



Esercizi di Sistemi

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437
Professor Francesco Visentin

November 26, 2024

Contents

1	Esercizi su risposta libera e impulsiva	3
1.1	Esercizio 1	3
1.2	Esercizio 2	4
1.3	Esercizio 3	6
2	Esercizi sulla convoluzione e la risposta forzata	8
2.1	Esercizio 1	8
2.2	Esercizio 2	8
2.3	Esercizio 3	9
2.4	Esercizio 4	10
3	Esercizi fatti in classe	12
3.1	Esercizio 1	12
3.2	Esercizio 2	14

1 Esercizi su risposta libera e impulsiva

1.1 Esercizio 1

Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t) - 5v'(t) - 6v(t) = u'(t) + 5u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Per calcolare la risposta libera iniziamo a calcolare il polinomio caratteristico:

$$s^2 - 5s - 6 = (s + 1)(s - 6)$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6$$

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$

$$v_l(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t}$$

Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 3 \\ v'(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-t} + c_2 e^{6t} = 3 \\ -c_1 e^{-t} + 6c_2 e^{6t} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -c_1 + 6c_2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = \frac{17}{7} \\ c_2 = \frac{4}{7} \end{cases}$$

$$v_l(t) = \frac{17}{7} e^{-t} + \frac{4}{7} e^{6t}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t)$$

Essendo $n \neq m$ il sistema non è proprio perciò $d_0 = 0$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora le derivate di $h(t)$ (Questa in basso è un'equazione unica):

$$\begin{aligned} h'(t) &= (-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta_0(t) \\ h''(t) &= (d_1 e^{-t} - 36d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + (-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_0(t) + \dots \\ &\quad \dots + (-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_0(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta'(t) \end{aligned}$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) - 5h'(t) - 6h(t) = \delta'(t) + 5\delta(t)$$

Sostituiamo ed elimino i gradini:

$$\begin{aligned} &\overbrace{(d_1 e^{-t} - 36d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t)(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta'(t) - \dots}^{h''(t)} \\ &\dots - 5 \overbrace{[(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta_0(t)]}^{h'(t)} - 6 \overbrace{[(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t})\delta_{-1}(t)]}^{h(t)} \\ &= \delta'(t) + 5\delta(t) \end{aligned}$$

Ora raccolgo le funzioni delta e le metto a sistema. Ricordiamo di imporre $t = 0$:

$$\begin{cases} \cancel{\delta'(t)}(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) = \cancel{\delta'(t)} \\ 2\delta_0(t)(-d_1 e^{-t} + 6d_2 e^{6t}) - 5\delta_0(t)(d_1 e^{-t} + d_2 e^{6t}) = 5\delta(t) \\ \begin{cases} d_1 + d_2 = 1 \\ -2d_1\delta_0(t) + 12d_2\delta_0(t) - 5d_1\delta_0(t) - 5d_2\delta_0(t) = 5\delta(t) \end{cases} \\ \begin{cases} d_1 = 1 - d_2 \\ -7\cancel{d_1\delta_0(t)} + 7\cancel{d_2\delta_0(t)} = 5\cancel{\delta(t)} \end{cases} \\ \begin{cases} d_1 = \frac{1}{7} \\ d_2 = \frac{6}{7} \end{cases} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$h(t) = \frac{1}{7}e^{-t}\delta_{-1}(t) + \frac{6}{7}e^{6t}\delta_{-1}(t)$$

1.2 Esercizio 2

Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$2v''(t) - 3v'(t) - 2v(t) = 2u'(t) + u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$2s^2 - 3s - 2 = (2s + 1)(s - 2)$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 2$$

$$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1, r = 2$$

$$v_l(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t}$$

Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t} = 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2c_2 e^{2t} = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ -\frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ -\frac{1}{2}(4 - c_2) + 2c_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 4 - c_2 \\ \frac{5}{2}c_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$v_l(t) = 4e^{-\frac{1}{2}t}$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^0 \delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate bla bla bla mi sono rotto:

$$h'(t) = \left(-\frac{1}{2}d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_0(t)$$

$$\begin{aligned} h''(t) &= \left(\frac{1}{4}d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + \left(-\frac{1}{2}d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_0(t) + \dots \\ &+ \left(-\frac{1}{2}d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_0(t) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta'(t) \end{aligned}$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$2h''(t) - 3h'(t) - 2h(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

