



Fondamenti di Informatica — Esercizi

Università di Verona
Imbriani Paolo - VR500437
Prof.ssa Isabella Mastroeni

January 20, 2026

Contents

1	Grammatiche CF	3
2	Successioni	8

1 Grammatiche CF

Esercizio 1.25

Dimostrare che il seguente linguaggio sia context-free:

$$L = \{0^n 1^m 0^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Soluzione:

Proof. Dimostriamo la seconda tesi per induzione su n .

Base: Sia $n = 2$. L'unica derivazione di lunghezza 2 è $S \rightarrow A \rightarrow \varepsilon$ dove $\varepsilon \in L$.

Passo induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera per ogni derivazione di lunghezza minore o uguale a n .

$$\forall k \in \mathbb{N}. k \leq n : S \Rightarrow_k x \implies x \in L \text{ con } x = 0^i 1^j 0^{i+j} \text{ con } i, j \geq 0$$

Scomponiamo la derivazione a partire dalle prime produzioni. Dimostriamo che vale per $S \Rightarrow_{n+1} x$ con $x \in \{0, 1\}^*$. L'ultima produzione sarà sicuramente $A \rightarrow \varepsilon$ ovvero:

$$[\text{COND 1}] \quad S \Rightarrow_{n+1} x \equiv \overbrace{S \Rightarrow_n yAz}^{n+1} \rightarrow y\varepsilon z = yz = x$$

Osservando *COND1* notiamo che per come è fatta la grammatica y e z possono essere scritte come:

- $y = 0^h 1^k$ e $z = 0^l$ con $h, k, l \geq 0$

$$S \Rightarrow_n yAz \equiv S \Rightarrow_{n-1} \hat{y}A\hat{z} \rightarrow \hat{y}10\hat{z} = yz$$

- $y = 0^h$ e $z = 0^l$ con $h, l \geq 0$

Consideriamo il primo caso. Allora possiamo prendere la de

Esercizio 1.18

Dimostrare che il seguente linguaggio sia context-free:

$$L = \{0^{2n} 10^{n+m} \mid m, n \geq 0\}$$

Soluzione: Intuitivamente sappiamo che il primo gruppo di zeri e il secondo gruppo di zeri sono legati da una relazione di dipendenza. Per ogni 2 zeri nel primo gruppo, c'è un solo 0 nel secondo gruppo. Tuttavia il secondo gruppo di zeri ha un numero variabile di zeri in più (m).

Possiamo quindi costruire una grammatica che generi il linguaggio come segue:

$$S \rightarrow 00S0 \mid S0 \mid 1$$

Dimostriamo che tale grammatica genera il linguaggio L. Abbiamo due tesi da dimostrare:

1. $x \in L \wedge x = 0^{2i}10^{i+j}$ con $i, j \geq 0 \implies S \Rightarrow_* x$ per induzione su $|x|$.
2. $S \Rightarrow_n x \implies x \in L \wedge x = 0^{2i}10^{i+j}$ con $i, j \geq 0$ per induzione su n .

Proof. 1. Dimostriamo la prima tesi per induzione su $|x|$.

Base: $|x| = 1 \implies x = 1$ con $i = 0, j = 0$. Allora $S \Rightarrow 1$.

Passo induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera per ogni stringa di lunghezza minore o uguale a n .

$$\forall x \in \Sigma^* . |x| < n, x \in L \wedge x = 0^{2i}10^{i+j} \implies S \Rightarrow_* x$$

Dimostriamo che vale per $|x| = n + 1$. Il caso $i = j = 0$ lo abbiamo già visto nella base. Supponiamo $i > 0$. Allora x può essere scritto come $x = 00x'0$ con $x' = 0^{2(i-1)}10^{(i-1)+j}$. Inoltre abbiamo il caso in cui $j > 1$ e $i = 0$ in cui x può essere scritto come $x = y0$ con $y = 10^{j-1}$. In entrambi i casi abbiamo che $|x'| < |x| = n + 1$, quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva e ottenere che esiste una derivazione $S \Rightarrow_* x'$. Vediamo i due casi:

