



Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

November 15, 2024

Contents

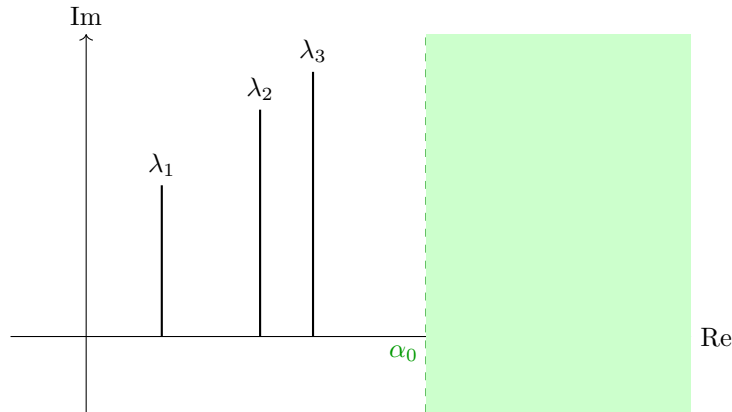
1	Trasformata di Laplace	3
1.1	Proprietà	3
1.2	Trasformate di funzioni notevoli	6
1.3	Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali	9

1 Trasformata di Laplace

Definition 1.1. $v(t)$ è definito nel tempo. $V(s)$ è la sua trasformata.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} v(t)e^{-st} dt$$

Figure 1: $\alpha \geq \max\{\lambda_i\}$



1.1 Proprietà

La trasformata di Laplace ha svariate utili proprietà che possiamo utilizzare a nostro vantaggio:

Propriety 1.2. Linearità:

$$a_1 v_1(t) + a_2 v_2(t) = a_1 V_1(s) + a_2 V_2(s)$$

Propriety 1.3. Traslazione nel dom. del tempo:

$$\mathcal{L}[v(t - \tau)](s) = \overbrace{e^{-s\tau}}^{\tau > 0} V(s)$$

Propriety 1.4. Traslazione nel dom. dei complessi:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} v(t)] = V(s - \lambda)$$

Propriety 1.5. Cambio di scala:

$$\mathcal{L}[v(rt)](s) = \frac{1}{r} V\left(\frac{s}{r}\right)$$

Propriety 1.6. Proprietà delle derivate: Se $v(t)$ ammette TdL (Trasformata di Laplace) ed esiste finito $v(0^-) = \lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ allora anche la sua derivata i -esima ammette TdL.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^i v(t)}{dt^i}\right] = S^i V(s) - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{i-1-k})$$

Proof. Per la derivata prima:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}v(t)e^{-st}dt = \\
 &= v(t)e^{-st}\Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} v(\varepsilon)e^{-s\varepsilon} + sV(s) \\
 &= sV(s) - v(0^-)
 \end{aligned}$$

Proof. Per la derivata seconda:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}v(t)\right](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}v(t)\right)\right](s) \\
 &= s\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}v(t)\right](s) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= \int_0^{+\infty} [S\mathcal{L}[v(t)](s) - v(0^-)]e^{-st}dt - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-} \\
 &= s^2V(s) - sv(0^-) - \frac{d}{dt}v(t)\Big|_{t=0^-}
 \end{aligned}$$

Propriety 1.7. Moltiplicazione per funzioni polinomiali: Se $v(t)$ ammette TdL e t è un polinomio allora anche $tV(s)$ ammette TdL.

$$\mathcal{L}[t^i v(t)](s) = (-1)^i \frac{d^i V(s)}{ds^i}$$

Proof. Per $i = 1$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[tv(t)](s) &= \int_0^{+\infty} tv(t)e^{-st}dt = - \int_0^{+\infty} v(t) \cdot (te^{-st})dt \\
 &= - \int_0^{+\infty} v(t) \frac{d}{ds} te^{-st}dt \\
 &= - \frac{d}{ds} \overbrace{\int_0^{\infty} v(t)e^{-st}dt}^{\text{TdL}} \\
 &= - \frac{d}{ds} V(s)
 \end{aligned}$$

Propriety 1.8. Integrazione nel dom. del tempo: Se $v(t)$ ammette TdL, allora $\Psi(t) = \int_0^t v(t)dt$ ammette TdL

$$\mathcal{L}[\Psi(t)](s) = \frac{V(s)}{s}$$

Ascissa di convergenza: $\alpha = \max\{0, \alpha_0\}$

Proof.

