UNIVERSITÀ di VERONA

Logica

Dipartimento di Informatica – Università di Verona

Corso di Margherita Zorzi
03/10/2023 - 14/02/2024

Note a cura di:

Imbriani Paolo

Logica Appunti 09.10.23

Principio di Induzione sull'insieme dei numeri naturali

Il *principio di induzione* (tecnica di dimostrazione) afferma che per dimostrare la veridicità di una proprietà nell'insieme dei numeri naturali è sufficiente verificare che:

1) essa sia vera in zero (caso base);
2) che si suppone essere vera per un numero arbitrario "*n*" allora essa è vera anche per il numero successivo "*n+1*".

Principio di Induzione sull'insieme PROP (di cui PROP è l'insieme delle proposizioni delle formule della logica proposizionale)

AT = Simboli Proposizionale + Assurdo

Il *principio di induzione* afferma che per dimostrare la veridicità di una proprietà dell'insieme prop è sufficiente verificare che

1) α gode della proprietà P ($\alpha \in P$), $\alpha \in AT$
2) sia α che $\neg \alpha$ godono della proprietà P
3) se α e β godono della proprietà P, allora anche ($\alpha \Rightarrow \beta$), (α & β), ($\alpha \mid\mid \beta$), ($\neg \alpha$)

QUINDI

$$\forall \varphi \in PROP, P[\varphi]$$

COSA è UNA FUNZIONE dati DUE PUNTI e UNA RELAZIONE

A, B (insiemi)
Relazione f *contenuta* nei due insiemi A (si chiama dominio) e B (codominio)

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

R^2 RxR -> Piano Cartesiano... due punti sul piano sono una coppia

f è una *funzione* quando *se e solo se* $\forall a \in A$ **esiste unico** $b \in B \mid (a, b) \in f$

anche scritto nella forma:

$$f(a) = b$$

ESEMPIO CON LA PROPRIETÀ PI GRECO

$\pi : PROP \to \mathbb{N}$ (numero parentesi)

1) $\pi[\alpha] = 0$ se $\alpha \in At$

2) $\pi[(\neg\alpha)] = \pi[\alpha] + 2$

3) $\pi[(\alpha \to \beta)] = \pi[(\alpha \vee \beta)] =$

$= \pi[(\alpha \wedge \beta)] = \pi[\alpha] + \pi[\beta] + 2$

Definizioni ricorsiva di funzioni sull'insieme delle formule PROP

π : PROP → N

Presa in input una formula restituisco un numero

1) se α è AT (atomica) allora ho 0 parentesi
2) *EQUAZIONE GENERALE DI UNA FORMULA:*

π[(┐α)] = π[(α)] + 2

3) Quando ho una formula PROP binaria, deve valere per le formula atomiche (+2) contando le parentesi per la formula composta

ESEMPIO

π[(P2 -> P1)] = π[P2] + π[P1] + 2 = 0 + 0 + 2 = 2

π[(P1 V (P2 V P1))] = π[p1] + π[p2 V p1] +2 = 0 + (0 + 0 + 2) + 2 = 4

Esercizio: 1

Ogni α dell'insieme delle formule PROP ha un numero pari di parentesi

Per ogni α appartenente a PROP P[α] <=> π[α] è pari

1) P[α], α ∈ at
se α ∈ at π[α] = 0 quindi

2) P[α], P[┐α]?

$P[\alpha] \Leftrightarrow \pi[\alpha]$ pari
$\pi[(\neg \alpha)] = \pi[\alpha] + 2$

quindi $P[\neg \alpha]$

3) suppongo $P(\alpha)$, $P(\beta)$ allora $\pi[\alpha] = n$ e $\pi[\beta] = n$ } PARI

quindi
se $\pi(\alpha \circ \beta) = \pi[\alpha]$ e $\pi[\beta] + 2$

ho dimostrato per induzione che la proprietà P vale per qualsiasi formula
-> **$\forall \varphi \in$ PROP, $P[\varphi]$**

Definizione <u>ricorsiva</u> di rango e sottoformula

- *Rango* r di una proposizione (SIZE, Dimensione della formula)

$r : PROP \to N$

1) $r[\varphi] = 0 \quad \varphi \in At$
2) $r[\neg \varphi] = 1 + r[\varphi]$
3) $r[(\varphi \circ \gamma)] = 1 + \max\{r[\varphi], r[\gamma]\}$

- *Sottoformula* sub di una proposizione

$sub : PROP \to 2^{PROP}$

Preso in input una formula di proposizione mi restituisce un insieme

INSIEME DELLE PARTI

Dato un insieme A con $2^A \to P[A]$ si denota un insieme delle parti di A; $2^A = \{x \mid x$ contenuto in $A\}$

$A = \{3, 5\}$

$2^A = \{ \varnothing, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\} \}$

$sub[\alpha]$

$\alpha = ((p_2 \vee p_1) \to p_0)$

$sub[\alpha] = \{\alpha, p_2, p_1, p_0, (p_2 \vee p_1)\}$

Logica Appunti 10.10.23

Insieme delle sottoformule **(definizione)**

1) $sub[\varphi] = \{\varphi\}$ se $\varphi \in At$

2) $sub[(\neg\varphi)] = \{(\neg\varphi)\} \cup sub[\varphi]$

3) $sub[(\varphi \circ \gamma)] = \{(\varphi \circ \gamma)\} \cup \{sub[\varphi]\} \cup \{sub[\gamma]\}$

Vogliamo dimostrare il seguento teorema:

Se $\alpha \in sub[\beta]$ & $\alpha \neq \beta$ (α sottoformula propria)

allora $r[\alpha] < r[\beta]$

Dimostro per induzione su β: (ragiono sulla sua "forma")

1) $\beta \in At$

β non ha sottoformule proprie quindi la premessa è falsa e di conseguenza è **vero (Il falso implica il vero)**

2) Se $\beta = (\neg\beta_1)$: se $\alpha \in sub[\beta]$ e $\alpha \neq \beta$
allora $\alpha \in sub[\beta_1]$ e si dimostra
$r[\alpha] \leq r[\beta_1]$

a) se $\alpha \in sub[\beta_1]$ e $\alpha \neq \beta_1$ per *ipotesi induttiva* $r[\alpha] < r[\beta_1]$
b) $\alpha = \beta_1$ $\quad r[\alpha] = r[\beta_1]$

Quindi

(per definizione)
$r[\neg\beta_1] = 1 + r[\beta_1] \geq 1 + r[\alpha] > r[\alpha]$

-> $r[\alpha] < r[\beta]$

3) $\beta = (\beta_1 \rightarrow \beta_2)$ se α è sottoformula di β e $\alpha \neq \beta$
allora $\alpha \in sub[\beta_1]$ o $\in sub[\beta_2]$

1) se $\alpha \in sub[\beta_1]$
a) se $\alpha \neq \beta_1 \Rightarrow r[\alpha] < r[\beta_1]$ i.i su β_1
b) se $\alpha = \beta_1 \Rightarrow r[\alpha] = r[\beta_1]$ i.i su β_1

da a) e b) $r[\alpha] \leq r[\beta_2]$

2) se $\alpha \in sub[\beta_2]$
a) se $\alpha \neq \beta_2 \Rightarrow r[\alpha] < r[\beta_2]$ i.i su β_2

b) se $\alpha = \beta_2 \Rightarrow r[\alpha] = r[\beta_2]$ i.i su β_2

da a) e b) $r[\alpha] \leq r[\beta_2]$

$r[(\beta_1 \Rightarrow \beta_2)] = 1 + \max\{r[\beta_1], r[\beta_2]\} \geq 1 + r[\alpha] > r[\alpha]$

Definire questa funzione per ricorsione

Esercizio 1

: "lunghezza delle formule proposizionali"

es. #[(p -> q)] = 5

INPUT = PROP
OUTPUT = NUMERO

1) $\#[\varphi] = 1$, $\#[\varphi] \in At$

2) $\#[(\neg\varphi)] = \#[\varphi] + 3$

3) Se $\varphi = (\varphi \text{ o } \gamma)$ allora $\#[\varphi] = \#[\varphi] + \#[\gamma] + 3$

Esercizio 2

Vogliamo dimostrare la seguente disuguaglianza.

$$\mathbf{r[\varphi] \leq \#[\varphi]}$$

Tradotta: Il rango di φ è minore o uguale alla lunghezza delle formule proposizionale di φ

Dimostro per induzione su φ:

1) $\varphi \in At$

Per definizione: $\#[\varphi] > r[\varphi]$

2) $\varphi = (\neg\varphi_1)$: se $r[\varphi_1] \leq \#[\varphi_1]$ allora
si dimostra $r[\varphi] \leq \#[\varphi]$

$\#[\neg\varphi_1] = 3 + \#[\varphi_1] \geq 3 + (1 + r[\varphi]) > r[\varphi]$

3) $\varphi = (\varphi_1 \text{ o } \varphi_2)$: se $r[\varphi_1] \leq \#[\varphi_1]$ o $r[\varphi_2] \leq \#[\varphi_2]$ allora
si dimostra $r[\varphi] \leq \#[\varphi]$

$\#[(\varphi_1 \text{ o } \varphi_2)] = 3 + \#[\varphi_1] + \#[\varphi_2] \geq 3 + (1 + \max\{r[\varphi_1], r[\varphi_2]\}) > r[\varphi]$

Logica 16.10.23 Appunti

Semantica delle formule proposizionali (F: Proposizionali)

α -> True (1) or False (0)

Valutazione delle formule logiche

V : PROP -> {0, 1}

$V(p_1)$ = ? -> può essere o 0 o 1

~~$V(\alpha) = V(\neg\alpha)$~~ Non va bene!

~~$V(\alpha) = 0/1\ \forall\alpha$~~ Non va bene!

V : PROP -> {0,1} è una <u>valutazione</u> se

<=> = Se e solo se

1) $V(\alpha \,\&\, \beta) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1 \,\&\, V(\beta) = 1$
2) $V(\alpha \text{ OR } \beta) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1 \text{ OR } V(\beta) = 1$
3) $V(\neg\alpha) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 0$
4) $V(\perp) = 0$
5) $V(\alpha \Rightarrow \beta) = 1 \Leftrightarrow V(\alpha) = 0 \text{ OR } V(\beta) = 1$

$V(\alpha \Rightarrow \beta) = 0 \Leftrightarrow V(\alpha) = 1 \text{ AND } V(\beta) = 0$

- *Valutazione Atomica*

v è detta atomica se v : At -> {0, 1} e $V(\perp) = 0$

<u>Th</u> data una valutazione atomica v esiste ed è anche unica una valutazione

$[| \cdot |]_v$ = parentesi denotazionali

$[| \cdot |]_v$: PROP => {0, 1} t.c
$[| \alpha |]_v = V(\alpha)$ per $\alpha \in$ At

$[|\alpha \text{ OR } \beta|]_v = 1 \Leftrightarrow [|\alpha|]_v = 1 \text{ OR } [|\beta|]_v = 1$

α β | α OR β
0 0 | 0
0 1 | 1
1 0 | 1
1 1 | 1

Il valore di verità di una formula è determinato (universalmente) dai valori dei suoi dati.

Ai valori atomici bisogna assegnare una variabile di vero o falso perché da soli non hanno valore

V $[|\alpha|]_{v1}$ $[|p2 \rightarrow p1|] = 1 \Leftrightarrow \neg p2$ OR P1

$[|[|p2 \rightarrow p1|]$ OR $p2|]_{v1} = 1 \Leftrightarrow [|p2 \rightarrow p1|] = 1$ OR $[|p2|] = 1$

$[|\alpha|]_{v2}$?

<u>Th</u>

$\varphi \in$ PROP sia $\varphi^{At} = \{P \mid P \in At \ \& \ P \text{ è in } \varphi\}$

Siano v_1 e v_2 valutazioni proprie
t.c $\forall p \in \varphi^{At}$ $v_1[p] = v_2[p]$
allora $[|\varphi|]_{v1} = [|\varphi|]_{v2}$

- *Tautologia*

Definizione [Tautologia]
$\alpha \in$ PROP è detta tautologia se per ogni valutazione $[|\alpha|]_v = 1$

$\rightarrow \models \varphi$

$\forall v. [|\alpha|]_v = 1$

$\models \alpha$ -> sì => dimostro per ogni valutazione $[|\alpha|]_v = 1$
    -> no => esibisco v t.c almeno 1 $[|\alpha|]_v = 0$

Le istanze di α sono infinite!

Lezione Logica 17.10.23

Es1

$|= \alpha \to \alpha$

$\forall v.\ [|\alpha \to \alpha|]_v = 1$

(se e solo se)
$[|\alpha \to \alpha|]_v = 1 \iff [|\alpha|]_v = 0 \text{ OR } [|\alpha|]_v = 1$ ✔ Di per sé è già dimostrato come definizione

Es2

$|= ((\alpha \text{ AND } \beta) \to \alpha)$

$\forall v.\ [|(\alpha \text{ AND } \beta) \to \alpha|]_v = 1$
$\iff [|(\alpha \text{ AND } \beta)|]_v = 0 \text{ OR } [|\alpha|]_v = 1$
$\iff ([|\alpha|]_v = 0 \text{ OR } [|\beta|]_v = 0) \text{ OR } [|\alpha|]_v = 1$

Es3

$|= ((\alpha \to (\beta \to \alpha))$

$\forall v.\ [|(\alpha \to (\beta \to \alpha))|]_v = 1$
$\iff [|\alpha|]_v = 0 \text{ OR } [|(\beta \to \alpha)|]_v = 1$
$\iff \underline{[|\alpha|]_v = 0} \text{ OR } ([|\beta|]_v = 0 \text{ OR } \underline{[|\alpha|]_v = 1})$

Ho tutte le possibilità => Vero (Per α)

Es4

$|= ((\alpha \to (\beta \text{ AND } \alpha))$ NO TAUTOLOGIA

VERO **solo se $|= (\alpha \to (\alpha \text{ AND } \alpha))$**

Bisogna trovare un'istanza di α e β e una valutazione v

Assumo che α sia P_0 e β sia P_1
Esiste (almeno) una valutazione t.c. $[|(P_0 \to (P_0 \text{ AND } P_1))|]_v = 0$

$V[P_0] = 1 \quad V[P_1] = 0$

Ho trovato un'istanza per la quale mi falsifica la tautologia.

CONTROMODELLO

$[|(P_0 \text{->} (P_0 \text{ AND } P_1))|]_v = 0$

$\forall v.\ [|(P_0 \text{->} (P_0 \text{ AND } P_1))|]_v = 0$
$\text{<=>}\ [|P_0|]_v = 1 \text{ AND } [|(P_0 \text{ AND } P_1)|]_v = 0$
$\text{<=>}\ [|P_0|]_v = 1 \text{ OR } ([|P_0|]_v = 0 \text{ OR } [|P_1|]_v = 0)$

= Globalmente, è vero! (è vero che sia falso) □

TIP Se hai il dubbio, su quali valori dare a certi elementi nella formula, costruisci la tabella di verità

? $|= \phi$ -> Decidibile in Informatica

Soddisfacibilità

$\alpha \in$ PROP è soddisfacibile se esiste v $[|\alpha|]_v = 1$

Sono una **tautologia** se ogni mia valutazione è sempre vera
Sono **non soddisfacibile** se almeno una valutazione mi rende l'insieme falso

-> Non esiste v t.c. $[|\alpha|]_v = 1$

Γ insieme di formule proposizionali
Γ è soddisfacibile quando

Esiste una v t.c. $\forall \phi \in \Gamma\ [|\phi|]_v = 1$

Sono **soddisfacibile** se almeno una mia valutazione è vera

Conseguenza Logica

IPOTESI => TESI

Γ, Σ, Δ insiemi arbitrari di formule α, β, γ...

$\Gamma \models \alpha$ -> si può **leggere** in due modi

1) da Γ segue semanticamente α
2) α è conseguenza logica/semantica di Γ

Definizione -> $\Gamma \models \alpha$

$\Gamma \models \alpha$ se e solo se
per ogni v se
(per ogni $\gamma \in \Gamma$ $[|\gamma|]_v = 1$) allora $[|\alpha|] = 1$

- $[|\Gamma|]_v = 1 \iff \forall \alpha \in \Gamma \; [|\alpha|] = 1$

  $\Gamma \models \alpha \iff \forall v \; [|\Gamma|]_v = 1$ allora $[|\alpha|]_v = 1$

$([|\Gamma|]_v \neq 1) \neq ([|\Gamma|]_v = 0)$

$[|\Gamma|]_v \neq 1$ -> Se esiste $\alpha \in \Gamma$ t.c. $[|\alpha|]_v = 0$

Es5

α AND $\beta \models \alpha$

v generica $[|(\alpha \text{ AND } \beta)|]_v = 1 \Rightarrow$ **$[|\alpha|]_v = 1$**

$[|(\alpha \text{ AND } \beta)|]_v = 1$
$\iff [|\alpha|]_v = 1$ AND $[|\beta|]_v = 1$
$\Rightarrow$ **$[|\alpha|]_v = 1$**

Es6 VERIFICARE UNA TAUTOLOGIA POSSIBILE ESERCIZIO ALL'ESAME!

