Algebra Lineare

Università di Verona
Imbriani Paolo -VR500437

Marzo 2024

Contents

1 Numeri complessi

1.1 Insiemi di numeri

Il sistema di numeri creato per contare fin dall'antichità sono i numeri naturali, definiti come tutti i numeri positivi.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Il sistema di numeri definito per calcolare i debiti sono i numeri interi, che possono essere minori di 0.

$$\mathbf{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Il sistema di numeri definito per dividere è quello dei numeri razionali, definito come:

$$\mathbf{Q} = \{ \ \frac{p}{q} \ | \ p, q \in \mathbf{Z}\}$$

Il sistema definito per misurare grandezze reali è $\mathbf{R}$. L'insieme di numeri reali, contiene tutti quelli precedenti, insieme ai numeri irrazionali come $\sqrt{2}$.

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Poi abbiamo il sistema dei numeri *complessi* chiamato $\mathbf{C}$ che permette di risolvere equazioni tipo:

$$x^2 + 1 = 0$$

1.2 Numeri Immaginari

Aggiungiamo ai numeri reali un "nuovo" numero **i** tale che:

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

Questo numero è detto **unità immaginaria**. Definiamo l'insieme dei numeri complessi:

$$\mathbf{C} := \{ \ a + bi \ | \ a, b \in \mathbf{R}\}$$

Esempi: $6 + 7i, -12 + \frac{1}{2}i, 3 - \sqrt{2}i$

1.3 Operazioni dei numeri complessi

1.3.1 Addizione

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbf{C}$

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$
$= a + c + bi + di$
$= (a + c) + (b + d)i$

1.3.2 Moltiplicazione

$z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbf{C}$

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) + (c + di)$
$= ac + adi + bdi^2$
$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

1.4 Teorema fondamentale dell'algebra

Qualsiasi equazione nella forma $a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ax + a_0 = 0$ dove n $\in \mathbf{N}, a_0, a_1, a_n \in \mathbf{N}, a_n \neq 0, x$ è un incognita, ammette n soluzioni in $\mathbf{C}$.
$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ax + a_0 = 0$ viene chiamato anche *Polinomio di grado n.*

1.5 Coniugato e Modulo

Sia $z = a + bi \in \mathbf{C}$. Il numero complesso:

$$\bar{z} := a - bi$$

è detto coniugato di z. Il modulo di z è $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbf{R}$.

Proprietà: Siano $z_1 = a + bi, z_2 = c + di \in \mathbf{C}$

i. $z_1 \cdot \bar{z_1} = a^2 + b^2 = |z_1|^2$

ii. $z_1 \bar{+} z_2 = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

iii. $z_1 \bar{\cdot} z_2 = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$

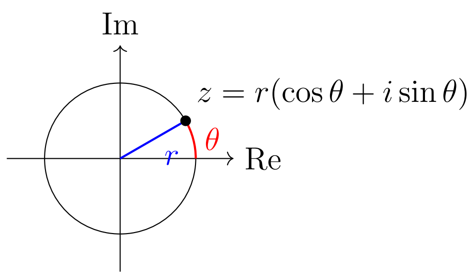
iv. Se $z_1 \neq 0, \frac{\bar{1}}{z_1} = \frac{1}{z_1}$ infatti $\bar{z_1} \cdot (\frac{\bar{1}}{z_1}) = \bar{1} = 1 - 0i = 1$

v. Se $z_1 \neq 0$ allora $\frac{\bar{z_1}}{z_2} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

vi. Se $z_1 \neq 0$, allora $\frac{1}{z_1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

1.6 Coordinate polari

$z = a + bi \in \mathbf{C} \Rightarrow (a, b) = (ReZ, InZ) \in \mathbf{R}^2$.
Possiamo esprimere z in coordinate polari (r, α) dove r è la lunghezza del segmento OZ detto raggio polare e α è l'angolo compreso tra l'asse delle x e OZ misurato in senso antiorario.