Ora sostituiamo ed eliminiamo i gradini (Questa è un'equazione unica):

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{2 \left[\left(\frac{1}{4} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 4d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t) \left(-\frac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta'(t) \right]}^{h''(t)} - \\
 & -3 \left[\overbrace{\left(-\frac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_0(t)}^{h'(t)} - \overbrace{2(d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t)}^{h(t)} \right] = 2\delta'(t) + \delta(t)
 \end{aligned}$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta:

$$\begin{cases}
 \cancel{\delta'(t)}(d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) = \cancel{\delta'(t)} \\
 2\delta_0(t) \left(-\frac{1}{2} d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + 2d_2 e^{2t} \right) + \delta_0(t)(d_1 e^{-\frac{1}{2}t} + d_2 e^{2t}) = \delta(t) \\
 d_1 + d_2 = 1 \\
 \cancel{-d_1 \delta_0(t)} + 4d_2 \delta_0(t) + \cancel{d_1 \delta_0(t)} + d_2 \delta_0(t) = \delta_0(t) \\
 \begin{cases} d_1 = 1 - d_2 \\ \cancel{\delta_0(t)} 5d_2 = \cancel{\delta_0(t)} \end{cases} \\
 \begin{cases} d_1 = \frac{4}{5} \\ d_2 = \frac{1}{5} \end{cases}
 \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$h(t) = \frac{4}{5} e^{-\frac{1}{2}t} \delta_{-1}(t) + \frac{1}{5} e^{2t} \delta_{-1}(t)$$

1.3 Esercizio 3

Consegna

Dato il seguente sistema a tempo continuo (LTI):

$$v''(t) + 2v'(t) + v(t) = u''(t) + u(t)$$

e le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases}$$

Calcolare la risposta libera (1) e la risposta forzata/impulsiva del sistema (2).

1. Polinomio caratteristico:

$$s^2 + 2s + 1 = (s + 1)^2$$

$$\lambda_1 = -1, \mu_1 = 2$$

$$r = 1$$

$$v(t) = c_{1,0}e^{-t} + c_{1,1}e^{-t}t$$

Per semplicità chiamerò $c_{1,0} = c_1$ e $c_{1,1} = c_2$. Ora derivo $v(t)$:

$$v'(t) = -c_1e^{-t} - c_2e^{-t}t + c_2e^{-t}$$

Applico le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v(0) = 4 \\ v'(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \overbrace{e^{-t}}^1 + c_2 \overbrace{e^{-t}t}^0 = 4 \\ -c_1 \overbrace{e^{-t}}^1 - c_2 \overbrace{e^{-t}t}^0 + c_2 \overbrace{e^{-t}}^1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Quindi la risposta libera è:

$$v_l(t) = 4e^{-t} + 2e^{-t}t$$

2. Ora calcoliamo la risposta impulsiva.

$$\begin{aligned} h(t) &= \overbrace{d_0}^0 \delta_0(t) + \left[\sum_{i=1}^r \sum_{l=0}^{\mu_i-1} d_{i,l} e^{\lambda_i t} \frac{t^l}{l!} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate di $h(t)$:

$$\begin{aligned} h'(t) &= (-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}t + d_2 e^{-t}) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta_0(t) \\ h''(t) &= (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t - 2(d_2 e^{-t})) \delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t)((-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}t + d_2 e^{-t})) + \dots \\ &\quad \dots + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta'(t) \end{aligned}$$

