# Esercizi di Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

November 6, 2024

# Contents

# 1 Esercizi su risposta libera e impulsiva

## 1.1 Esercizio 1

**Consegna**

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t) - 5v'(t) - 6v(t) = u'(t) + 5u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Per calcolare la risposta libera iniziamo a calcolare il polinomio caratteristico:

$$s^2 - 5s - 6 = (s+1)(s-6)$$
$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6$$
$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$
$$v_l(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t}$$

Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t} = 3 \\ -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -c_1 + 6c_2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = \frac{17}{7} \\ c_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$\boxed{v_l(t) = \tfrac{17}{7} e^{-t} + \tfrac{4}{7} e^{6t}}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + \left[ \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t)$$

Essendo $n \neq m$ il sistema non è proprio perciò $d_0 = 0$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \left[ \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le derivate di $h(t)$ (Questa in basso è un'equazione unica):

$$h'(t) = (-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta_0(t)$$

$$h''(t) = (d_1e^{-t} - 36d_2e^{6t})\delta_{-1}(t) + (-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_0(t) + ...$$
$$... + (-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_0(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta'(t)$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) - 5h'(t) - 6h(t) = \delta'(t) + 5\delta(t)$$

Sostituiamo ed elimino i gradini:

$$\overbrace{\cancel{(d_1e^{-t} - 36d_2e^{6t})\delta_{-1}(t)} + 2\delta_0(t)(-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t}) + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta'(t)}^{h''(t)} - ...$$

$$...-5\left[\overbrace{\cancel{(-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t})\delta_{-1}(t)} + (d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta_0(t)}^{h'(t)}\right] -6\overbrace{\cancel{\left[(d_1e^{-t} + d_2e^{6t})\delta_{-1}(t)\right]}}^{h(t)}$$
$$= \delta'(t) + 5\delta(t)$$

Ora raccolgo le funzioni delta e le metto a sistema. Ricordiamo di imporre $t = 0$:

$$\begin{cases} \cancel{\delta'(t)}(d_1e^{-t} + d_2e^{6t}) = \cancel{\delta'(t)} \\ 2\delta_0(t)(-d_1e^{-t} + 6d_2e^{6t}) - 5\delta_0(t)(d_1e^{-t} + d_2e^{6t}) = 5\delta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 1 \\ -2d_1\delta_0(t) + 12d_2\delta_0(t) - 5d_1\delta_0(t) - 5d_2\delta_0(t) = 5\delta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 - d_2 \\ -7d_1\cancel{\delta_0(t)} + 7d_2\cancel{\delta_0(t)} = 5\cancel{\delta(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{7} \\ d_2 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$\boxed{h(t) = \tfrac{1}{7}e^{-t}\delta_{-1}(t) + \tfrac{6}{7}e^{6t}\delta_{-1}(t)}$$

### 1.2 Esercizio 2

**Consegna**

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$2v''(t) - 3v'(t) - 2v(t) = 2u'(t) + u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$2s^2 - 3s - 2 = (2s+1)(s-2)$$
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 2$$
$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$
$$v_l(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t}$$

Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t} = 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t} = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ -\frac{1}{2}(4 - c_2) + 2c_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ \frac{5}{2}c_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$\boxed{v_l(t) = 4e^{-\frac{1}{2}t}}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^{0} \delta_0(t) + \left[ \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t})\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le deritate bla bla bla mi sono rotto:

$$h'(t) = \left( -\frac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t})\delta_0(t)$$

$$
\begin{aligned}
h''(t) = &\left(\frac{1}{4}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 4d_2e^{2t}\right)\delta_{-1}(t) + \left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t}\right)\delta_0(t) + ... \\
&+ \left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t}\right)\delta_0(t) + (d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta'(t)
\end{aligned}
$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$2h''(t) - 3h'(t) - 2h(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