$z_1 = (1, 0) \to 1$
$z_2 = (1, \frac{\pi}{2}) \to i$
$z_3 = (1, \pi) \to -1$
$z_4 = (1, \frac{3\pi}{2}) \to -i$

1.7 Forma trigonometrica di un numero complesso

Dato un $z = (r, \alpha)$ in coordinate polari, vogliamo ricavare la forma algebrica.

$$\cos(\alpha) := \frac{a}{r} \qquad \sin(\alpha) := \frac{b}{r}$$

$$z = r(\cos(\alpha)) + i\sin(\alpha)$$

è detta **forma trigonometrica di z.**

Esempio:

$\cos(0) + i\sin(0) = 1$
$\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = i$
$\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$
$\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -i$

In forma trigonometrica il prodotto diventa una somma di due angoli.

1.7.1 Formula di De Moivre

Dato $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \in \mathbf{C}$ allora

$$z^n = r^n(\cos{(n\theta)} + i\sin{(n\theta)})$$

1.8 Definizione

$y \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}$ si dicono radici n-esime di y le soluzioni dell'equazione $x^n = y$.

1.9 Teorema

Siano $y \in \mathbf{C}, n \in \mathbf{N}$ esistono precisamente n radici n-esime distinte $z_0, z_1, ..., z_{z-1}$ di y. Se:

$$y = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$$

Allora:

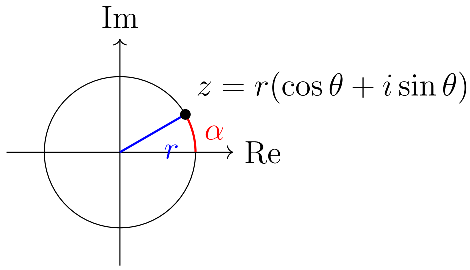
$$z_0 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{n}\right)\right)$$

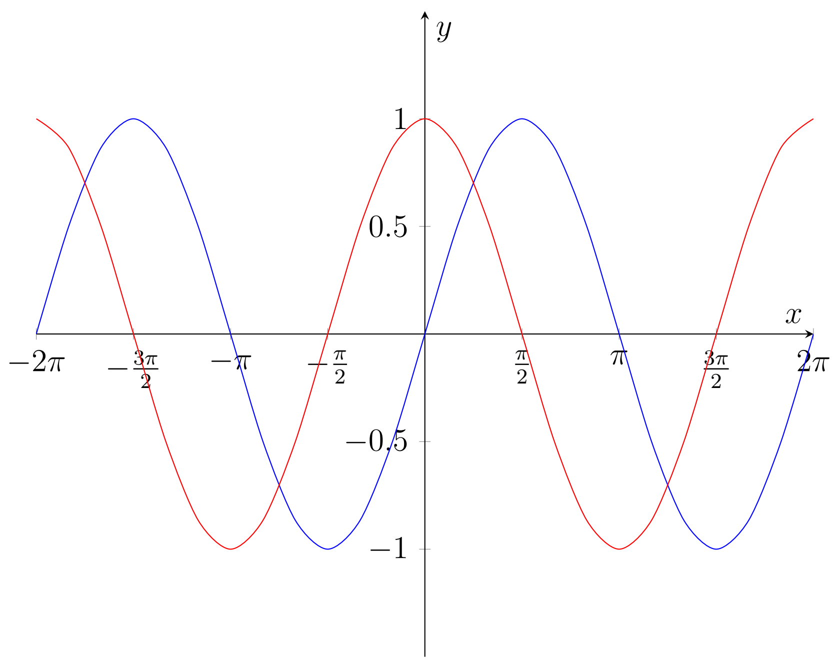
$$z_k = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\alpha + (2\pi)k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + (2\pi)k}{n}\right)\right)$$

per k = 1, ... $n - 1$

Dimostrazione: Per la formula di de Moivre:

$$(z_k)^n = (\sqrt{r})^2(\cos(\alpha + (2\pi)k)) + i\sin(\alpha + (2\pi)k)$$





$$= r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha) = y$$

Quindi $z_0, ...z_{n-1}$ sono soluzioni di $y = x^n$, cioè sono radici n-esime di y. Siccome il periodo di sin e cos è 2π, sono tutte distinte.