$(\alpha \to \beta), \alpha \models \beta$

$\{\beta_1, \beta_{2,} \ldots \beta_n\}$
$\beta_1, \beta_{2,} \ldots \beta_n$
$\Gamma \cup \Delta \models \alpha$
$\Gamma, \Delta \models \alpha$
, = congiunzione

data una v generica $[|(\alpha \to \beta), \alpha|]_v = 1 \Rightarrow$ **$[|\beta|]_v = 1$**

$[|(\alpha \to \beta), \alpha|]_v = 1$
$\Leftrightarrow [|(\alpha \to \beta)|]_v = 1$ AND $[|\alpha|]_v = 1$
$\Leftrightarrow$ (**$[|\alpha|]_v = 0$** OR **$[|\beta|]_v = 1$**) AND **$[|\alpha|]_v = 1$**

=> Globalmente è vero $[|\beta|]_v = 1$

Es7 A CASA

$\Gamma, \alpha \models \beta \Rightarrow \Gamma \models \alpha \to \beta$

$\Gamma = \{\beta_1, \dots \beta_n\}$
Γ, α
$\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \alpha$

v.gen $[|\Gamma, \alpha|]_v = 1 \Rightarrow$ **$[|\beta|]_v = 1$**

$[|\Gamma, \alpha|]_v = 1$
$\Leftrightarrow [|\Gamma|]_v = 1$ AND $([|\alpha|]_v = 1 \Rightarrow [|\beta|]_v = 1)$

(L'implica grande si può definire metalinguaggio)
metalinguaggio viene usato per spiegare e definire il linguaggio

$= ([|\Gamma|]_v \neq 1$ OR $[|\alpha|]_v = 0)$ OR $[|\beta|]_v = 1$

$\Leftrightarrow [|\Gamma|]_v \neq 1$ OR $[|\alpha|]_v = 0$ OR $[|\beta|]_v = 1$
$\Leftrightarrow [|\Gamma|]_v \neq 1$ OR $[|\alpha \to \beta|]_v = 1$
$\Leftrightarrow$ **$[|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow [|\alpha \to \beta|]_v = 1$**

Es 8

$\Gamma, \alpha, \beta \models \alpha$ AND β

v gen. ($[|\Gamma, \alpha, \beta|]_v = 1 \Rightarrow [\alpha$ AND $\beta]_v = 1$)

$[|\Gamma, \alpha, \beta|]_v = 1$
$\Leftrightarrow [|\Gamma|]_v = 1$ AND (**$[|\alpha|]_v = 1$ AND $[|\beta|]_v = 1$**)

=> Globalmente è vero $[\alpha \text{ AND } \beta]_v = 1$

Lezione 23.10.23 Logica Appunti

CONVENZIONI

1) Omettiamo quando possibile alcune parentesi

$(\alpha \to \beta) \sim \alpha \to \beta$

2) Precedenze tra connettivi

a) La negazione è quella che ha più precedenza
b) poi AND, OR α OR β AND γ $(\alpha \text{ OR } \beta) \text{ AND } \gamma \neq \alpha \text{ OR } (\beta \text{ AND } \gamma)$
c) poi ->, che associa a destra $\alpha_1 \to \alpha_2 \to \alpha_3 \sim \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_3)$

$$\delta = (\gamma \to ((\neg\alpha) \text{ OR } \beta))$$

=> metaconnettivo

se allora
$\Gamma, \alpha \models \beta \Rightarrow$ **$\Gamma \models \alpha \to \beta$**
def
$\Gamma, \alpha \models \beta \Leftrightarrow \forall v. \ [|\Gamma, \alpha|]_v = 1$ **=>** $[|\beta|]_v = 1$
$\forall v. \ [|\Gamma, \alpha|] \neq 1 \text{ OR } [|\beta|]_v = 1 \Leftrightarrow$
$\forall v. \ [|\Gamma|]_v \neq 1 \text{ OR } [|\alpha|]_v = 0 \text{ OR } [|\beta|]_v = 1 \Leftrightarrow$
$\forall v. \ [|\Gamma|]_v \neq 1 \text{ OR } ([|\alpha|]_v = 0 \text{ OR } [|\beta|]_v = 1) \Leftrightarrow$
$\forall v.$ **$[|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow [|\alpha \to \beta|]_v = 1$**

$\Leftrightarrow \Gamma \models \alpha \to \beta$

Definizione di sostituzione p

$\varphi \in$ PROP $\varphi[\psi/p]$ $\psi \in$ PROP
p simbolo proposizionale
che occorre in PROP

$\varphi = ((P_1 \to (P_5 \text{ OR } P_1)) \text{ AND } P_3)$

$\varphi[\psi/P_1] = ((\psi \to (P_5 \text{ OR } \psi)) \text{ AND } P_3)$

DEFINIZIONE

- $\varphi[\psi/p] = \bot$ se $\varphi = \bot$

- $\varphi[\psi/p] = \varphi$ se $\varphi \in At$ e $\varphi \neq p$
- $\varphi[\psi/p] = \psi$ $\varphi=p$
- $(\neg\varphi)[\psi/p] = \neg(\varphi[\psi/p])$
- $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[\psi/p] = (\varphi_1[\psi/p] \circ \varphi_2[\psi/p])$

SE E SOLO SE SINTATTICO

<->

α <-> β = (α -> β) AND (β -> α)

<u>Th</u> se $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ ($\models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ AND $(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)$)
allora $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[|\varphi_2/p|]$

$\models \alpha \leftrightarrow \beta$ ~> $\alpha \approx \beta$

LEMMA (PER CASA)

$[|\varphi \leftrightarrow \psi|]_v = 1$
$\Leftrightarrow [|\varphi|]_v = [|\psi|]_v$

$\forall v.\ [|\varphi \leftrightarrow \psi|] = 1$
$\Leftrightarrow [|\varphi \rightarrow \psi|]_v = 1$ AND $[|\psi \rightarrow \varphi|]_v = 1$
$\Leftrightarrow ([|\varphi|]_v = 0$ OR $[|\psi|] = 1)$ AND $([|\psi|]_v = 0$ OR $[|\varphi|] = 1)$

Non si potrà mai avverare se $\psi \neq \varphi$

Lezione 24.10.23 Logica Appunti

<u>Relazione di equivalenza</u>

A $R \subseteq A \times A$

R è detta relazione di equivalenza **sse (se e solo se)** **(x,y)** $\in R$
x R y (x in relazione con y)

1. $\forall a \in A$ a R a **riflessività**
2. $\forall a, b, c \in A$ (a R b & b R c) => a R c **transitività**
3. $\forall a, b \in A$ a R b => b R a **simmetria**

$\approx \subseteq$ PROP x PROP
def

$\varphi \approx \psi \iff \models \varphi \leftrightarrow \psi$

<u>Th</u>

$\approx$ è una relazione di equivalenza

1. $\forall \varphi \in PROP \quad \varphi \approx \varphi$

   $\models \varphi \leftrightarrow \varphi \iff \forall v. [|(\varphi \to \varphi) \text{ AND } (\varphi \to \varphi)|]_v = 1$
   $\iff \forall v. [|\varphi \to \varphi|]_v = 1$
   $\iff \forall v. ([|\varphi|]_v = 0 \text{ OR } [|\varphi|]_v = 1)$

2. $\forall \varphi, \psi \in PROP \; \varphi \approx \psi \Rightarrow \psi \approx \varphi$

   v generica
   $[|\varphi \leftrightarrow \psi|]_v = 1$
   $\iff [|(\varphi \to \psi) \text{ AND } (\psi \to \varphi)|]_v = 1$
   $\iff [|\varphi \to \psi|]_v = 1 \text{ AND } [|\psi \to \varphi|]_v = 1$
   $\iff [|(\psi \to \varphi) \text{ AND } (\varphi \to \psi)|]_v = 1$
   $\iff \varphi \approx \psi$

3. $\forall \varphi, \psi, \gamma \in PROP((\varphi \approx \psi) \;\&\; (\psi \approx \gamma)) \Rightarrow (\varphi \approx \gamma)$

   v generica
   $[|\varphi \leftrightarrow \psi|]_v = 1 \;\&\; [|\psi \leftrightarrow \gamma|]_v = 1) \Rightarrow [|\varphi \leftrightarrow \gamma|]_v = 1$

   Il risultato segue dal lemma

✅ TAUTOLOGIE NOTEVOLI

1) $\models \neg(\varphi \text{ AND } \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \text{ OR } \neg\psi)$ **LEGGI DI DE MORGAN**
2) $\models \neg(\varphi \text{ OR } \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \text{ AND } \neg\psi)$
3) $\models \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$ **NEGAZIONE INVOLUTIVA**
4) $\models (\varphi \text{ AND } \psi) \leftrightarrow (\varphi \text{ OR } \psi)$ **COMMUTATIVITÀ**
5) $(\varphi \text{ OR } \psi) \leftrightarrow (\varphi \text{ AND } \psi)$
6) $\models \varphi \text{ AND } (\varphi \text{ OR } \psi) \leftrightarrow ((\varphi \text{ AND } \psi) \text{ OR } (\varphi \text{ AND } \psi))$ **DISTRUTTIVITÀ**
7) $\models \varphi \text{ OR } (\varphi \text{ AND } \psi) \leftrightarrow ((\varphi \text{ OR } \psi) \text{ AND } (\psi \text{ OR } \varphi))$
8) $\models \varphi \text{ OR } (\psi \text{ OR } \psi) \leftrightarrow (\varphi \text{ OR } \psi) \text{ OR } \psi$ **ASSOCIATIVITÀ**
9) $\models \varphi \text{ AND } (\psi \text{ AND } \psi) \leftrightarrow (\varphi \text{ AND } \psi) \text{ AND } \psi$

* ESERCIZIO (DE MORGAN)

$\models \neg(\varphi \text{ OR } \psi) \to (\neg\varphi \text{ AND } \neg\psi)$

$\forall v .\ [|\neg(\varphi \text{ OR } \psi) \to (\neg\varphi \text{ AND } \neg\psi)|]_v = 1$

$\Leftrightarrow [|\neg(\varphi \text{ OR } \psi)|]_v = 0 \text{ OR } [|\neg\varphi \text{ AND } \neg\psi|] = 1$
$\Leftrightarrow [|\varphi \text{ OR } \psi|]_v = 1 \text{ OR } [|\neg\varphi|] = 1 \text{ AND } [|\neg\psi|] = 1))$
$\Leftrightarrow [|\varphi|]_v = 1 \text{ OR } [|\psi|]_v = 1 \text{ OR } ([|\varphi|]_v = 0 \text{ AND } [|\psi|]_v = 0)$

Abbiamo coperto tutti i casi -> OK □

Ma con il Se e solo se...?

$\models \neg(\varphi \text{ OR } \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \text{ AND } \neg\psi)$

$\forall v .\ [|\neg(\varphi \text{ OR } \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \text{ AND } \neg\psi)|]_v = 1$
$\Leftrightarrow [|\varphi \text{ OR } \psi|] = 0$
$\Leftrightarrow [|\varphi|] = 0 \text{ AND } [|\psi|] = 0$
$\Leftrightarrow [|\neg\varphi|] = 1 \text{ AND } [|\neg\psi|] = 1$
$\Leftrightarrow [|\neg\varphi \text{ AND } \neg\Psi|]_v = 1$

MODUS PONENS (Regola d'Inferenza)

Nella logica, il modus ponens (MP), accorciamento del latino modus ponendo ponens ("modo che afferma", lett. "modo che pone con l'aver posto")

$$\overset{1}{(\Gamma \models \alpha \to \beta} \text{ AND } \overset{2}{\Gamma \models \alpha)} \Rightarrow \Gamma \models \beta$$

|

1) $\forall v.\ ([|\Gamma|] = 1 \Rightarrow [|\alpha \to \beta|] = 1)$

&

2) $\forall v.\ [|\Gamma|] = 1 \Rightarrow [|\alpha|] = 1$

1) $\Leftrightarrow \forall v.$ $\mathbf{[|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow ([|\alpha|]_v = 1 \Rightarrow [|\beta|]_v = 1)}$ **a => b => c** = **(a & b) => c**

$\Leftrightarrow \forall v.\ \mathbf{([|\Gamma|]_v = 1\ \&\ [|\alpha|]_v = 1) \Rightarrow [|\beta|]_v = 1}$

$\Leftrightarrow \forall v.\ \mathbf{([|\Gamma|]_v \neq 1 \text{ OR } [|\alpha|]_v = 0) \text{ OR } [|\beta|]_v = 1}$

2) $\Leftrightarrow \forall v.\ ([|\Gamma|] = 1 \Rightarrow [|\alpha|] = 1) \Leftrightarrow \forall v.\ [|\Gamma|] \neq 1 \text{ OR } [|\alpha|] = 1$

$\forall v.\ \overset{2}{\mathbf{[|\Gamma|] \neq 1} \text{ OR } [|\alpha|] = 1}$ **AND** $\overset{1}{(\mathbf{[|\Gamma|]_v \neq 1} \text{ OR } [|\alpha|]_v = 0) \text{ OR } \mathbf{[|\beta|]_v = 1}}$

Voglio arrivare a -> $\forall v.\ [|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow [|\beta|]_v = 1$ = $\mathbf{\Gamma \models \beta}$

$\forall v.\ \mathbf{([|\Gamma|]_v \neq 1 \text{ OR } [|\beta|]_v = 1)}$

Se vero => ✅ (che $\mathbf{[|\Gamma|] \neq 1}$ **sia vero)**
Se falso => è vero $[|\beta|]_v = 1$

Il Modus Ponens è un argomento di inferenza valido nella logica proposizionale. È una delle regole di inferenza più fondamentali e viene spesso utilizzato nelle dimostrazioni e nei ragionamenti logici. La forma generale del Modus Ponens è la seguente:

1. Se `P` è vero.
2. Se `P` implica `Q`.

Allora possiamo concludere che `Q` è vero.

In simboli, se abbiamo `P→Q` (leggi: "P implica Q") e `P` è vero, allora possiamo affermare che `Q` è vero.

$\Gamma, \neg\alpha \models \bot \Rightarrow \Gamma \models \alpha$ **PRINCIPIO RAA (Reductio ad Absurdum)**

$\Delta \models \bot$ $[|\bot|]_v = 0$ (Falso Sintattico = Falso Semantico)

$\forall v.\ [|\Delta|]_v = 1 \Rightarrow [|\bot|]_v = 1$
$\Leftrightarrow$ **$[|\Delta|]_v \neq 1$** OR **$[|\bot|]_v = 1$ X**

Essendo che Il falso non può essere il vero semantico, posso dire che esiste una formula gamma dentro delta tale che la sua valutazione semantica sia uguale a 0.

$\forall v.\ \exists \gamma \in \Delta$ t.c. **$[|\gamma|]_v = 0$** $\Delta \models \bot$
Δ è insoddisfacibile

Se $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ insoddisfacibile allora Γ segue α

La dimostrazione per assurdo è una tecnica logica utilizzata per dimostrare la verità di un'affermazione dimostrando l'ipotesi contraria porta ad una contraddizione o ad un risultato impossibile. In altre parole, si assume temporaneamente che l'affermazione da dimostrare sia falsa e si cerca di dimostrare che questa assunzione porta ad una situazione impossibile o illogica.

Il procedimento della dimostrazione per assurdo segue generalmente questi passaggi:

1) Si assume che l'affermazione da dimostrare (chiamiamola P) sia falsa. Quindi si suppone ¬P.
2) Si utilizzano le regole della logica per eseguire passi logici e deduzioni basati sull'assunzione ¬P.
3) Si giunge ad una conclusione che è chiaramente contradditoria o impossibile.
4) **INFERENZA** Poiché l'assunzione
contraria conduce ad una contraddizione, si conclude che l'affermazione originale P, sia vera.

ESEMPIO

Voglio dimostrare che rad(2) sia irrazionale.

Provo a dimostrare che rad(2) sia razionale, giungendo ad una conclusione impossibile o illogica. Pertanto, rad(2) è irrazionale.
--

Dire "Non Alpha" è come dire che alpha implica il falso.

$$\neg\alpha \overset{\textbf{def}}{\Leftrightarrow} \alpha \to \bot$$

(*) $\Gamma, \alpha \models \beta \Rightarrow \Gamma \models \alpha \to \beta$

$\Gamma, \neg\alpha \models \bot$
(*) $\Rightarrow \Gamma \models \neg\alpha \to \bot$

$\Gamma \models \neg\neg\alpha$
$\forall v. ([|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow [|\neg\neg\alpha|]_v = 1)$
$\forall v. ([|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow [|\alpha|]_v = 1)$ = $\Gamma \models \alpha$

LEZIONE LOGICA 30.10.23

DEDUZIONE

Come formalizzare dentro al sistema la nozione di "Deduzione" $\Gamma \vdash \alpha$

Dedurre -> Riuscire a dimostrare qualcosa attraverso un insieme di ipotesi

Ipotesi : ciò che posso assumere essere vero
Tesi : ciò che voglio dimostrare a partire dalle ipotesi

Sistema DEDUTTIVO regole logiche che trasformano formule in altre formule seguendo un paradigma

IPOTESI }
D }} **Dimostrazione**(generico in matematica)**/Derivazione**(linguaggio formale)
TESI }

SISTEMA di DEDUZIONE NATURALE

D (π) D_1 ... Đ den.generica

D D
α β <- fatti dimostrati

- hp(D) l'insieme delle ipotesi usate nella dim. D
- α (un'hp è anche tesi)
- Per ciascuno obiettitivo -> una regola di eliminazione
  -> Introduzione

$$\frac{\begin{matrix} D_1 & D_2 \\ \alpha & \alpha \to \beta \end{matrix}}{\beta} \Big\} D \qquad (\to E) \textbf{ MODUS PONENS}$$

α }
D } tra le hp *potrei* avere α
β }

[α]* ho utilizzato α
D α "scaricata"/discharged -> α non fa più parte delle ipotesi
β

-------------------- } Đ (-> I)*
α -> β

hp (Đ) = hp(Đ) \ {α}

α, β ... δ, α ...
D
ɣ
(quando scarico α devo scaricare tutte le sue occorrenze)

[β]
D
-------- ->I **INDEBOLIMENTO** "lego" la verità di α a quella di β anche se non a
α -> β avevo α

$[|\beta|]_v = 1 \Rightarrow [|\alpha \to \beta|]_v = 1$
$[|\alpha|]_v = 0$ OR **$[|\beta|]_v = 1$**
?

