



Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

January 9, 2025

Contents

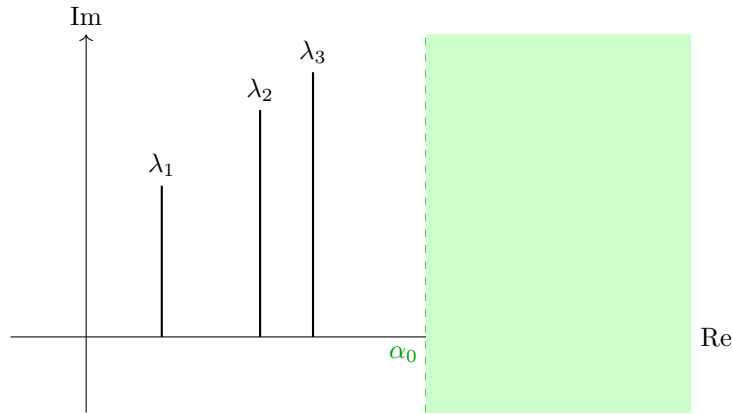
1	Trasformata di Laplace	3
1.1	Proprietà	3
1.2	Trasformate di funzioni notevoli	6
1.3	Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali	9
1.3.1	Funzione di trasferimento	12
2	Antitrasformata di Laplace	13
2.1	Divisione polinomiale	13
2.2	Fratti semplici	14
3	Sistema a blocchi	17
3.1	Controllori	18
3.2	Forma canonica - nomenclatura	18
3.3	Regole di trasfromazione	19
4	Diagrammi di flusso	20
4.1	Convertire un Sistema a blocchi in un diagramma di flusso	20
4.2	Funzione di Mason	20
5	Diagrammi di Bode	22
5.1	Motivo delle sinusoidi	22
5.2	Rappresentazione del diagramma di Bode	23
5.3	Risposta in frequenza	24
5.4	Operazioni tra numeri complessi	25
5.5	Forma di Bode	26
5.5.1	Quattro possibili diagrammi di Bode	28
5.6	Diagrammi di Bode Totale	34
6	Trasformata di Fourier	35
6.1	Winding Frequency e la quasi-trasformata di Fourier	36
6.2	Segnali periodici e aperiodici	37
6.3	Serie di Fourier	37

1 Trasformata di Laplace

Definition 1.1. $v(t)$ è definito nel tempo. $V(s)$ è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st} dt$$

Figure 1: $\alpha \geq \max\{\lambda_i\}$



1.1 Proprietà

La trasformata di Laplace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

Property 1.2. Linearità:

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) = a_1 V_1(s) + a_2 V_2(s)$$

Property 1.3. Traslazione nel dom. del tempo:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = \overbrace{e^{-s\tau}}^{\tau > 0} V(s)$$

Property 1.4. Traslazione nel dom. dei complessi:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = V(s - \lambda)$$

Property 1.5. Cambio di scala:

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Property 1.6. Proprietà delle derivate: Se $v(t)$ ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t)$ allora anche la sua derivata i -esima ammette TdL.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = S^i V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{i-1-k})$$

Proof. Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\
 &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\
 &= sV(s) - v(0^-)
 \end{aligned}$$

Proof. Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\
 &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= \int_0^{+\infty} [S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)]e^{-st}dt - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}
 \end{aligned}$$

Property 1.7. Moltiplicazione per funzioni polinomiali: Se $v(t)$ ammette TdL e t è un polinomio allora anche $tV(s)$ ammette TdL .

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

Proof. Per $i = 1$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[tv(t)](s) &= \int_0^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt = - \int_0^{+\infty} v(t) \cdot (te^{-st})dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} v(t) \frac{d}{ds} te^{-st}dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \overbrace{\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt}^{TdL} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

Property 1.8. Integrazione nel dom. del tempo: Se $v(t)$ ammette TdL , allora $\Psi(t) = \int_0^t v(t)dt$ ammette TdL

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza: $\alpha = \max\{0, \alpha_0\}$

Proof.

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \implies \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) = S\mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

Property 1.9. Integrazione nel dom. dei complessi: Se $v(t)$ ammette TdL e esiste $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$ allora:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty} \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-s\zeta}d\zeta dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t) \underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

Theorem 1.10. Teorema del valore iniziale: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Theorem 1.11. Teorema del valore finale: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Property 1.12. Convoluzione nel dom. del tempo: Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulla per $t < 0$) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL.

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Proof.

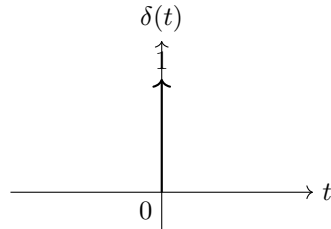
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u * v)(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau) v(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0-}^{\infty} v(t - \tau) e^{-st} dt \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Sostituiamo $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0-}^{\infty} v(x) e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_0^{+\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x) e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse $\delta(t)$

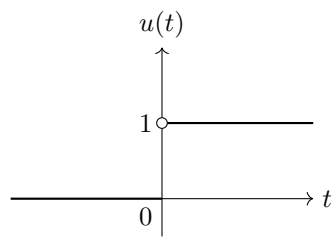
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A \overbrace{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}^1 = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

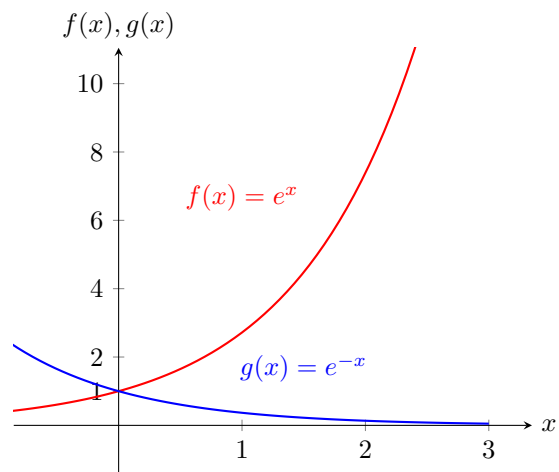


Unit Step $u(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\ &= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\ &= e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{e^{-s\tau}}{s}\end{aligned}$$

Esponenziale complesso causale: $v(t) = e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$



$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) \\ &= \frac{1}{s - \lambda}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s-\lambda}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s-\lambda}$$

Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:

$$v(t) = \frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!} \mathcal{L}[t^l e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &\stackrel{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{ds^l} \mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{ds^l} \frac{1}{s-\lambda} \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{l!(-1)^l}{(s-\lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s-\lambda)^{l+1}} \end{aligned}$$

Esempio 1

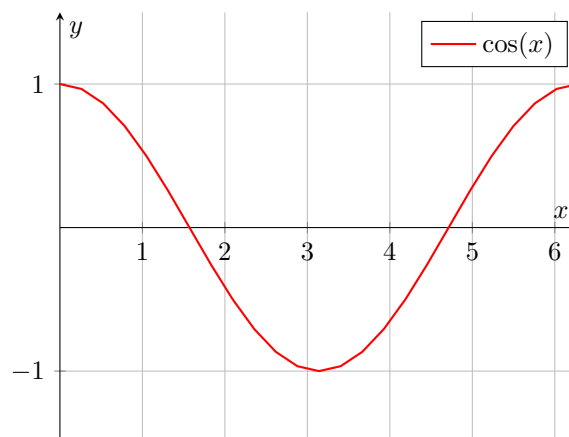
Con $l = 1$

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$$

Con $l = 2$

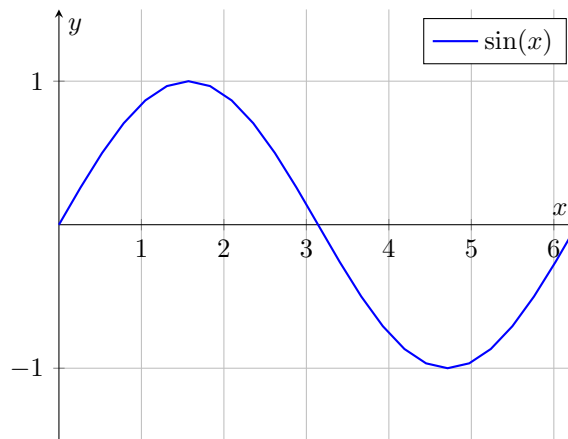
$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^3}$$