1.10 Radici quadrate di numeri reali negativi

Sia $a \in \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$ tale che $a < 0$, esistono precisamente due radici quadrate di a in $\mathbf{C}$. Infatti, abbiamo:

$$a = (-a)(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$$

Per Teorema 1.9:

$$z_0 = \sqrt{-a}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = i\sqrt{-a}$$

$$z_1 = \sqrt{-a}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = i\sqrt{-a}$$

NB: $ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$ Quindi: $\frac{-b+-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ esistono due soluzioni anche se $\Delta < 0$.

2 Sistemi lineari e matrici

2.1 Sistemi lineari

Esempio: valori nutrizionali (per porzione)

	Cheerios	Quakers
Proteine(g)	4	3
Carbs (g)	20	18
Grassi (g)	2	5

Quanti porzioni di Quakers e Cheerios ci danno una colazione con 9 g di proteine, 48 g di carboidrati e 8g di grassi?

$$\begin{cases} 4c + 3q = 9 \\ 20c + 18q = 48 \\ 2c + 5q = 8 \end{cases}$$

Un sistema lineare è un insieme di m equazioni in n incognite, che può essere scritto nel modo seguente:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$...$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

dove $b_k, a_ij \in \mathbf{C}$ oppure $\mathbf{R}$ per $1 <= i <= n, 1 <= j <= n, 1 <= k <= n$.
Se i termini noti sono tutti nulli il sistema è detto omogeneo.
Una n-upla $(x_1, ...x_n)$ di numeri complessi (o reali) è una *soluzione* se soddisfa tutte le n equazioni.

Esempio:
4C + 3Q = 9 (I)
20C + 18Q = 48 (II)
2C + 5Q = 8 (III)

Moltiplichiamo (I) per $\frac{1}{4}$ e otteniamo un sistema lineare equivalente (cioè avendo *esattamente* le stesse soluzioni).

$$\text{(I') C} + \tfrac{1}{4}\text{Q} = \tfrac{9}{4}$$
$$\text{(II) 20C} + \text{18Q} = 48$$
$$\text{(III) 2C} + \text{5Q} = 8$$

Calcolando (II) - 20(I') e (III) - 2(I') si ottiene un altro sistema lineare equivalente.

$$\text{(I') C} + \tfrac{1}{4}\text{Q} = \tfrac{9}{4}$$
$$\text{(II') 0C} + \text{3Q} = 3$$
$$\text{(III') 0C} + \tfrac{7}{2}\text{Q} = \tfrac{7}{2}$$

Moltiplichiamo (II') per $\frac{1}{3}$ si ottiene

$$\text{(I') C} + \tfrac{1}{4}\text{Q} = \tfrac{9}{4}$$
$$\text{(II'')} + \text{Q} = 1$$
$$\text{(III')} + \tfrac{7}{2}\text{Q} = \tfrac{7}{2}$$

Calcolando (III')-$\frac{7}{2}$(II') si ottiene:

$$\text{(I') C} + \tfrac{1}{4}\text{Q} = \tfrac{9}{4}$$
$$\text{(II'')} + \text{Q} = 1$$
$$\text{(III')} + 0 = 0$$

Otteniamo dunque che Q $= 1$ e $C = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

Analogamente possiamo risolvere il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{4}\mathbf{R1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 20 & 18 & 48 \\ 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow R2 - 20(R1), R3 - 2(R1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \frac{1}{3}R3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right)$$

$$\to R3 - \frac{7}{2}R2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2.2 Definizione