- α, β
- compongo D_1 ... D_k attraverso le regole le regole (->E, ->I)
- nient'altro è derivazione

ESERCIZIO 1

|- -> Derivabilità

|- α -> α (O elimino l'implica o l'introduco)

$(*)[\alpha]^1$
------ $\to I^1$
α -> α

(*) α è sia ipotesi che conclusione di D

[ɣ]*
.
.
β
------- -> I* Introduzione dell'implica
ɣ -> β

ESERCIZIO 2

|- α -> (β -> α)

$[\alpha]^1$
------ -> I
β -> α (indebolimento)

-------------- -> I^1
α -> (β -> α)

Abbiamo introdotto due volte grazie alla regole dell'introduzione

Alla fine della derivazioni tutte le ipotesi devono essere scaricate.

MODUS PONENS

(α -> β)   α
-------------------- ->E
β

ESERCIZIO 3

|- α -> (β -> γ)) -> ((α -> β) -> (α -> γ))

[(α -> (β -> γ))]^3 [α]^1 [α]^1 [α -> β]^2
------------------------ ->E   --------------------------------- -> E
(β -> γ)   β
-- ->E
γ
-------------- ->I^1
α -> γ δ_1
----------------------- ->I^2
δ^2 (α -> β) -> (α -> γ) δ_1
--------------------------------- ->I^3
(α -> (β -> γ)) -> ((α -> β) -> (α -> γ))

LOGICA APPUNTI 31.10.23

|- α (α è un teorema)
se esiste una derivazione D
t.c. hp(D) = 0 } ho cancellato ogni ipotesi nel processo deduttivo

CONNETTIVO AND (&) REGOLE!

D_1 D_2
α   β
----------- &I
α & β

D
α & β

```
------------&E
     α

     D
   α & β
------------&E
     β
```

ES.5 fatto da casa

|- (φ -> ψ) -> ¬(φ & ¬ψ)

```
          [φ & ¬ψ]^1
         ------------&E
[φ -> ψ]^2   φ          [φ & ¬ψ]^1
----------------MP      ------------- &E
      ψ                      ¬ψ
------------------------------------
                   ⊥
-------------------------------------- ->I^1
             (φ & ¬ψ) -> ⊥
--------------------------------------- ->I^2
        (φ -> ψ) -> ¬(φ & ¬ψ)
```

\\

|- α <-> ¬¬α

|- α -> ¬¬α
|- α -> (α -> ⊥) -> ⊥

```
[α]^2      [α -> ⊥]^1
----------------- ->E
          ⊥
------------------ ->I^1
  (α -> ⊥) -> ⊥
------------------------ ->I^2
 α -> (α -> ⊥) -> ⊥
 α -> ¬¬α
```

Proviamo a svolgerlo dall'altra direzione...

|- ¬¬α -> α
(α -> ⊥) -> ⊥ -> α

```
 D                EX FALSO QUOD LIBET!      |- ⊥ -> α
 ⊥
----- ⊥^1                                          [⊥]
  α                                         --------- ⊥
```

$$\frac{\alpha}{\perp \to \alpha} \to I$$

\+ dimostrazione per assurdo

RAA (Reductio ad Absurdum)

$$\frac{\begin{matrix}[\neg\alpha]^* \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\alpha}\ RAA^*$$

Voglio dimostrare P

1) Assumo che P sia falso
2) Se da 1) arrivo ad una contraddizione allora P è vera

$$\frac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \perp\end{matrix}}{\neg\alpha\ (\alpha \to \perp)} \to I \qquad \neq \quad RAA$$

$\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\alpha]^2 \qquad [\neg\alpha]^1}{\perp} \to E}{\alpha}\ RAA^1}{\neg\neg\alpha \to \alpha} \to I^2 \qquad\qquad (\alpha \to \perp) \to \perp$$

$\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha]^1 \qquad [\neg\alpha]^1\ (\alpha \to \perp)}{\perp}}{\beta}\ \text{EX FALSO}}{\neg\alpha \to \beta} \to I^1}{\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)} \to I^2$$

EX FALSO (**l'ex falso non ha bisogno di scaricare niente**)

{->, &, ⊥} BASE COMPLETA

α
RAA   equivale   ------------------
                         α OR ¬α

PRINCIPIO DI TERZO ESCLUSO (Tertium Non Datur) (PEM [Excluded Middle])

DISGIUNZIONE

α OR β

   α

α OR β

   α

β OR α

ES α -> α OR β

  [α][1]
--------- OR I
α OR β
--------- ->I[1]
α -> α OR β

PER CASA

α   **β**
|- (α OR β) -> (α OR β) OR ɣ

   [α OR β][1]
------------------ OR I
(α OR β) OR ɣ
------------------ ->I[1]
(α OR β) -> (α OR β) OR ɣ

\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\

|- α AND β -> α OR β

[α AND β][1]
----------- &E
   α
------------ OR I
α OR β
----------- ->I
α AND β -> α OR β

LOGICA APPUNTI 06.11.23

Regole OR Eliminazione

D: α β
D_1 D_2
α OR β γ γ
------------------------------ OR E*
γ
------------------ ->I
(α OR β) -> γ

Verde: ragionamento aggiuntivo

RAGIONAMENTO PER CASI

1) P => R
2) Q => R **(1) + (2)**
P OR Q => R

Scritto con sintassi della conseguenza logica...

$\Gamma, \alpha \models \gamma \;\&\; \Delta, \beta \models \gamma \;\&\; \Sigma \models \alpha$ OR β
=> $\Gamma, \Delta, \Sigma \models \gamma$

$\Sigma = \{\alpha$ OR $\beta\}$

$\Gamma, \alpha \models \gamma \;\&\; \Delta, \beta \;\&$ **α OR $\beta \models \alpha$ OR β (Tautologia)**

=> Γ, Δ, α OR $\beta \models \gamma$

$[|\alpha$ OR $\beta|]_v = 1$

E' vero che

$\models \alpha$ OR β => $\models \alpha$ OR $\models \beta$ NO!!

$\models \alpha$ OR β

<=> $\forall v.\ [|\alpha$ OR $\beta|]_v = 1$
<=> $\forall v.\ ([|\alpha|]_v = 1$ OR $[|\beta|]_v = 1)$

$\alpha = P$ $\beta = \neg\alpha$

$\models P$ OR $\neg P$

<=> ∀v. (v(P) = 1 OR v(P) = 0) **SEMPRE VERO**

Ma se la spezzo...
|= P <=> ∀v. v(P) = 1 NO!
|= ¬P <=> ∀v. v(P) = 0 NO!

Allora... ragionamento per casi...

caso 1 **caso 2**
D: α β
D_1 D_2
α OR β γ γ
------------------------------ OR E*
γ
------------------ ->I
(α OR β) -> γ

Per dimostrare α OR β -> γ devo trovare D_1 e D_2 scaricare le assunzioni

ESERCIZIO 1
|- α OR β -> β OR α

$[α]^1$ $[β]^1$
----------ORI$_2$ -----------ORI$_2$
$[α \text{ OR } β]^2$ β OR α(γ) β OR α(γ)
--- OR E^1
β OR α
--- ->I^2
(α OR β) -> (β OR α)

ESERCIZIO 2

|- α OR β -> α OR (β OR γ)

$[β]^1$
----------------- OR I_1
$[α]^1$ (β OR γ)
------------------- OR I_1 --------------------- OR I_2
$[α \text{ OR } β]^2$ α OR (β OR γ) α OR (β OR γ)
-- OR E^1
α OR (β OR γ)
---------------------------------- ->I^2
α OR β -> α OR (β OR γ)

ESERCIZIO 3

|- ¬ɑ OR ¬β -> ¬(ɑ AND β)

```
                    [ɑ AND β]^1                               [ɑ AND β]^2
                    ------------                              --------------
                          ɑ            [¬ɑ]^3                      β              [¬β]^3
                    ------------------------ MP ->E            -------------------------- MP ->E
                                ⊥                                         ⊥
                    ------------------------ ->I^1            -------------------------- ->I^2
[¬ɑ OR ¬β]^4          ¬(ɑ AND β)                                    ¬(ɑ AND β)
--------------------------------------------------------------------------------------------- OR E^3
                                    ¬(ɑ AND β)
                              ------------------------------- ->I^4
                              ¬ɑ OR ¬β -> ¬(ɑ AND β)
```

NON POSSO APPLICARE LE REGOLE DELL'IMPLICA SULLO STESSO RAMO!!

```
¬ɑ OR ¬β               ¬(ɑ AND β)
---------------------------------------- NO
   ¬ɑ OR ¬β  -> ¬(ɑ AND β)
```

|- ɑ OR ¬ɑ TND PEM (Terzo Escluso)

```
                        ------------
[¬(ɑ OR ¬ɑ)]^2       ɑ OR ¬ɑ
---------------------------------- MP ->E
               ⊥
---------------------------- ->I^1
         ɑ OR  ¬ɑ                   [¬(ɑ OR ¬ɑ)]^2
------------------------------------------------------- ->E
                             ⊥
--------------------------------------------------- RAA^2
                        ɑ OR ¬ɑ
```

REMINDER RAA

```
[¬ɑ]*
.
.
⊥
--- RAA*
ɑ
```

ESERCIZI DA FARE A CASA 07/11/2023

ESERCIZIO 1

|- (¬ψ -> ¬φ) -> (φ -> ψ)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi \to \neg\varphi]^3 \quad [\neg\psi]^1}{\neg\varphi}\;\text{MP} \to E \qquad [\varphi]^2}{\bot}\;\to I}{\psi}\;\text{RAA}^1}{\varphi \to \psi}\;\to I^2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}\;\to I^3$$

ESERCIZIO 2

|- (φ AND ¬φ) -> ⊥

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \text{ AND } \neg\varphi]^1}{\varphi} \qquad \dfrac{[\varphi \text{ AND } \neg\varphi]^1}{\neg\varphi}}{\bot}}{(\varphi \text{ AND } \neg\varphi) \to \bot}$$

LEZIONE LOGICA 07/11/2023

(Questa lezione recuperala anche sul quaderno)

<u>Esercizio guidato</u>

|- $\overset{\alpha}{(\varphi \text{ AND } \psi)}$ OR ς -> $\overset{\beta}{(\varphi \text{ OR } \varsigma) \text{ AND } (\psi \text{ OR } \varsigma)}$

$$\dfrac{[\varphi \text{ AND } \psi]^1}{\varphi}\;\&E \qquad\qquad [\varsigma]^1$$

-------------OR I   ---------- OR I

[φ AND ψ OR ς]^{3} φ OR ς   φ OR ς   φ AND ψ OR ς   ψORς ψORς

-- OR E^{1} --ORE

φ OR ς   ψ OR ς

--- &I

(φ OR ς) AND (ψ OR ς)

--- ->I^{3}

(φ AND ψ) OR ς -> (φ OR ς) AND (ψ OR ς)

ALTRI ESERCIZI FATTI A CASA

ES1

|- (φ -> ψ) -> ¬(φ AND ¬ψ)

[φ AND ¬ψ]^{1}

[φ -> ψ]2 φ   [φ AND ¬ψ]^{1}

----------------   -----------------

ψ   ¬ψ

⊥

------------ ->I^{1}

¬(φ AND ¬ψ)

---------------------------------- ->I^{2}

(φ -> ψ) -> ¬(φ AND ¬ψ)

ES2

|- (φ -> ψ) AND (φ -> ¬ψ) -> ¬φ

(φ -> ψ) AND (φ -> ¬ψ)   (φ -> ψ) AND (φ -> ¬ψ)

-------------------------------   -------------------------------

(φ -> ψ)   [φ]^{1} (φ -> ¬ψ)   [φ]^{1}

--   --

ψ   ¬ψ

⊥

----------------------------------- ->I^{1}

¬φ

----

s(φ -> ψ) AND (φ -> ¬ψ) -> ¬φ

LOGICA 14.11.23

LEMMA1 (o anche Lemma di Soundness)

$\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \Rightarrow hp(D) \models \varphi$

LEMMA2

$\Sigma \subseteq \Gamma \qquad \Sigma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

TH.[SOUNDNESS] $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

Se io posso da Γ derivare φ allora φ è conseguenza logica di Γ

DIM

se $\Gamma \vdash \varphi \overset{def}{\iff}$ esiste $\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array}$ e $hp(D) \subseteq \Gamma$

=> LEMMA1 $hp(D) \models \varphi$
=> LEMMA2 $\Gamma \models \varphi$

\\

$\alpha \rightarrow \beta \iff \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$

$\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \models \alpha$

$\Gamma \not\models \alpha \Rightarrow \Gamma \nvdash \alpha$

$\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$

$\not\models \alpha \Rightarrow \nvdash \alpha$

Contromodello => Prova di **NON** derivabilità

Trovare qualcosa di non derivabile è molto più difficile rispetto a trovare un contromodello (Per capire se una formula non è derivabile, dovrei trovare ogni singola formula, mentre nel contromodello basta presenterne una che valga)

COMPLETEZZA $\Gamma \models \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$

Prima di spiegare il concetto di completezza, dobbiamo fare due passi importanti:

INSIEME CONSISTENTE

- **Si dice consistente (oppure coerente o non-contradditorio)**
  Se $\Gamma \nvdash \perp$
- **(dualmente) Γ è inconsistente $\Gamma \vdash \perp$**

MASSIMALE

<u>Ordinamento parziale</u>

insieme relazione
<A, R> R $\subseteq$ A x A ord. Parziale

1) <u>Riflessività</u>

$\forall a \in A$ aRa

2) <u>Transitività</u>

$\forall$ a,b,c $\in$ A   aRb & bRc => aRc

3) <u>Antisimmetria</u>

$\forall$ a, b $\in$ A   aRb & bRa => a=b

<A, R> sia o.p (po = partial order)   R -> qualsiasi tipo di relazione >, <, $\in$...

1) m $\in$ A è massimo se $\forall$ a $\in$ A   aRm

2) m $\in$ A è massimale se
    $\forall a \in A$ mRA => m=a
  non esiste $a \in A$ t.c ($\alpha \neq$ m e mRa)

x -> P(x) $2^x = \{y \mid y \subseteq x\}$

x = {7, 8, 9, 10}

N a $\subseteq$ P (N)

<A, $\subseteq$> ord. Parziale (po)

massimo
A = { {4}, {2}, {4,2} }   a $\subseteq$ M, b $\subseteq$ M, M $\subseteq$ M

massimali
A = { {4}, {2} }   non posso trovare nulla di più grande rispetto alla relazione

P= { {n} | n $\in$ N }   P = { {0}, {1}, {2} ... }
<P, $\subseteq$> p.o. INFINITI MASSIMALI   il massimale può NON essere unico

\\\

ora che abbiamo introdotto il concetto di insieme consistente e massimale:

<A, $\subseteq$> p.o.   A $\subseteq$ P (PROP)
$\Gamma \vdash \perp$
$\Gamma \nvdash \perp$

[TH0] *sono equivalenti* ->

(1) $\Gamma \vdash \perp$ (2) $\forall\varphi$ $\Gamma \vdash \varphi$ (3) esiste φ . $\Gamma \vdash \varphi$ & $\Gamma \vdash \neg\varphi$

(1) => (2) => (3) => (1)

[PROVA]

1)=>2) allora esiste $\underset{\perp}{D}$ hp(D) $\subseteq$ Γ

$$\dfrac{\begin{matrix} D \\ \perp \end{matrix}}{\varphi}\perp_i \quad \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \qquad \square$$

(2) => (3) immediato

(3) => (1)

$\Gamma \vdash \varphi \overset{\text{def. di derivabilità}}{\iff}$ esiste $\underset{\varphi}{D_1}$ hp(D) $\subseteq$ Γ

$\Gamma \vdash \varphi \iff$ esiste $\underset{\neg\varphi}{D_2}$ hp(D) $\subseteq$ Γ

$$\dfrac{\begin{matrix} D_1 \\ \varphi \end{matrix} \qquad \begin{matrix} D_2 \\ \neg\varphi \end{matrix}}{\perp} \to E \qquad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \perp \qquad \square$$

[PROP1]

se sono inconsistente sono anche insoddisfacibile

$\Gamma \mid\!- \varphi \iff \forall v.[|\Gamma|]_v \neq 1$ (esiste $v.[|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow \Gamma \nvdash \bot$)

PROVA

se $\Gamma \mid\!- \varphi \iff$ esiste $\underset{\varphi}{D_1}$ $hp(D) \subseteq \Gamma$

(usiamo la soundnes poiché lega semantica logica e sintassi)

$$\overset{\text{soundness}}{\Rightarrow} \quad \Gamma \models \bot \iff$$
$$\forall v.[|\Gamma|]_v = 1 \Rightarrow [|\bot|]_v = 1 \iff$$
$$[|\Gamma|] \neq 1 \text{ OR } [|\bot|] = 1$$

□

\\\\\\\\\\\\\\

INSIEME MASSIMALE CONSISTENTE

Δ è massimale e consistente

SE E SOLO SE

a) $\Delta \nvdash \bot$ b) se $\Delta \subseteq \Sigma$, $\Sigma \nvdash \bot$
$\Rightarrow \Delta = \Sigma$

Ci sono/esistono insiemi massimali consistenti?