$$v_1(t) = \int_{0^-}^{\infty} v(t)dt \implies \begin{cases} v_1' = v(t) \\ v(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} v(t)dt = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(s) &= \mathcal{L}[v(t)](s) = \mathcal{L}[v_1'(t)](s) = S\mathcal{L}[v_1(t)](s) - v_1(0^-) \\ &= \mathcal{L}\left[\int_0^t v(t)dt\right](s) \\ &= \frac{V(s)}{s} \end{aligned}$$

Propriety 1.9. Integrazione nel dom. dei complessi: Se $v(t)$ ammette TdL e esiste $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{v(t)}{t}$ allora:

$$\mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) = \int_s^{\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta$$

Proof.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \mathcal{L}[v(t)](\zeta)d\zeta &= \int_s^{\infty} \int_{0^-}^{\infty} v(t)e^{-s\zeta}d\zeta dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} v(t) \underbrace{\left(\int_s^{+\infty} e^{-t\zeta}d\zeta\right)}_{=\frac{e^{-st}}{t}} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{v(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\frac{v(t)}{t}\right](s) \end{aligned}$$

Theorem 1.10. Teorema del valore iniziale: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} v(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Theorem 1.11. Teorema del valore finale: Se $v(t)$ ammette TdL ed esiste finito $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} S\mathcal{L}[v(t)](s)$$

Propriety 1.12. Convoluzione nel dom. del tempo: Siano $u(t)$ e $v(t)$ due funzioni causali (nulla per $t < 0$) che ammettono TdL, allora la loro convoluzione $(u * v)(t)$ ammette TdL.

$$\mathcal{L}[(u * v)(t)](s) = \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)$$

Proof.

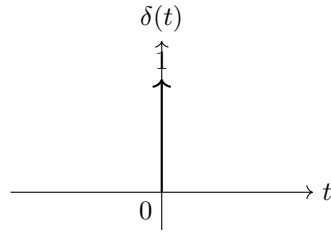
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(u * v)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} (u * v)(t) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t u(\tau) v(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^t u(\tau) v(t - \tau) e^{-st} d\tau dt \\
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0-}^{\infty} v(t - \tau) e^{-st} dt \right) d\tau
 \end{aligned}$$

Sostituiamo $x = t - \tau \rightarrow t = x + \tau \rightarrow dt = dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{0-}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{0-}^{\infty} v(x) e^{-s(x+\tau)} dx \right) d\tau \\
 &= \int_0^{+\infty} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau \cdot \int_0^{+\infty} v(x) e^{-sx} dx \\
 &= \mathcal{L}[u(t)](s) \cdot \mathcal{L}[v(t)](s)
 \end{aligned}$$

1.2 Trasformate di funzioni notevoli

Ora andremo a vedere le trasformate di alcune funzioni notevoli:
Trasformata dell'**impulso unitario**:



Unit Impulse $\delta(t)$

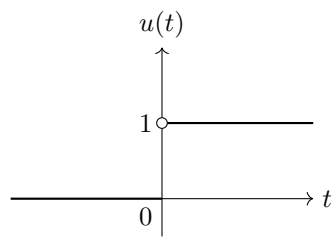
$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-s \cdot 0} = 1$$

Ampiezza:

$$\mathcal{L}[A\delta_0(t)](s) = A \overbrace{\mathcal{L}[\delta_0(t)](s)}^1 = A$$

Ritardato nel tempo:

$$\mathcal{L}[\delta(t - \tau)](s) = e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_0(t)](s) = e^{-s\tau}$$

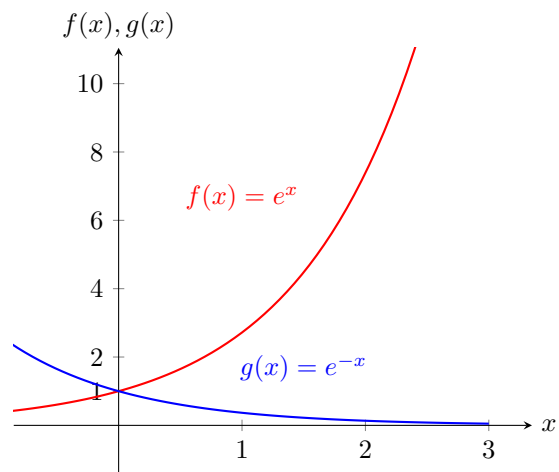


Unit Step $u(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) &= \int_{0^-}^{\infty} \delta_{-1}(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[A\delta_{-1}(t)](s) &= A\mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s} \\ &= \mathcal{L}[\delta_{t-\tau}](s) \\ &= e^{-s\tau} \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{e^{-s\tau}}{s}\end{aligned}$$