Siano $n, n \geq 1$ una tabella

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

di nxn elementi di **C** disposti in n righe e n colonne si chiama matrice di dimensione nxn. Gli elementi si dicono *coefficenti* (o *entrate*) della matrice e sono contrassegnati con un doppio indice ij dove i indica la rigaa e la j indica la colonna di appartenenza.
$M_{nxn}(\mathbf{C})$ = L'insieme di tutte le matrici di dimensioni nxn con entrate **C**
$M_{nxn}(\mathbf{R})$ = L'insieme di tutte le matrici di dimensioni nxn con entrate **R**

ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix} 3 & i & 2+7i \\ 0 & 1 & \pi \end{pmatrix} \in M_{2x3}(\mathbf{C})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbf{R}) \subseteq M_{2x2}(\mathbf{C})$$

2.3 Definizione: forma matriciale

Un sistema lineare di n incognite e n equazioni:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$...$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

può essere rappresentato nella forma matriciale:

$$Ax = b$$

$$\text{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} \text{ vettore dei termini noti}$$

$$\text{La matrice } \big(A \mid B\big) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{n1} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

è detta **matrice aumentata.**

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{9}{4}x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim \frac{1}{2}R1$$

$$R2 - R1, R3 + R1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$-\tfrac{1}{5}R2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$R3 - 4R2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{8}{5} \end{array}\right)$$

$$5R3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

Si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{5} \\ x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

Assegniamo un parametro alla variabile libera x_4: $t = x_4$. Possiamo scrivere la soluzione con un parametro.

$$x_4 = t$$

$$x_3 = 8 - 5t$$

$$x_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(8 - 5t) + \frac{1}{4}t = -\frac{7}{5} + t - \frac{1}{4}t = -\frac{7}{5} + \frac{5}{4}t$$

$$x_1 = 2 - 3(-\frac{7}{5} + \frac{5}{4}t) - \frac{3}{2}(8 - 5t) - 5 = 2 + \frac{21}{5} - 12 - \frac{15}{4}t + \frac{15}{2}t - t =$$

$$\frac{10 + 21 - 60}{5} - \frac{15 + 30}{4}t - t = -\frac{29}{5} + \frac{15}{4}t - \frac{4}{4}t = -\frac{29}{5} + \frac{11}{4}t$$

Il sistema ha infinite soluzioni, una per ogni t $\in \mathbf{C}$.

2.4 Operazioni elementari

Attraverso le seguenti operazioni sulla matrice aumentata (A — b), si ottiene un sistema equivalente più semplice:

- Moltiplicare riga i (Ri) per uno scalare ($\alpha \in \mathbf{C}$). Questa operazioni non cambia le soluzioni del sistema se lo scalare non è $\neq 0$.
- Sommare una riga (Ri) con un multiplo di un'altra riga(Rj): Ri + αRj
- Scambiare riga i (Ri) e riga j (Rj): $R_i \longleftrightarrow R_j$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - \frac{7}{10} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Applichiamo l'algoritmo *Eliminazione di Gauss.*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim \tfrac{1}{2}\text{R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim\text{R2 - R1, R3 + R1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim -\tfrac{1}{5}\text{R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 4 & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim\text{R3 - 4R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \end{array}\right)$$

Lo scopo dell'algoritimo è di avere degli 1 in "diagonale" nella matrice.

$$\sim \tfrac{5}{8}\text{R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Otteniamo un sistema lineare equivalente:

$$x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 2$$

$$x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{1}{5}$$

$$0 = 1$$

0 non è mai uguale uno e quindi non esistono soluzioni a questo sistema lineare.

2.5 Linee in $\mathbf{R}^2$

Consideriamo 2 equazioni in 2 incognite con coefficienti $\in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a22y = b_2 \end{cases}$$