Sì => dobbiamo dimostrarlo

$C^{\text{consistenza}} = \{\Gamma \mid \Gamma \nvdash \bot\}$ $\langle C, \subseteq \rangle$

=> proviamo che ha massimali

[TH1] se $\Gamma \nvdash \bot$ allora esiste Δ m.c t.c. $\Gamma \subseteq \Delta$

PROVA

2 parti → <u>P1</u> costruisco una successione di insieme consistenti
→ <u>P2</u> definiamo un insieme
- $\Gamma^* \nvdash \bot$

- Γ^* massimale

PARTE 1 – Fissiamo un enumerazione di tutte le formule:

$\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k \dots$

- definiamo la successione $(\Gamma_i)_{i \subseteq N}$ di insiemi consistenti di formule:

induzione

$\Gamma_0 = \Gamma$ (consistente per costruzione per ipotesi)

passo induttivo

$\Gamma_{i+1} = \{ \Gamma_i \quad + \{\varphi_i\}$ se $\Gamma_i, \varphi_i \not\vdash \perp$

$\{ \Gamma_i \quad$ altrimenti

vale che

1) $\forall_i\ \Gamma_i \subseteq \Gamma_{i+1}$ (non decrescente) per costruzione

2) $\forall_i\ \Gamma_i \not\vdash \perp$ si prova per induzione

induzione

$\Gamma_0 = \Gamma \qquad \Gamma_0 \not\vdash \perp$

passo

$\Gamma_{i+1} = \{$ se $\Gamma_{i+1} = \Gamma_i$ allora $\Gamma_{i+1} \not\vdash \perp$

$\{ \Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \qquad \Gamma_i \cup \{\varphi_i\} \not\vdash \perp$ (costruzione)

unione infinita

$\Gamma^* = \cup\, \Gamma_i$

PARTE 2

Si dimostra

1) $\Gamma^* \not\vdash \perp$

2) Γ^* è MC (non posso aggiungere niente di più grande)

1) $\Gamma^* \mid\!\text{-} \perp$ <=> esiste $\begin{array}{c} D \\ \perp \end{array}$ $hp(D) \subseteq \Gamma^*$

$hp(D) = \{\Psi_1 \dots \Psi_k\} \subseteq \Gamma^*$

finite

$\forall_j \in [1, \dots n]\ \Psi_j \in \Gamma_{i_n}$

Consideriamo max = $\{i_1 \dots i_n\}$ = massimo

$\Gamma_{i1} \subseteq \Gamma_m \dots \Gamma_{in} \subseteq \Gamma_{im}$ quindi

hp(D) $\subseteq \Gamma_m$ quindi Γ_m |- $\perp$
$\perp$

MA per costruzione e per induzione Γ è consistente

=> assurdo/impossibile => $\Gamma^* \nvdash \perp$

2) Γ* è mc -> consistente già dimostrato quindi
Γ* è massimale

supponiamo che esista un insieme più grande (per assurdo)
supponiamo che esista $\Delta \neq \Gamma^*$ t.c. $\Delta \nvdash \perp$ e $\Gamma^* \subseteq \Delta$
devo trovare una formula $\varphi_i \in \Gamma^*$ & $\varphi_i \in \Delta$
avremo almeno una $\Psi \in \Delta / \Gamma^*$

<u>Per l'enumerazione</u> avrò un certo indice k t.c $\Psi = \varphi_k$
esiste K t.c. $\Psi = \varphi_k$

per costruzione della successione di insiemi Γ_i

- $\varphi_k \in \Gamma_{k+1}$ (Γ_k, φ_k |- $\perp$)

e dato che $\Gamma_k \cup \{\varphi_k\} \subseteq \Delta$ avremo

Δ |- $\perp$ => impossibile poiché inconsistente

$\varphi_k \in \Gamma^*$ => non posso aggiungere niente a Γ*

-> Poiché Γ* = Δ

[TH2] Γ è mc e Γ |- α => α ∈ Γ (Chiusura per derivabilità)

mc = massimale consistente

se Γ è mc e Γ |- α <=> α ∈ Γ

<u>PROVA</u>

Supponiamo che $\alpha \notin \Gamma$
allora $\Gamma \cup \{\alpha\}$ |- $\perp$ (Poiché diventerebbe inconsistente)
D t.c hp(D) $\subseteq \Gamma \cup \{\alpha\}$
$\perp$

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\\ D\\ \perp\end{array}}{\neg\alpha}\ \to I$$

quindi Γ |- ¬α ma per hp Γ |- ¬α } per TH0 abbiamo che Γ |- $\perp$

Assurdo => $\alpha \in \Gamma$ □

[TH3] Γ è mc => $\forall\varphi$. $\varphi \in \Gamma$ oppure $\neg\varphi \in \Gamma$

$\alpha \to \beta = \neg\alpha$ OR β

Γ è mc => $\forall\varphi$. $\underline{\varphi \in \Gamma \text{ oppure } \neg\varphi \in \Gamma}$
dim. Equiv. $\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \neg\varphi \in \Gamma$

PROVA

se $\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma, \varphi \vdash \bot \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi \Leftrightarrow$ per TH2 $\neg\varphi \in \Gamma$

[TH4] Γ mc => :
a) $\varphi \,\&\, \Psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma \,\&\, \Psi \in \Gamma)$
b) $\varphi \to \Psi \in \Gamma \Leftrightarrow (\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Psi \in \Gamma)$

PROVA

a) $\varphi \,\&\, \Psi \in \Gamma \overset{\textbf{TH2}}{\Leftrightarrow} \Gamma \vdash \varphi \,\&\, \Psi$ sse
per regole di DN (deduzione naturale) $\underline{\Gamma \vdash \varphi \,\&\, \Gamma \vdash \Psi}$
<=> TH2
$\varphi \in \Gamma \,\&\, \Psi \,\&\, \Gamma$

b) $\overset{A}{\varphi \to \Psi \in \Gamma} \Leftrightarrow (\overset{B}{\varphi \in \Gamma} \Rightarrow \overset{C}{\Psi \in \Gamma})$

(=>) A => B => C

A) $\varphi \to \Psi \in \Gamma$ => $\Gamma \vdash \varphi \to \Psi$ } per (->E) $\Gamma \vdash \Psi \Leftrightarrow \Psi \in \Gamma$
B) $\varphi \in \Gamma$ => $\Gamma \vdash \varphi$ }

(<=) (B=>C) => A

due sottocasi

Caso 1 $\varphi \in \Gamma$ ("B" è vero) **PER CASA**

Caso 2 $\varphi \notin \Gamma$

$\varphi \notin \Gamma \Leftrightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$ ($\varphi \notin \Gamma \Leftrightarrow$ TH3 $\neg\varphi \in \Gamma \Leftrightarrow$ TH2 $\Gamma \vdash \neg\varphi$)

=> $\Gamma, \varphi \vdash \bot$
=> $\Gamma, \varphi \vdash \Psi \to$

$$\cfrac{\begin{matrix}\varphi \\ D \\ \bot\end{matrix}}{\Psi}\ \bot_i$$

--------- ->I
$\varphi \to \Psi$

=> $\Gamma \vdash \varphi \to \Psi$ <=> TH2 **$\varphi \to \Psi \in \Gamma$**

[TH5] Γ MC => esiste v.$[|\Gamma|]_v = 1$

PROVA

sia v. t.c. **$v(p) = 1 \iff p \in \Gamma$ (definizione di valutazione)**
è accettabile $v(\neg p) = 0$ quando $\neg p \notin \Gamma$ (mc)

//
Dimostrazione per induzione sul rango di φ

BASE φ è atomica

-> $\perp$ $[|\perp|]_v = 1 \iff \perp \in \Gamma \iff [|\perp|]_v = 0 \iff \perp \notin \Gamma$
-> s. Prop. Per costruzione

PER CASA

$\varphi = \Psi$ AND γ

$\varphi =$

COR1 se $\Gamma \nvdash \perp$ allora è soddisfacibile

Uso TH5 e TH1

Se $\Gamma \nvdash \perp$ allora esiste v. $[|\Gamma|]_v = 1$

PROVA

$$\Gamma \nvdash \perp \overset{TH1}{\Rightarrow} \text{esiste } \Delta \,.\, \Gamma \subseteq \Delta,\ \Delta \text{ MC}$$
$$\overset{TH5}{\Rightarrow} \text{esiste v. } [|\Delta|]_v = 1 \Rightarrow \text{esiste v. } [|\Gamma|]_v = 1 \qquad \square$$

<u>TH6</u> COMPLETEZZA $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

ragionamento per contrapposizione
$\alpha \to \beta = \neg\beta \to \neg\alpha$

$\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma \nvDash \varphi$

COR1
$\Gamma \nvdash \varphi \Rightarrow \Gamma, \neg\varphi \nvdash \perp \Rightarrow$ esiste v.$[|\Gamma|]_v = 1$ & $[|\neg\varphi|]_v = 1 \iff$ esiste v. $[|\Gamma|]_v = 1$ & $[|\varphi|]_v = 0 \Rightarrow$ **$\Gamma \nvDash \varphi$** □

se $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \models \varphi$

\\

LOGICA APPUNTI 21.11.23

- **$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$**
- **Si possono estendere i teoremi al sistema completo con OR**

$\perp$ (bottom) $\top$ (top) $\Rightarrow$ $\perp \to \perp$

$$\frac{[\perp]^1}{\perp \to \perp} \to I^1$$

LOGICA DEL PRIMO ORDINE (dei Predicati)

$\forall$n. (**Se** n è pari **allora** esiste m dispari t.c. m>n)

$\forall$, $\exists$, => + esprimere proprietà e relazione + funzioni

x insieme
$P \subseteq X$ proprietà

N, $\geq$, +, x ...

Nozione di variabile

LINGUAGGIO DEL PRIMO ORDINE

- **Connettivi OR, &, ->, $\perp$ (¬)**
- **Quantificatori** $\forall$, $\exists$
- **variabili x, y, z ... Var (insieme delle variabili)**
- **R_0, R_1 ... relazioni (P, Q)**

$\forall n \in N \setminus \{0\}$ insieme R^n di rel. n_arie

$\forall n \in N \setminus \{0\}$ insieme R^1 di rel. 1_arie (quando coinvolge un solo elemento è una proprietà)

$\forall n \in N \setminus \{0\}$ insieme R^2 di rel. bin_arie

- **$\forall n \in N$ F^n di funzioni** $\quad {}^n$ -> arietà
  f_1 ... f_n simboli per funzioni

- **simboli ausiliari** "(" ")" "," "."
- **=** relazione binaria che non è c
  he già inclusa nelle relazioni R^2
  $t = u \quad \neq \quad \varphi \equiv \psi$

- C costanti $\quad c_0, c_1$ ...

  $R = \bigcup_i R^i \qquad F = \bigcup_i F^i$

[Entità sintattiche]

* ->Termini
* ->Formule

<u>TERMINI</u>

L'insieme TERM dei termini è il più piccolo insieme x t.c.

1) Var $\in$ X

2) C $\in$ X

3) Se t_1 .... $t_n \in X$ e f è un simbolo di funzione di arietà n
$f(t_1 \ldots t_n) \in X \qquad + \in F^2$
$4 \in C \in X \Rightarrow F(4,5) \in X$

$c \in C \qquad x_0, x_1 \ldots$ f di arietà 2 g di arietà 1

1) $c \in$ TERM
2) $x_{1000} \in$ TERM
3) $f(c, x_4) \in$ TERM
4) $g(x_1) \in$ TERM
5) $g(x_1, x_2) \notin$ TERM
6) $f(g(x_2), g(c)) \in$ TERM

<u>FORMULE</u>

----- RECUPERA DA MOODLE

\\\

<u>SOTTOTERMINI</u>

$ST(e) = \{e\}$
$ST(x) = \{x\}$
$ST(f(t_1 \dots t_n)) = ST(t_1) \cup \dots \cup ST(t_n) \cup \{ f(t_1 \dots t_n) \}$

<u>SOTTOFORMULE</u>

$SF(\bot) = \{ \bot \}$
$SF(t_1 = t_2) = \{t_1 = t_2\}$
$SF(P(t_1 \dots t_n)) = \{P(t_1 \dots t_n)\}$
$SF(\varphi \circ \psi) = SF(\varphi) \cup SF(\varphi \circ \psi)$ $\qquad$ $\circ \in \{ OR, AND, -> \}$
$SF(\forall x. \varphi) = SF(\varphi) \cup \{ \forall x. \varphi \}$
$SF(\exists x. \varphi) = SF(\varphi) \cup \{ \exists x. \varphi \}$

$t \in$ TERM si dice chiuso se $FV(t) = 0$
$\varphi \in$ FORM si dice chiusa se $FV(\varphi) = 0$ } ENUNCIATO

ENUNCIATO = UNA FORMULA CHE NON HA VARIABILI LIBERE
(SENT = Sentence = Enunciati)

****

<u>Due tipi di vincoli</u> $\qquad$ $\varphi[t/x]$

1) Non posso sostituire variabili legate
2) Non tutti i termini vanno bene (non devo legare nuove variabili)

$\varphi = \forall x. R(x, y) \in$ FORM $\qquad$ $t = f(x) \in$ TERM
$\varphi[f(x)/y] = \cancel{\forall x. R(x, f(x))}$ NON POSSIAMO ACCETTARLO, sto legando nuove occorrenze

termini liberi per una var in una formula

t libero per x in φ

(termine libero per una variabile in una formula)

se dopo la sostituzione φ[t/x] tutte le occorrenze delle variabili in t sono libere

φ[t/x] è corretta se dopo la sostituzione, tutte le occorrenze delle variabili in t sono libere.

x è libera per sè stessa? Sì (in φ)

ESEMPIO

R(_,_)

$\varsigma = \forall x. (R(z, x)) [f(z)/z] \equiv \forall x. (R(f(z), x))$ ✅
$\forall x. (R(z, x)) [f(x)/z] \equiv \forall x. (R(f(x), x))$ ❌
$\forall x. (R(z, x)) [f(z)/x] \equiv \forall x. (R(z, f(z)) \equiv \varsigma$

//

LOGICA APPUNTI 04.12.23

//posso rimpiazzare solo le variabili libere

$\exists x. (y < x) [x/y] = \exists x. (x < x)$ ❌

Definizione [sostituzione] (tramite induzione) φ[t/x] con t libero per x in φ

termini
$x[t/x] = t$
$y[t/x] = t$
$c[t/x] = c$
$f(t_1 \dots t_n) [t/x] = f(t_1[t/x] \dots t_n[t/x])$

formule

1) φ atomica 1.1 $\bot[t/x] = \bot$
1.2 $R(t_1 \dots t_n) [t/x] = R(t_1[t/x] \dots t_n[t/x])$
1.3 $(t_1 = t_2) [t/x] = t_1[t/x] = t_2[t/x]$

2) $(\varphi \text{ o } \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \text{ o } \psi[t/x]$
3) $\varphi = Qy . \psi$ $\qquad Q \in \{\exists, \forall\}$
$\varphi[t/x] = \{\varphi \quad x = y$
$\qquad \{Qy . (\psi[t/x])$

Deduzione Naturale

$\forall$

Introduzione del per ogni

$$\frac{\begin{matrix} D \\ \varphi(x) \end{matrix}}{\forall x.\ \varphi(x)}\ \forall I \qquad x \notin FV(hp(D))\ \}\ x \text{ è generica}$$

$$\frac{\dfrac{x = 0}{\forall x.\ x = 0}\ \forall I}{x = 0 \to \forall x\ .\ x = 0}\ {\to}I \qquad \text{✗NO}$$

$$\frac{\begin{matrix} D \\ \varphi(x) \end{matrix}}{\forall y.\ y = 0} \qquad x \notin FV$$

PRIMO ESERCIZIO

Es1.

|- ($\forall x.\ .\ P(x)) \to P(x)$

Es2.

|- $\forall x.\ (\varphi \to \psi) \to ((\forall x.\varphi) \to (\forall x.\psi))$

ELIMINAZIONE DEL PER OGNI

$$\frac{\begin{matrix} D \\ \forall x.\ \varphi(x) \end{matrix}}{q(t)}\ \forall E$$

ES.10

$$\frac{\dfrac{\forall x.\ P(x)}{P(cc)}\ \forall E}{\forall x.\ P(x) \to P(cc)}\ {\to}I \qquad P \text{ unario}$$

ES2

|- ∀x. (φ -> ψ) -> ((∀x.φ) ->(∀x.ψ))

```
  [∀x. (φ -> ψ)]        [∀x. φ]
  ---------------∀E     ---------∀E
    φ -> ψ                  φ
   ------------------------------ ->E
                 ψ
            ------------ ∀I sì, posso farlo poiché rispetto i vincoli
                ∀x.ψ
         --------------------- ->I
         (∀x.φ) ->(∀x.ψ)
 ----------------------------------------- ->I
∀x. (φ -> ψ) -> ((∀x.φ) ->(∀x.ψ))
```

ES CASA)

|- ∀x. ∀y. φ(x, y) -> ∀y. ∀x. φ(x, y)

<->

|- ∀x. (φ AND ψ) -> (∀x. φ AND ∀x.ψ)

```
 ∀x. (φ AND ψ)                                    ∀x. (φ AND ψ)
 -------------------- ∀E                          -------------------- ∀E
    φ AND ψ                                          φ AND ψ
   ---------------- &E                              ---------------- &E
         φ                                                ψ
    ------------- ∀I                                 -----------∀I
      ∀x. φ                                            ∀x. ψ
     ------------------------------------------------------------------------ &I
                            ∀x. φ AND ∀x.ψ
                     -------------------------------------------- ->I
                   ∀x. (φ AND ψ) -> (∀x. φ AND ∀x.ψ)
```

|-   ∀x. (φ -> ψ(x)) -> (φ -> ∀x.ψ(x))   *con x ∉ FV(φ) (con condizione)

```
 ∀x. (φ -> ψ(x))
 -----------------
     φ -> ψ            φ
   ------------------------
            ψ
        -------------- ∀I
           ∀x. ψ          posso farlo perché (*)
        ---------------
        φ -> ∀x. ψ
  ------------------------------------
∀x. (φ -> ψ(x)) -> (φ -> ∀x.ψ(x))
```

|- ∀x. φ OR ∀x. ψ -> ∀x. (φ OR ψ) ← (?) CASA

```
                                  [∀x. φ]²              [∀x. ψ]²
                                  ------- ∀E           ----------∀E
                                     φ                    ψ
                                   ------ or I           -------- or I
                                  φ OR ψ                φ OR ψ
                                 ---------------       ----------------
[∀x. φ OR ∀x. ψ]¹                ∀x. (φ OR ψ)          ∀x. (φ OR ψ)
---------------------------------------------------------------------- or E²
                               ∀x. (φ OR ψ)
                   ------------------------------------------ ->I¹
                    ∀x. φ OR ∀x. ψ -> ∀x. (φ OR ψ)
```