Ora poniamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema iniziale:

$$h''(t) + 2h'(t) + h(t) = \delta''(t) + \delta(t)$$

Sostituiamo ed eliminiamo i gradini:

$$\begin{aligned} &\overbrace{(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t - 2(d_2 e^{-t})) \delta_{-1}(t) + 2\delta_0(t)((-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}t + d_2 e^{-t})) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta'(t) + \dots}^{h''(t)} \\ &2 \overbrace{\left[(-d_1 e^{-t} - d_2 e^{-t}t + d_2 e^{-t}) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta_0(t) \right]}^{h'(t)} + \overbrace{(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t}t) \delta_{-1}(t)}^{h(t)} \\ &= \delta''(t) + \delta(t) \end{aligned}$$

Mettiamo a sistema i corrispettivi delta e poniamo $t = 0$:

$$\begin{cases} 0 = \delta''(t) \\ (d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) \delta'(t) = 0 \\ 2\delta_0(t)((-d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) + d_2 e^{-t}) + 2\delta_0(t)(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-t} t) = \delta_0(t) \\ d_1 = 0 \\ 2\delta_0(t)(-d_1 + d_2) + 2d_1 \delta_0(t) = \delta_0(t) \\ d_1 = 0 \\ -2d_1 \delta_0(t) + 2d_2 \delta_0(t) + 2d_1 \delta_0(t) = \delta_0(t) \\ d_1 = 0 \\ 2d_2 = 1 \implies d_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la risposta forzata è:

$$h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} t \delta_{-1}(t)$$

2 Esercizi sulla convoluzione e la risposta forzata

2.1 Esercizio 1

calcolare il prodotto di convoluzione tra:

$$h(t) = \delta_0(t) - 2e^{-t} \delta_{-1}(t)$$

$$u(t) = (1 + e^{-t}) \delta_{-1}(t)$$

Procediamo con il calcolo della convoluzione utilizzando l'integrale:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_0(\tau) - 2e^{-\tau} \delta_{-1}(\tau)) (1 + e^{-(t-\tau)}) \delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(\tau) \delta_{-1}(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(\tau) \delta_{-1}(t - \tau) e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} \delta_{-1}(\tau) \delta_{-1}(t - \tau) d\tau - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau} e^{-(t-\tau)} \delta_{-1}(\tau) \delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= -2 \int_0^t e^{-\tau} d\tau - 2e^{-t} \int_0^t d\tau = -2 \left[-e^{-\tau} \Big|_0^t \right] - 2e^{-t} \left[\tau \Big|_0^t \right] \\ &= -2[-e^{-t} + 1] - 2e^{-t} t \\ &= (2e^{-t} - 2 - 2e^{-t} t) \underbrace{\delta_{-1}(t)}_{\text{causale}} \end{aligned}$$

2.2 Esercizio 2

Dato il seguente sistema LTI:

$$v'(t) + 4v(t) = u(t)$$

Calcolare la risposta forzata considerando la seguente funzione in input:

$$u(t) = \delta_0(t) + e^{-t}\delta_{-1}(t)$$

Polinomio caratteristico: $s + 4 = 0 \implies \lambda = -4, \mu = 1, l = 0$

Risposta impulsiva: $h(t) = d_1 e^{-4t} \delta_{-1}(t)$

Riscrivo l'eq sostituendo:

$$h'(t) + 4h(t) = \delta_0(t)$$

$$h'(t) = -4d_1 e^{-4t} \delta_{-1}(t) + d_1 e^{-4t} \delta_0(t)$$

$$\cancel{-4d_1 e^{-4t} \delta_{-1}(t)} + d_1 e^{-4t} \delta_0(t) + \cancel{4d_1 e^{-4t} \delta_{-1}(t)} = \delta_0(t)$$

$$d_1 e^{-4t} \delta_0(t) = \delta_0(t)$$

$$d_1 = 1$$

Quindi

$$h(t) = e^{-4t} \delta_{-1}(t)$$

Ora facciamo la convoluzione tra $h(t)$ e $u(t)$:

$$\begin{aligned} v_f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta_0(t) + e^{-\tau} \delta_{-1}(\tau)) e^{-4(t-\tau)} \delta_{-1}(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{\delta_0(t) \delta_{-1}(t - \tau)} e^{-4(t-\tau)} d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \cancel{\delta_0(\tau) \delta_{-1}(t - \tau)} e^{-\tau} e^{-4t + 4\tau} d\tau \\ &= \cancel{e^{-4t} \int_{0^-}^{0^+} e^{4\tau} d\tau} + e^{-4t} \int_0^t e^{3\tau} d\tau \\ &= e^{-4t} \left[\frac{1}{3} e^{3\tau} \right]_0^t = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-4t}) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