Esponenziale complesso causale: $v(t) = e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$



$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) &= \mathcal{L}[\delta_{-1}(t)](s - \lambda) \\ &= \frac{1}{s - \lambda}\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[Ae^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{A}{s - \lambda}$$

$$\mathcal{L}[e^{\lambda(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau)](s) = \frac{e^{-(s-\lambda)\tau}}{s - \lambda}$$

Esponenziale complesso causale moltiplicato per una funzione polinomiale:

$$v(t) = \frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{t^l}{l!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) &= \frac{1}{l!} \mathcal{L}[t^l e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &\stackrel{1.3}{=} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{ds^l} \mathcal{L}[e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{d^l}{ds^l} \frac{1}{s - \lambda} \\ &= \frac{(-1)^l}{l!} \frac{l!(-1)^l}{(s - \lambda)^{l+1}} \\ &= \frac{1}{(s - \lambda)^{l+1}} \end{aligned}$$

Esempio 1

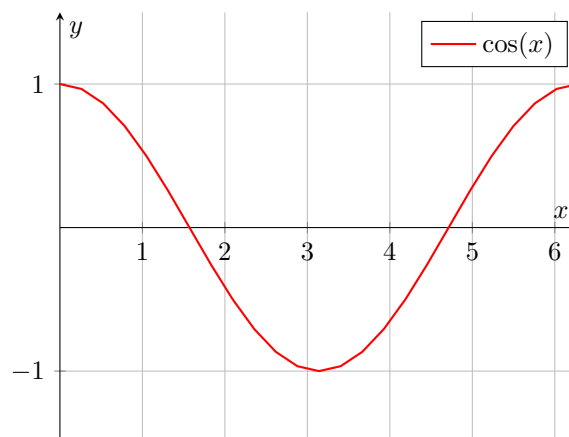
Con $l = 1$

$$\mathcal{L}[te^{\lambda t} \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2}$$

Con $l = 2$

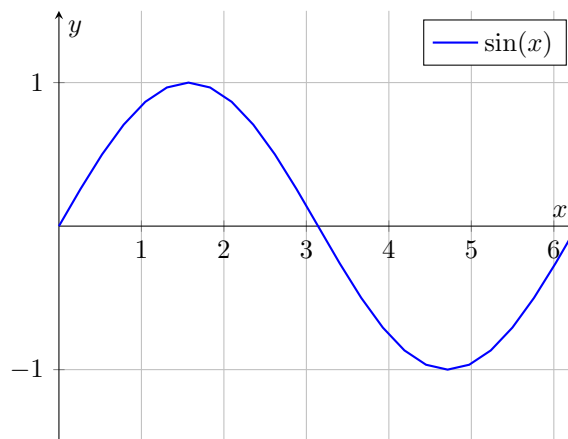
$$\mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} \delta_{-1}(t)\right](s) = \frac{1}{(s - \lambda)^3}$$

Funzione coseno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos(wt)](s) &\stackrel{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s - jw} + \frac{1}{s + jw} \right] \\
&= \frac{s}{s^2 + w^2}
\end{aligned}$$

Funzione seno:



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\sin(wt)](s) &\stackrel{Eulero}{=} \mathcal{L}\left[\frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}\right] \\
&= \frac{1}{2j} [\mathcal{L}[e^{jwt}](s) - \mathcal{L}[e^{-jwt}](s)] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s - jw} - \frac{1}{s + jw} \right] \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{s + jw - s + jw}{s^2 + w^2} \right] \\
&= \frac{w}{s^2 + w^2}
\end{aligned}$$

1.3 Applicazione della TdL per i sistemi LTI causali

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

$$n \geq m \text{ e } u(t) = u(t) \cdot \delta_{-1}(t) (u(t) = 0, t < 0)$$

E consideriamo le n-1 condizioni iniziali:

$$v(0^-), \frac{dv(0)}{dt}; \frac{d^2 v(0)}{dt^2}; \dots \frac{d^{n-1} v(0)}{dt^{n-1}}$$