Funzione coseno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(wt)](s) &\stackrel{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - jw} + \frac{1}{s + jw} \right] \\
&= \frac{s}{s^2 + w^2}
\end{aligned}$$

Funzione seno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(wt)](s) &\stackrel{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s + jw} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{s + jw - s + jw}{s^2 + w^2} \right] \\
&= \frac{w}{s^2 + w^2}
\end{aligned}$$

1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j u(t)}{dt^j}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t) (u(t) = 0, t < 0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-), \frac{dv(0)}{dt}; \frac{d^2 v(0)}{dt^2}; \dots \frac{d^{n-1} v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL allora anche $v(t)$ ammette TdL e:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right] (s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L} \left[\frac{d^i u(t)}{dt^i} \right] (s)$$

Applicando $n + m$ volte la regole della derivata:

$$\begin{aligned} & a_n \left[S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-1-k}) \right] + \\ & + a_{n-1} \left[S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-2-k}) \right] + \\ & + \dots + a_0 V(s) \\ & = b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s) \end{aligned}$$

Imponiamo le C.I.: $u(t) \Big|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0] V(s)}_{d(s)} + \\ & - \underbrace{a_n v(0^-) S^{n-1} \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) S^{n-2} - \dots - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right)}_{p(s)} \\ & = \underbrace{(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_0) U(s)}_{n(s)} \end{aligned}$$

$$\implies d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinomio di grado m che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonia caratteristico di $u(t)$
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate di uscita. Polinimonia caratteristico di $v(t)$
- $p(s)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left(\sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \frac{d^{n-j} v(t)}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

Polinomio di grado $n - 1$ che dipende solo dalle C.I di $v(t)$

- $\frac{P(s)}{d(s)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I. del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico di $v(t)$

$$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}U(s)$ è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico di $u(t)$, dei coefficienti del polinomio caratteristico di $v(t)$ moltiplicati per tali $u(t)$:

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

Esempio

Dato un sistema LTI:

$$\begin{aligned} \frac{d^3v(t)}{dt^3} + \frac{d^2v(t)}{dt^2} &= \frac{du(t)}{dt} \\ \downarrow \\ \mathcal{L} \left[\frac{d^3v(t)}{dt^3} \right] + \mathcal{L} \left[\frac{d^2v(t)}{dt^2} \right] &= \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} \right] \\ \downarrow \\ S^3V(s) - S^2v(0^-) - S \frac{dv(0^-)}{dt} - S^2 \frac{d^2v(0^-)}{dt^2} + \\ + S^2V(s) - Sv(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} &= SU(s) \\ \underbrace{(S^3 + S^2)}_{d(s)} V(s) - \underbrace{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}_{p(s)} &= \underbrace{S}_{n(s)} U(s) \\ V(s) = \frac{S}{(S^3 + S^2)} U(s) + \frac{\left[s^2v(0) + \frac{dv(0)}{dt}S + \frac{d^2v(0)}{dt^2} + v(0)S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}{S^3 + S^2} \end{aligned}$$

$H(s)$ è definita come TdL delle risposte impulsive $h(t)$. È una funzione razionale con grado del numeratore generalmente minore o uguale del denominatore.

$$\begin{aligned} h(t) &= d_0\delta_0(t) + \dots \left(\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right) \delta_{-1}(t) \\ &\stackrel{\mathcal{L}}{=} d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda_i)^{l+1}} = H(s) \end{aligned}$$

1.3.1 Funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{b_m (S - \beta)^{\zeta_1} (S - \beta_2)^{\zeta_2} \dots (S - \beta_q)^{\zeta_q}}{a_n (S - \alpha)^{\mu_1} (S - \alpha_2)^{\mu_2} \dots (S - \alpha_n)^{\mu_r}}$$

Rapporto tra i polinomi car. di $u(t)$ e $v(t)$

Dove α_i e β_j sono rispettivamente radici del denominatore e del numeratore.

Possiamo anche riscriverla come:

$$H(s) = k \frac{\prod_{i=1}^m (S - Z_i)}{\prod_{i=1}^n (S - P_i)} \quad \text{dove} \quad k = \frac{b_m}{a_n}$$

Dove $(S - Z_i)$ e $(S - P_i)$ sono rispettivamente zeri e poli della funzione razionale.

Definition 1.13. Definiamo come zero di una funzione razionale $H(s)$ un qualsiasi numero $\beta \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\beta) = 0$.

Definition 1.14. Definiamo come polo di una funzione razionale $H(s)$ un qualunque numero $\alpha \in \mathbb{C}$ t.c. $H(\alpha) = \infty$.

Dato $H(s)$ in forma ridotta (ho eliminato le radici in comune): Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ con $r \leq n$ i suoi poli dopo la semplificazione se $Re(\lambda_i) < 0$ per $i = 1, \dots, r$ allora il sistema è BIBO stabile.

Lemma 1.15. Un sistema è BIBO stabile se tutti i suoi poli giacciono nel semipiano complesso negativo.

Per stabilizzare un sistema (BIBO stabilizzato) devo togliere gli zeri λ_i con $Re(\lambda_i) > 0$, dividendoli per il loro corrispettivo polo.

Esempio 1

$$v'(t) - 3v(t) = u''(t) - 5u'(t) + 4u(t)$$

Calcoliamoci il polinomio caratteristico:

$$s - 3 = s^2 - 5s + 4$$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\text{Pol. Car degli ingressi}}{\text{Pol. Car delle uscite}} = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3}$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 5s + 4}{s - 3} = \frac{(s - 4)(s - 1)}{s - 3}$$

Poiché $\lambda_1 = 3$ non è asintoticamente stabile poiché la sua parte reale è maggiore di 0.

Non è neanche BIBO stabile perché tutte le radici del denominatore (poli di $H(s)$) hanno parte reale maggiore di 0.

Esempio 2

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = u''(t) - 4u'(t) + 3u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 - 4s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{(s-3)(s-1)}{(s+1)(s+2)}$$

Poiché $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$ sono minori di 0 allora il sistema è asintoticamente stabile. Ricordiamo che se un sistema è asintoticamente stabile allora è anche BIBO stabile.

Esempio 3

$$v'''(t) + 7v''(t) - 2v'(t) + 6v(t) = u''(t) + 3u(t) - 4u(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s - 4}{s^3 + 7s^2 - 2s + 6} = \frac{(s+4)\cancel{(s-1)}}{\underbrace{(s+3)}_{\lambda_1=-3} \underbrace{(s+2)}_{\lambda_2=-2} \cancel{(s-1)}}$$

Non è asintoticamente stabile. Tuttavia è BIBO stabile poiché tutti i poli di $H(s)$ hanno parte reale minore di 0.

2 Antitrasformata di Laplace

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{\deg[n(s)] \geq \deg[d(s)]}_{\text{Sistema proprio}} \Rightarrow A \\ \underbrace{\deg[n(s)] < \deg[d(s)]}_{\text{Sistema strett. proprio}} \Rightarrow B \end{cases}$$

A → Divisione polinomiale → Fratti semplici → Antitrasformata

B → Fratti complessi → Antitrasformata

2.1 Divisione polinomiale

$$V(s) = \frac{r(s)}{d(s)} + k \quad \text{dove} \quad \deg[r(s)] < \deg[d(s)], k \in \mathbb{C}$$

$$\mathcal{L}[K\delta(t)] = K \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} K\delta_0(t)$$

Esempio

$$V(s) = \frac{2s^2 + 4s - 3}{s^2 - s - 1} \quad \text{dove} \quad m = 2, n = 2$$

Quotient	2
Divisor	$s^2 - s - 1$
Step 1:	$2s^2 + 4s - 3$
Subtract:	$-(2s^2 - 2s - 2)$
Remainder:	$6s - 1$

$$V(s) = \frac{6s - 1}{s^2 - s - 1} + 2$$

2.2 Fratti semplici

$$\frac{r(s)}{d(s)} = d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s-\lambda)^{l+1}}$$

Esempio 1

$$V(s) = \frac{3s^2 - 1}{(s+1)^2(s-2)(s+5)}$$

$$V(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+5)}$$

A, B, C, D sono i $c_{i,l}$

Esempio 2

$$\frac{s-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{c_{1,0}}{(s+4)} + \frac{c_{2,0}}{s-2} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-2}$$