dove $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a22 \in \mathbf{R}$

$$\rightarrow y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}}(I)$$

$$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}}(II)$$

1. Soluzione dove le due rette sul piano cartesiano si incontrano.

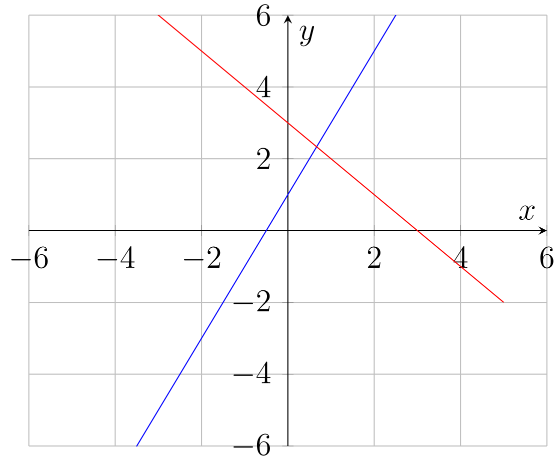


Figure 1: Rette incidenti: 1 soluzioni

2. Soluzione dove le due linee sono parallele (0 soluzioni)

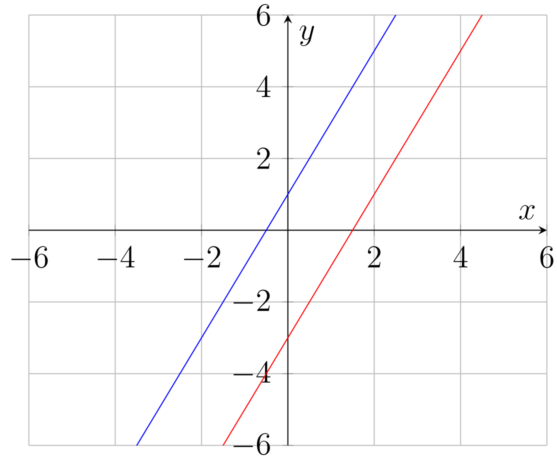


Figure 2: Rette parallele: 0 soluzioni

3. Infinite soluzioni

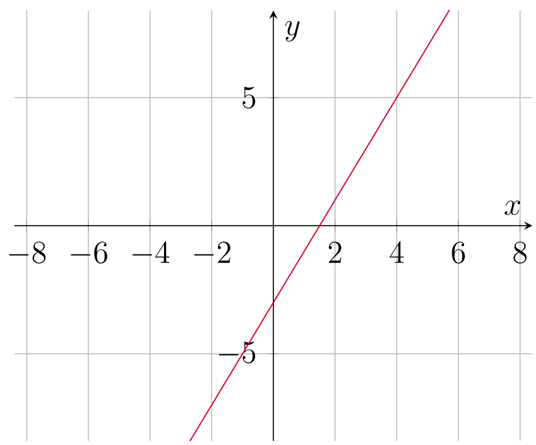


Figure 3: Rette coincidenti: ∞ soluzioni

2.6 Metodo di eliminazione di Gauss (EG)

Data una matrice M = (a_{ij}) in $M_{nxn}(\mathbf{C})$ (oppure in $M_{nxn}(\mathbf{R})$ con righe R1, ... Rn, eseguiamo le seguenti operazioni elementari:

- Scegliamo la prima colonna non nulla j di M (partendo da sinistra). Dopo aver eventualmente scambiato due righe di M, otteniamo una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & a_{ij} & ... & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & ... & 0 & a_{nj} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  Moltiplicando R1 per $\frac{1}{a_{ij}}$, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & * & ... & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ 0 & ... & 0 & a_{nj} & a_{nj+1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  Adesso per ogni $2 \leq i \leq n$, eseguiamo l'operazione elementare Ri -

a_{ij}R1. Otteniamo una matrice di forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & * & ... & * \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . & \\ 0 & ... & 0 & 0 & * & ... & * \end{pmatrix}$$

- Ripetiamo il procedimento (a) sia M' per ottenere:

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 & * & ... & ... & * \\ 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & & * \end{pmatrix}$$

- Dopo un numero finito di passi , si ottiene una matrice che è una matrice a scala

  //Rifare matrice

  cioè esiste un numero $1 \leq r \leq n$ tale che:

  i. Le righe $1 \leq i \leq r$ sono non nulle
  ii. Ogni riga $2 \leq i \leq n$ ha un numero di zeri iniziali superiore alla riga precedente
  iii. Le righe $r + 1 \leq i \leq n$ sono tutte nulle.