- Sia $x' = 0^{2(i-1)}10^{(i-1)+j}$ con $i > 1$. Per come è fatta la grammatica abbiamo che

$$\begin{aligned} S \Rightarrow_* 0^{2(i-1)}10^{(i-1)+j} &\equiv S \Rightarrow_* 0^{2(i-2)}10^{(i-2)+j} \\ &\rightarrow 00(0^{2(i-2)}10^{(i-2)+j})0 \\ &\rightarrow 0^{2(i-1)}10^{(i-1)+j} = x' \end{aligned}$$

Ma allora possiamo scrivere la derivazione:

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_* 0^{2(i-2)}10^{(i-2)+j} \\ &\rightarrow 00(0^{2(i-1)}10^{(i-1)+j})0 \\ &\rightarrow 0^{2i}10^{i+j} = x \end{aligned}$$

- Sia $x' = 10^{j-1}$ con $j > 1$. Per come è fatta la grammatica abbiamo che

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_* 10^{j-1} \equiv S \Rightarrow_* 10^{j-2} \\ &\rightarrow S0^{j-2} \\ &\rightarrow 10^{j-1} = x' \end{aligned}$$

Ma allora possiamo scrivere la derivazione:

$$\begin{aligned}
S &\Rightarrow_* S0^{j-2} \\
&\rightarrow S00^{j-2} \\
&\rightarrow S0^{j-1} \\
&\rightarrow S00^{j-1} \\
&\rightarrow 10^j = x \quad \square
\end{aligned}$$

Proof. 2. Dimostriamo la seconda tesi per induzione su n .

Base: $n = 1$. L'unica derivazione di lunghezza 1 è $S \rightarrow 1$ e $1 \in L$.

Passo induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera per ogni derivazione di lunghezza minore o uguale a n .

$$\forall k \in \mathbb{N} . k \leq n : S \Rightarrow_k x \implies x \in L \wedge x = 0^{2i}10^{i+j} \text{ con } i, j \geq 0$$

Scomponiamo la derivazione a partire dalle prime produzioni. Dimostriamo che vale per $S \Rightarrow_{n+1} x$ con $x \in \{0, 1\}^*$. Una tale derivazione può iniziare in due modi, con le produzioni $S \rightarrow 00S0$ oppure $S \rightarrow S0$. Quindi so che $\exists x' \in \{0, 1\}^*$ tale che:

$$[\text{COND 1.1}] \quad S \Rightarrow_{n+1} x \equiv \overbrace{S \rightarrow S0 \Rightarrow_n \underbrace{x'0}_{0^*1}}^{n+1} = x$$

$$[\text{COND 1.2}] \quad S \Rightarrow_{n+1} x \equiv \overbrace{S \rightarrow 00S0 \Rightarrow_n 00 \underbrace{x'0}_{0^*10^*}}^{n+1} = x$$

Consideriamo la condizione 1.1. Per l'ipotesi induttiva sappiamo che $S \Rightarrow_n x'$ con $x' \in L$ e $x' = 0^{2i}10^{i+j}$ con $i, j \geq 0$. Allora possiamo scrivere:

$$x = x'0 = 0^{2i}10^{i+j}0 = 0^{2i}10^{i+(j+1)} \in L \text{ (per def) con } i, j+1 \geq 0$$

Consideriamo la condizione 1.2. Per l'ipotesi induttiva sappiamo che $S \Rightarrow_n x'$ con $x' \in L$ e $x' = 0^{2i}10^{i+j}$ con $i, j \geq 0$. Allora possiamo scrivere:

$$x = 00x'0 = 00(0^{2i}10^{i+j})0 = 0^{2(i+2)}10^{(i+1)+j} \in L \text{ (per def) con } i+1, j \geq 0 \quad \square$$