1. Metodo:

$$\frac{A(s-2) + B(s+4)}{(s+4)(s-2)} = \frac{AS - 2A + BS + 4B}{(s+4)(s-2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + 4B = -20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -3 \end{cases}$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

2. Metodo:

$$c_{i,l} = \lim_{s \rightarrow \alpha_i} \frac{d^{\mu_i-l-1} \left((s-\alpha_i)^{\mu_i} \frac{r(s)}{d(s)} \right)}{ds^{\mu_i-l-1}}$$

$$c_1 = A = \lim_{s \rightarrow -4} \frac{\cancel{d^{1-0-1}} \left((s+4)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^0} = \frac{-24}{-6} = 4$$

$$c_2 = B = \lim_{s \rightarrow 2} \frac{d^{1-0-1} \left((s-2)^1 \frac{s-20}{(s+4)(s-2)} \right)}{ds^0} = \frac{-18}{6} = -3$$

$$\frac{S-20}{(s+4)(s-2)} = \frac{4}{s+4} - \frac{3}{s-2}$$

Ora si applica l'antitrasformata:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= k + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \\
 &\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{=} \mathcal{L}^{-1}[k](t) + \sum_{i=0}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{c_{i,l}}{(s-\lambda_i)^{l+1}} \right] (t) \\
 &= k\delta_0(t) + \left[\sum_{i=0}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \delta_{-1}(t) \right]
 \end{aligned}$$

Esempio completo

$$v''(t) - v'(t) - 2v(t) = u''(t) + 2u'(t) + u(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = e^{3t} \delta_{-1}(t)$$

Quello che ci viene chiesto è

1. Stabilità
2. Risposta libera (nel tempo e in frequenza)
3. Risposta impulsiva
4. Risposta forzata
5. Risposta totale

Partiamo con il primo punto:

1. Polinomio caratteristico: $s^2 - s - 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ e $\mu_i = 1$
Non è asintoticamente stabile perché $\lambda_1 > 0$

$$V(s) = \underbrace{\frac{p(s)}{d(s)}}_{V_l(s)} + \underbrace{\frac{\overbrace{h(s)}^{H(s)}}{d(s)}}_{V_f(s)} \cdot U(s)$$

Per garantire stabilità BIBO i poli di $H(s)$ devono avere parte reale minore di 0.

Calcoliamo la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2 - s - 2} = \frac{(s+1)^2}{(s-2)(\cancel{s+1})} = \frac{s+1}{s-2}$$

Non è BIBO stabile perché λ_1 (che è un polo della funzione di trasferimento) è maggiore di 0.

2a. Risposta libera nel tempo:

$$\begin{aligned}
 v_l(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} c_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \\
 &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\
 \begin{cases} v_l(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \\ v'_l(t) = 2c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \end{cases} &\xrightarrow{t=0} \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{cases} \\
 v_l(t) &= e^{-t}
 \end{aligned}$$

2b . Risposta libera in frequenza: Facciamo la trasformata di Laplace del sistema:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[v''(t) - v'(t) - 2v(t)] &= \mathcal{L}[u''(t) + 2u'(t) + u(t)] \\
 \underbrace{(s^2 V(s) - s + 1)}_{\substack{\text{pol.} & \text{car.} & \text{uscite}}} - \underbrace{(sV(s) + 1)}_{\substack{\text{pol.} & \text{car.} & \text{uscite}}} - 2V(s) &= \underbrace{(s^2 U(s) + 2sU(s) + U(s))}_{\substack{\text{pol.} & \text{car.} & \text{entrate}}} \\
 (s^2 - s - 2) V(s) - s + 2 &= (s^2 + 2s + 1) U(s) \\
 V(s) &= \frac{s-2}{(s-2)(s+1)} + \frac{(s+1)^2}{(s-2)(s+1)} U(s)
 \end{aligned}$$

Vediamo ora cosa è $U(s)$:

$$u(t) = \underbrace{e^{-3t} \delta_{-1}(t)}_{\lambda=-3, A=1} \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s+3}$$

$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{v_l(s)} + \underbrace{\frac{s+1}{s-2} \cdot \frac{1}{s+3}}_{H(s)}$$

Quindi la risposta libera in Laplace è:

$$v_l(s) = \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\lambda=1, A=1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} \delta_{-1}(t)$$

L'unica differenza che ci sta tra risposta libera e in frequenza e che quella in frequenza, quando la andiamo a trovare dobbiamo moltiplicarla per la funzione causale, ovvero il gradino.

3. Risposta impulsiva:

$$H(s) = \frac{s+1}{s-2}$$

Facciamo la divisione tra polinomi dove otteniamo:

$$H(s) = 1 + \frac{3}{s-2}$$

Applichiamo l'antitrasformata: $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \delta_0(t) + 3e^{2t} \delta_{-1}(t)$

4. Risposta forzata: Proviamo entrambi i metodi, partiamo con il primo (i fratti semplici):

$$V_f(s) = \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

$$\frac{As+3A+Bs-2B}{(s-2)(s+3)} = \frac{(A+B)s+(3A-2B)}{(s-2)(s+3)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-2B=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \\ B=\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{3}{5} \frac{1}{s-2} + \frac{2}{5} \frac{1}{s+3} = \left(\frac{3}{5} e^{2t} + \frac{2}{5} e^{-3t} \right) \delta_{-1}(t)$$

Okay ora proviamo con il metodo dei limiti:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{\mu-l-1} n(s)}{ds^{\mu-l-1} d(s)} (s-\lambda)^\mu$$

$$A = \lim_{s \rightarrow +2} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} \cancel{(s-2)} = \frac{3}{5}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{s+1}{(s-2)(s+3)} \cancel{(s+3)} = \frac{2}{5}$$

E come si vede, si ottiene il risultato medesimo con diverso metodo.

3 Sistema a blocchi

In generale ci sono tre modi per mettere a sistema un sistema a blocchi:

- **Sistema in serie** (o cascata) dove l'output di un sistema A diventa l'input di un sistema B

$$x_2 = y_1$$

- **Sistema parallelo** dove un input x viene separato in x_1 e x_2 , entrano all'interno rispettivamente dei sistemi A e B e poi vengono sommati in una singola uscita y .

$$x = x_1 = x_2$$

$$y = y_1 + y_2$$

- **Sistema di retroazione** dove l'uscita di un sistema A diventa l'input di un sistema B e viceversa.

$$x = x_1 + y_2$$

$$y = y_1 = x_2$$

I blocchi avranno sempre un singolo input e un singolo output (poiché sistemi SISO (Single Input Single Output)), per quanto riguarda i nodi sommatori, possono entrare infiniti numeri di archi e generalmente ne esce solo una.

Esistono 2 tipi di controlli:

1. *Il controllo ad anello aperto* è un sistema in cui l'uscita non influenza l'input. È un sistema a ciclo aperto, ovvero non c'è feedback.
2. *Il controllo ad anello chiuso* è un sistema in cui l'uscita influenza l'input. È un sistema a ciclo chiuso, ovvero c'è feedback. Dove il sistema che ritorna il feedback del sistema A si chiama funzione di trasferimento del sistema.

I sistemi che ci interessano di più sono quelli a ciclo chiuso, in quanto sono quelli che si avvicinano di più alla realtà.

Guardando la nomenclatura dei sistemi a blocchi, si ha che:

- Sistema di riferimento r è l'input del sistema
- Elemento di feedforward F è un blocco che manda un segnale di controllo al processo
- Processo P è il sistema che trasforma l'input in un output (che però può essere disturbato)
- Elemento di feedback B è un blocco che manda un segnale di feedback b al processo per correggere l'errore
- Segnale di attuazione che è in genere una sorta di errore $e = r - b$ (in genere viene chiamato feedback negativo quando $e = r - b$ mentre è feedback positivo quando $e = r + b$)

3.1 Controllori

I controllori sono di tre tipi con relative regole di controllo:

- P è il controllore proporzionale e la sua regola di controllo è $u(t) = K_p e(t)$
- I è il controllore integrale e la sua regola di controllo è $u(t) = K_i \int e(\tau) d\tau$
- D è il controllore derivativo e la sua regola di controllo è $u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$

Possiamo anche combinarli insieme, esistono tipi "compositi" di controllori come PID, PI, PD, I, P, D.

$$\mu_{pid} = K_p e(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} + K_i \int e(t) dt$$

Quando abbiamo un sistema a blocchi complesso e ridurlo a un sistema a blocchi più semplice, applicando diverse regole di riduzione:

3.2 Forma canonica - nomenclatura

La **Forma canonica** è una forma standard di rappresentazione di un sistema a blocchi.