2.3 Esercizio 3

Dato il seguente sistema LTI:

$$v''(t) - v'h(t) + 4v(t) = u''(t) + 3u'(t) + 2u(t)$$

E il seguente input $u(t) = 3\delta_{-1}(t)$. Calcolare la risposta forzata del sistema.

Polinomio caratteristico: $s^2 - s + 4 = 0 \implies \lambda = (s - 2)^2 \implies \lambda_1 = 2, \mu_1 = 2$

$$h(t) = d_0 \delta_0(t) + (d_1 e^{2t} + d_2 e^{2t} t) \delta_{-1}(t)$$

$$\begin{aligned} h'(t) &= d_0 \delta'(t) + (2d_1 e^{2t} + 2d_2 e^{2t} t + d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t) + (d_1 e^{2t} + d_2 e^{2t} t) \Big|_{t=0} \delta_0(t) \\ &= d_0 \delta'(t) + (2d_1 e^{2t} + 2d_2 e^{2t} t + d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t) + d_1 \delta_0(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h''(t) &= d_0 \delta''(t) + (4d_1 e^{2t} + 4d_2 e^{2t}t + 2d_2 e^{2t} + 2d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t) \\
&\quad + (2d_1 e^{2t} + 2d_2 e^{2t}t + d_2 e^{2t}) \Big|_{t=0} \delta_0(t) + d_1 \delta'(t) \\
&= d_0 \delta''(t) + (4d_1 e^{2t} + 4d_2 e^{2t}t + 2d_2 e^{2t} + 2d_2 e^{2t}) \delta_{-1}(t) \\
&\quad + (2d_1 + d_2 e^{2t}) \delta_0(t) + d_1 \delta'(t)
\end{aligned}$$

Ora riscriviamo sostituendo $v(t) = u(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ ed eliminando i gradini:

$$\begin{aligned}
d_1 \delta''(t) + (2d_1 + d_2) \delta_0(t) + d_1 \delta'(t) - 4(d_0 \delta'(t) + d_1 \delta_0(t)) + d_0 \delta_0(t) \\
= 3\delta''(t) + 3\delta'(t) + 2\delta(t)
\end{aligned}$$

Ora mettiamo a sistema i corrispettivi delta:

$$\begin{cases} d_1 \delta''(t) = \delta''(t) \\ d_1 \delta'(t) - 4d_0 \delta'(t) = 3\delta'(t) \\ (2d_1 + d_2) \delta_0(t) - 4d_1 \delta_0(t) + d_0 \delta_0(t) = 2\delta_0(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_0 = \frac{1}{2} \\ 2 + d_2 - 4 + \frac{1}{2} = 2 \implies d_2 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{2} \delta_0(t) + \left(e^{2t} + \frac{7}{2} e^{2t}t \right) \delta_{-1}(t)$$

Ora facciamo la convoluzione con $u(t)$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \delta_0(t) + \left(e^{2t} + \frac{7}{2} e^{2t}t \right) \delta_{-1}(t) \right) (3\delta_{-1}(t)) \\
&= \frac{3}{2} + 3 [e^{2\tau}]_0^t + \frac{21}{2} \left[\frac{\tau e^{2\tau}}{2} - \frac{e^{2\tau}}{4} \right]_0^t \\
&= 3e^{2t} + \frac{21}{2} t e^{2t} - \frac{21}{8} e^{2t} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