Se $u(t)$ ammette TdL allora anche $v(t)$ ammette TdL e:

$$\mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \mathcal{L} \left[\sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right] (s)$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \mathcal{L} \left[\frac{d^i v(t)}{dt^i} \right] (s) = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{L} \left[\frac{d^i u(t)}{dt^i} \right] (s)$$

Applicando $n + m$ volte la regole della derivata:

$$\begin{aligned} & a_n \left[S^n V(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-1-k}) \right] + \\ & + a_{n-1} \left[S^{n-1} V(s) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} (S^{n-2-k}) \right] + \\ & + \dots + a_0 V(s) \\ & = b_m S^m U(s) + b_{m-1} S^{m-1} U(s) + \dots + b_0 U(s) \end{aligned}$$

Imponiamo le C.I.: $u(t) \Big|_{t=0} = 0$

Espandiamo e raccogliamo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_0] V(s)}_{d(s)} + \\ & - \underbrace{a_n v(0^-) S^{n-1} \left(a_{n-1} v(0^-) + a_n \frac{dv(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} \right) - \dots - \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{d^k v(t)}{dt^k} \Big|_{t=0^-} \right)}_{p(s)} \\ & = \underbrace{(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_0) U(s)}_{n(s)} \end{aligned}$$

$$\implies d(s) \cdot V(s) - p(s) = n(s) \cdot U(s)$$

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \cdot U(s) + \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $n(s)$ è un polinomio di grado m che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate all'ingresso. Polinimonia caratteristico di $u(t)$
- $d(s)$ è un polinomio di grado n che dipende solo dai coefficienti delle derivate associate di uscita. Polinimonia caratteristico di $v(t)$
- $p(s)$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} S^k \left(\sum_{j=k+1}^n a_{j+1} \frac{d^{n-j} v(t)}{dt^{n-j}} \Big|_{t=0^-} \right)$$

Polinomio di grado $n - 1$ che dipende solo dalle C.I di $v(t)$

- $\frac{P(s)}{d(s)}$ è una funzione razionale che dipende solo dalle C.I. del sistema e dai coefficienti del polinomio caratteristico di $v(t)$

$$V_l(s) = \frac{P(s)}{d(s)}$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}U(s)$ è una funzione razionale che dipende dai coefficienti del polinomio caratteristico di $u(t)$, dei coefficienti del polinomio caratteristico di $v(t)$ moltiplicati per tali $u(t)$:

$$V_f(s) = \frac{n(s)}{d(s)}U(s)$$

- $\frac{n(s)}{d(s)}$ funzione di trasferimento $H(s)$:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

Rapporto tra i polinomi car. di $u(t)$ e $v(t)$

$H(s)$ è definita come TdL delle risposte impulsive $h(t)$

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + \dots \left(\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} \frac{t^l}{l!} e^{\lambda_i t} \right) \delta_{-1}(t)$$

$$\stackrel{\text{c}}{=} d_0 + \sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} \frac{d_{i,l}}{(s - \lambda)^{l+1}}$$

Esempio

Dato un sistema LTI:

$$\frac{d^3 v(t)}{dt^3} + \frac{d^2 v(t)}{dt^2} = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\downarrow$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^3 v(t)}{dt^3} \right] + \mathcal{L} \left[\frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right] = \mathcal{L} \left[\frac{du(t)}{dt} \right]$$

$$\downarrow$$

$$S^3 V(s) - S^2 v(0^-) - S \frac{dv(0^-)}{dt} - S^2 \frac{d^2 v(0^-)}{dt^2} +$$

$$+ S^2 V(s) - S v(0^-) - \frac{dv(0^-)}{dt} = S U(s)$$

$$\underbrace{(S^3 + S^2) V(s)}_{d(s)} - \underbrace{\left[S^2 v(0) + \frac{dv(0)}{dt} S + \frac{d^2 v(0)}{dt^2} + v(0) S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}_{p(s)} = \underbrace{S}_{n(s)} U(s)$$

$$V(s) = \frac{S}{(S^3 + S^2)} U(s) + \frac{\left[S^2 v(0) + \frac{dv(0)}{dt} S + \frac{d^2 v(0)}{dt^2} + v(0) S + \frac{dv(0)}{dt} \right]}{S^3 + S^2}$$