1. G : Funzione di trasferimento diretta
2. H : Funzione di trasferimento di feedback
3. GH : Funzione di trasferimento del loop (o anello)

4. $\frac{C}{R}$ = Funzione di trasferimento dell'anello chiuso

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} = \frac{\text{eq. car. dell'ingresso}}{\text{eq. car. dell'uscita}}$$

5. $\frac{E}{R}$: rapporto del segnale di attuazione = $\frac{1}{1 \pm GH}$

6. $\frac{B}{R}$: rapporto di feedback = $\frac{GH}{1 \pm GH}$

L'obiettivo è di compattare il sistema fino ad arrivare ad un sistema a blocchi uguale alla forma canonica. Prendiamo per esempio il sistema massa molla smorzatore:

$$\begin{aligned} ma &= \sum F \\ mx'' &= F_{ext} - kx - bx' \\ F_{ext} &= kx + bx' + mx'' \\ F_{ext}(s) &= kX(s) + bsX(s) + ms^2X(s) \\ X(s) &= \frac{F_{ext}(s)}{ms^2 + bs + k} \end{aligned}$$

3.3 Regole di trasfromazione

1. **Combinazione di blocchi in serie:** dati due blocchi A e B in serie, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di AB .
2. **Combinazione di blocchi in parallelo:** dati due blocchi A e B in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è (in base al sommatore) $A \pm B$.
3. **Rimozione di blocchi in parallelo:** dati due blocchi A e B in parallelo, riducendolo otteniamo un singolo blocco che è il prodotto di AB diviso la somma di AB .
4. **Rimozione di anello feedback:** dati due blocchi A e B in feedback, riducendolo otteniamo un singolo blocco che diventa $\frac{A}{1 \pm AB}$
5. **Rimozione del loop:** dati due blocchi A e B in loop, possiamo spostare il blocco retroattivo all'inizio del blocco iniziale
6. **Riorganizzazione degli input:** posso organizzare gli input del sistema a blocchi come voglio, l'importante è che alla fine si arrivi ad un sistema a blocchi canonico.
7. **Spostamento dei nodi di somma prima di un blocco:** posso spostare i nodi di somma prima di un blocco
8. **Spostamento dei nodi di somma dopo un blocco:** posso spostare i nodi di somma dopo un blocco
9. **Spostamento dei nodi prima di un blocco:** posso spostare i nodi prima di un blocco
10. **Spostamento dei nodi dopo un blocco:** posso spostare i nodi dopo un blocco

4 Diagrammi di flusso

I diagrammi di flusso sono una rappresentazione grafica di un sistema a blocchi. Guardiamo ora le diverse componenti di un diagramma di flusso:

- **Percorso in avanti:** Un cammino che unisce un nodo di input ad un nodo di output
- **Percorso ad anello:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e senza passare più volte in altri nodi intermedi
- \rightarrow **Self loop:** Un cammino che inizia e finisce nello stesso nodo e non tocca altri nodi intermedi
- **Guadagno:** prodotto di tutti i pesi degli archi lungo un percorso

4.1 Convertire un Sistema a blocchi in un diagramma di flusso

Per convertire un sistema a blocchi in un diagramma flussi (così che sia più facile da gestire) dobbiamo convertire gli archi e i nodi nel seguente modo:

1. Individuiamo i nodi di input e output
2. Per ogni nodo somma si aggiunge un nodo
3. Per ogni nodo dello schema a blocchi si aggiunge un nodo al diagramma di flusso
4. Unisco i nodi con gli archi il cui peso è la funzione dentro al blocco. Se tra un nodo e l'altro non ci sono blocchi, il suo peso vale 1.

4.2 Funzione di Mason

Definition 4.1. La funzione di Mason è una funzione che permette di calcolare la funzione di trasferimento di un sistema a blocchi.

$$T = \sum_i \frac{P_i \Delta_i}{\Delta}$$

dove

- P_i è il guadagno del percorso i
- Δ_i è il determinante del percorso i

- Δ è il determinante del sistema

$$\begin{aligned}
\Delta &= 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk} \\
&= 1 - \left(\sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} + \dots \right) \\
&= 1 - \left(\begin{array}{c} \text{Somma dei guadagni di tutti gli} \\ \text{alberi} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Somma dei dei guadagni} \\ \text{dei prodotti degli anelli} \\ \text{che non toccano a due} \end{array} \right) \\
&\quad + \left(\begin{array}{c} \text{somma dei guadagni dei prodotti} \\ \text{degli anelli che non si toccano 3} \\ \text{a 3} \end{array} \right) + \dots
\end{aligned}$$

Esempio 1

Prendiamo come esempio il diagramma di flusso visto a lezione (guarda gli punti) e calcoliamo la funzione di Mason. Troviamo i guadagni per ogni percorso:

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4) = 1 \cdot G \cdot 1 = G$$

$$P_{1,1} = (x_2, x_3) = -GH$$

L'ordine in cui vengono chiamati i percorsi è arbitrario. Sono stati scelti semplicemente nell'ordine in cui li abbiamo notati. I guadagni che hanno 1 non vengono considerati. Calcoliamo ora il determinante del sistema:

$$\Delta = 1 - (P_{1,1}) = 1 + GH$$

Annullo tutti gli archi che toccano il percorso i-esimo:

$$\Delta_1 = 1 - \cancel{P_{1,1}} = 1 - 0 = 1$$

$$T = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G \cdot 1}{1 + GH} = \frac{G}{1 + GH}$$

Esempio 2

TODO...

	Anelli	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
A_1^1	-AB			1	1						
A_2^1	-CD							1	1	1	
A_3^1	FCE	1	1				1	1	1	1	
A_4^1	FGE	1	1				1	1	1	1	1
A_5^1	ACE	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A_6^1	AGE	1	1	1	1	1	1		1	1	1

5 Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode sono un modo per rappresentare graficamente la risposta in frequenza di un sistema.

Esempio

$$\begin{aligned}u(t) &= \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \alpha \text{Hz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(t) &= 2u(t) + \int u(t)dt \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\ &= 2\sin\left(\frac{1}{2}t\right) - 2\cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \sin\left(\frac{1}{2}t + \arctan\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\ &= 2.83 \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\ &= A \sin(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Questo diagramma ci aiuta a capire come si comporta un sistema descritto da segnali **sinusoidali**.

5.1 Motivo delle sinusoidi

I sistemi descritti da segnali sinusoidali sono utili perchè vedremo che qualsiasi segnale può essere rappresentato come una somma di sinusoidi.

Un sistema LTI causale permette le seguenti operazioni:

- $u(t) \cdot a$
- $\frac{du(t)}{dt}$
- $\int u(t) dt$
- $u_1(t) + u_2(t)$

L'output del sistema è un'onda scalata rispetto all'ampiezza o ritardata rispetto al tempo:

Esempio

Prendiamo ad esempio il seguente sistema:

$$u(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right)$$
$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \alpha \text{Hz}$$

Calcoliamo l'ingresso:

$$\begin{aligned} v(t) &= 2 \cdot u(t) + \int u(t) dt \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + \int \sin\left(\frac{1}{2}t\right) dt \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) - 2 \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \end{aligned}$$

Utilizziamo un'identità trigonometrica, cioè:

$$\begin{aligned} a \sin(x) + b \cos(x) &= \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \rho) \end{aligned}$$

dove: $\rho = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$ $a \geq 0$

$$\begin{aligned} v(t) &= \overbrace{2}^a \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \overbrace{-2}^b \cos\left(\frac{1}{2}t\right) \\ &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \text{atan}\left(\frac{-2}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{8} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t + \text{atan}(-1)\right) \\ &= 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right) \\ &= A \cdot \sin(\omega + \phi) \end{aligned}$$

5.2 Rappresentazione del diagramma di Bode

Il diagramma di bode permette di rappresentare il comportamento di un sistema LTI formato da sinusoidi, di seguito guardiamo un diagramma semi-logaritmico (cioè con un asse lineare e uno logaritmico) che rappresenta l'ampiezza e la fase di un sistema LTI:

Osservazione:

Il decibel dB è un unità di misura inventata nel 1920 per misurare quanto si disperde il segnale acustico su una transmission unit ($1TU = 10 \log_{10} \Delta_{\text{Potenza}}$). Quindi un decibel è il minimo di potenza che un orecchio umano può percepire.

$$\text{Potenza} = \text{Ampiezza}^2$$

$$1\text{bel} = 1TU = 10 \log_{10} A^2 = 20 \log_{10} A$$

$$1dB = \frac{1}{10}bel$$

Esempio

$$u(t) = \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \quad \omega = \frac{1}{2}$$

$$v(t) = 2.83 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}t - 0.785\right)$$

Studiamo il sistema in frequenza:

$$V(s) = \left(2 + \frac{1}{s}\right) U(s)$$

$$\frac{V(s)}{U(s)} = 2 + \frac{1}{s} = \frac{2s + 1}{s} \quad \text{Funzione di trasferimento del sistema}$$

s è un numero complesso:

$$s = \sigma + j\omega$$

Con la risposta in frequenza la s diventa solo $s = j\omega$, quindi otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{V(s)}{U(s)} &= \frac{2j\omega + 1}{j\omega} \\ &= \frac{2j\cancel{\omega}}{\cancel{j\omega}} + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} \\ &= 2 - \frac{1}{\omega} \cdot j \end{aligned}$$

La risposta del sistema nel piano dei complessi è: dove:

$$\begin{aligned} \text{Ampiezza} = l &= \sqrt{\Re^2 + \Im^2} \\ \text{Fase} = \theta &= \text{atan2}(\Im, \Re) \end{aligned}$$

$$\text{atan2}(\sigma, j\omega) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) & \text{se } \sigma > 0, \quad \omega \in \mathbb{R} \\ \text{segno}(\omega) \cdot \frac{\pi}{2} & \text{se } \sigma = 0, \quad \omega \neq 0 \\ \text{atan}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right) + \pi \cdot \text{segno}(\omega) & \text{se } \sigma < 0, \quad \text{o } \sigma = 0 \quad \omega \geq 0 \end{cases}$$

Il diagramma di Bode sarà:

5.3 Risposta in frequenza

$$u(t) = Ae^{\omega_0 t + \phi} \implies Ae^{j\phi} e^{j\omega_0 t} \implies LTIBIO \implies v(t)$$

$$A \in \mathbb{R}_+ \quad \phi, \omega \in \mathbb{R}$$

$$H(j\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \text{ per ogni } \omega \in \mathbb{R}$$

$$:= \mathcal{L}[h(t)] \Big|_{s=j\omega} (s)$$

Prendiamo come esempio un fasore:

$$u(t) = Ae^{j\phi} e^{j\omega t}$$

$$u(t) \rightarrow [h(t)] \rightarrow v(t)$$

$$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) Ae^{j\phi} e^{j\omega(t-\tau)} d\tau$$

$$= Ae^{j\phi} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= Ae^{j\phi} e^{j\omega t} H(j\omega) = Ae^{j\phi} e^{j\omega t} A(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

$$= AA(\omega) e^{j(\phi+\phi(\omega))} e^{j\omega t}$$

Dove A è l'ampiezza di $u(t)$, $A(\omega)$ è l'ampiezza della risposta in frequenza, ϕ è la fase di $u(t)$ e $\phi(\omega)$ è la fase della risposta in frequenza, ω è la frequenza iniziale e rimane invariata. *Bode ci serve a capire il comportamento del sistema al variare della frequenza del segnale d'ingresso.* Che sia un fasore o una sinusoide ci dice cosa succede se aumentiamo o diminuiamo la frequenza del nostro segnale d'ingresso.

5.4 Operazioni tra numeri complessi

Property 5.1. *Siano a e b due numeri complessi, allora:*

- $|ab| = |a||b|$
- $\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$
- $|a/b| = |a|/|b|$
- $\arg(a/b) = \arg(a) - \arg(b)$
- $|a^n| = |a|^n$
- $\arg(a^n) = n \arg(a)$

Property 5.2. *Sia s un numero complesso con $x \in \mathbb{C}t.c.$:*

$$\log s = x \iff s = e^x$$

E scrivendo S in forma esponenziale e x in forma complessa:

$$S = \rho e^{j\omega} \quad x = \sigma + j\omega$$

$$\begin{aligned} \log s &= x \\ &= \log \rho + j\phi \\ &= \log |s| + j\arg(s) \end{aligned}$$

5.5 Forma di Bode

$$H(s) = \frac{\sum_j b_j S^j}{\sum_i a_i S^i} U(s)$$

$$= K \frac{(s - z_1)^{\mu_1} \dots (s - z_e)^{\mu_e}}{(s - p_1)^{\gamma_1} \dots (s - z_r)^{\gamma_r}}$$

Molteplicità delle soluzioni algebriche:

$$l \leq m, \mu_1 + \dots + \mu_e = m$$

$$r \leq n, \gamma_1 + \dots + \gamma_r = n$$

Theorem 5.3. *La forma di Bode di un sistema LTI è:*

$$H(s) = K_b \frac{\prod_i (1 + s\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_k \left(1 + 2\zeta'_k \frac{s}{\omega'_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega'_{n,k})^2}\right)^{\mu'_k}}{(S^{r_1}) \prod_i (1 + s\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}}$$

K_b : è il termine costante (o guadagno di Bode)

S^r : raggruppa tutti le radici nulle

$(1 + s\tau_i)^{\mu_i}$: raggruppa la singola radice reale

$\left(1 + 2\zeta_k \frac{s}{\omega_{n,k}} + \frac{s^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}$: raggruppa la singola radice complessa coniugata

Per arrivare a questa forma dobbiamo raccogliere le "costanti":

Esempio

$$H(s) = 4 \frac{s^3 + s^2 - 2s}{s^3 + s^2}$$

1. Poli/Zeri Nulli

$$H(s) = 4 \frac{s(s+2)(s-1)}{s^2(s+1)} = 4 \frac{1}{2} \frac{s^2 + s - 2}{s + 1}$$

2. Poli e zeri reali e cerco di arrivare alla forma di bode: $(1 + s\tau)^\mu$

$$\begin{aligned}
H(s) &= 4 \frac{1}{s} \frac{s^2 + s - 2}{s + 1} \\
&= 4 \frac{1}{s} \frac{(s+2)(s-1)}{s+1} \\
&= 4 \frac{1 - (1-s)2 \left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s(1+s)} \\
&= \frac{-8}{1} \frac{1}{s} \frac{(1-s) \left(1 - \frac{s}{2}\right)}{1+s} \\
&= -8 \frac{1}{s} \frac{(1-s) \left(1 + \frac{s}{2}\right)}{1+s} \\
&= -8 \frac{1}{s} \frac{(1-s) + \left(1 + \frac{s^2}{2}\right)}{1+s} \\
&= K_b \frac{1}{s^\mu} \frac{(1 + s\tau_1)^{\mu_i} (1 + s\tau_2)^{\mu_2}}{(1 + s\tau_1)^{mu_1}}
\end{aligned}$$

3. Polo o zero complesso coniugato

$$\begin{aligned}
&= (s - (\sigma + j\omega))(s - (\sigma - j\omega)) = s^2 - 2\sigma s + \sigma^2 + \omega^2 \\
&= (s^2 - s\sigma + sj\omega - s\sigma - sj\omega + |z|^2) \\
&= (s^2 - 2s\sigma + |z|^2)^\mu \\
&= |z|^{2\mu} \left(1 - 2\frac{2\sigma}{|z|^2}s + \frac{s^2}{|z|^2}\right)^\mu \\
&= |z|^{2\mu} \left(1 - 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu
\end{aligned}$$

dove $\zeta = \frac{-\sigma}{|z|} = -\frac{Re(z)}{|z|}$ è il coeff. di smorzamento e $\omega_n = |z|$ ovvero la pulsazione naturale.