//

LOGICA APPUNTI 05.12.23

|- ∀x. φ -> ∀z . (φ[z/x]) se z "fresh" = (sintatticamente nuovo) z non occorre tra i simboli di φ

z è libera per x in φ

```
     ∀x. φ
   ---------∀E
    φ[z/x]
 --------------∀I
  ∀z . (φ[z/x])
------------------------- ->I
∀x. φ -> ∀z . (φ[z/x])
```

Quantificatore Esistenziale ∃

INTRODUZIONE DEL QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

$\varphi(t)$
---------- ∃I   t libero per x in φ
$\exists x.\ \varphi(x)$

$\varphi[t/x]$

$\exists x.\ \varphi$ } se una "proprietà" vale per t, allora esiste un valore per cui vale

Esempio

R binaria, $c \in C$
$\vdash R(c,c) \to \exists x.\ R(x,x)$

$$\dfrac{\dfrac{R(c,c) \quad \to [c/x]}{\exists x.\ R(x,x)}\ \exists I}{R(c,c) \to \exists x.\ R(x,x)}\ {\to}I$$

ELIMINAZIONE DEL QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

$\exists x\ .\ \varphi(x) \equiv$ φ proprietà su N

Dire "esiste" una è disgiunzione di tutto: φ(0) OR φ(1) OR ... φ(n) OR ...
Dire "per ogni" è una congiunzione di tutto: φ(0) AND φ(1) AND ... φ(n) AND ...

$$\dfrac{\exists x\ .\ \varphi(x) \qquad \begin{matrix}[\varphi(x)]^{*} \\ D_1 \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\ \exists E^{*}$$

VINCOLI

$x \notin FV(\gamma)$
$x \notin FV(hp(D_1))$ a parte φ(x) stessa

ES1

$\vdash \exists x\ .\ (\varphi(x) \text{ AND } \psi(x)) \to \exists x\ .\varphi(x)$

$$\dfrac{\dfrac{[\exists x\ .(\varphi(x) \text{ AND } \psi(x)]^{2} \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi(x) \text{ AND } \psi(x)]^{1}}{\varphi(x)}}{\exists x\ .\varphi(x)}}{\exists x\ .\varphi(x)}\ \exists E^{1}}{\exists x\ .\ (\varphi(x) \text{ AND } \psi(x)) \to \exists x\ .\varphi(x)}\ {\to}I^{2}$$

t/x -> x/x è sempre libero per sè stesso

VERSIONE SBAGLIATA -> ❌

```
                              [φ(x) AND ψ(x)]^1
                             ---------------------
[∃x .(φ(x) AND ψ(x)]^2              φ(x)                    NO x ∈ FV(ɣ) ❌
------------------------------------------- ∃E^1
                                    φ(x)
                                -------------- ∃I
                                 ∃x .φ(x)
----------------------------------------- ->I^2
 ∃x . (φ(x) AND ψ(x)) -> ∃x .φ(x)
```

ES2

|- ∀x. φ -> ∃x .φ

```
   [∀x. φ]^1
   -------- ∀E
      φ
    ------- ∃I
    ∃x .φ
----------------- ->I^1
∀x. φ -> ∃x .φ
```

ES3

|- ∀x. φ -> ¬∀x. ¬φ

```
[∀x. φ]^2          [∀x. ¬φ]^1
--------∀E      ----------∀E
   φ                  ¬φ
 ---------------------- MP
              ⊥
 ----------------------- ->I^1
       ¬∀x. ¬φ
 ------------------------ ->I^2
 ∀x. φ -> ¬∀x. ¬φ
```

¬∀x. ¬φ = "Non è vero che per ogni valore di x, φ non vale" =
= ∃x .φ = "Esiste almeno un valore di x per cui φ vale"

ES4

|- ¬∃x .¬φ -> ∀x. φ   RAA

```
                    [¬φ]^1
                   -------- ∃I [t/x] = [x/x]
[¬∃x .¬φ]^2        ∃x .¬φ
 -----------------------
           ⊥
 --------------------- RAA^1
           φ
    --------------- ∀I
        ∀x. φ            VINCOLO RISPETTATO al momento dell'applicazione ¬φ è cancellata
 ------------------------ ->I^2
 ¬∃x .¬φ -> ∀x. φ
```

ES5

|- ¬∃x .φ -> ∀x. ¬φ

```
              [φ]^1 (*)
             ------
[¬∃x .φ]^2   ∃x .φ
------------------
         ⊥
      ------- ->I^1
        ¬φ
    ---------- ∀I
      ∀x. ¬φ (*)
   ---------------------- ->I^2
   ¬∃x .φ -> ∀x. ¬φ
```

ES6

|- (∀x. α AND ∃x .¬β) -> ∃x. (α AND ¬β)

```
                              [∀x. α AND ∃x .¬β]
                             --------------------------  &E
                                   ∀x. α
                               ------------- ∀I
                                     α              [¬β]^2
                                ---------------------------- &I
       [∀x. α AND ∃x .¬β]^1              α AND ¬β
     --------------------------- &E   -------------------   ∃I
              ∃x .¬β                  ∃x. (α AND ¬β)
       ---------------------------------------------------- ∃E^2
                       ∃x. (α AND ¬β)
       ------------------------------------------------ ->I^1
         (∀x. α AND  ∃x .¬β) -> ∃x. (α AND ¬β)
```

ES7

|- ∃x. (α -> β) -> ∃x. (α -> ∃x.β)

```
                         [α -> β]^1    [α]^2
                         ---------------- MP
                                β
                           ------------ ∃I
                              ∃x.β
                          ------------ ->I^2
                           α -> ∃x. β
                          ---------------- ∃I
[∃x. (α -> β)]^3          ∃x. (α -> ∃x.β)
---------------------------------------- ∃E^1
           ∃x. (α -> ∃x.β)
------------------------------------ ->I^3
∃x. (α -> β) -> ∃x. (α -> ∃x.β)
```

PER CASA

1) |- ∃x. φ -> φ se x non appartiene a FV(φ)
2) |- ¬∀x.φ -> ∃x. ¬φ (Servono 2 RAA)
3) |- ∀x.(φ(x)->ψ) -> (∃x. φ(x) -> ψ)   se x non appartiene a FV(ψ)
4/5) |- ∃x. (φ OR ψ) <-> (∃x.φ) OR (∃x.Ψ)

1) |- ∃x. φ -> φ

```
                [¬φ]^2    [φ]^1
                ------------- MP
                      ⊥
                ------------- RAA^2
  [∃x. φ]^3           φ
  ------------------------- ∃E^1
            φ
   ---------------- ->I^3
   ∃x. φ -> φ
```

2) $\vdash \neg\forall x.\varphi \to \exists x.\neg\varphi$

```
                        [¬φ]²
                      --------- ∃I
                       ∃x. ¬φ     [¬∃x. ¬φ]³
                     -------------------------- ->E
                                 ⊥
                            -------- RAA²
                                 φ
                            ---------- ∀I
 [¬∀x.φ]¹                         ∀x.φ
 -------------------------------
              ⊥
      -------------- RAA³
          ∃x. ¬φ
     --------------- ->I¹
  ¬∀x.φ ->   ∃x. ¬φ
```

3) $\vdash \forall x.(\varphi(x) \to \psi) \to (\exists x.\varphi(x) \to \psi)$

```
                                             [φ(x)]¹         [¬φ]²
                                             ------------------------
                                                        ⊥
                                                  ------------ RAA²
    [∀x.(φ(x)→ψ)]⁴      [∃x. φ(x)]³          φ
    -----------------∀E   -----------------------  ∃E¹
        φ(x)→ψ                    φ
      ---------------------------------  ->E
                  ψ                s
          ------------------ ->I³
            ∃x. φ(x) -> ψ
 ----------------------------------------  ->I⁴
 ∀x.(φ(x)->ψ) -> (∃x. φ(x) -> ψ)
```

4) |- ∃x. (φ OR ψ) -> (∃x.φ) OR (∃x.Ψ)

```
                                        [φ]^3                 [ψ]^3
                                       ----- ∃I              ------ ∃I
                                        ∃x. φ                 ∃x. ψ
                                   --------------------   -------------------
                [φ OR ψ]^2          (∃x.φ) OR (∃x.Ψ)      (∃x.φ) OR (∃x.Ψ)
               ---------------------------------------------------------------∨E^3
[∃x. (φ OR ψ)]^1                    (∃x.φ) OR (∃x.Ψ)
--------------------------------------------------------------- ∃E^2
                 (∃x.φ) OR (∃x.Ψ)
            -------------------------------------------- ->I^1
            ∃x. (φ OR ψ) -> (∃x.φ) OR (∃x.Ψ)
```

5) |- (∃x.φ) OR (∃x.Ψ) -> ∃x. (φ OR ψ)

```
                            [¬φ]^1    [φ]^3       [¬ψ]^2     [ψ]^4x
                             -----------          ---------------
                                  ⊥                      ⊥
                                 ---- RAA^1             ----- RAA^2
                          ∃x.φ     φ           ∃x.Ψ      Ψ
                          ------------∃E^3     ---------------∃E^4
                                φ                     ψ
                        ---------------ORI      ------------ORI
                           φ OR ψ                 φ OR ψ
                         ---------------∃I     --------------∃I
[(∃x.φ) OR (∃x.Ψ)]^5     ∃x.(φ OR ψ)          ∃x.(φ OR ψ)
------------------------------------------------------------- ORE
                      ∃x.(φ OR ψ)
         ----------------------------------------- ->I^5
        (∃x.φ) OR (∃x.Ψ) -> ∃x. (φ OR ψ)
```

\\\

STRUTTURA MATEMATICA

U = <A, R, F, C>

1) $A \neq \varnothing$ dominio (universo)
2) R insieme di relazioni su A
3) F insieme di funzioni su A
4) $C \subseteq A$ constanti

Esempio: $<N, \leq, (+,*, succ), (0,1)>$

DEF

L Struttura <-> Associa struttura a un linguaggio primo ordine

$U = <A, (\ )^U>$:
$A \neq \varnothing$, $(\ )^U$ FUNZIONE

-
a) $\forall c \in C$ -> $c^u \in A$
b) $\forall f \in F^{(k)}$, $k > 0$ -> $f^u : A^k$ -> A in F
c) $\forall R \in R^n$ -> $R^u \subseteq A^n$ in R(insieme)

SINTASSI <- $f(c_1, c_2) = c_3$
-> $c_1 + c_2$ $c_1^u = 5$, $c_2^u = 2$ -> SEMANTICA

- U Struttura Matematica
- $(\ )^u$ c^u, f^u, r^u

DEF U-valutazione è una funzione

ρ_u : Var -> |U| (dominio di $U \neq \varnothing$)
ρ_u, $x \in$ Var $a \in A$ (=|U|)
$\rho_u[a/x]$ è la U-valutazione
$\rho_u[a/x](y) = \{ \rho_u(y)\ x \neq y$ ALTRIMENTI a

DEF Interpretazione dei termini $[|\ .\ |]^u$ ^{u} = dipende dalla struttura di base che abbiamo scelto

uso $(.)^u$ e ρ_u

1) $[|c|]^u_\rho = c^u$

2) $[|x|]^u_\rho = \rho_u(x)$ (= $a \in A$)

3) $[|f(t_1...t_k)|]^u_\rho = f^u([|t_1|]^u_\rho ... [|t_k|]^u_\rho)$

ESEMPIO

$f(t_1, t_2)$ A = N

$[|t_1|]^u_\rho = 4$ $[|t_k|]^u_\rho = 2$

$(f)^u = +$

$[f(t_1, t_2)] = +(4,2) \sim 4+2$

DEF [Relazione di soddisfacibilità]

- $\rho_u \cancel{\models \bot}$
- $\rho_u \models t_1 = t \iff ([|t_1|]^u_\rho \ldots [|t_2|]^u_\rho)$
- $\rho_u \models f(t_1 \ldots t_k) \iff {}^u([|t_1|]^u_\rho \ldots [|t_k|]^u_\rho) \in R^u$
- $\rho_u \models \alpha \to \beta \iff (\rho_u \models \alpha \Rightarrow \rho_u \models \beta)$

  alternativa

  $\rho_u \not\models \alpha$ OR $\rho_u \models \beta$
- $\rho_u \models \alpha$ AND $\beta \iff \rho_u \models \alpha$ AND $\rho_u \models \beta$
- $\rho_u \models \alpha$ OR $\beta \iff \rho_u \models \alpha$ OR $\rho_u \models \beta$
- $\rho_u \models \forall x.\alpha \iff \forall a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \alpha$
- $\rho_u \models \exists x.\alpha \iff \exists a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \alpha$

<u>SCRIVIAMO</u>

<u>modello</u> - $U \models \alpha$ per $\forall \rho_u .\ \rho_u \models \alpha$ e diciamo che U è un modello di α oppure è vera in U

- $U \models \Gamma \iff \forall \sigma \in \Gamma, U \models \sigma$

<u>validità</u> $\models \alpha$ valida sse $\forall U.\ U \models \alpha$

<u>conseguenza logica</u> $\Gamma \models \alpha \iff \forall U$ e $\rho_u .\ \rho_u \models \Gamma \Rightarrow \rho_u \models \alpha$

Es.

$\models \forall x.\ \varphi \to \exists x.\ \varphi$

MODELLO

$\iff \forall U.\ U \models \sigma^1 \to \sigma^2$ sse $\forall \rho_u .\ \rho_u \models \sigma^1 \to \sigma^2$

<

Sia <u>U generica</u>

$\forall\ \rho_u .\ \rho_u \models \forall x.\ \varphi \iff \forall a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \sigma^1$

def

in particolare vale per un elemento $\Rightarrow \exists a. \in |U| .\ \varphi[a/x] \models \varphi \iff \exists x.\ \varphi$

Es.

<- a casa

$\models \forall x. (\alpha \text{ AND } \beta) \to (\forall x.\alpha \text{ AND } \forall x.\beta)$

$\sigma 1 \qquad\qquad\qquad \sigma 2$

$\models \sigma 1 \to \sigma 2 \iff \forall U.\ U \models \sigma^1 \to \sigma^2$ sse $\forall \rho_u .\ \rho_u \models \sigma^1 \to \sigma^2$

Sia U generica

$\forall \rho_u .\ \rho_u \models \forall x. (\alpha \text{ AND } \beta) \iff \rho_u \models \alpha \text{ AND } \rho_u \models \beta$

$\forall \rho_u .\ \forall x. (\alpha \text{ AND } \beta) \iff \forall a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \alpha \text{ AND } \beta$

$\forall a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \alpha$ AND $\forall a. \in |U| .\ \rho_u[b/x] \models b$

$\forall \rho_u .\ \forall x.\ \alpha \qquad\qquad \forall \rho_u .\ \forall x.\ \beta$

$\iff \rho_u \models \forall x.\alpha \text{ AND } \forall x.\beta$

$\models (\forall x.\alpha \text{ AND } \forall x.\beta) \to \forall x. (\alpha \text{ AND } \beta)$

$\models \sigma 1 \to \sigma 2 \iff \forall U.\ U \models \sigma^1 \to \sigma^2$ sse $\forall \rho_u .\ \rho_u \models \sigma^1 \to \sigma^2$

Sia U generica

$\forall \rho_u .\ \rho_u \models (\forall x.\alpha \text{ AND } \forall x.\beta) \iff$
$\forall \rho_u\ \ \forall a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \alpha \text{ AND } \forall a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \beta$

Di conseguenza, se devo soddisfare per ogni α e per ogni β che stanno nello stesso U, allora vale

$\forall a. \in |U| .\ \rho_u[a/x] \models \alpha \text{ AND } \beta \overset{\text{def}}{\iff} \forall \boldsymbol{\rho_u} .\ \forall \mathbf{x. (\alpha \text{ AND } \beta)}$

\\\

LOGICA APPUNTI 12.12.23

Nuovo esercizio

$\sigma 1 \qquad\qquad\qquad \sigma 2$

$\models \exists x. (\alpha \to \beta) \to (\exists x.\alpha \to \exists x.\beta)$

$\models \sigma 1 \to \sigma 2 \iff \forall U . U \models \sigma^1 \to \sigma^2$ sse $\forall \rho_u . \rho_u \models \sigma^1 \to \sigma^2$
Sia U generica

$\forall \rho_u . \rho_u \models \exists x. (\alpha \to \beta) \iff$
$(\exists a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \alpha \to \beta) \iff$
$\exists a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \alpha \Rightarrow \exists a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \beta$

$\forall \boldsymbol{\rho_u} . \exists a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \alpha \Rightarrow \exists a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \beta$
$\forall \rho_u . \rho_u \models \exists x.\alpha \qquad\qquad \forall \rho_u . \rho_u \models \exists x.\beta$

$\iff$
$\forall \rho_u . \boldsymbol{\rho_u \models \exists x.\alpha \to \exists x.\beta}$

ES2

$\models (\forall x. \varphi \text{ AND } \exists x. \neg\Psi) \to \exists x. (\varphi \text{ AND } \neg\Psi)$

$\models \sigma 1 \to \sigma 2 \iff \forall U . U \models \sigma^1 \to \sigma^2$ sse $\forall \rho_u . \rho_u \models \sigma^1 \to \sigma^2$

Sia U generica

$\forall \boldsymbol{\rho_u} . \rho_u \models (\forall x. \varphi \text{ AND } \exists x. \neg\Psi) \iff$

" $\rho_u \models \forall x. \varphi$ AND $\rho_u \models \exists x. \neg\Psi \iff$
(1)
" $(\forall a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \varphi)$ AND $(\exists w. \in |U| . \rho_u[w/x] \models \neg\Psi) \iff$

(1) -> se vale per tutti gli oggetti di |U| in particolare varrà per uno (*)

(1) => $\exists a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \varphi$ (ho declassato il $\forall$ in un $\exists$) AND $\exists a. \in |U| . \rho_u[a/x] \models \neg\Psi$

sia $z \in |U|$ tc $\rho_u[z/x] \models \neg\Psi$
per (1) deve valere che $\rho_u[z/x] \models \varphi$ (valeva per tutti)

"raccolgo" l'esiste (si può fare solo i quantificatore sono uguali sia da una parte che dall'altra)

" $\exists z. \in |U| . (\rho_u[z/x] \models \varphi$ **AND** $\rho_u[z/x] \models \neg\Psi)$
" $\exists z. \in |U| . (\rho_u[z/x] \models (\varphi \text{ AND } \neg\Psi)) \iff$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\rho_u \models \exists x. (\varphi \text{ AND } \neg\Psi)}$

$\rho_u \not\models \alpha \Leftrightarrow \rho_u \models \neg\alpha$

$$\begin{gathered}\Rightarrow \text{soundness}\\ \boldsymbol{\vdash \varphi \Leftrightarrow\ \models \varphi}\\ \Leftarrow \text{completeness}\end{gathered}$$

$\vdash \varphi \Rightarrow\ \models \varphi$ <u>principio di contrapposizione</u> $a \to b \Leftrightarrow \neg b \to \neg a$

$\not\models \varphi \Rightarrow\ \nvdash \varphi$

Esibire un <u>contromodello</u> ESAME!!!!

