



Esercizi di Algoritmi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Roberto Segala

November 25, 2024

Contents

1	Esercizi sul libro	3
1.1	Esercizi sulla ricorrenza	3
1.1.1	Esercizio 1	3
1.2	Esercizio 2	3

1 Esercizi sul libro

1.1 Esercizi sulla ricorrenza

1.1.1 Esercizio 1

Utilizzando il metodo di sostituzione, dimostrate che la seguente ricorrenza:

$$L(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n < n_0 \\ L(n/3) + L(2n/3) & \text{se } n \geq n_0 \end{cases}$$

Dimostrare che $L(n) \in \Omega(n)$ e deducetene che $L(n) = \Theta(n)$. Sostituiamo:

$$L(n) = cn$$

Per verificare che $\Omega(n)$ sia il limite inferiore.

$$\begin{aligned} L(n) &= L\left(\frac{n}{3}\right) + L\left(\frac{2n}{3}\right) \\ &\stackrel{?}{\geq} c\frac{n}{3} + c\frac{2n}{3} \\ &= c\left(\frac{n}{3} + \frac{2n}{3}\right) \\ &= c\left(\frac{3n}{3}\right) \\ &= cn \end{aligned}$$

Siccome $cn \geq cn$ abbiamo verificato quindi che il limite asintotico inferiore è $\Omega(n)$. Inoltre, sappiamo che $cn = cn$ quindi abbiamo verificato che $L(n) \in \Theta(n)$.

1.2 Esercizio 2

Utilizzando il metodo di sostituzione, dimostrate che la seguente ricorrenza:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(n)$$

ha soluzione $T(n) = \Omega(n \log n)$ e deducetene che $T(n) = \Theta(n \log n)$.

$$\begin{aligned}
L(n) &= L\left(\frac{n}{3}\right) + L\left(\frac{2n}{3}\right) + \Theta(n) \\
&\stackrel{?}{\geq} c \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + c \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + cn \\
&= c \left(\frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + n \right) \\
&= c \left(\frac{n}{3} \left(\log \frac{n}{3} + \frac{2n}{3} \log \frac{2n}{3} + 3 \right) \right) \\
&= c \frac{n}{3} \left(\log \frac{n}{3} + 2 \log \frac{2n}{3} + 3 \right) \\
&= c \frac{n}{3} \left(\log \frac{n}{3} + 2 \log \frac{n}{3} + 2 \log 2 + 3 \right) \\
&= c \frac{n}{3} \left(3 \log \frac{n}{3} + 2 \log 2 + 3n \right) \\
&= c \frac{n}{3} \overbrace{(3 + 2 \log 2)}^c + cn \log \frac{n}{3} \\
&= c \frac{n}{3} + cn \log \frac{n}{3} \\
&= c \frac{n}{3} + cn \log n \\
&= \frac{cn + cn \log n}{cn} \geq \frac{cn \log n}{cn} \\
&= \log n + 1 \geq \log n
\end{aligned}$$