2.4 Esercizio 4

Dato il seguente sistema LTI:

$$v''(t) + 3v'(t) + 2v(t) = \frac{1}{3}u(t)$$

Calcolare la risposta forzata del sistema tramite questo input:

$$u(t) = e^{-2t} \delta_{-1}(t)$$

$$h(t) = (d_1 e^{-2t} + d_2 e^{-t}) \delta_{-1}(t)$$

$$h'(t) = (-2d_1 e^{-2t} - d_2 e^{-t}) \delta_{-1}(t) + (d_1 + d_2) \delta_0(t)$$

$$h''(t) = (-4d_1 e^{-2t} + d_2 e^{-t}) \delta_{-1}(t) + (-2d_1 - d_2) \delta(t) + (d_1 + d_2) \delta'(t)$$

Ora sostituiamo $v(t) = h(t)$ e $u(t) = \delta(t)$ nell'equazione del sistema:

$$-(2d_1 + d_2)\delta(t) + (d_1 + d_2)\delta'(t) + 3(d_1 + d_2)\delta(t) = \frac{1}{3}\delta(t)$$

$$\begin{cases} -2d_1 - d_2 + 3d_1 + 3d_2 = \frac{1}{3} \\ (d_1 + d_2)\delta'(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d_1 = \frac{1}{6} \\ d_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$h(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-t} \right) \delta_{-1}(t)$$

Ora facciamo la convoluzione con $u(t)$:

$$\begin{aligned} (h * u)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-t} \right) \delta_{-1}(t)(e^{-2(t-\tau)}\delta_{-1}(t-\tau))d\tau \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t} e^{-2(t-\tau)} \delta_{-1}(\tau) \delta_{-1}(t-\tau) d\tau + \frac{1}{6} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} e^{-2(t-\tau)} \delta_{-1}(\tau) \delta_{-1}(t-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{6}e^{-2t}t + \frac{1}{6}e^{-2t} \int_0^t e^\tau d\tau \\ &= \frac{1}{6}e^{-2t}t + \frac{1}{6}e^{-2t}(e^t - 1) \\ &= \frac{1}{6}e^{-2t}t + \frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-2t} \\ &= \frac{1}{6}(e^{-2t}t + e^{-t} - e^{-2t}) \end{aligned}$$

3 Esercizi fatti in classe

3.1 Esercizio 1

Consegna

$$v''(t) - 5v'(t) + 4v(t) = u'(t) - 3u(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 9 \\ v'(0) = 1 \end{cases}$$

$$u(t) = e^t \delta_{-1}(t)$$

1. Discutere la stabilità del sistema.
2. Determinare la FdT ($H(s)$) (Solo in Laplace quindi non serve in t)
3. Calcolare la risposta impulsiva $h(t)$ (quindi $\mathcal{L}^{-1}[H(s)](t)$)
4. Calcolare la risposta totale $v_i(t)$

$$s^2 - 5s + 4 = 0$$

$$\lambda_1 = +1, \lambda_2 = +4, \mu_i = 1$$

Sistema instabile poiché $Re(\lambda_i) > 0$.

$$\mathcal{L}[v''(t) - 5v'(t) + 4v(t)](s) = \mathcal{L}[u'(t) - 3u(t)](s)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[v''(t)] &= s^2 V(s) - \cancel{sv(0)} - \overbrace{v'(0)}^1 = s^2 V(s) - 1 \\ -5\mathcal{L}[v'(t)](s) &= -5[SV(s) - sv(0)] = -5SV(s) \\ +4\mathcal{L}[v(t)](s) &= +4V(s) \end{aligned}$$

È sempre sottinteso che $u^i(0) = 0$.

$$\mathcal{L}[u'(t)] = sU(s) + su(0) = sU(s)$$

$$\mathcal{L}[u(t)](s) = -3U(s)$$

Ora che abbiamo i diversi pezzetini possiamo ricostruire l'equazione iniziale:

$$S^2 V(s) - 1 - 5V(s) + 4V(s) = sU(s) - 3U(s)$$

$$V(s)(S^2 - 5 + 4) - 1 = sU(s) - 3U(s)$$

$$V(s) = \frac{\overbrace{1}^{p(s)}}{\underbrace{(s-1)(s-4)}_{d(s)}} + \frac{\overbrace{s-3}^{n(s)}}{\underbrace{(s-1)(s-4)}_{d(s)}} U(s)$$

Parliamo della BIBO stabilità. Sia λ_i polo di $H(s)$ e $Re(\lambda_i) < 0$ allora il sistema è BIBO stabile. In questo caso abbiamo due poli $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$ che sono

entrambi positivi quindi il sistema non è né stabile né BIBO stabile.