Dobbiamo trasformare $H(s) \rightarrow H(j\omega)$: Analisi in frequenza

$$H(j\omega) = K_b \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau'_i)^{\mu'_i} \prod_k \left(1 + j2\zeta'_k \frac{j\omega}{\omega'_{n,k}} - \frac{(j\omega)^2}{(\omega'_{n,k})^2}\right)^{\mu'_k}}{(S^{r_1}) \prod_i (1 + j\omega\tau_i)^{\mu_i} \prod_k \left(1 + j2\zeta_k \frac{j\omega}{\omega_{n,k}} - \frac{(j\omega)^2}{(\omega_{n,k})^2}\right)^{\mu_k}}$$

Esempio 2

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{s^2 - 2s^2 - 8s}{s^4 - 2s^3 + 2s^2} = \frac{s(s^2 - 2s - 8)}{s^2(s^2 - 2s + 2)} = \frac{s^2 - 2s - 8}{s(s^2 - 2s + 2)} \\
 &= \frac{(s-4)(s+2)}{s(s^2 - 2s + 2)} \\
 &= \frac{-4\left(1 - \frac{s}{4}\right)2\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{s(2)\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)} = -4 \frac{1}{s} \frac{\left(1 - \frac{s}{4}\right)\left(1 + \frac{s}{2}\right)}{\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Ora vediamo ogni singolo $(1 + s\tau)^\mu$:

- $\left(1 - \frac{s}{4}\right)$ dove $\tau_1 = -\frac{1}{4}$
- $\left(1 + \frac{s}{2}\right)$ dove $\tau_2 = \frac{1}{2}$
- $\left(1 - s + \frac{s^2}{2}\right)$ dove $w_n^2 = 2 \rightarrow w_n = \sqrt{2}$

$$\frac{2\zeta}{w_n} = -1 \Rightarrow \frac{2\zeta}{\sqrt{2}} = -1 \Rightarrow \zeta = \frac{-1\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5.5.1 Quattro possibili diagrammi di Bode

1. Termine costante K_b
2. Uno zero o un polo nullo S^μ dove μ è la molteplicità
3. Polo o zero reale $(1 + s\tau)^\mu$
4. Polo o zero complesso coniugato $\left(1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$ dove ζ è il coefficiente di smorzamento e ω_n è la pulsazione naturale.

Partiamo dal primo:

1.

$$A = |H(j\omega)| = |K_b|$$

Un numero reale ha 2 fasi:

$$\phi = \text{atan2}(\sigma + j\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } \sigma > 0 \\ -180^\circ & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}$$

2. Polo nullo con $\mu \in \mathbb{Z}, \mu > 0$ zero, $\mu < 0$ polo

$$H(s) = H(j\omega) = (j\omega)^\mu$$

Consideriamo l'ampiezza di $H(j\omega)$:

$$|H(s)| = |(j\omega)^\mu| = |\omega|^\mu = \omega^\mu$$

$$A(\omega) = |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \omega^\mu = 20\mu \log_{10} \omega$$

Questa è una retta che cresce/decrece di 20μ dB/decade. Cosa succede invece alla fase?

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(j\omega)^\mu = \mu \cdot \text{atan2}(j\omega) = \mu 90^\circ$$

Retta costante che passa per μ di 90° . Consideriamo i seguenti zeri e poli di $H(j\omega)$:

ω	S^1	S^{-1}	S^{-2}
10^{-2}	-40	40	80
10^{-1}	-20	20	40
10^0	0	0	0
10^1	20	20	40
10^2	40	-40	80

3. Zeri e poli reali

I poli possono essere scritti così:

$$\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + \tau s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{|\tau|}$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(\sqrt{\Re^2 + \Im^2})$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(\Im, \Re)$$

$\omega < \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega > \omega_0$
$A(\omega) = 20 \log_{10} 1 = 0$ $\phi(\omega) = \text{atan2}(1) = 0$	$A(\omega) = 20 \log_{10} \sqrt{-2} = -3\text{db}$ $\phi(\omega) = \text{atan2}(2) = -45^\circ$	$A(\omega) = 20 \log_{10} \sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} = 20\text{db}$ $\phi(\omega) = \text{atan2}(\omega\tau) = -90^\circ$

4. Poli e zeri complessi coniugati

$$H(s) = \left(1 + 2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^\mu$$

Partiamo del caso di un polo:

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \xrightarrow{\text{Bode}} \frac{1}{1 + 2\zeta \frac{s}{\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{1 + 2j\omega \frac{\omega}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Fattorizziamo:

$$\Re = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

- Se $\omega \ll \omega_0$

$$A(\omega) = -20 \log_{10}(1) = 0$$

$$\phi(\omega) = \text{atan2}(0) = 0^\circ$$

- Se $\omega \gg \omega_0 = \omega_n$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

È una retta che decresce di 40db/decade

$$\phi(\omega) = \text{atan2} \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} \right) = -180^\circ$$

- $\omega = \omega_0 = \omega_n$ Per $\zeta \geq 0.5$:

$$A(\omega) = -20 \log_{10}(2\zeta) = 0$$

Il grafico passa per ω_0 , ma se $\zeta < 0.5$? Picco di risonanza. Se $\zeta = 0$ c'è discontinuità.

$$\phi(\omega) = -90^\circ$$

In generali le fomule per calcolare l'ampiezza di un polo o zero complesso coniugato sono:

– $\omega \gg \omega_0$

$$A(\omega) = -20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -40 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\phi(\omega) = \mu \text{sgn}(\zeta) = -180^\circ$$

- * $\zeta = 0$ asintoto verticale in $A(\omega)$ in ω_n
- * $0 < \zeta \leq 0.5$ picco di risonanza, per cui la pulsazione naturale: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ e l'ampiezza del picco: $M_r = 20\mu \log_{10}(2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})$
- * $\zeta = 0.5$ $A(\omega) = 0$
- * $0.5 > \zeta > 1$ "Passa sotto" il grafico asintotico

Esempio

$$H(s) = \frac{s^2(s+1)(s^2+3s+16)}{(2s-1)}$$

1. Portare la funzione di trasferimento in forma di Bode. Se si dovessero trovare trinomi scomponibili, ricordarsi di scomporli. In questo caso il trinomio al denominatore ha soluzioni coniugate com-

plesse e quindi non lo andremo a scomporre.

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{s^2(1) \left(1 + \frac{s}{1}\right)^1 (16) \left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)^1}{-(1-2s)^1} \\
 &= -16 \frac{s^2(1+s) \left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)}{(1-2s)}
 \end{aligned}$$

2. Cominciamo a calcolare i diagrammi di Bode dei diversi termini:

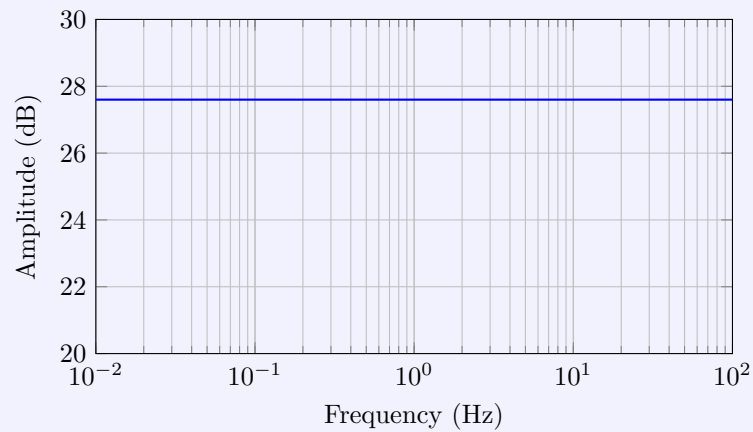
- $K_b = -16$:

$$A = 20 \log_{10}(|-16|) = 24$$

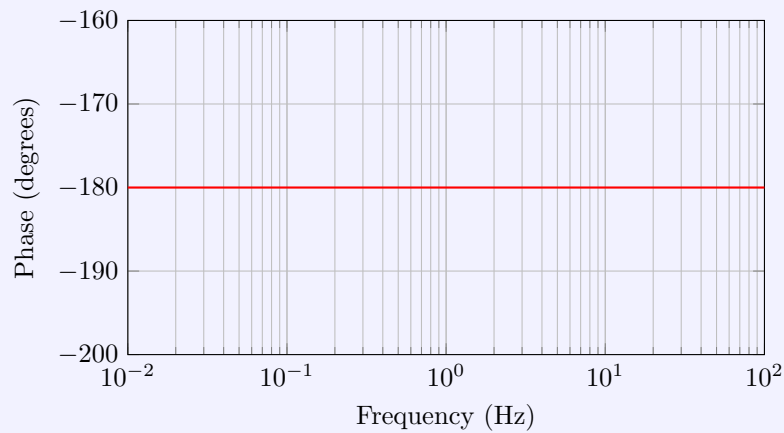
$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{se } K_b > 0 \\ -180^\circ & \text{se } K_b < 0 \end{cases}$$

