Analisi II

Università di Verona
Imbriani Paolo - VR500437
Professor Zivcovich Franco

9 marzo 2025

Indice

1 Equazioni differenziali

1.1 *Modelli differenziali*

La fisica, per descrivere dei fenomeni fisici usano la matematica e in particolare le equazioni differenziali. Infatti, si denota $x(t)$ lo spostamento nel tempo. Con la derivata prima $x'(t)$ si denota la velocità della particella in quell'istante e con la derivata seconda $x''(t)$ l'accelerazione. Quindi quando andiamo a tradurre matematicamente le leggi che governano modelli naturali può essere naturale dover lavorare con equazioni che coinvolgono una funzione incognita e qualcuna delle sue derivate.

Esempio 1.1

La seconda legge del moto di Newton $F = ma$, che stabilisce la posizione $x(t)$ al tempo t di un corpo di massa m costante, soggetto a una forza $F(t)$, deve soddisfare l'equazione differenziale:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t) \text{ equazione del moto}$$

Quindi le equazioni differenziali nascono per descrivere fenomeni fisici e naturali. Possono essere classificate in modi diversi. Abbiamo infatti:

1. *Equazioni differenziali ordinarie* (ODE) se vengono coinvolte solo le derivate rispetto ad una sola variabile oppure *equazioni differenziali parziali* (PDE) se vengono coinvolte derivate parziali dell'incognita rispetto a più variabili.

   Esempio 1.2

   L'equazione:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

   rappresenta l'equazione delle onde che modellizza lo spostamento trasversale $u(x,t)$ nel punto x al tempo t di una corda tesa che può vibrare.

2. Classificazione in base all'ordine: l'ordine di una ED è l'ordine massimo di derivazione che compare nell'equazione.

   Esempio 1.3

   L'equazione:

   $$\frac{dy^2}{dt^2} + ty^3 - \cos y = \sin t \qquad \text{è di ordine 2}$$

   $$\frac{d^3y}{dt^3} - 2t\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = y\frac{dy^2}{dt^2} - e^t \qquad \text{è di ordine 3}$$

   Possiamo dunque formalizzare i concetti finora introdotti attraverso la seguente definizione:

Definizione 1.1: Equazione differenziale

Si dice **equazione differenziale** di ordine n un'equazione del tipo

$$F(t, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1.1}$$

dove $y(t)$ è la funzione incognita e F è una funzione assegnata delle $n+2$ variabili $t, y, y', \dots, y(n)$ a valori reali.
Si dice **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione.
Si dice **soluzione (o curva integrale)** di (1.1.1) nell'intervallo $I \subset \mathbb{R}$ una funzione φ, definita almeno in I e a valori reali per cui risulti:

$$F(t, \varphi'(t), \varphi''(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t \in I$$

Infine si dice integrale generale dell'equazione (1.1.1) una formula che rappresenti la famiglia di tutte le soluzioni dell'equazione (1.1.1), eventualmente al variare di uno o più parametri in essa contenuti.

Esempio 1.4

Consideriamo una popolazione di individui, animali o vegetali che siano, e sia $N(t)$ il numero degli individui. Osserviamo che N è funzione di del tempo t, assume solo valori interi ed è a priori una funzione discontinua di t; tuttavia può essere approssimata da una funzione continua e derivabile purché il numero degli individui sia abbastanza grande. Supponiamo che la popolazione sia isolata e che la proporzione degli individui in età riproduttiva e la fecondità siano costanti. Se escludiamo i casi di morte, immigrazione, emigrazione, allora il tasso di accrescimento coincide con quello di natalità e se indichiamo con λ il tasso specifico di natalità (i.e. il numero di nati per unità di tempo) l'equazione che descrive il modello diventa:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)$$

Questo processo risulta realistico solo in popolazioni che crescono in situazioni ideali e sono assenti tutti i fattori che ne impediscono la crescita.

La stessa equazione compare anche in altri modelli relativi a sistemi fisiologici ed ecologici.