Esercizio 1.26

Dimostrare che la seguente famiglia di linguaggi sia context-free:

$$L_m = \{b^{mn}c^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}, \Sigma = \{a, b, c\}$$

Soluzione: Consideriamo il linguaggio:

$$L_0 = \{c^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

L_0 contiene una sequenza di c multipla di 4, incluso la stringa vuota. La grammatica che lo genera è la seguente:

$$S \rightarrow ccccS \mid \epsilon$$

Notiamo che questo linguaggio è regolare (e quindi anche CF) e possiamo vedere L_m come concatenazione di due linguaggi:

$$L_{\alpha_m} = \{b^{mn} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

e

$$L_0 = L_\beta = \{c^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ che sappiamo essere regolare (e quindi CF)}$$

Ora, L_{α_m} sappiamo che per:

- $m = 0$ è il linguaggio $\{\epsilon\}$ che è regolare (e quindi CF)
- $m = 1$ è il linguaggio $\{b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ che è regolare (e quindi CF)

$L_{\alpha_{m>1}}$ è il linguaggio costituito da tutte le stringhe di b con lunghezza multipla di m . L'espressione regolare che lo descrive è la seguente:

$$(b^m)^*$$

Di conseguenza se

$$L_m = L_{\alpha_m} \cdot L_\beta$$

Allora possiamo concludere che L_m è context-free per ogni $m \geq 0$, essendo la concatenazione di due linguaggi CF. Possiamo inoltre dire che per ogni m esiste una grammatica che genera L_m :

$$S \rightarrow b^m S \mid \epsilon$$

Esercizio 1.25

Dimostrare che il seguente linguaggio sia context-free:

$$L = \{x \in \{0, 1\}^* \mid |x|_0 > |x|_1\}$$

Soluzione: Il linguaggio L contiene tutte le stringhe composte da 0 e 1 in cui il numero di 0 è

strettamente maggiore del numero di 1. Alcuni esempi sono $L = \{000, 0001, 0010, 0100, 1000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 00011\}$.

Possiamo costruire una grammatica che genera il linguaggio come segue:

$$S \rightarrow A0A \quad A \rightarrow A1A0A \mid A0A1A \mid A0A \mid 0 \mid \varepsilon$$

Dimostriamo che tale grammatica genera il linguaggio L. Abbiamo due tesi da dimostrare:

1. $x \in L \wedge |x|_0 > |x|_1 \implies S \Rightarrow_* x$ per induzione su $|x|$.
2. $S \Rightarrow_n x \implies x \in L \wedge |x|_0 > |x|_1$ per induzione su n .

Proof. 1. Dimostriamo la prima tesi per induzione su $|x|$.

Base: $|x| = 1 \implies x = 0$. Allora $S \Rightarrow 0$.

Passo induttivo: Supponiamo che la tesi sia vera per ogni stringa di lunghezza minore o uguale a n .

$$\forall x \in \Sigma^* . |x| \leq n, x \in L \wedge |x|_0 > |x|_1 \implies S \Rightarrow_* x$$

Dimostriamo che vale per $|x| = n + 1$. Ad ogni produzione, devo sempre mantenere il vantaggio di 0 su 1. In ogni produzione in cui aggiungo 1, devo per forza aggiungere uno 0. Se $x \in L$ diversa dalla base (0), allora esiste la stringa in eccesso 0 dentro x quindi $\exists v, w \in \{0, 1\}^*$ tali che $x = v0w$. Per come è fatta la grammatica possiamo riordinare tutte le produzioni in modo da generare prima tutti i simboli della stringa (alternati dal simbolo A) e poi sostituire gli A con le stringhe vuote o con zeri in base all'esigenza. Prendiamo $x' = vw$, allora $|x'|_0 = |x|_0 - 1$ e $|x'|_1 = |x|_1$ quindi $|x'| < |x| = n + 1$ e quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva, ovvero esiste $S \Rightarrow_* x'$. Il passo iniziale ci permette di sapere con certezza che verranno sempre create stringhe con almeno uno 0 in più rispetto agli 1. Per quanto detto, questa derivazione può essere riscritta come: (dove $|v| = h$ e $|w| = k$ e v_i e w_i sono i simboli di v e w rispettivamente):