2. Calcoliamo la FdT che abbiamo già trovato precedentemente:

$$H(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-4)}$$

3.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t)$$

Controlliamo i gradi di $n(s)$ e $d(s)$.

$$V(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \Rightarrow \begin{cases} \deg[n(s)] \geq \deg[d(s)] \\ \text{Sistema proprio} \\ \deg[n(s)] < \deg[d(s)] \\ \text{Sistema strett. proprio} \end{cases}$$

Se il sistema è proprio allora \Rightarrow Divisione fra polinomi poi Fratti semplici e poi antitrasformata. Altrimenti se è strettamente proprio allora \Rightarrow Fratti semplici e poi antitrasformata.

In questo caso il sistema è strettamente proprio quindi dobbiamo fare i fratti semplici:

$$H(s) = \frac{s-3}{(s-1)(s-4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-4}$$

Utilizziamo il metodo dei limiti per trovare A e B:

$$c_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{d^{\mu-l-1}n(s)}{ds^{\mu-l-1}d(s)}(s-\lambda)^\mu$$

$$A = \lim_{s \rightarrow +1} \frac{d^{1-0-1}(s-3)}{ds^{1-0-1}(s-1)(s-4)}(s-1) = \frac{2}{3}$$

$$B = \lim_{s \rightarrow +4} \frac{d^{1-0-1}(s-3)}{ds^{1-0-1}(s-1)(s-4)}(s-4) = \frac{1}{3}$$

$$h(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{3} \frac{1}{(s-4)} \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{=} \left(\frac{2}{3} e^t + \frac{1}{3} e^{4t} \right) \delta_{-1}(t)$$

4. Risposta totalen $v_t(t)$:

$$v_t(t) = v_l(t) + v_f(t)$$

$$V(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-1)(s-4)}}_{V_i(s)} + \underbrace{\frac{s-3}{(s-1)(s-4)}U(s)}_{V_f(s)}$$

Ora dobbiamo trovare $U(s)$:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s) = \mathcal{L}[e^t \delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s-1}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
 V(s) &= \underbrace{\frac{1}{(s-1)(s-4)}}_{V_t(s)} + \underbrace{\frac{s-3}{(s-1)^2(s-4)}U(s)}_{V_f(s)} \\
 &= \frac{s-1+s-3}{(s-1)^2(s-4)} \\
 &= \frac{2s-4}{(s-1)^2(s-4)} = v_t(s)
 \end{aligned}$$

Ora dobbiamo trovare $V_f(s)$:

$$V_f(s) = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-4)}$$

Qua ci torna utile il metodo dei limiti:

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d^{2-0-1}}{ds^{2-0-1}} \frac{2s-4}{(s-1)^2(s-4)} \\
 &= \frac{d}{ds} \frac{2s-4}{s-4} \Big|_{s=1} \\
 &= \frac{2(s-4) - (2s-4)(1)}{(s-4)^2} \Big|_{s=1} \\
 &= \frac{-4}{(1-4)^2} = -\frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{d^{2-1-1}}{ds^{2-1-1}} \frac{2s-4}{(s-1)^2(s-4)} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{2s-4}{s-4} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \lim_{s \rightarrow 4} \frac{d^{1-0-1}}{ds^{1-0-1}} \frac{2s-4}{(s-1)^2(s-4)} \\
 &= \lim_{s \rightarrow 4} \frac{2s-4}{(s-1)^2} = \frac{4}{9}
 \end{aligned}$$