  Inoltre il primo coefficiente non nullo di ogni riga è uguale a 1 ed è detto *pivot*. La matrice è detta *forma ridotta* di M. Le colonne che contengono un pivot vengono chiamate *dominanti*.

Esempio:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3x5} \in \mathbf{C}$$

$$R1 \longleftrightarrow R2 \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{10}R1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -i & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R3 + iR1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{3}i \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}R2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6+3i & 7+\frac{1}{3}i \end{pmatrix}$$

$$R3 - (6+3i)R2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{5} - \frac{11}{5}i \end{pmatrix}$$

$$(7 + \frac{1}{5}i - (6+3i)\frac{4}{5} = (7 + \frac{1}{5}i) - \frac{24}{5} + \frac{12}{5}i = \frac{11}{5} - \frac{11}{5}i$$

$$\frac{1}{\frac{11}{5} - \frac{11}{5}i}R3 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7 Risoluzione di sistema lineare

Dato un sistema lineare

$$(*)Ax = b$$

con A $\in M_{nxn}(\mathbf{C}), b \in M_{nx1}(\mathbf{C})$ procediamo con (EG) sulla matrice aumentata $(A|b)$ fino ad ottenere la forma ridotta $(u|c)$ e sistema lineare corrispondente:

$$ux = c$$

che è equivalente a (*). Chiamiamo **variabili dominanti** le r variabilic he corrispondono alle colonne dominanti e **variabili libere** le rimanenti:

Esempio:

$$\begin{cases} 10x_1 + 10x_2 + 30x_3 = 2 \\ 5x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 10 & 30 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & -1 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

$$(EG) \Rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$$

x_1 e x_3 sono variabili dominanti e x_2 è variabile libera.
Si ha uno dei seguenti casi:
[1] : Tutte le colonne di $(u|c)$ tranne c sono dominanti. In tal caso, il sistema ammette una e una sola soluzione.
Esempio 2.1:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[∞] : L'ultima colonna e almeno colonna di u *non* sono dominanti. In tal caso un sistema ammette infinite soluzioni che possiamo ottenere assegnando parametri per ogni colonna libera.
Esempio 2.3:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

[0] : L'ultima colonna c è dominante in tal caso il sistema non ammette soluzione.
Esempio 2.4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Attenzione: La forma ridotta di una matrice **non è unica** ma le colonne dominanti sono univocamente determinate.

2.8 Definizione

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbf{C}))$ con forma ridotta U. Il numero r di righe non nulle, pari al numero di colonne dominanti, è detto **rango** di u e si indica rku (rank). Dimostreremo più avanti che ogni forma ridotta di A ha lo stesso rango, quindi definiamo il rango di A come rkA (rango di A) = rkU (rango di U). Si ha $rkA \leq min(n, n)$

2.9 Osservazione

Possiamo ricavare le condizioni $[1], [\infty], [0]$ usando il rango:

2.9.1 Teorema di Rouchè-Capelli

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbf{C})$, sia $b \in M_{nxi}(\mathbf{C})$.

$$[1] \iff rkA = rk(A|b) = n$$

$$rkU = rk(u|c)$$

$$[\infty] \iff rkA = rk(A|b) < n$$

$$[0] \iff rkA < rk(A|b)$$

3 Matrici e le loro operazioni

3.1 Definizione

Sia $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ e $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ matrici in $M_{nxn}\mathbf{C}$. Diciamo **somma** di A e B la matrice:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$= a_{11} + b11 \dots a_{1n} + b_{1n}$$

$$= a_{21} + b21 \dots a_{2n} + b_{2n}$$

$$= a_{n1} + bn1 \dots a_{nn} + b_{nn}$$

in $M_{nxn}\mathbf{C}$.
Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & -i & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ -1 & 1-i & 5+i \end{pmatrix}$$