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow_* x' = vw \equiv \\ A &\Rightarrow_* Av_1A \dots Av_hAw_1A \dots Aw_kA \\ &\Rightarrow_{h+k+1} v_1 \dots v_h w_1 \dots w_k = vw = x' \end{aligned}$$

Sappiamo che A può generare stringhe dove il numero di 0 è uguale al numero di 1 che hanno al massimo $|x|_0 = |x|_1$. Ma con il passo iniziale S manteniamo sempre un 0 in più. e quindi possiamo costruire:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A0A \Rightarrow_* Av_1A \dots Av_h0w_1A \dots Aw_kA \\ &\Rightarrow_{h+j} v_1 \dots v_h 0 w_1 \dots w_k = v0w = x \quad \square \end{aligned}$$

2 Successioni

Esercizio 1

Definire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che

$$\bigcup_n X_n = k \leftarrow \text{creativo}$$

- Vanno definiti X_n al valore di n
- X_n sono ricorsivi
- Dimostrare che $\bigcup_n X_n = k$

$$k = \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow\}$$

Sappiamo che $y \in \bigcup_n X_n$ corrisponde a $\exists n. y \in X_n$ e che \downarrow è un $\exists n$ tale che per $\varphi_x(x)$ termina in n passi.

$$X_n = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ termina in } n \text{ passi}\}$$

Una volta aver mostrato questo insieme le cose da fare sono due:

- X_n è ricorsivo
- $\bigcup_n X_n = k$

Dimostriamo che X_n è ricorsivo. Dobbiamo costruire l'algoritmo per la funzione caratteristica di X_n .

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X_n \\ 0 & \text{se } x \notin X_n \end{cases}$$

L'algoritmo è il seguente:

```
1 input(x)
2 costruisci phi_x
3 for y to n-1
4     esegui un passo di phi_x(x)
5     if termina return 0
6 esegui un passo di phi_x(x)
7 if termina return 1
8 else return 0
```

Questo è l'algoritmo per f_n che è totale quindi X_n è ricorsivo. Ora dimostriamo che $\bigcup_n X_n = k$.

$$\begin{aligned} \bigcup_n X_n &= \bigcup_n \{x \mid \varphi_x(x) \text{ termina in } n \text{ passi}\} \\ &= \{x \mid \exists n. \varphi_x(x) \text{ termina in } n \text{ passi}\} \\ &= \{x \mid \varphi_x(x) \downarrow\} = k \end{aligned}$$

Esercizio 2

Definire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che

$$\bigcap_n X_n = \bar{k} \leftarrow \text{produttivo}$$

- Definire X_n al variare di n
- X_n sono ricorsivi
- Dimostrare che $\bigcap_n X_n = \bar{k}$

$$\bigcap_n = \forall n$$

$$\bar{k} = \{x \mid \varphi_x(x) \uparrow\} = \{x \mid \forall n . \varphi_x(x) \text{ non termina in } n \text{ passi}\}$$

- Definiamo:

$$X_n = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ non termina in } n \text{ passi}\}$$

Dimostriamo che $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in X_n \\ 0 & \text{se } x \notin X_n \end{cases}$ è ricorsiva. Costruiamo l'algoritmo per f_n :

```
1 input(x)
2 costruisci phi_x
3 for y to n-1
4     esegui un passo di phi_x(x)
5     if termina return 1
6 esegui un passo di phi_x(x)
7 if termina return 0
8 else return 1
```