Ora sostituiamo ed eliminiamo i gradini (Questa è un'equazione unica):

$$
\overbrace{2\left[\cancel{\left(\frac{1}{4}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 4d_2e^{2t}\right)\delta_{-1}(t)} + 2\delta_0(t)\left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t}\right) + (d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta'(t)\right]}^{h''(t)} -
$$

$$
-3\overbrace{\left[\cancel{\left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t}\right)\delta_{-1}(t)} + (d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta_0(t)\right]}^{h'(t)} \cancel{-2\overbrace{(d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t})\delta_{-1}(t)}^{h(t)}}
$$

$$= 2\delta'(t) + \delta(t)$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta:

$$
\begin{cases}
\cancel{\delta'(t)}(d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t}) = \cancel{\delta'(t)} \\
2\delta_0(t)\left(-\frac{1}{2}d_1e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2e^{2t}\right) + \delta_0(t)(d_1e^{-\frac{1}{2}t} + d_2e^{2t}) = \delta(t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
d_1 + d_2 = 1 \\
\cancel{-d_1\delta_0(t)} + 4d_2\delta_0(t) + \cancel{d_1\delta_0(t)} + d_2\delta_0(t) = \delta_0(t)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
d_1 = 1 - d_2 \\
\cancel{\delta_0(t)}5d_2 = \cancel{\delta_0(t)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
d_1 = \frac{4}{5} \\
d_2 = \frac{1}{5}
\end{cases}
$$

Quindi la risposta forzata è:

$$\boxed{h(t) = \tfrac{4}{5}e^{-\frac{1}{2}t}\delta_{-1}(t) + \tfrac{1}{5}e^{2t}\delta_{-1}(t)}$$

## 1.3 Esercizio 3

**Consegna**

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t) + 2v'(t) + v(t) = u''(t) + u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2$$

$$\lambda_1 = -1, \mu_1 = 2$$

$$r = 1$$

$$v(t) = c_{1,0}e^{-t} + c_{1,1}e^{-t}t$$

Per semplicità chiamerò $c_{1,0} = c_1$ e $c_{1,1} = c_2$. Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -c_1e^{-t} - c_2e^{-t}t + c_2e^{-t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 \overbrace{e^{-t}}^{1} + \overbrace{c_2e^{-t}t}^{0} = 4 \\ -c_1 \overbrace{e^{-t}}^{1} - \overbrace{c_2e^{-t}t}^{0} + c_2 \overbrace{e^{-t}}^{1} = -2 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$\boxed{v_l(t) = 4e^{-t} + 2e^{-t}t}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^{0} \delta_0(t) + \left[ \sum_{i=1}^{r} \sum_{l=0}^{\mu_i - 1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate di $h(t)$:

$$h'(t) = (-d_1e^{-t} + -d_2e^{-t}t + d_2e^{-t})\delta_{-1}(t) + (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t)\delta_0(t)$$

$$h''(t) = (d_1e^{-t} + d_2e^{-t}t - 2(d_2e^{-t}))\delta_{-1}t + 2\delta_0(t)((-d_1e^{-t} + -d_2e^{-t}t + d_2e^{-t})) + ...$$

$$...+(d_1e^{-t}+d_2e^{-t}t)\delta'(t)$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta(t)$$

Sostituiamo ed eliminiamo i gradini:

$$\overbrace{\cancel{(d_1e^{-t}+d_2e^{-t}t-2(d_2e^{-t}}))\delta_{-1}t+2\delta_0(t)((-d_1e^{-t}+-d_2e^{-t}t+d_2e^{-t}))+(d_1e^{-t}+d_2e^{-t}t)\delta'(t)}^{h''(t)}+...$$

$$2\overbrace{\left[\cancel{(-d_1e^{-t}+-d_2e^{-t}t+d_2e^{-t})\delta_{-1}(t)}+(d_1e^{-t}+d_2e^{-t}t)\delta_0(t)\right]}^{h'(t)}+\cancel{(d_1e^{-t}+d_2e^{-t}t)\delta_{-1}(t)}$$

$$= \delta''(t) + \delta(t)$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta e poniamo $t = 0$:

$$\begin{cases} 0 = \delta''(t) \\ (d_1e^{-t}+d_2e^{-t}t)\delta'(t) = 0 \\ 2\delta_0(t)((-d_1e^{-t}+\cancel{-d_2e^{-t}t}+d_2e^{-t}))+2\delta_0(t)(d_1e^{-t}+\cancel{d_2e^{-t}t}) = \delta_0(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ 2\delta_0(t)(-d_1+d_2)+2d_1\delta_0(t) = \delta_0(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ -2d_1\cancel{\delta_0(t)}+2d_2\cancel{\delta_0(t)}+2d_1\cancel{\delta_0(t)} = \cancel{\delta_0(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ 2d_2 = 1 \Longrightarrow d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$\boxed{h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}t\delta_{-1}(t)}$$