + d_2)\delta'(t) + 3(d_1 + d_2)\delta(t) = \frac{1}{3}\delta(t)$$

$$\begin{cases} -2d_1 - d_2 + 3d_1 + 3d_2 = \frac{1}{3} \\ (d_1 + d_2)\delta'(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d_1 = \frac{1}{6} \\ d_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$h(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Ora facciamo la convoluzione con $u(t)$:

$$\begin{aligned}
(h * u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-t}\right)\delta_{-1}(t)(e^{-2(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau))d\tau \\
&= \frac{1}{6}\int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\cancel{+\infty}\,t} \cancel{e^{-2\tau}}e^{-2t+\cancel{2\tau}}\cancel{\delta_{-1}(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)}d\tau + \frac{1}{6}\int_{\cancel{-\infty}\,0}^{\cancel{+\infty}\,t} \cancel{e^{-\tau}}e^{-2t+\cancel{2\tau}}\cancel{\delta_{-1}(\tau)\delta_{-1}(t-\tau)}d\tau \\
&= \frac{1}{6}e^{-2t}t + \frac{1}{6}e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{6}e^{-2t}t + \frac{1}{6}e^{-2t}(e^t - 1) \\
&= \frac{1}{6}e^{-2t}t + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t} \\
&= \frac{1}{6}\left(e^{-2t}t + e^{-t} - e^{-2t}\right)
\end{aligned}$$

3 Esercizi Sistemi LTI con TdL

3.1 Esercizio 1

3.2 Esercizio 2

3.3 Esercizio 3

4 Esercizi fatti in classe

4.1 Esercizio 1

Consegna

$$v''(t) - 5v'(t) + 4v(t) = u'(t) - 3u(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 9 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

$$u(t) \ = e^t \delta_{-1}(t)$$

1. Discutere la stabilità del sistema.
2. Determinare la FdT (H(s)) (Solo in Laplace quindi non serve in t)
3. Calcolare la risposta impulsiva h(t) (quindi $\mathcal{L}^{-1}[H(s)](t)$)
4. Calcolare la risposta totale $v_t(t)$

$$s^2 - 5s + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = +1, \lambda_2 = +4, \mu_i = 1$$

Sistema instabile poiché $Re(\lambda_i) > 0$.

$$\mathcal{L}[v''(t) - 5v'(t) + 4v(t)](s) = \mathcal{L}[u'(t) - 3u(t)](s)$$

$$\mathcal{L}[v''(t)] = s^2V(s) - \cancel{sv(0)} - \overbrace{v'(0)}^{1} = s^2V(s) - 1$$

$$-5\mathcal{L}[v'(t)](s) = -5[SV(s) - sv(0)] = -5SV(s)$$

$$+4\mathcal{L}[v(t)](s) = +4V(s)$$

È sempre sottinteso che $u^i(0) = 0$.

$$\mathcal{L}[u'(t)] = sU(s) + su(0) = sU(s)$$

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = -3U(s)$$

Ora che abbiamo i diversi pezzetini possiamo ricostruire l'equazione iniziale:

$$S^2V(s) - 1 - 5V(s) + 4V(s) = sU(s) - 3U(s)$$

$$V(s)(S^2 - 5 + 4) - 1 = sU(s) - 3U(s)$$

$$V(s) = \frac{\overbrace{1}^{p(s)}}{\underbrace{(s-1)(s-4)}_{d(s)}} + \frac{\overbrace{s-3}^{n(s)}}{\underbrace{(s-1)(s-4)}_{d(s)}} U(s)$$

Parliamo della BIBO stabilità. Sia λ_i polo di H(s) e $Re(\lambda_i) < 0$ allora il sistema è BIBO stabile. In questo caso abbiamo due poli $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$ che sono

entrambi positivi quindi il sistema non è né stabile né BIBO stabile.
2. Calcoliamo la FdT che abbiamo già trovato precedentemente:

$$\boxed{H(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-4)}}$$

3.
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t)$$

Controlliamo i gradi di $n(s)$ e $d(s)$.