<u>ES0</u>

$\nvdash \varphi(x) \to \forall x.\ \varphi(x) \qquad \equiv \alpha$

$\not\models \alpha \qquad \to \exists \mathbf{U}.\ U \not\models \alpha$
contromodello

$\Leftrightarrow \exists \rho_u .\ \rho_u \not\models \alpha$

$U = \langle\{a,b\}, P\rangle$ P è una rel. Unaria e definita così: $P(a)$ $a \in P$ (**su b non vale**)

$U \not\models \alpha \Leftrightarrow \exists \rho_u \not\models \alpha$

Osserviamo che

$\rho_u \models P$ ma $\rho_u \models \forall x.P$ infatti non è vero che $\forall\{a,b\}\ .\ \rho_u[u/x] \models P$ (infatti su b, P non è definita)

<u>ES1</u>

$\nvdash \exists x.\ \varphi(x) \to \forall x.\ \varphi(x)$

$\not\models \exists x.\ \varphi(x) \to \forall x.\ \varphi(x)$

$U = \langle\{a, b\}, P\rangle \qquad P(a)$

$\not\models \exists x.\ P \to \forall x.\ P$

$U \not\models \sigma 1 \rightarrow \sigma 2$ sse $\exists \rho_u \,.\, \rho_u \not\models \sigma 1 \rightarrow \sigma 2$
(1) (2)
Mostriamo che $\rho_u \models \sigma 1$ ma $\rho_u \not\models \sigma 2$
->a
(1) $\rho_u \models \exists x.\, P$ (si) $\Leftrightarrow \exists u \in \{a,b\}$ tc $\rho_u[u/x] \models P$
(2) $\rho_u \not\models \forall x.\, P$ in effetti per nessuna $\rho_u \Leftrightarrow \forall u \in \{a,b\}$ tc $\rho_u[u/x] \models P$ ✗ NO

Per controprova si può fare anche così:

$\rho_u \not\models \forall x.\, P \Leftrightarrow \rho_u \models \neg\forall x.\, P$ $\neg\forall x.\, \alpha \equiv \exists x.\, \neg\alpha$ O ANCHE $\neg(\forall x.\, \exists y.\, \alpha) \equiv \exists x. \forall y. \neg\alpha$
$\Leftrightarrow \exists u \in \{a,b\} \,.\, \rho_u[u/x] \models \neg P$

ES2

$\models \forall x.\, \exists y.\, x < y \quad \equiv \sigma$

$\not\models \sigma \Leftrightarrow \exists U.\, U \not\models \sigma$

$U = <\{1,2,3\}, \leq\}$ contromodello $\rho_u[3/x]$

$\rho_u \not\models \forall x.\, \exists y.\, (x < y)$ infatti nessuna valutazione ρ_u può sodd. σ altrimenti $\forall a \in \{1,2,3\} \,.\, \exists b \in \{1,2,3\} \,.\, \rho_u[a/x, b/y] \models x<y$

$\Leftrightarrow \rho_u \models \neg\sigma \Leftrightarrow \rho_u \models \exists x. \forall y. \neg(x<y)$

ES3 A CASA

$\models \exists y. \forall x.\, x < y \quad \equiv \sigma$

Esiste y che è più grande di ogni x (uno più grande di tutti)

ES4

$? \models \exists x.\, \varphi(x)$ AND $\exists x.\, \Psi(x) \rightarrow \exists x.\, (\varphi(x)$ AND $\Psi(x))$

$\exists U.\, U \not\models \sigma 1 \rightarrow \sigma 2$

$U = <\{a, b\}, P, Q>$
$\varphi = P$, $\Psi = Q$ P(a) e Q(b)

Mostriamo $\rho_u \models \sigma 1$ ma $\rho_u \not\models \sigma 2$

$\rho_u \models \exists x.\, P(x)$ AND $\exists x.\, Q(x)$
$\Leftrightarrow$ **$\exists u \in \{a,b\} \,.\, \rho_u[u/x] \models P$ & $\exists w \in \{a,b\} \,.\, \rho_u[w/x] \models Q$**

(a) $\rho_u(x) = a$ (b)

$\rho_u \not\models \exists x.\ (P(x)$ AND $Q(x))$ infatti per nessuna valutazione

$\rho_u\ .\ \rho_u \models \exists x.\ (P(x)$ AND $Q(x))$ (*) infatti vorrebbe dire

$\exists u \in \{a,b\}\ .\ (\rho_u[u/x] \models P$ AND $\rho_u[u/x] \models Q)$ IMPOSSIBILE ❌

(*) $\rho_u \models \neg(\exists x.(P(x)$ AND $Q(x))$ <=>
$\rho_u \models \forall x.\ \neg(P(x)$ AND $Q(x))$
$\neg P(x)$ OR $\neg Q(x)$ <=>

$\forall u \in \{a,b\}\ .\ ($**$\rho_u[u/x] \models \neg P(x)$** OR $\neg Q(x))$

<u>ES5 A CASA</u>

$$\not\models \underbrace{(\forall x.\ \varphi(x) \rightarrow \forall x.\ \Psi(x))}_{\alpha} \rightarrow \underbrace{\forall x.\ (\varphi(x) \rightarrow \Psi(x))}_{\beta}$$

$\not\models \alpha \rightarrow \beta$ <=> $\exists U\ .\ U \not\models \alpha \rightarrow \beta\ \exists \rho_u\ .\ \rho_u \not\models \alpha \rightarrow \beta$

$U = \langle\{a, b\}, P, Q\rangle$
$\varphi = P\ ,\ \Psi = Q$
$P = (a)\ \varphi$
$Q = (b)\ \psi$

Mostriamo $\underbrace{\rho_u \models \alpha}_{(1)}$ ma $\underbrace{\rho_u \not\models \beta}_{(2)}$

(1) $\rho_u \models \alpha$

$\rho_u \models \forall x.\ P(x) \rightarrow \forall x.\ Q(x)$
<=> $\rho_u \not\models \forall x.\ P(x)$ OR $\rho_u \models \forall x.\ Q(x)$ *//trasformo l'implicazione in OR*
<=> $\rho_u \models \exists x.\ \neg P(x)$ OR $\rho_u \models \forall x.\ Q(x)$ *//trasformo il NON SODDISFA $\forall$ in esiste $\neg$*
<=> $\exists u \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[u/x] \models \neg P$ OR $\forall w \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[w/x] \models Q$ *//allargo*

$\exists u \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[u/x] \models \neg P$ Sì, per u = b ✅
OR
$\forall w \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[w/x] \models Q$ No, se w = a, Q non vale ❌

(2) $\rho_u \not\models \beta$

$\rho_u \not\models \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x))$ per nessuna valutazione vale:

$\rho_u\ .\ \rho_u \models \forall x.\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ (*)

infatti vorrebbe dire:

$\forall u \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[u/x] \not\models P \rightarrow Q$

$\forall u \in \{a,b\} . \rho_u[u/x] \not\models P$ OR $\forall u \in \{a,b\} . \rho_u[u/x] \models Q$ IMPOSSIBILE ❌

ES6 A CASA

$\quad\quad\alpha \quad\quad\quad\quad\quad \beta$

$\not\models \forall x. \exists y. \varphi \to \exists y. \forall x. \varphi$

$\not\models \alpha \to \beta \iff \exists U . U \not\models \alpha \to \beta \iff \exists \rho_u . \rho_u \not\models \alpha \to \beta$

U = <N, $\leq$>
è un contromodello ovvero
$U \not\models \alpha \to \beta$ cioè $\exists \rho_u . \rho_u \not\models \alpha \to \beta$
ovvero che $\rho_u \models \alpha$ ma $\rho_u \not\models \beta$

(1) $\rho_u \models \alpha$

$\rho_u \models \forall x. \exists y. x \leq y$
$\iff \forall a \in N, \exists b \in N . \rho_u[a/x, b/y] \models x \leq y$ VERO IN N ✅

(2) $\rho_u \not\models \beta$

$\rho_u \not\models \exists y. \forall x. x \leq y$
$\iff \exists b \in N, \forall a \in N . \rho_u[a/x, b/y] \not\models x \leq y$ NON VALE SU N poiché è illimitato superiormente ❌

Possiamo facilmente verificare:

$\rho_u \not\models \exists y. \forall x. x \leq y \iff \rho_u \models \neg(\exists y. \forall x. x \leq y) \iff \rho_u \models \forall y. \exists x. \neg(x \leq y)$ (Che va contro quello che abbiamo detto nel passo 1).

\\\

LOGICA APPUNTI 18.12.23

Formalizzazione di una relazione

sia v_0, v_1 ... enumerazione variabili
voglio formalizzare una relazione

RELAZIONE *Sia R* $\subseteq |U|^n$
-> |U| x |U| x... |U| } n

Una formula φ_R in FORM formalizza R se

i) $FV(\varphi_R) = \{v_0 ..., v_{n-1}\}$
ii) $(a_0 ... a_{n-1}) \in R \iff U \models \varphi_R[a_0 ... a_{n-1}]$ <- Variabili libere

NOTAZIONE

$\varphi[a_0 ... a_m] = FV(\varphi) = \{a_0 ... a_m\}$

Struttura di Peano

"Sintassi"
R = ∅, F = {S, F, x} -> Successore, Somma e Prodotto, C = {0}, dominio N
succ

"Semantica"
Nat = <N, succ, +, x, 0>

$(S)^{Nat}$ = succ $(F)^{Nat}$ = + $(x)^{Nat}$ = x $(0)^{Nat}$ = 0

1 = S(0)   2 = S(0)   n = S...(S(0))

n è la codifica di n ∈ N

ESEMPI

1) Mi potrebbe servire un operatore di confronto

//L'operatore di uguaglianza (=) si può utilizzare liberamente

1) $\varphi_{\leq}[v_0, v_1] = \exists v_2 .\ v_0 + v_2 = v_1$
2) $\varphi_{<}[v_0, v_1] = (\exists v_2 .\ v_0 + v_2 = v_1)$ AND $\neg(v_2 = v_1)$
3) $\varphi_{\geq}[v_0, v_1] = \exists v_2 .\ v_1 + v_2 = v_0$
4) $\varphi_{<}[v_0, v_1] = (\exists v_2 .\ v_1 + v_2 = v_1)$ AND $\neg(v_2 = v_1)$
5) $\varphi_{\%}[v_0] = \exists v_1. (v_0 = v_1 + v_1)$?

6) $\varphi_{\%2}[v_0] := \exists x. (v_0 = x + x)$ //*Essere divisibile per due, la somma di un numero per sé stesso → x*2*
7) $\varphi_{\%2}[v_0] := \exists x. (v_0 = S(x+x))$ //*x*2+1*
8) PRIMO ⊆ N   P(x) <=> n è primo
$\varphi_{primo}[v_0] := \neg(v_0 = 0)$ AND $\neg(v_0 = S(0))$ AND $\forall x. \forall y. (v_0 = x * y \to (x = succ(0)$ OR $x = v_0))$ (ALTRI MODI PER SCRIVERE LA SECONDA PARTE)

9) *Ci sono infiniti numeri primi* (enunciato)

$\forall x. (\varphi_{primo}[x] \text{ -> } \exists y. (\varphi_{primo}[y] \text{ AND } \varphi_{\leq}[x, y])$

10) per ogni primo n, esiste m pari con m > n

$\forall x. (\varphi_{primo}[x] \text{ -> } \exists y. (\varphi_{pari}[y] \text{ AND } \varphi_{>}[x, y]))$

11) L'insieme dei numeri primi ha un minimo ma non ha un massimo

Mia soluzione
$\forall x. (\varphi_{primo}[x] \text{ -> } \exists y. (\varphi_{primo}[y] \text{ AND } \varphi_{<}[x, y]))$ AND
$\forall x. (\varphi_{primo}[x] \text{ -> } \exists y. (\varphi_{primo}[y] \text{ AND } \varphi_{>}[x, y]))$

Soluzione di un collega
$\forall x. (\varphi_{primo}[x] \text{ -> } \exists y. (\varphi_{primo}[y] \text{ AND } \varphi_{<}[x, y])$ AND
$\exists x. (\varphi_{primo}[x] \text{ -> } \forall y. (\varphi_{primo}[y] \text{ AND } \varphi_{>}[x, y])$

Soluzione del prof

$\forall n. (\varphi_{primo}[n] \text{ -> } \exists x. (\varphi_{primo}[x] \text{ AND } \varphi_{<}[n, x]))$ AND
$\exists y. (\varphi_{primo}[y] \text{ AND } \forall x. (\neg(x = y) \text{ AND } \varphi_{primo}[x]) \text{ -> } \varphi_{<}[y, x])$

12) Ogni primo > 2 è *successore di un numero pari*

$\forall n. (\varphi_{primo}[n] \text{ AND } \varphi_{>}[n,s(s(0))]) \text{ -> } \exists x.(\varphi_{pari}(x) \text{ AND } n = s(x))$

<R; <; "-" ; _>

1) pos[x] => $\varphi_{pos}[v_0] := 0<v_0$...
2) R è denso **A CASA** dati due numeri reali ne trovo sempre uno in mezzo

$\forall x. \forall y. (\varphi_{\leq}[x,] \text{ -> } \exists z. (\varphi_{<}[x, z] \text{ AND } \varphi_{<}[z, y])$ Chiedere alla prof

3) abs(p,q) := p valore assoluto di q **A CASA**

Interpretazione dei termini

se $[|t|]^{u}_{\rho u} = a \in |U|$ $\quad [|u[t/x]|]_{\rho} = [|u|]_{\rho[a/x]}$

se t libero per x in φ
se $[|t|]_{\rho} = a$ allora

$$\rho_u \models \varphi[t/x] \iff \rho[a/x] \models \varphi$$

- Per ogni coppia di numeri pari esiste un dispari intermedio

$\forall x.\ \forall y.\ (\neg(\varphi_{pari}[x] = \varphi_{pari}[y]) \to \exists z.\ (\varphi_{dispari}[z] \text{ AND } \varphi_{<}[x, z] \text{ AND } \varphi_{<}[z, y]))$

o anche

$\forall x.\ \forall y.\ (\neg(pari[x] = pari[y]) \to \exists z.\ (dispari[z] \text{ AND } \varphi_{<}[x, z] \text{ AND } \varphi_{<}[z, y]))$

$\neg(\varphi_{pari}[x] = \varphi_{pari}[y])$ = $\neg(x = y) \text{ AND } \varphi_{pari}[x] \text{ AND } \varphi_{pari}[y]$ ❌ SBAGLIATO

CASA e se... *$y = x + 2$?*

- N non è denso

$\forall x.\ ((x = y + s(0)) \to \neg\exists z.\ (\varphi_{<}[x, z] \text{ AND } \varphi_{<}[z, y])$

\\

LOGICA APPUNTI 19.12.23

Identità

$R \subseteq A^2$ quando è uguaglianza?