Proprietà: L'addizione di matrice è associativa (cioè (A+B)+C = A+(B+C)) e commutativa (cioè A+B = B+A)

3.2 Definizione

Data una matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{nxn}\mathbf{C}$ e $\alpha \in \mathbf{C}$, diciamo prodotto della matrice A per lo scalare α la matrice:

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) \in M_{nxn}(\mathbf{C})$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+i & 5 \\ i & 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}i & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-i \end{pmatrix}$$

Proprietà:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

per $A, B \in M_{nxn}(\mathbf{C}), \alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

3.3 Definizione

Accanto a una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{nxn}(\mathbf{C})$, consideriamo la matrice A^t ottenuta da A scambiando le righe per le colonne detta trasposta di A.
Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 7 \\ \pi & \frac{1}{12} & 0 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} 1 & \pi \\ i & \frac{1}{12} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$$

3.4 Prodotto di matrici

(a) Una matrice di dimensione nx1 è detta vettore (colonna) e si usa la notazione:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ . \\ . \\ v_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbf{C})$$

Una matrice di dimensione 1xn è detta vettore riga e si usa la notazione v^t.

$$v^t = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix} \in M_{1xn}(\mathbf{C})$$

Siano v^t un vettore riga in $M_{1xn}(\mathbf{C})$ e u un vettore colonna in $M_{nx1}(\mathbf{C})$. Si chiama **prodotto di v^t con u** il numero complesso $v^t_u = v_1u_1 + v_2u_2 + ... + v_nu_n \in \mathbf{C}$.

Esempio:

$$v^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v^t_u = 1 + 0 + 9 = 10.$$

(b) possiamo vedere una matrice $A = (a_{ij})$ come n vettori riga $R_i = (a_{i1}...a_{in})$

detti **righe di A** oppure n vettori colonna: $c_j = \begin{pmatrix} a_{ij} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ detti **colonne di A**.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2i & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2i & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Siano $A = (a_{ij}) \in M_{nxn} \in \mathbf{C}$ e $B = (b_{ij}) \in M_{nxn} \in \mathbf{C}$ se n = s, allora possiamo formare il prodotto di A e B:

$$AB = (c_{ij})$$

dove $c_{ij} = R_i C_j = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{ij} \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ è il prodotto della riga i di A e la colonna j di B.

Esempio:

$$v^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R1C1 & R1C2 & R1C3 \\ R2C1 & R2C2 & R2C3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 22 \\ 4 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

Proprietà:

- Il prodotto di matrici è associativo:

$$(AB)C = A(BC)$$

- Leggi distributive:

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

- Scriviamo $I_n \in M_{nxn}(\mathbf{C})$ per la matrice ridotta e diciamo **matrice identità**.

  ESEMPIO:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
$$MI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = M$$

  Per ogni matrice $M = \in M_{nxn}(\mathbf{C})$ abbiamo che $MI_n = M = I_nM$

- $(AB)^t = B^tA^t$

  ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix} = (AB)^t$$

$$B^tA^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{pmatrix}$$

- Il prodotto tra matrici NON è commutativo.

$$AB \neq BA$$

3.5 Osservazione

Siano A = $(a_{ij}) \in M_{nxn}(\mathbf{C}$ e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbf{C}), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Consideriamo Ax = b in forma matriciale. Abbiamo:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & ... & +a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & ... & +a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

è uguale a $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + & ... & +a_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & ... & +a_{nn}x_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 4 \\ x_1 - 2x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 6x_2 \\ x_1 & -2x_2 \\ -x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

3.6 Definizione

Una matrice A = a_{ij} di dimensione nxn si dice matrice quadrata di ordine n. Gli elementi di A a_{ii} formano la **diagonale** di A.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & i \end{pmatrix}$$

Se tutti gli elementi fuori dalla diagonale sono nulli, allora è detta **matrice diagonale**.
Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Se tutti i coefficienti al di sotto della diagonale sono nulli, allora la matrice è detta matrice **triangolare** superiore o inferiore.