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \Longrightarrow \begin{cases} \underbrace{deg[n(s)] \geq deg[d(s)]}_{\text{Sistema proprio}} \\ \underbrace{deg[n(s)] < deg[d(s)]}_{\text{Sistema strett. proprio}} \end{cases}$$

Se il sistema è proprio allora $\Longrightarrow$ Divisione fra polinomi poi Fratti semplici e poi antitrasformata. Altrimenti se è strettamente proprio allora $\Longrightarrow$ Fratti semplici e poi antitrasformata.
In questo caso il sistema è strettamente proprio quindi dobbiamo fare i fratti semplici:

$$H(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4}$$

Utilizziamo il metodo dei limiti per trovare A e B:

$$c_i = \lim_{s \to \lambda_i} \frac{d^{\mu-l-1} n(s)}{ds^{s-l-1} d(s)} (s-\lambda)^{\mu}$$

$$A = \lim_{s \to +1} \frac{d^{1-0-1}(s-3)}{ds^{1-0-1}\cancel{(s-1)}(s-4)} \cancel{(s-1)} = \frac{2}{3}$$

$$B = \lim_{s \to +4} \frac{d^{1-0-1}(s-3)}{ds^{1-0-1}\cancel{(s-4)}(s-1)} \cancel{(s-4)} = \frac{1}{3}$$

$$h(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{(s-4)} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{=} \left(\frac{2}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{4t}\right)\delta_{-1}(t)$$

4. Risposta totalen $v_t(t)$:

$$v_t(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-1)(s-4)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{s-3}{(s-1)(s-4)}U(s)}_{V_f(s)}$$

Ora dobbiamo trovare $U(s)$:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s) = \mathcal{L}[e^{t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s-1}$$

Quindi:

$$
\begin{aligned}
V(s) &= \underbrace{\frac{1}{(s-1)(s-4)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{s-3}{(s-1)^2(s-4)}U(s)}_{V_f(s)} \\
&= \frac{s-1+s-3}{(s-1)^2(s-4)} \\
&= \frac{2s-4}{(s-1)^2(s-4)} = v_t(s)
\end{aligned}
$$

Ora dobbiamo trovare $V_f(s)$:

$$
V_f(s) = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-4)}
$$

Qua ci torna utile il metodo dei limiti:

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{s\to 1} \frac{d^{2-0-1}}{ds^{2-0-1}} \cancel{(s-1)^2} \frac{2s-4}{\cancel{(s-1)^2}(s-4)} \\
&= \frac{d}{ds}\frac{2s-4}{s-4}\bigg|_{s=1} \\
&= \frac{2(s-4)-(2s-4)(1)}{(s-4)^2}\bigg|_{s=1} \\
&= \frac{-4}{(1-4)^2} = -\frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B &= \lim_{s\to 1} \frac{d^{2-1-1}}{ds^{2-1-1}} \cancel{(s-1)^2} \frac{2s-4}{\cancel{(s-1)^2}(s-4)} \\
&= \lim_{s\to 1} \frac{2s-4}{s-4} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C &= \lim_{s\to 4} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \cancel{(s-4)} \frac{2s-4}{(s-1)^2\cancel{(s-4)}} \\
&= \lim_{s\to 4} \frac{2s-4}{(s-1)^2} = \frac{4}{9}
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\boxed{V_t(s) = -\tfrac{4}{9}\tfrac{1}{(s-1)} + \tfrac{2}{3}\tfrac{1}{(s-1)^2} + \tfrac{4}{9}\tfrac{1}{(s-4)}}
$$

Quindi $v_f(t)$, applichiamo l'antitrasformata e otteniamo:

$$
\boxed{v_t(t) = \left(-\tfrac{4}{9}e^{t} + \tfrac{2}{3}te^{t} + \tfrac{4}{9}e^{4t}\right)\delta_{-1}(t)}
$$