Quindi $\phi = -180^\circ$

Bode Plot: Amplitude



Bode Plot: Phase



- $(1 + s)$ dove $\mu = 1$ e $\tau = 1$ e quindi $\omega = \frac{1}{|\tau|} = 1$:

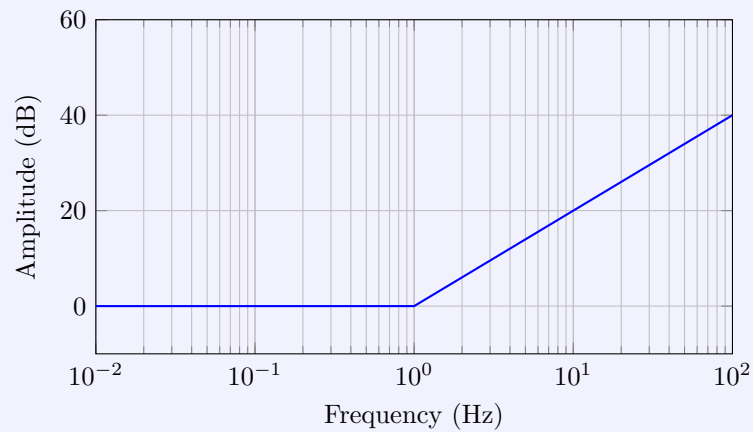
$$A = 20 \log_{10} \omega_n = 0$$

Quindi prima di 10^0 il grafico è piatto in 0. Ma per ogni decade il grafico sale di 20db poichè $A = 20\mu \log_{10}(\omega|\tau|)$. La fase ha un comportamento molto simile.

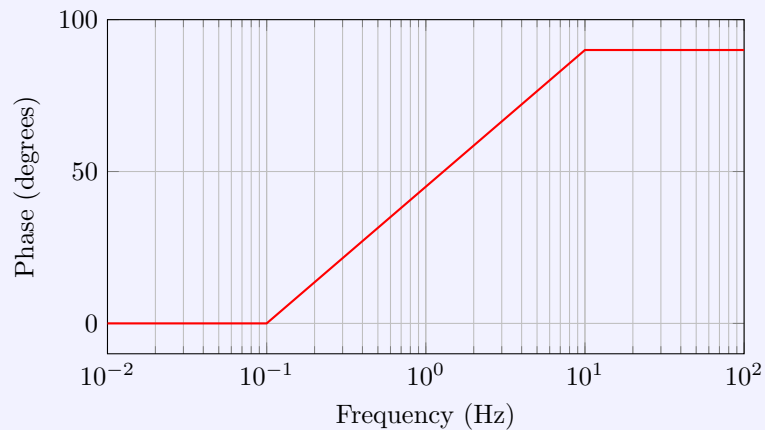
$$\phi = \mu \operatorname{sgn}(\tau) 90^\circ = 90^\circ$$

Quindi prima di $(10^{-1}, 0^\circ)$ $\phi = 0$ e da $(10^1, 90^\circ)$ la fase è di 90° .

Bode Plot: Amplitude



Bode Plot: Phase

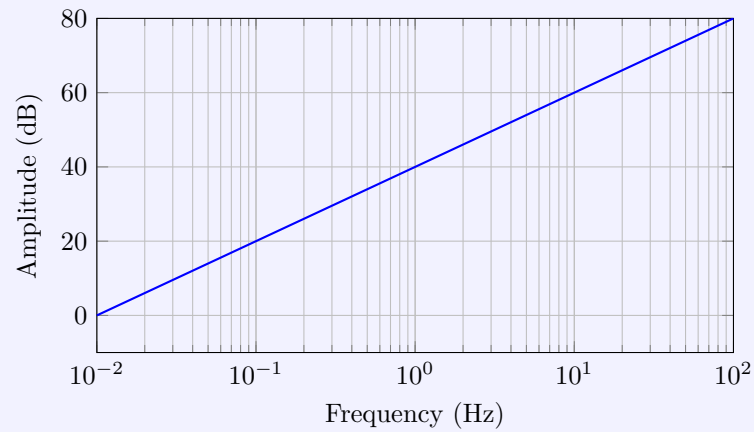


- s^2 dove $\mu = 2$:

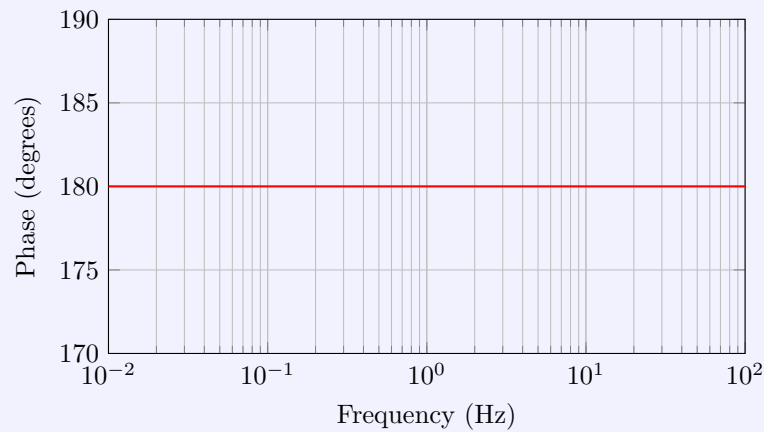
$$A = 20\mu \log(\mu) = 40 \text{ db/dec}$$

$$\phi = \mu 90^\circ = 180^\circ$$

Bode Plot: Amplitude



Bode Plot: Phase



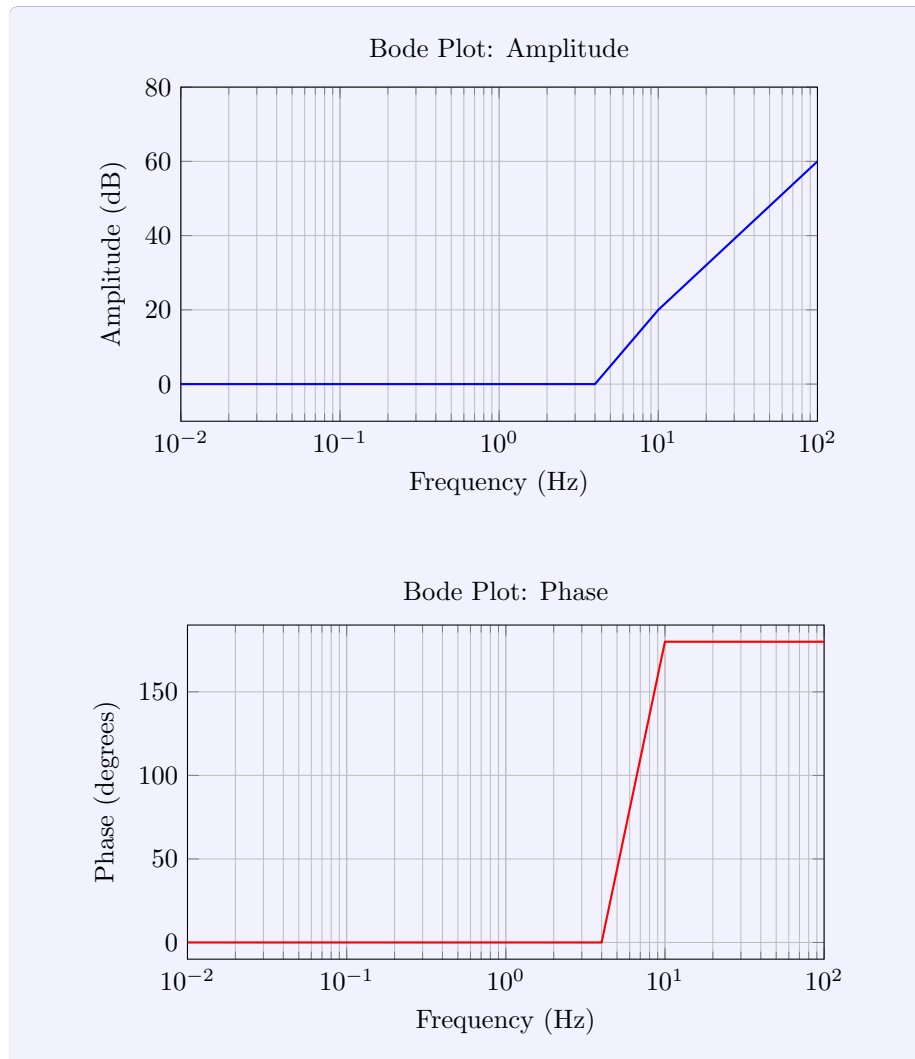
- $\left(1 + \frac{3}{16}s + \frac{s^2}{16}\right)$ dove $\mu = 1$ e $\omega_n = \sqrt{16} = 4$ e $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{3}{16} \Rightarrow \zeta = \frac{3}{8}$:

$$A = 40\mu \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) = 40 \text{ db/decade}$$

quindi prima di 4, $A = 0$ e dopo 4, $A = 40 \text{ db/decade}$. Ora calciamo ω_r e M_r : ... Per la fase

$$\phi = 180\mu \text{sgn}(\zeta) = 180^\circ$$

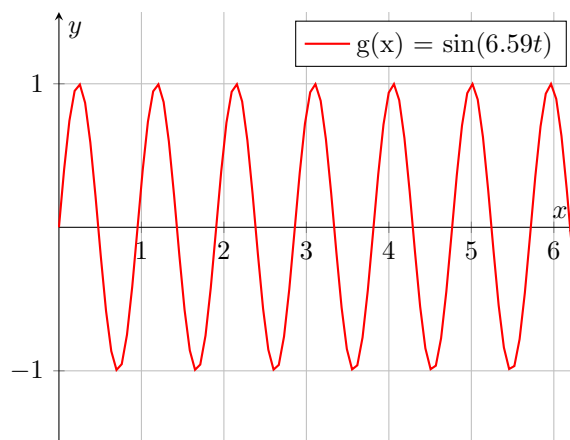
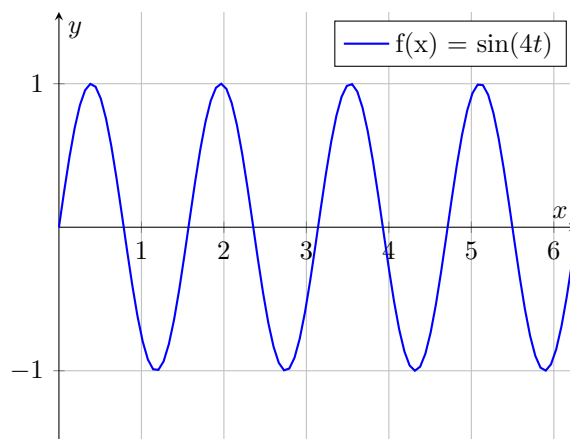
Dopo ω_n la fase è di 180° mentre prima la fase rimane a $\phi = 0^\circ$



5.6 Diagrammi di Bode Totale

6 Trasformata di Fourier

Fourier ha scoperto che qualsiasi segnale periodico (o aperiodico) può essere scomposto in una somma di sinusoidi. Con Fourier si riesce a rappresentare con somma di frequenze che non sono necessariamente armoniche. Le trasformate di Fourier vengono usate in molti campi come la comunicazione, analisi del suono, modulazione o demodulazione dei segnali, meccanica, cambiamento climatico, ecc.



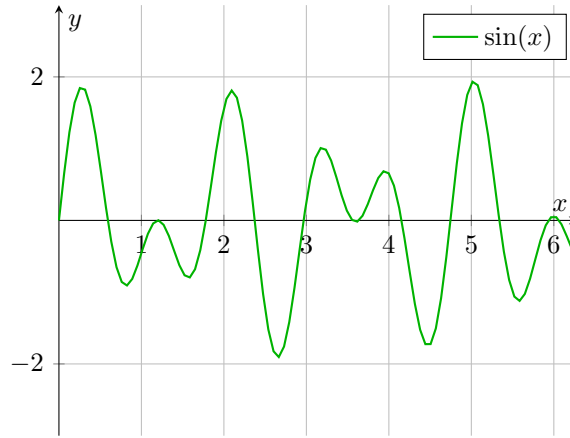


Figure 2: Somma di $f(x)$ e $g(x)$

Ci sono diversi tipi di onde che possono essere sommate per creare un segnale complesso. Come per esempio le onde quadre, triangolari, ecc.

6.1 Winding Frequency e la quasi-trasformata di Fourier

Calcoliamo il centro di massa come la media dei punti sul grafico:

$$cdm = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(t_k) e^{-2\pi f_0 t}$$

per cui possiamo trovare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(t_k) e^{-2\pi f_0 t} = \underbrace{\frac{1}{t_2 - t_1} \Big|_{t_1}^{t_2} - g(t_k i f_0 t) dt}_{\text{Quasi TdF}}$$

Quindi:

$$TdF = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i f_0 t} dt$$

Proprio come la trasformata di Laplace ci è utile spostarsi nel dominio delle frequenze da quello del tempo.

$$\underbrace{e^{j\omega_k t}}_{input} \rightarrow LTI \rightarrow \underbrace{H(\omega_k)}_{Transf. Fun} e^{j\omega_k t}$$

Questo è il principio di sovrapposizione. Il principio di sovrapposizione dice che se un sistema è lineare e invariante nel tempo, allora la risposta a una somma di segnali è la somma delle risposte ai singoli segnali.

6.2 Segnali periodici e aperiodici

Se abbiamo un segnale **periodico** possiamo scomporlo in una somma (finita) di funzioni elementari tramite la serie di Fourier. Invece per un segnale **aperiodico**, quindi privo di periodicità, andremo ad utilizzare la trasformata di Fourier. Mentre nella serie di Fourier le funzioni sono strettamente *collegate* a livello armonico, nella trasformata di Fourier le funzioni sono *indipendenti*.

6.3 Serie di Fourier

Prendiamo come un segnale periodico $x(t)$ con periodo t_0 :

$$x(t) = x(t + t_0)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{t_0} = 2\pi f_0 \leftarrow \text{funzione fondamentale}$$

Se passiamo alla rappresentazione complessa:

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \rightarrow t_0 = \frac{2\pi}{k\omega_0}$$

Questa è una famiglia di funzioni che sono armonicamente collegate perché come si può vedere i loro periodi sono soltanto multipli interi del periodo fondamentale. Riscriviamo $x(t)$ come combinazione lineare di ϕ_k :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Dove a_k sono i coefficienti della serie di Fourier.

Theorem 6.1. *Si può riscrivere un segnale periodico in somme di segnali elementari.*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

dove a_k sono i coefficienti della serie di Fourier, k è l'indice di armonica e ω_0 è la frequenza fondamentale. Viene anche chiamata **equazione di sintesi**.

I coefficienti a_k si possono calcolare come:

$$\begin{aligned} a_k &= A_k e^{j\theta_k} \\ &= B_k + jC_k \end{aligned}$$

Quindi modificando trigonometricamente:

$$\begin{aligned}
 e^{jk\omega_0 t} &= \cos(k\omega_0 t) + j \sin(k\omega_0 t) \\
 x(t) &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \phi_k) \\
 \text{oppure} &= a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - iC_k \sin(k\omega_0 t)]
 \end{aligned}$$

Come facciamo a calcolare i coefficienti a_k ?

$$\begin{aligned}
 a_k &= \int_{t_0} e^{-jk\omega_0 t} dt = \begin{cases} t_0 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \neq 0 \end{cases} \\
 &= \int_{t_0} \cos(k\omega_0 t) dt - j \int_{t_0} \sin(k\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

Si fa quindi l'integrale sul periodo di $x(t)$.

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0} x(t) e^{-jN\omega_0 t} dt &= \int_{t_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jN\omega_0 t} dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \underbrace{\int_{t_0} e^{-j(k-N)\omega_0 t} dt}_{\begin{cases} t_0 & \text{se } k = N \\ 0 & \text{se } k \neq N \end{cases}}
 \end{aligned}$$

Theorem 6.2. *L'equazione di analisi di Fourier è:*

$$a_k = \frac{1}{t_0} \int_{t_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$