•

$$\begin{aligned} \bigcap_n X_n &= \bigcap_n \{x \mid \varphi_x(x) \text{ non termina in } n \text{ passi}\} \\ &= \{x \mid \forall n . \varphi_x(x) \text{ non termina in } n \text{ passi}\} \\ &= \{x \mid \varphi_x(x) \uparrow\} = \bar{k} \end{aligned}$$

Esercizio 3

Definire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che

$$A = \{x \mid \bigcap_n \overline{X_n} \preceq W_x\}$$

- Definire X_n al variare di n

- X_n sono ricorsivi
- Dimostrare che $A = \{x \mid \bigcap_n \overline{X_n} \preceq W_x\}$
- Dimostrare che A è produttivo

Capiamo cosa significa $\bigcap_n \overline{X_n} \preceq W_x$. W_x è sempre re per definizione. Mentre $\bigcap_n \overline{X_n}$ non è produttivo.

$$k \preceq W_x$$

Vuol dire che W_x è re ma anche creativo.

- Definiamo:

$$\overline{X_n} = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ termina in } n \text{ passi}\} \quad X_n = \{x \mid \varphi_x(x) \text{ non termina in } n \text{ passi}\}$$

- $\bigcup_n \overline{X_n} = k$ (esercizio 1)
- $A = \{x \mid k \preceq W_x\}$
- A produttivo se $\bar{k} \preceq A$.

$$x \in k \implies g(x) \notin A \text{ ovvero } W_{g(x)} \text{ non creativo} \rightsquigarrow \text{Ricorsivo}$$

$$x \notin k \implies g(x) \in A \text{ ovvero } W_{g(x)} \text{ creativo} \rightsquigarrow K \text{ (creativo)}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in k \vee y \in k \\ \uparrow & \text{se non termina} \end{cases}$$

Con ψ parziale ricorsiva.

```

1 input(x,y)
2 costruisci phi_x, phi_y
3 while true
4     esegui next step di phi_x(x)
5     if termina: return 1
6     esegui next step di phi_y(y)
7     if termina: return 1

```

Per il teorema di s-m-n esiste una funzione totale e calcolabile g tale che:

$$\varphi_{g(x)}(y) = \psi(x, y)$$

$$\begin{aligned}
 x \in k &\implies \forall y. \psi(x, y) \downarrow \\
 &\implies \forall y. \varphi_{g(x)}(y) \downarrow \\
 &\implies W_{g(x)} = \mathbb{N} \\
 &\implies g(x) \notin A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x \notin k &\implies y \in k \iff \psi(x, y) \uparrow \\
&\implies y \in k \iff \varphi_{g(x)}(y) \uparrow \\
&\implies W_{g(x)} = k \\
&\implies g(x) \in A
\end{aligned}$$

Esercizio 3

Definire una successione di insiemi ricorsivi X_n tale che

$$C = \{x \mid \bigcap_n X_n \preceq W_x\} \text{ sia ricorsivo}$$

Essendo che per definizione W_x è sempre RE allora $\bar{k} \preceq W_x$ è sempre falso. Basta trovare una successione di insiemi ricorsivi t.c. he $\bigcap_n X_n = \bar{k}$ (esercizio 2). Per dimostrare che C è ricorsivo basta notare che possiamo ricondurci al problema di appartenenza a \bar{k} che è ricorsivo.

$$C = \{x \mid \bigcap_n X_n \preceq W_x\} = \{x \mid \bar{k} \preceq W_x\} = \emptyset$$

Esercizio 4

Successione di funzioni parziali ricorsive ψ_n tali che $\text{dom}(\psi_n)$ sono re non completi (ricorsivi) e che

$$\bigcup_n \text{dom}(\psi_n) = \{x \mid 2x \in W_x\}$$

Sappiamo che \bigcup_n corrisponde a $\exists n$.

$$\{x \mid 2x \in W_x\} = \{x \mid \varphi_x(2x) \downarrow\}$$

- Definire $X_n = \text{dom}(\psi_n)$
- Dimostrare che X_n sono ricorsivi
- Mostrare che $\bigcup_n \text{dom}(\psi_n) = \{x \mid \varphi_x(2x) \downarrow\}$

