Analisi II

Università di Verona
Imbriani Paolo - VR500437
Professor Zivcovich Franco

9 marzo 2025

Indice

1 Equazioni differenziali **3**

1.1 Modelli differenziali 3

1 Equazioni differenziali

1.1 Modelli differenziali

La fisica, per descrivere dei fenomeni fisici usano la matematica e in particolare le equazioni differenziali. Infatti, si denota $x(t)$ lo spostamento nel tempo. Con la derivata prima $x'(t)$ si denota la velocità della particella in quell'istante e con la derivata seconda $x''(t)$ l'accelerazione. Quindi quando andiamo a tradurre matematicamente le leggi che governano modelli naturali può essere naturale dover lavorare con equazioni che coinvolgono una funzione incognita e qualcuna delle sue derivate.

Esempio 1.1

La seconda legge del moto di Newton $F = ma$, che stabilisce la posizione $x(t)$ al tempo t di un corpo di massa m costante, soggetto a una forza $F(t)$, deve soddisfare l'equazione differenziale:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \text{ equazione del moto}$$

Quindi le equazioni differenziali nascono per descrivere fenomeni fisici e naturali. Possono essere classificate in modi diversi. Abbiamo infatti:

1. *Equazioni differenziali ordinarie* (ODE) se vengono coinvolte solo le derivate rispetto ad una sola variabile oppure *equazioni differenziali parziali* (PDE) se vengono coinvolte derivate parziali dell'incognita rispetto a più variabili.

   Esempio 1.2

   L'equazione:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   rappresenta l'equazione delle onde che modellizza lo spostamento trasversale $u(x, t)$ nel punto x al tempo t di una corda tesa che può vibrare.

2. Classificazione in base all'ordine: l'ordine di una ED è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione.

   Esempio 1.3

   L'equazione:

   $$\frac{dy^2}{dt^2} + ty^3 - \cos y = \sin t \qquad \text{è di ordine 2}$$

   $$\frac{d^3y}{dt^3} - 2t\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = y\frac{dy^2}{dt^2} - e^t \qquad \text{è di ordine 3}$$

   Possiamo dunque formalizzare i concetti finora introdotti attraverso la seguente definizione:

Definizione 1.1: Equazione differenziale

Si dice **equazione differenziale** di ordine n un'equazione del tipo

$$F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

dove $y(t)$ è la funzione incognita e F è una funzione assegnata delle $n+2$ variabili $t, y, y', \dots, y(n)$ a valori reali.

Si dice **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione.

Si dice **soluzione (o curva integrale)** di (1) nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ una funzione φ, definita almeno in I e a valori reali per cui risulti:

$$F(t, \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Infine si dice integrale generale dell'equazione (1) una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione (1), eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuti.

Esempio 1.4

Consideriamo una popolazione di individui, animali o vegetali che siano, e sia $N(t)$ il numero degli individui. Osserviamo che N è funzione di del tempo t, assume solo valori interi ed è a priori una funzione discontinua di t; tuttavia può essere approssimata da una funzione continua e derivabile purché il numero degli individui sia abbastanza grande. Supponiamo che la popolazione sia isolata e che la proporzione degli individui in età riproduttiva e la fecondità siano costanti. Se escludiamo i casi di morte, immigrazione, emigrazione, allora il tasso di accrescimento coincide con quello di natalità e se indichiamo con λ il tasso specifico di natalità (i.e. il numero di nati per unità di tempo) l'equazione che descrive il modello diventa:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)$$

Questo processo risulta realistico solo in popolazioni che crescono in situazioni ideali e sono assenti tutti i fattori che ne impediscono la crescita.

La stessa equazione compare anche in altri modelli relativi a sistemi fisiologici ed ecologici.

Esempio 1.5

Studiamo ora il modello di crescita (dovuto a Malthus, 1978) relativo all'evoluzione di una popolazione isolata in presenza di risorse limitate ed in assenza di predatori o antagonisti all'utilizzo delle risorse. In questo caso l'equazione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

dove come prima λ è il tasso di natalità mentre μ è il tasso di mortalità (cioè rispettivamente il numero di nati e morti nell'unità di tempo). Il numero $\varepsilon = \lambda - \mu$ è detto **potenziale biologico.**

Ci chiediamo ora come possiamo trovare una soluzione del problema studiato nell'Esempio 1.5. Supponiamo per il momento che sia $N \neq 0$. Allora:

$$N = \varepsilon N = \frac{N}{N} = \varepsilon \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\log|N|) = \varepsilon,$$

da cui otteniamo:

$$\log|N(t)| = \varepsilon t + c_1 \Longrightarrow |N(t)| = e^{c_1} e^{\varepsilon t} =: k^2 e^{\varepsilon t}$$

dove abbiamo posto $e^{c_1} =: k^2 > 0$ costante positiva e arbitraria. A questo punto allora:

$$N(t) = \pm k^2 e^{\varepsilon t}$$