Quindi:

$$V_t(s) = -\frac{4}{9} \frac{1}{(s-1)} + \frac{2}{3} \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{4}{9} \frac{1}{(s-4)}$$

Quindi $v_f(t)$, applichiamo l'antitrasformata e otteniamo:

$$v_t(t) = \left(-\frac{4}{9}e^t + \frac{2}{3}te^t + \frac{4}{9}e^{4t}\right) \delta_{-1}(t)$$

3.2 Esercizio 2

Consegna

$$v''(t) + 4v'(t) + 4v(t) = u'(t)$$

$$C.I = \begin{cases} v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \sin(t)\cos(t)\delta_{-1}(t)$$

1. Risposta libera
2. Risposta forzata

$$S^2V(s) - sv(0) - v'(0) + 4(SV(s) - v(0)) + 4V(s) = sU(s)$$

$$V(s)(s^2 - 4s + 4) - s - 4 = sU(s)$$

$$V(s) = \frac{s+4}{(s^2+4s+4)} + \frac{s}{(s^2+4s+4)}U(s)$$

$$= \frac{s+4}{(s+2)^2} + \frac{s}{(s+2)^2}U(s)$$

Questo sistema è stabile e quindi anche BIBO stabile.

1.

$$v_l(s) = \frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2}$$

Troviamo A e B :

$$A = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \frac{s+4}{(s+2)^2} = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s+4}{(s+2)^2} = 2$$

$$V_l(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \right]$$

$$\stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{=} (e^{-2t} + 2te^{-2t})\delta_{-1}(t)$$

2.

$$v_f(s) = \frac{s}{(s+2)^2}U(s)$$

Troviamo $U(s)$:

$$U(s) = \mathcal{L}^{-1}[u(t)](s)$$

Utilizziamo Eulero per trasformare l'antitrasformata di $u(t) = \sin(t) \cos(t) \delta_{-1}(t)$:

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \\ \sin(t) &= \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \\ &= \mathcal{L} \left[\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2} \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2j} \delta_{-1}(t) \right] (s) \\ &= \frac{1}{4j} \mathcal{L}[(e^{2jt} - e^{-2jt}) \delta_{-1}(t)](s) \\ &= \frac{1}{4j} \left(\frac{1}{s-2j} - \frac{1}{s+2j} \right) = \frac{1}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

Quindi $V_f(s)$:

$$\begin{aligned}V_f(s) &= H(s)U(s) \\ &= \frac{s}{(s+2)^2} \frac{1}{s^2 + 4} \\ &= \frac{s}{(s+2)^2(s-2j)(s+2j)} \\ &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{s-2j} + \frac{D}{s+2j}\end{aligned}$$

Troviamo A, B, C, D :

$$\begin{aligned}A &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \frac{s}{(s+2)^2(s^2-4)} = \frac{1}{16} \\ B &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{s}{(s+2)^2(s^2+4)} = -\frac{1}{4} \\ C &= \lim_{s \rightarrow 2j} \frac{s}{(s+2)^2(s-2j)(s+2j)} = \frac{1}{16j} \\ D &= \lim_{s \rightarrow -2j} \frac{s}{(s+2)^2(s+2j)(s-2j)} = -\frac{1}{16j}\end{aligned}$$

Andiamo a sostituire e otteniamo:

$$V_f(s) = \frac{1}{16} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{1}{16j} \frac{1}{(s-2j)} - \frac{1}{16j} \frac{1}{(s+2j)}$$

Applichiamo Laplace e otteniamo $v_f(t)$:

$$v_f(t) = \left(\frac{1}{16} e^{-2t} - \frac{1}{4} t e^{-2t} + \underbrace{\frac{1}{16j} e^{2jt} - \frac{1}{16j} e^{-2jt}}_{\left(\frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} \right) = \sin(2t)} \right) \delta_{-1}(t)$$

Possiamo semplificare e quindi:

$$v_f(t) = \left(\frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{8}\sin(2t) \right) \delta_{-1}(t)$$