1) è almeno di equivalenza
2) <u>congruenza</u> $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$
$x = y \Rightarrow P(x) \Rightarrow P(y) \subseteq R^{1}$ (rel unaria)

$$\frac{}{t = t}\ \text{rifl} \qquad \frac{t1 = t2}{t2 = t1}\ \text{sim} \qquad \frac{t1=t2 \quad t2=t3}{t1 = t3}\ \text{trs}$$

$$\frac{v = u \quad \varphi[v/x]}{\varphi[u/x]}\ \text{cng}$$

ES1

|- ∀x. ∃y. (x=y)   ∃x. R(x,x) -> R(x,c)

----
x = x
---------- ∃I
∃y. (x=y)
------------ ∀I   //non ho sostituito tutte le occorrenze di X; è lecito
∀x. ∃y. (x=y)   //non ho vincoli, essendo che non ho variabili libere in hp

ES2

|- ∀x. (φ(x) -> ∀y. (x=y -> φ(y))   y ∉ FV(φ)

[x = y]^1 [φ(x)]^2
------------------ cng
φ(y)
--------------- ->I
x=y -> φ(y)
-------------------- ∀I   ->Side Condition✅ y ∉ FV(φ)
∀y. (x=y -> φ(y))
------------------------------ ->I
φ(x) -> ∀y. (x=y -> φ(y)
------------------------------------ ∀I   ->Rispetta il vincolo x ∉ FV(φ)✅
∀x. (φ(x) -> ∀y. (x=y -> φ(y))

A CASA PROVA CON -> ⊨ **OPZIONALE**

ES3

|- ∀x. (∃y.((x=y AND φ(y)) -> φ(x))   y ∉ FV(φ)

[x=y AND φ(y)]^1
---------------------- &E
x = y   [x=y AND φ(y)]^1
-------------sim   ------------------- &E
y = x   φ(y)
--------------------------------- cng
[∃y.((x=y AND φ(y))]^2 φ(x)
--- ∃E^1

$\varphi(x)$

--------------------------------- $\to I^2$

$(\exists y.((x=y \text{ AND } \varphi(y)) \to \varphi(x))$

-- $\forall I$ ->Rispetta il vincolo $x \notin FV(\varphi)$✅

$\forall x. (\exists y.((x=y \text{ AND } \varphi(y)) \to \varphi(x))$

ES4 ESERCIZIO GUIDA

$$\vdash \underbrace{(\varphi \to \exists x.\, \Psi(x))}_{\alpha} \to \underbrace{\exists x.\, (\varphi \to \Psi(x))}_{\beta} \qquad x \notin FV(\varphi)$$

1) *Tra le assunzioni avrò α*
2) *Potrei avere RAA per ottenere β (⊥ RAA β) potrei assumere ¬β*
3) *Mi "disfo" α per ottenere Ψ(x)*
4) *∃E -> Potrei derivare* $\exists x. (\varphi \to \Psi(x))$

$[\Psi]^3$

------------ $\to I$ WK

$[\varphi \to \exists x. \Psi(x)]^5 \quad [\varphi]^2 \qquad\qquad \varphi \to \Psi$

------------------------- $\to E$ ----------- $\exists I$

$\exists x. \Psi(x) \qquad\qquad \exists x. (\varphi \to \Psi)$

-- $\exists E^3$

$\exists x. (\varphi \to \Psi(x)) \qquad\qquad [\neg \exists x. (\varphi \to \Psi(x))]^4$

--- $\to E$

$\bot$

------- $\bot$i ex falso

Ψ

------------ $\to I^2$

$\varphi \to \Psi(x)$

------------------ $\exists I$

$[\neg \exists x. (\varphi \to \Psi(x))]^4 \qquad\qquad \exists x. (\varphi \to \Psi(x))$

--- $\to E$

$\bot$

------------------------------------ RAA^4

$\exists x. (\varphi \to \Psi(x))$

-- $\to I^5$

$(\varphi \to \exists x. \Psi(x)) \to \exists x. (\varphi \to \Psi(x))$

LOGICA APPELLO X
LAUREA TRIENNALE IN INFORMATICA

- 5 Domande
- 1 Domanda vale 7 punti

1) Esercizio di Teoria
2) Esercizio Semantica
3) Esercizio di Codifica
4) Deduzione

Esercizio 1:

Dato un insieme T di formule proposizionali, dare la definizione di T consistente. Dimostrare che se T consistente allora è soddisfacibile.

Esercizio 2:

Utilizzare metodi esclusivamente semantici e senza usare le tavole di verità mostrare che:

$$\models \neg(\varphi \text{ -> } \Psi) \text{ <-> } (\varphi \text{ AND } \neg\Psi)$$

Esercizio 3:

Utilizzare metodi esclusivamente semantici e senza usare le tavole di verità mostrare che:

$$\models (\forall x.\varphi \text{ AND } \forall x.\Psi) \text{ -> } \forall x.(\varphi \text{ AND } \neg\Psi)$$

Esercizio 4:

Utilizzare metodi esclusivamente la deduzione naturale e senza usare le tavole di veritò mostrare che:

$$(\exists x.\ \varphi \text{ AND } \Psi(x)) \text{ -> } \exists x.\ (\varphi \text{ AND } \Psi(x))$$

Esercizio 5:

Codificazione e struttura di Peano: Ogni numero primo di 2 è successore di un numero pari. Costruire ogni costrutto prima di scrivere l'enunciato.

Esercizio 1: ESPORRE IL CORROLARIO 1

Esercizio 2:

$$\models \neg(\varphi \text{ -> } \Psi) \text{ <-> } (\varphi \text{ AND } \neg\Psi)$$

sia v generica (a) -> primo verso

$\models \neg(\varphi \text{ -> } \Psi)$ <=>
$(\varphi \text{ -> } \Psi)_v = 0$ <=>
$\forall v.\ \neg[|\varphi|]_v = 0$ OR $[|\Psi|]_v = 1]$ <=>
$\forall v.\ [|\varphi|]_v = 1$ AND $[|\Psi|]_v = 0]$ <=>
$\forall v.\ [|\varphi|]_v = 1$ AND $[|\neg\Psi|]_v = 1]$ <=>
$[|\varphi \text{ AND } \neg\Psi|]_v = 1$

per v generica (a) -> secondo verso ...

$\models (\varphi \text{ AND } \neg\Psi) \text{ -> } \neg(\varphi \text{ -> } \Psi)$

$\forall v.$
$\models (\varphi \text{ AND } \neg\Psi) = 1$ <=>
$[|\varphi|]_v = 1$ AND $[|\neg\Psi|]_v = 1]$ <=>
$[|\varphi|]_v = 1$ AND $[|\Psi|]_v = 0$ <=>
$\neg(\varphi \text{ -> } \Psi)$

Esercizio 3:

$$\not\models \underbrace{(\forall x.\varphi \text{ -> } \forall x.\Psi)}^{\boldsymbol{\sigma 1}} \text{ -> } \overbrace{\forall x.(\varphi \text{ -> } \neg\Psi)}^{\boldsymbol{\sigma 2}}$$

CONTROMODELLO

$\not\models \boldsymbol{\sigma 1} \to \boldsymbol{\sigma 2} \iff \exists U\ .\ U \not\models \boldsymbol{\sigma 1} \to \boldsymbol{\sigma 2} \iff \exists \rho_u\ .\ \rho_u \not\models \boldsymbol{\sigma 1} \to \boldsymbol{\sigma 2}$

U = <{a,b}, P, Q>   P(a), Q(b) P = φ, Q = Ψ

Mostriamo che

$\rho_u \vDash \sigma 1$ & $\rho_u \nvDash \sigma 2$
(1) (2)

(1) $\rho_u \vDash \forall x.\varphi(x) \text{ -> } \forall x.\Psi(x) \text{ <=> }$
$\rho_u \nvDash \forall x.\varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall x.\ \Psi(x) \text{ <=> }$
$\rho_u \vDash \exists x.\neg\varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall x.\ \Psi(x) \text{ <=> }$ //instanzio in P e in Q
$\rho_u \vDash \exists x.\neg\varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall x.\ \Psi(x) \text{ <=> }$ (2)
$\exists u \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[u/x] \vDash \neg P$ OR $\forall w \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[w/x] \vDash Q$ Non è vero che per ogni elemento del dominio vale Q, infatti vale solo per b

$\rho_u \vDash \sigma 1$✅

(2) $\rho_u \nvDash \forall x.(\varphi \text{ -> } \neg\Psi) \text{ <=> }$
$\rho_u \vDash \exists x.(\neg(\varphi \text{ -> } \neg\Psi)) \text{ <=> }$
$\rho_u \vDash \exists x.(\varphi \text{ AND } \neg\Psi) \text{ <=> }$
$\exists u \in \{a,b\}\ .\ \rho_u[u/x] \vDash P \text{ AND } \neg Q$
$\exists u \in \{a,b\}\ .\ (\rho_u[u/x] \vDash P \ \&\ \rho_u[u/x] \vDash \neg Q)$ Esattamente quello che vogliamo. Esiste un elemento del dominio per cui la proprietà vale P e non Q.

$\rho_u \nvDash \sigma 2$✅

Esercizio 4:

$$|\text{-}\ (\exists x.\varphi \text{ AND } \Psi(x)) \text{ -> } \exists x.\ (\varphi \text{ AND } \Psi(x))$$

```
[∃x.φ AND Ψ]^1
-------------------- &E
       Ψ                  [φ(x)]^2
    ------------------------------&I
        φ(x) AND Ψ                  [∃x.φ AND Ψ]^1
    ------------------------------∃I  ------------------
      ∃x. (φ AND Ψ(x))                   ∃x.φ
      ----------------------------------------------- ∃E^2
                 ∃x. (φ AND Ψ(x))
        --------------------------------------------- ->I^1
       (∃x.φ AND Ψ(x)) -> ∃x. (φ AND Ψ(x))
```

ESERCIZI VACANZE DI NATALE

ES14

(1) $\vDash \forall x. (\varphi(x) \text{ <-> } \forall y. (x = y \text{ -> } \varphi(y)) \equiv \gamma$

$\vDash \gamma \equiv \vDash \forall x. (\sigma 1 \text{ <-> } \sigma 2)$ <=> $\forall U . U \vDash \gamma$ sse $\forall \rho_u . \rho_u \vDash \forall x. (\sigma 1 \text{ <-> } \sigma 2)$

Sia U generica

$\forall \rho_u . \rho_u \vDash \varphi(x) \text{ -> } \forall y. (x = y \text{ -> } \varphi(y))$
. $\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall y. (x = y \text{ -> } \varphi(y))$
. $\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall y. (x = y \text{ -> } \varphi(y))$
. $\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall b \in |U| . \rho_u[b/y] \vDash (x = y \text{ -> } \varphi(y))$
. $\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall b \in |U| . \rho_u[b/y] \vDash (x = y \text{ OR } \varphi(y))$
. $\forall a \in |U| . \rho_u[a/x] \vDash (\rho_u \nvDash \varphi(x))$ OR $(\rho_u \vDash \forall b \in |U| . \rho_u[b/y] \vDash (x = y \text{ -> } \varphi(y)))$
(1) se vale per ogni b ne vale anche in particolare per uno

. $\forall a \in |U| . \rho_u[a/x] \vDash (\rho_u \nvDash \varphi(x))$ OR $(\rho_u \vDash \exists b \in |U| . \rho_u[b/y] \vDash (x = y \text{ -> } \varphi(y)))$
Questo è sempre vero per x e y
che si prenda nel dominio
Per ogni x che prendo nel dominio, esisterà una y che sarà uguale a x per cui vale φ.

Ho dimostrato sia per -> che per <- grazie all'OR

(2) $\vDash \forall x. (\varphi(x) \text{ <-> } \exists y. (x = y \ \& \ \varphi(y))$

Sia U generica

$\forall\rho_u . \rho_u \vDash \varphi(x) \rightarrow \exists y. (x = y \,\&\, \varphi(y))$

. $\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \exists y. (x = y \,\&\, \varphi(y))$

. $\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \exists b \in |U| . \rho_u[b/y] \vDash (x = y \,\&\, \varphi(y))$

. $\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \vDash \exists b \in |U| . \rho_u[b/y] \vDash (x = \rho_u \vDash y \,\&\, \rho_u \vDash \varphi(y))$

. $\forall a \in |U| . \rho_u[a/x] \vDash (\rho_u \nvDash \varphi(x))$ OR $(\rho_u \vDash \exists b \in |U| . \rho_u[b/y] \vDash (x = y \,\&\, \varphi(y)))$

Essendo x un qualsiasi oggetto del dominio possiamo dire y=x

essendo $x = x \,\&\, \varphi(x)$ (supponiamo che $\rho_u \vDash \varphi(x)$)

x = x è sempre vero
$\varphi(x)$ può essere vero

quindi $\exists y. (x = y \,\&\, \varphi(y))$ è vero sse $\rho_u \vDash \varphi(x)$

ES15

$\vDash \forall x. \exists y. (x=y) \equiv \gamma$

$\exists x. R(x,x) \rightarrow R(x,c)$

$\vDash \gamma \iff \forall U . U \vDash \gamma$ sse $\forall \rho_u . \rho_u \vDash \gamma$

Sia U generica

$\forall\rho_u . \rho_u \vDash \forall x. \exists y. (x=y) \iff$
$\forall a \in |U|, \exists b \in |U| . \rho_u[a/x, b/y] \vDash x = y$

declasso, se vale per ogni oggetto di |U| ne varrà in particolare per uno

$\exists a \in |U|, \exists b \in |U| . \rho_u[a/x, b/y] \vDash x = y$ ✅

Questo è vero sse y = x, per def di relazione di uguaglianza e assioma d'identità x = x

$\exists x. R(x,x) \rightarrow \exists x. R(x,y)$

ES1

$\vDash (\exists x. (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\exists x.(\varphi \rightarrow \exists x. \psi))$

$\vDash \sigma^1 \rightarrow \sigma^2 \iff \forall U . U \vDash \sigma^1 \rightarrow \sigma^2$ sse $\forall\rho_u . \rho_u \vDash \sigma^1 \rightarrow \sigma^2$

Sia U generica

$\forall\rho_u . \rho_u \vDash \sigma^1 \rightarrow \sigma^2 \iff$

. $\vDash (\exists x. (\varphi \text{ -> } \psi))$ <=>
. $\exists a. \in |U| . \ \rho_u[a/x] \vDash \varphi \text{ -> } \psi$ <=>
. $\exists a. \in |U| . [\rho_u[a/x] \vDash \varphi \Rightarrow \rho_u[a/x] \vDash \psi]$ <=>

quindi in particolare

$\rho_u \vDash \exists x.\psi$

. $\exists a. \in |U| . [\rho_u[a/x] \vDash \varphi \Rightarrow \rho_u[a/x] \vDash \exists x.\psi]$ <=>

. $\vDash (\exists x.(\varphi \text{ -> } \exists x. \psi))$ ✅

ES2

σ1 **σ2**

$\nvDash (\forall x.P(x) \text{ -> } \forall x. Q(x))) \text{ -> } (\forall x. (P(x)\text{->}Q(x)))$

CONTROMODELLO

$\nvDash$ **σ1 → σ2** <=> $\exists U . U \nvDash$ **σ1 → σ2** $\exists \rho_u . \ \rho_u \nvDash$ **σ1 → σ2**

U = <{a,b}, P, Q> P(a), Q(b)

Mostriamo che

$\rho_u \vDash \sigma 1$ & $\rho_u \nvDash \sigma 2$
(1) (2)

(1) $\rho_u \vDash \sigma 1$

$\forall \rho_u.$
. $\vDash \forall x.P(x) \text{ -> } \forall x. Q(x)$ <=>
. $\rho_u \nvDash \forall x.P(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall x. Q(x)$ <=>
. $\rho_u \vDash \neg\forall x.P(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall x. Q(x)$ <=>
. $\rho_u \vDash \exists x. \neg P(x)$ OR $\rho_u \vDash \forall x. Q(x)$ <=>
. $\exists v \in \{a,b\} . \rho_u[v/x] \vDash \neg P(x)$ OR $\forall w \in \{a,b\} . \rho_u[w/x] \vDash Q(x)$

di conseguenza $\rho_u \vDash \sigma 1$ vale

(2) $\rho_u \nvDash \sigma 2$

$\forall \rho_u$
. $\not\models \forall x. (P(x) \to Q(x))$
. $\models \neg\forall x. (P(x) \to Q(x))$
. $\models \exists x. (\neg(P(x) \to Q(x))$
. $\models \exists x. (P(x)$ AND $\neg Q(x))$
. $\exists v \in \{a,b\} . \rho_u[v/x] \models P(x)$ AND $\neg Q(x)$ **VERO per un elemento del dominio**

Abbiamo confermato che **σ2 non vale.**

Abbiamo trovato un modo per mostrare che l'enunciato non vale per tutte le strutture.