Esempio 1.5

Studiamo ora il modello di crescita (dovuto a Malthus, 1978) relativo all'evoluzione di una popolazione isolata in presenza di risorse limitate ed in assenza di predatori o antagonisti all'utilizzo delle risorse. In questo caso l'equazione che si ottiene è la seguente:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) - \mu N(t)$$

dove come prima λ è il tasso di natalità mentre μ è il tasso di mortalità (cioè rispettivamente il numero di nati e morti nell'unità di tempo). Il numero $\varepsilon = \lambda - \mu$ è detto **potenziale biologico.**

Ci chiediamo ora come possiamo trovare una soluzione del problema studiato nell'Esempio 1.5. Supponiamo per il momento che sia $N \neq 0$. Allora:

$$N = \varepsilon N = \frac{N}{N} = \varepsilon \Longrightarrow \frac{d}{dt}(\log |N|) = \varepsilon,$$

da cui otteniamo:

$$\log |N(t)| = \varepsilon t + c_1 \Longrightarrow |N(t)| = e^{c_1} e^{\varepsilon t} =: k^2 e^{\varepsilon t}$$

dove abbiamo posto $e^{c_1} =: k^2 > 0$ costante positiva e arbitraria. A questo punto allora:

$$N(t) = \pm k^2 e^{\varepsilon t}$$

Quindi possiamo dire sicuramente che:

$$N(t) = Ce^{\varepsilon t} \quad C \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Tutto questo vale se $N \neq 0$; ma è banale verificare che anche $N = 0$ soddisfa l'equazione di partenza, quindi possiamo dire che l'integrale generale è:

$$N(t) = Ce^{\varepsilon t} = Ce^{(\lambda - \mu)t} \quad C \in \mathbb{R}$$

In particolare dall'ultima riga leggiamo che:

1. Se $\lambda > \mu$ allora $N(t)$ è una funzione che cresce in maniera esponenziale.
2. Se $\lambda < \mu$ allora $N(t)$ è una funzione che decresce fino ad estinguersi.
3. Se $\lambda = \mu$ allora $N(t)$ è una funzione stabile nel tempo.

Osserviamo in particolare che non abbiamo trovato solo una soluzione, ma infinite soluzioni, dipendenti da una costante arbitraria.

1.2 *Equazioni differenziali di primo ordine*

1.2.1 Generalità

Le equazioni differenziali di primo ordine sono le più semplici da trattare e sono di fondamentale importanza in quanto sono alla base di molte applicazioni pratiche. Esse sono della forma:

$$F(t, y, y') = 0 \tag{1.2.1}$$

con F funzione assegnata delle tre variabili t, y, y' a valori reali.

Esempio 1.6

La ricerca delle primitive di una funzione f continua su un intervallo I equivale a risolvere l'equazione differenziale $y'(t) = f(t)$ che ammette infinite soluzioni del tipo

$$y(t) = \int f(t)\,dt + C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Si dimostra che l'insieme delle soluzioni di una EDO del primo ordine è costituito da una famiglia di funzioni dipendenti da un parametro $C : t \mapsto \varphi(t; c)$. Tale famiglia prende il nome di **integrale generale** dell'equazione differenziale. La condizione supplementare $y(t_0) = y_0$ permette di selezionare una soluzione specifica.

Definizione 1.2: Problema di Cauchy

Il problema di risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

prende il nome di **problema di Cauchy**.

Definizione 1.3: Forma Normale

Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine si dice in **forma normale** se è scritta nella forma:

$$y'(t) = f(t, y) \tag{1.2.3}$$

Per equazioni di questo tipo si può assicurare, sotto larghe ipotesi, che il problema di Cauchy (1.2.2) ammette un'unica soluzione almeno localmente (cioè per valori di t in un intorno di t_0).
Le soluzioni dell'ED espresse dall'integrale generale potrebbero talvolta essere definite su insiemi diversi a seconda del valore della costante o anche su insiemi più complicati di un intervallo (es. $t \neq 0$). Tuttavia quando parleremo di soluzione del problema di Cauchy andremo sempre a intendere una funzione che:

a) è definita su un intervallo I contenente t_0 in cui è assegnata la condizione iniziale.

b) è derivabile in ogni punto di I e soddisfa l'equazione in ogni punto di I.

Esempio 1.7

Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} N'(t) = 3N(t) \\ N(0) = 7 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione data da $N(t) = ce^{3t}$. Imponendo il dato iniziale otteniamo $N(t) = 7e^{3t}, \forall t \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^+$ se si sta parlando di problema di Cauchy che modellizza un fenomeno fisico).