Definiamo ψ_n t.c. $X_n = \text{dom}(\psi_n)$:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_n \wedge \varphi_x(2x) \text{ termina in } n \text{ passi} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostriamo che X_n è ricorsivo. (COMPLETARE)

$$\begin{aligned}\bigcup_n \text{dom}(\psi_n) &\implies \{x \mid \exists n. x \in \text{dom}(\psi_n)\} \\ &\implies \{x \mid \exists n. \varphi_x(2x) \text{ termina in passi}\} \\ &\implies \{x \mid \varphi_x(2x) \downarrow\}\end{aligned}$$

Esercizio 4

Successione di funzioni parziali ricorsive ψ_n tali che $\text{dom}(\psi_n)$ sono re non completi (ricorsivi) e che

$$\bigcap_n \text{dom}(\psi_n) = \{x \mid \varphi_x(2^x + 2) \uparrow\}$$

Sappiamo che \bigcap_n corrisponde a $\forall n$. Mentre la divergenza può essere vista come $\forall n$ non termina.

$$X_n = \text{dom}(\psi_n) = \{x \mid \varphi_x(2^x + 2) \text{ non termina in } n \text{ passi}\}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & \varphi_x(2^x + 2) \text{ non termina in } n \text{ passi} \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostra che X_n è ricorsivo. (COMPLETARE)

$$\begin{aligned}\bigcap_n \text{dom}(\psi_n) &\implies \{x \mid \forall n. x \in X_n\} \\ &\implies \{x \mid \forall n. \varphi_x(2^x + 2) \text{ non termina in } n \text{ passi}\} \\ &\implies \{x \mid \varphi_x(2^x + 2) \uparrow\}\end{aligned}$$

Esercizio 4

Successione di funzioni parziali ricorsive ψ_n tali che $\text{Range}(\psi_n)$ sono creativi e che

$$\bigcap_n \text{Range}(\psi_n) = \{x^2 \mid W_x = \mathbb{N}\}$$

Sappiamo che \bigcap_n corrisponde a $\forall n$ e che $W_x = \mathbb{N}$ vuol dire che $\forall n. n \in W_x$ (ovvero $\varphi_x(n) \downarrow$).

•

$$X_n = \text{Range}(\psi_n) = \{x^2 \mid \varphi_x(n) \downarrow\} = \{x^2 \mid n \in W_x\}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} x^2 & \varphi_x(n) \downarrow \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrare che X_n è creativo. (dimostrare quindi che siano RE e che $k \preceq X_n$)

$$\begin{aligned}\bigcap_n X_n &= \bigcap_n \text{Range}(\psi_n) = \{x^2 \mid \forall n . \varphi_x(n) \downarrow\} \\ &= \{x^2 \mid W_x = \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Esercizio 8

Successione di X_n produttivi tale che $\bigcap_n X_n \preceq k$ (k completo $\Rightarrow \forall X$ re e $x \preceq k$).

Una possibile soluzione potrebbe essere

$$\bigcap_n X_n = \emptyset$$

può essere una soluzione in quanto $\emptyset \preceq k$ perché \emptyset è ricorsivo e quindi re. k completo.

$$X_n = \{x \mid W_x = [0, n]\} \forall m \neq n . W_x \neq [0, m]$$

$$\begin{aligned}\bigcap_n X_n = \emptyset \quad y \in X_n &\implies W_y = [0, n] \neq [0, n+1] \\ &\implies y \notin X_{n+1}\end{aligned}$$

visto genericità di y e n allora $\bigcap_n X_n = \emptyset$. $\emptyset \preceq k$ perché k completo (Sol. alternativa: $X_n = \{x \mid W_x = n\mathbb{N}\}$ o $\{x \mid W_x = \{n\}^{\mathbb{N}}\}$).