ES1 Parte 2

|- (∀x. φ AND ∃x. ¬ψ) -> ∃x.(φ AND ¬ψ)

```
                                          [∀x. φ AND ∃x. ¬ψ]^2
                                          --------------------------- &E
                                                   ∀x. φ
                                                  -------- ∀I
                                          [¬ψ]^1      φ
                                          -------------- &I
[∀x. φ AND ∃x. ¬ψ]^2                          φ AND ¬ψ
--------------------------&E             ------------------ ∃I
        ∃x. ¬ψ                           ∃x.(φ AND ¬ψ)
       ------------------------------------------------ ∃E^1
                   ∃x.(φ AND ¬ψ)
 --------------------------------------------------- ->I^2
 (∀x. φ AND ∃x. ¬ψ) -> ∃x.(φ AND ¬ψ)
```

ES2 Parte 2

|- ¬∀x. φ -> ∃x. ¬φ

```
          [¬φ]^3
```

```
          ---------- ∃I
           ∃x. ¬φ    [¬∃x. ¬φ]^2
          --------------------- ->E
                    ⊥
                 --------- RAA^3
                    φ
                  --------- ∀I
[¬∀x. φ]^1      ∀x. φ
------------------------ ->E
           ⊥
 ----------------- RAA^2
      ∃x. ¬φ
----------------------- ->I^1
¬∀x. φ -> ∃x. ¬φ
```

ES4 PARTE 2

$\exists x.\ \varphi$ AND $\exists x.\ \Psi \rightarrow \exists x.\ (\varphi$ AND $\Psi)$

NO TAUTOLOGIA

Prendendo una U dove P e Q sono unari e diciamo che P vale per a e Q vale per b, allora non è vero questo enunciato

ES7 PARTE 2

$\vdash\ \exists x.\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \exists x.\ (\varphi \rightarrow \exists x.\psi)$

```
                              [φ -> ψ]^3      [φ]^2
                             -------------------- ->E
                                      ψ
                                  ------------ ∃I
                                     ∃x.ψ
                                ---------------- ->I^2
                                  φ -> ∃x.ψ
                               ------------------- ∃I
[∃x. (φ -> ψ)]^1               ∃x. (φ -> ∃x.ψ)
------------------------------------------- ∃E^3
                ∃x. (φ -> ∃x.ψ)
    ------------------------------------ ->I^1
   ∃x. (φ -> ψ) -> ∃x. (φ -> ∃x.ψ)
```

ES8 PARTE 2

|- ∀x.z (∀x. (φ(x) -> ψ(x)) AND φ[x/z]) -> ψ[x/z]

```
[∀x.z ((∀x.(φ -> ψ) AND φ[x/z])]^1
-----------------------------------------∀E
     (∀x.(φ -> ψ)) AND φ[x/z])            [∀x.z ((∀x.(φ -> ψ) AND φ[x/z])]^1
    -----------------------------------    -----------------------------------
            ∀x.(φ -> ψ)                     (∀x.(φ -> ψ)) AND φ[x/z])
           ------------------ ∀E           -----------------------------------
               (φ -> ψ)[x/z]                          φ[x/z]
            ------------------------------------------------------------- ->I^1
                                    ψ[x/z]
               -------------------------------------------------------
              ∀x.z (∀x. (φ(x) -> ψ(x)) AND φ[x/z]) -> ψ[x/z]
```

ES9 PARTE 2

|- ∀x. (φ(x) <-> ∀y.(x=y -> φ(y))

(1) |- ∀x. (φ(x) -> ∀y.(x=y -> φ(y))

```
     [x = y]   [φ(x)]
     ------------ cng
        φ(y)
   ------------- ->I
  x=y -> φ(y)
-------------------
∀y. (x=y -> φ(y))
-------------------
φ(x) <-> ∀y.(x=y -> φ(y))
------------------------------
∀x. (φ(x) ->∀y.(x=y -> φ(y))
```

(2) |- ∀x.(∀y.(x=y -> φ(y)) -> φ(x))

```
∀y.(x=y -> φ(y))^1
------------------- ∀I   -----
  x=x -> φ(x)            x=x
 -------------------------------
              φ(x)
  ----------------------------  ->I^1
  ∀y.(x=y -> φ(y)) -> φ(x)
 -------------------------------- ∀I
```

   ∀x.(∀y.(x=y -> φ(y)) -> φ(x))

|- ∀x. (∃y.(x=y AND φ(y) -> φ(x))

```
                                                         [x = y AND φ(y)]^1
                                                         -----------------
                                 [x = y AND φ(y)]^1            x = y
                                  -----------------           ------- trns
                                        φ(y)                   y = x
                                    --------------------------------- cng
∃y.(x=y AND φ(y) -> φ(x))                       φ(x)
 ------------------------------------------------------ ∃E^1
                         φ(x)
          -------------------------------- ∃I
          ∃y.(x=y AND φ(y)) -> φ(x))
-----------------------------------
∀x. (∃y.(x=y AND φ(y) -> φ(x)
```

PARTE 3

STRUTTURA DI PEANO   U = <N, +, x, S, 0>

dove S è la funzione successore, 0 è la costante

LE[V_0, V_1] := ∃x. [v_0 + x = v_1]
LT[v_0, v_1] := LE[v_0, v_1] AND ¬(v_0 = v_1)
GT[v_0, v_1] := LT[v_1, v_0]
GE[v_0, v_1] := LE[v_1, v_0]
PARI[v_0] := ∃x. [v_0 = x+x]
DISPARI[v_0] := ∃x. [v_0 = (x+x)+ S(0)]

- Divisibilità

DIV[v_0, v_1] = ∃x. (v_0 * x = v_1 & LE[S(0), x])

- *Primo*

PRIMO[v_0] = ¬(v_0 = 0) AND ¬(v_0 = 1) AND ∀x.∀y. (v_0 = x*y -> (x=1 OR x=v_0))

ES1

Per ogni numero primo n, esiste numero pari m con m strettamente maggiore di n

∀n. (primo[n] → ∃m. (pari[m] & gt[m, n]))

ES2

Ogni numero primo maggiore di 2 è il successore di un numero pari

2 = s(s(0))

∀x. (primo[x] & gt[x, 2] → ∃m. (pari[m] & n = S(m))

ES3

L'insieme dei numeri primi non ha un massimo ed ha un minimo

∀n. (primo[n] -> ∃x. (primo[x] & lt[x, n]) & ∃y. (primo[y] & ∀x. (¬(x = y) & primo[x] -> lt[y, x]))

esiste una y prima per cui ogni x è maggiore

ES4

La relazione ternaria (i, j, k) vale sse sono tre numeri diversi

R[i,j,k] := (¬(i = j) & ¬(j = k) & ¬(k = i)

La disuguaglianza non possiede transitività

ES4

---- sse i ∈ [j, k] e j divide k
se la i è contenuta tra j e k

R[i,j,k] = GE[i, j] & LE[i, k] & DIV[j, k]

ES6

La proprietà unaria tale che P(n) sse n > 2 ed il predecessore di n è un numero primo

P[n] := GT[n,2] & ∃x. [primo[x] & n = S(x)]

PARTE 1

ES2

$\vDash (\forall x.\varphi \text{ AND } \exists x.\neg\psi)) \text{ -> } (\exists x.(\varphi \text{ AND } \neg\psi))$

$\vDash \sigma 1 \text{ -> } \sigma 2 \iff \forall U \,.\, U \vDash \sigma \iff \forall \rho_u \,.\, \rho_u \vDash \sigma$

Consideriamo una U generica e una sua generica ρ_u

$\vDash (\forall x.\varphi \text{ AND } \exists x.\neg\psi) \iff$
$\vDash (\rho_u \vDash \forall x.\varphi \text{ AND } \rho_u \vDash \exists x.\neg\psi) \iff$
$\vDash (\forall a \in |U| \,.\, \rho_u[a/x] \vDash \varphi \text{ AND } \exists b \in |U| \,.\, \rho_u[b/x] \vDash \neg\psi) \iff$
Se vale per ogni elemento ne vale in particolare uno

$\vDash (\exists a \in |U| \,.\, \rho_u[a/x] \vDash \varphi \text{ AND } \exists b \in |U| \,.\, \rho_u[b/x] \vDash \neg\psi) \iff$
raccolgo l'esiste creando una variabile fresh chiamata z

$\exists z \in |U| \,.\, \rho_u[z/x] \vDash \varphi \text{ AND } \neg\psi \iff$
$\exists$**x.(φ AND ¬ψ)**

ES4

$\vDash (\exists x.(\varphi \text{ -> } \psi)) \text{ -> } ((\exists x.\varphi) \text{ -> } (\exists x.\, \psi))$

$\vDash \sigma 1 \text{ -> } \sigma 2 \iff \forall U \,.\, U \vDash \sigma \iff \forall \rho_u \,.\, \rho_u \vDash \sigma$
Consideriamo una U generica e prendiamo sempre una ρ_u generica

$\vDash \exists x.(\varphi \text{ -> } \psi) \iff$
$\vDash \exists a \in |U| \,.\, \rho_u[a/x] \vDash \varphi \text{ -> } \psi \iff$
$\vDash (\exists a \in |U| \,.\, \rho_u[a/x] \vDash \varphi) \Rightarrow (\exists a \in |U| \,.\, \rho_u[a/x] \vDash \psi) \iff$
$\vDash$ **(∃x.φ) -> (∃x. ψ)**

eS4 PROVA

$\not\models (\exists x.(\varphi \to \psi)) \to ((\exists x.\varphi) \to (\exists x.\ \psi))$

$\not\models \alpha \to \beta \Rightarrow \exists U\ .\ U \not\models \alpha \to \beta \Rightarrow \exists \rho_u\ .\ \rho_u \not\models \alpha \to \beta$

CONTROMODELLO

Consideriamo questa struttura

U = <{a,b}, P, Q>

$\varphi = P$ P(a), Q(Ø)
$\psi = Q$

Dimostriamo
$\not\models \alpha \to \beta$
$\models \alpha$ AND $\not\models \beta$

$\models \alpha$
$(\exists x.(\varphi \to \psi)) \Leftrightarrow$
$\exists x.(\rho_u \models \varphi \Rightarrow \rho_u \models \psi) \Leftrightarrow$
$\exists \{a,b\} \in |U|\ .\ \rho_u[v/x] \models (\rho_u \models \varphi \Rightarrow \rho_u \models \psi) \Leftrightarrow$
$\exists \{a,b\} \in |U|\ .\ \rho_u[v/x] \models (\rho_u \not\models \varphi \text{ OR } \rho_u \models \psi) \Leftrightarrow$
$\boldsymbol{\exists \{a,b\} \in |U|\ .\ \rho_u[v/x] \models (\rho_u \models \neg\varphi \text{ OR } \rho_u \models \psi)}$

$\not\models \beta$
$\not\models ((\exists x.\varphi) \to (\exists x.\ \psi)) \Leftrightarrow$
$\models (\neg((\exists x.\varphi) \to (\exists x.\ \psi))) \Leftrightarrow$
$\models (\rho_u \models \exists x.\varphi \text{ AND } \rho_u \not\models \exists x.\ \psi) \Leftrightarrow$
$\models (\rho_u \models \exists x.\varphi \text{ AND } \rho_u \models \neg\exists x.\ \psi) \Leftrightarrow$
$\models (\rho_u \models \exists x.\varphi \text{ AND } \rho_u \models \forall x.\ \neg\psi) \Leftrightarrow$
$\models \boldsymbol{\exists \{a,b\} \in |U|\ .\ \rho_u[v/x] \models \varphi}$ AND $\boldsymbol{\forall \{a,b\} \in |U|\ .\ \rho_u[v/x] \models \neg\psi}$

ES5

$\models (\neg\forall x.\varphi \to \exists x.\neg\varphi)$

$\models \sigma 1 \to \sigma 2 \Leftrightarrow \forall U\ .\ U \models \sigma \Leftrightarrow \forall \rho_u\ .\ \rho_u \models \sigma$
Consideriamo una U generica e prendiamo sempre una ρ_u generica

$\models \neg\forall x.\varphi \Leftrightarrow$
$\not\models \forall x.\varphi \Leftrightarrow$

$\not\models \exists a. \in |U| \,.\, \rho_u[a/x] \models \varphi$ <=>
$\models \exists a. \in |U| \,.\, \rho_u[a/x] \models \neg\varphi$
$\models \exists$**x.¬φ**

///

Esercizi Ripasso

|- ∃x.(φ(x) AND Ψ) -> (∃x.φ(x)) AND Ψ   x non appartiene FV(Ψ)

```
                              [φ(x) AND Ψ]^2
                              --------------- &E
                                  φ(x)          [φ(x) AND Ψ]^2
                              ------------∃I    ----------------- &E
                                 ∃x.φ(x)               Ψ
                              ------------------------------- &I
[∃x.(φ(x) AND Ψ)]^1           (∃x.φ(x)) AND Ψ
------------------------------------------------- ∃E^2
          (∃x.φ(x)) AND Ψ
----------------------------------------------- ->I^1
∃x.(φ(x) AND Ψ) -> (∃x.φ(x)) AND Ψ
```

$\models \overbrace{(\exists x.\varphi(x) \text{ AND } \exists x.\Psi(x))}^{\alpha} \rightarrow \overbrace{\exists x.(\varphi(x) \text{ AND } \Psi(x))}^{\beta}$

$\not\models \alpha \to \beta \Rightarrow \exists U \,.\, U \not\models \alpha \to \beta \Rightarrow \exists \rho_u \,.\, \rho_u \not\models \alpha \to \beta$

CONTROMODELLO

Prendiamo questa struttura

U = <{a,b}, P, Q>

φ = P   P(a), Q(b)
ψ = Q

Dimostriamo
$\not\models \alpha \to \beta$
$\models \alpha$ AND $\not\models \beta$

$\models \alpha$
UNFOLDING
$\models \exists x.\varphi(x)$ AND $\exists x.\Psi(x)$ <=>
$\rho_u \models \exists x.\varphi(x)$ AND $\rho_u \models \exists x.\Psi(x)$

$\exists \{a,b\} \in |U| \,.\, \rho_u[v/x] \vDash \varphi(x)$ AND $\exists \{a,b\} \in |U| \,.\, \rho_u[w/x] \vDash \psi(x)$

$\nvDash \beta$
$\nvDash \exists x.(\varphi(x)$ AND $\Psi(x))$ <=>
$\vDash \neg(\exists x.((\varphi(x)$ AND $\Psi(x)))$ <=>
per OGNI $\{a,b\} \in |U| \,.\, \rho_u[v/x] \vDash (\rho_u \nvDash \varphi(x)$ OR $\rho_u \nvDash \Psi(x))$ $\square$

```
                                   [¬φ]³  [φ]⁴                    [¬ψ]²   [ψ]¹
                                   ---------                      ------------
                                      ⊥                                ⊥
                                    ------- RAA³                    --------- RAA²
                         [∃x.φ(x)]⁵      φ(x)            [∃x.ψ(x)]⁵      ψ(x)
                         ----------------∃E⁴             ---------------------   ∃E¹
                              φ(x)                              Ψ(x)
                          --------------ORI                ---------------- ORI
                          φ(x) OR Ψ(x)                   φ(x) OR Ψ(x)
                           ------------------ ∃I        ---------------- ∃I
[∃x.φ(x) OR ∃x.Ψ(x)]      ∃x.(φ(x) OR Ψ(x))        ∃x.(φ(x) OR Ψ(x))
------------------------------------------------------------------------------------ ORE⁵
         ∃x.(φ(x) OR Ψ(x))
------------------------------------------------------------ ->I
∃x.φ(x) OR ∃x.Ψ(x) -> ∃x.(φ(x) OR Ψ(x))
```

ESERCIZIO DATO DALLA ZORZI

$\vDash \exists x.\ \exists y.\ (\neg(x=y)$ AND $(y<=x)) \equiv \gamma$

$\nvDash \gamma$ <=> $\exists U \,.\, U \nvDash \gamma$ sse $\exists \rho_u \,.\, \rho_u \nvDash \gamma$

Consideriamo questa struttura

$U = <\{1\}, \leq>$

$\nvDash \gamma$
$\nvDash \exists x.\ \exists y.\ (\neg(x=y)$ AND $(y<=x))$ <=>
$\vDash \neg(\exists x.\ \exists y.\ (\neg(x=y)$ AND $(y<=x))$ <=>
$\vDash \forall x.\ \forall y.\ (x=y$ OR $y>x)$ <=>
$\vDash$ **$\forall a \in \{1\}, \forall b \in \{1\} \,.\, \rho_u[a/x, b/y] \vDash (\rho_u \vDash x=y$** OR $\rho_u \vDash y>x)$

ESERCIZIO RANDOM

$\vdash (\neg\alpha \text{ OR } \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

```
                 [¬α]^1   [α]^2
                 ----------
                     ⊥
                 ----------
                     β                   [β]^1
                  --------- ->I^2      ----------- WK
[¬α OR β]^3       α → β                 α → β
------------------------------------------------ OR E^1
               α → β
     --------------------------- ->I^3
     (¬α OR β) → (α → β)
```

$$\models \forall x.\ \overbrace{(\varphi(x) \text{ OR } \psi)}^{\sigma 1} \text{ -> } \overbrace{\forall x.\ \varphi(x) \text{ OR } \psi}^{\sigma 2}$$

$\models \sigma 1 \text{ -> } \sigma 2 \iff \forall U\ .\ U \models \sigma^1 \text{ -> } \sigma^2 \text{ sse } \forall \rho_u .\ \rho_u \models \sigma^1 \text{ -> } \sigma^2$

Sia U generica

$\forall \boldsymbol{\rho_u} .\ \rho_u \models \forall x.\ (\varphi(x) \text{ OR } \psi) \iff$

. $\forall a \in |U|\ .\ \rho_u[a/x] \models (\rho_u \models \varphi(x) \text{ OR } \rho_u \models \psi) \iff$

. $\forall a \in |U|\ .\ \rho_u[a/x] \models \varphi(x) \text{ OR } \forall a \in |U|\ .\ \rho_u[a/x] \models \psi$

. $\rho_u \models \forall x.\ \varphi(x) \text{ OR } \rho_u \models \psi \iff$

. **$\forall x.\ \varphi(x) \text{ OR } \psi$**

$\forall x.\ \text{PRIMO}[x] \text{ -> } ((\exists y.(\text{PRIMO}[y]\ \&\ (\text{GT}[y, x]))\ \&\ \neg\exists z.\ (\text{PRIMO}[z]\ \&\ \text{LT}[z, x]\ \&\ \text{LT}[z, S(S(0))])$

$\models \forall x.\ \exists y.\ \varphi(x,y) \text{ -> } \exists x.\ \forall y.\ \varphi(y, x)$

$\not\models \alpha \rightarrow \beta \Leftrightarrow \exists U \,.\, U \not\models \alpha \rightarrow \beta$ sse $\exists \rho_u \,.\, \rho_u \not\models \alpha \rightarrow \beta$

CONTROMODELLO

$\langle N, \leq \rangle$

1)

$\models \forall x.\ \exists y.\ x \leq y$ VERO IN N ✅ (Per ogni x nel dominio trovo sempre un numero più grande)

2)

$\not\models \exists x.\ \forall y.\ y \leq x$ ❌ impossibile

$\models \neg(\exists x.\ \forall y.\ y \leq x) \Leftrightarrow$

$\models \forall x.\ \exists y.\ y > x$ per ogni x ne esiste una strettamente più grande. Sì. Allora è vero che si falso.

$\models \forall x.\ \exists y.\ x < y \quad \equiv \sigma$

$\not\models \sigma \Leftrightarrow \exists U.\ U \not\models \sigma$

$U = \langle \{1,2,3\}, < \}$ <u>contromodello</u> $\rho_u[3/x]$

$\rho_u \not\models \forall x.\ \exists y.\ (x < y)$ infatti nessuna valutazione ρ_u può sodd. σ altrimenti

$\forall a \in \{1,2,3\} \,.\, \exists b \in \{1,2,3\} \,.\, \rho_u[a/x, b/y] \models x<y$

$\Leftrightarrow \rho_u \models \neg\sigma \Leftrightarrow \rho_u \models \exists x. \forall y. \neg(x<y)$