1.2.2 Equazioni a variabili separabili

Le equazioni a variabili separabili sono una particolare clase di ED ordinarie del primo ordine del tipo (1.2.3) che sono caratterizzate dalla presenza di una funzione f prodotto di due funzioni, una della sola variabile t e l'altra solo dell'incognita y. Più nel dettaglio, sono equazioni del tipo:

$$y'(t) = a(t)b(y) \tag{1.2.4}$$

con a funzione continua su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e b funzione continua su un intervallo $J \subset \mathbb{R}$. Cerchiamo di capire come determinare l'integrale generale di questo tipo di equazioni. Distinguiamo due casi:

- Se $\overline{y}$ è soluzione dell'equazione $b'(\overline{y}) = 0$ allora $y(t) = \overline{y}$ è soluzione dell'ED (1.2.4). Infatti in tal caso si annulla il secondo membro della (1.2.4) e di conseguenza anche il primo membro (perchè la derivata della funzione costante è zero).

- Supponiamo ora che $b(y) \neq 0$. Allora la (1.2.4) può essere riscritta come:

  $$\frac{y'}{b(y)} = a(t)$$

  Quindi un'ipotetica soluzione soddisfa l'identità:

  $$\int \frac{y'(t)}{b(y(t))}\, dt = \int a(t)\, dt + C$$

  Con C costante arbitraria. Ora si può effettuare il cambio di variabile dove $y'(t)dt = dy$:

  $$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(t)\, dt + C$$

  Quindi questo è l'integrale generale dell'equazione (1.2.4). Se $B(y)$ è una primitiva di $\frac{1}{b(y)}$ e $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$, allora l'integrale generale della ED è assegnato dall'equazione (in forma implicita):

  $$B(y) = A(t) + C \quad \text{con } C \text{ costante arbitraria}$$

Osserviamo che non è detto che si riesca a ricavare y esplicitamente o a ridurre la precedente equazione in forma normale. In generale, per le equazioni a variabili separabili, vale il seguente:

> **Teorema 1.2.1**
>
> Si consideri il seguente problema di Cauchy:
>
> $$\begin{cases} y' = a(t)b(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
>
> con a continua in un intorno I di t_0 e b continua in un intorno J di y_0. Allora esiste un intorno di t_0 che denoteremo con $I' \subset I$ e una funzione continua y definita su I' con derivata anch'essa continua su I' tale che y sia soluzione del problema di Cauchy. Inoltre se anche b' è

continua su J (o b ha un rapporto incrementale limitato in J anche se non è derivabile) allora tale soluzione è anche unica.

Esempio 1.8

Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = ty^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Prima di tutto si osserva che $y = 0$ è integrale singolare per l'equazione data. Quindi se $y \neq 0$, separando le variabili e integrando si ottiene:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^3} &= \int t dt + C \\ -\frac{1}{2y^2} &= \frac{t^2}{2} + C \\ y &= \pm \frac{1}{\sqrt{C - t^2}} \end{aligned}$$

Imponendo il dato di Cauchy si osserva che l'unica soluzione è quella che si ottiene per $k = 1$ e considerando il segno positivo davanti alla radice, cioè

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}}$$

Esempio 1.9

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} yy' = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Integrando ambo i membri della ED proposta si ottiene:

$$\int y\ dy = \int 2\ dt \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = 2t + C \Longrightarrow y = \pm\sqrt{4t + 2C}$$

quindi per ogni $C \in \mathbb{R}$ esistono due soluzioni (corrispondenti ai due segni davanti alla radice) definite solo per $t \geq -\frac{C}{2}$. Imponendo il dato di Cauchy si ottiene $y(0) = \pm\sqrt{2C = 1}$, quindi per compatibilità occorre scegliere il segno positivo davanti alla radice. La soluzione del problema proposto è dunque $y = 4t + 1$, definita solo per $t \geq -\frac{1}{4}$. Andiamo a controllare se sono soddisfatte le condizioni del teorema: $a(t) = 2$ che è dunque una funzione continua e derivabile ovunque; $b(t) = 1/y$ che è continua e derivabile se $y \neq 0$. Quindi il problema di Cauchy per questa equazione ha una e una sola soluzione purché la condizione iniziale non sia del tipo $y(t_0) = 0$. Infatti l'equazione non è soddisfatta in questo punto perché si otterrebbe

$0 = 2$. Quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} yy' = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

non ha soluzione. Quindi abbiamo trovato un esempio di problema di Cauchy in cui viene a mancare l'esistenza di soluzioni. In altre situazioni potrebbe venire a mancare l'unicità delle soluzioni, come mostra l'esempio successivo.