4.2 Esercizio 2

Consegna

$$v''(t) + 4v'(t) + 4v(t) = u'(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = sin(t)cos(t)\delta_{-1}(t)$$

1. Risposta libera
2. Risposta forzata

$$S^2V(s) - sv(0) - \cancel{v'(0)} + 4(SV(s) - v(0)) + 4V(s) = sU(s)$$
$$V(s)(s^2 - 4s + 4) - s - 4 = sU(s)$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \frac{s+4}{(s^2+4s+4)} + \frac{s}{(s^2+4s+4)}U(s) \\ &= \frac{s+4}{(s+2)^2} + \frac{s}{(s+2)^2}U(s) \end{aligned}$$

Questo sistema è stabile e quindi anche BIBO stabile.

1.
$$v_l(s) = \frac{s+4}{(s+4)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

Troviamo A e B:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{s \to -2} \frac{d}{ds} \cancel{(s+2)^2} \frac{s+4}{\cancel{(s+2)^2}} \\ &= \lim_{s \to -2} \frac{d(s+4)}{ds} = 1 \end{aligned}$$

$$B = \lim_{s \to -2} \cancel{(s+2)} \frac{s+4}{\cancel{(s+2)^2}} = 2$$

$$\begin{aligned} V_l(s) &= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}\right] \\ &\overset{\mathcal{L}^{-1}}{=} (e^{-2t} + 2te^{-2t})\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

2.
$$v_f(s) = \frac{s}{(s+2)^2}U(s)$$

Troviamo $U(s)$:

$$U(s) = \mathcal{L}^{-1}[u(t)](s)$$

Utilizziamo Eulero per trasformare l'antitrasformata di $u(t) = \sin(t)\cos(t)\delta_{-1}(t)$:

$$\cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}\left[\frac{e^{jt} - e^[jt]}{2}\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2j}\delta_{-1}(t)\right](s) \\
&= \frac{1}{4j}\mathcal{L}[(e^{2jt} - e^{-2jt})\delta_{-1}(t)](s) \\
&= \frac{1}{4j}\left(\frac{1}{s-2j} - \frac{1}{s+2j}\right) = \frac{1}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Quindi $V_f(s)$:

$$\begin{aligned}
V_f(s) &= H(s)U(s) \\
&= \frac{s}{(s+2)^2}\frac{1}{s^2+4} \\
&= \frac{s}{(s+2)^2(s-2j)(s+2j)} \\
&= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s-2j} + \frac{D}{s+2j}
\end{aligned}$$

Troviamo A, B, C, D:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\cancel{(s+2)^2}\frac{s}{\cancel{(s+2)^2}(s^2-4)} = \frac{1}{16} \\
B &= \lim_{s\to-2}\cancel{(s+2)^2}\frac{s}{\cancel{(s+2)^2}(s^2+4)} = -\frac{1}{4} \\
C &= \lim_{s\to2j}\cancel{(s-2j)}\frac{s}{(s+2)^2\cancel{(s-2j)}(s+2j)} = \frac{1}{16j} \\
D &= \lim_{s\to-2j}\cancel{(s+2j)}\frac{s}{(s+2)^2\cancel{(s+2j)}(s-2j)} = -\frac{1}{16j}
\end{aligned}$$

Andiamo a sostituire e otteniamo:

$$V_f(s) = \frac{1}{16}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{16j}\frac{1}{(s-2j)} - \frac{1}{16j}\frac{1}{(s+2j)}$$

Applichiamo Laplace e otteniamo $v_f(t)$:

$$\boxed{v_f(t) = \left(\tfrac{1}{16}e^{-2t} - \tfrac{1}{4}te^{-2t} + \underbrace{\frac{1}{16j}e^{2jt} - \frac{1}{16j}e^{-2jt}}_{\left(\frac{e^{2jt}-e^{-2jt}}{2j}\right)=sin(2t)}\right)\delta_{-1}(t)}$$

Possiamo semplificare e quindi:

$$\boxed{v_f(t) = \left(\frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{8}sin(2t)\right)\delta_{-1}(t)}$$