$$\begin{pmatrix} 0 & -10 & i \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \textit{oppure} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \\ 100 & \frac{1}{2} & i \end{pmatrix}$$

3.7 Matrici elementari

Prendiamo la matrice identità:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Applichiamo le operazioni elementari alla matrice identità I_n per ottenere matrici elementari che denotiamo come segue:

- E_{ij} la matrice ottenuta da I_n scambiando la riga i con la riga j.
  Esempio:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $E_i(K)$ ottenuta da I_n moltiplicando la riga per lo scalare $\alpha \neq 0 \in \mathbf{C}$.

$$n = 3, \alpha = i + 5 \in \mathbf{C}$$

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

- $E_{ij}(\alpha)$ ottenuta da I_n sommando la riga i con la riga j moltiplicata per $\alpha \in \mathbf{C}$.

$$n = 3, k = -\frac{5}{6}$$

$$E_{13}\left(-\frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.8 Moltiplicazione con matrici elementari

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -i-5 & 5i+25 \end{pmatrix}$$

$$E_{13}\left(-\frac{5}{6}\right)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{25}{6} \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Vediamo che ogni operazioni elementare su una matrice A $\in M_{nxn}(\mathbf{C})$ corrisponde alla (pre)moltiplicazione di A con la matrice elementare ottenuta di I_n effettuando la medesima operazione elementare.

NB:

$$AE_1, (-\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 0 & 3 \\ \pi & 5 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow R2 - 3R1 \sim E_{21}(-3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{5}R2 \sim E_2\left(\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = u = E_2\left(\frac{1}{5}\right)(E_{21}(-3))A$$

Quindi $u = E_2\left(\frac{1}{5}\right)(E_{21}(-3))A$. Si può svolgere lo stesso calcolo in questo modo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow$$
$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 15 & 0 & 1 \end{array}\right) R2 - 3R1 \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\frac{1}{5}R3 \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

3.9 Definizione di invertibile

Una matrice A di dimensione nxn è detta invertibile se esiste un'altra matrice C di dimensione nxn tale che:

$$CA = I_n \text{ e } AC = I_n$$

In tal caso, **C** è detta inversa di A. L'inversa di A, quando esiste, è univocamente determinata e si indica A^{-1}. Infatti se C e C' sono inverse di A allora:

$$C = I_nC = (C'A)C = C'(AC) = C'I_n = C'$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\leadsto C = A^{-1}$
Se A, B $\in M_{nxn}(\mathbf{C})$ sono invertibili allora lo è anche il loro prodotto AB.
Infatti l'inversa di AB = $B^{-1}A^{-1}$:

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A = AA^{-1} \\ &= I_n \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}1I_n)B \\ &= B^{-1}B = I_n\end{aligned}$$

Quindi $(AB)^-1 = B^{-1}A^{-1}$

3.10 Inverse di matrici elementari

La matrici elementari sono tutte invertibili con inverse:

$$E_{ij}^-1 = E_{ij}$$

Esempio:

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3(i+5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i+5 \end{pmatrix}$$

$$E_3\left(\frac{1}{i+5}\right)E_3(i+5)=I_3$$

$$E_{ij}\alpha^-1=E_{ij}(-\alpha)$$

$$E_{23}\left(-\frac{5}{6}\right)=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{5}{6}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$E_{23}E_{23}\left(-\frac{5}{6}\right)=I_3$$

3.11 Proposizione

Sia Ax = b un sistema lineare in forma matriciale, cioè $A \in M_{nxn}(\mathbf{C})$ e $b \in M_{nx1}(\mathbf{C})$ Se $(u|c)$ è una forma ridotta della matrice aumentata $(A|b)$, allora i sistemi lineari Ax = b e Ux = c hanno precisamente le **stesse soluzioni.** cioè sono equivalenti.

3.11.1 Dimostrazione

Siano $E_1, ..., E_5$ le matrici elementari che trasformano $(A|b)$ nella forma ridotta $(u|c)$:

$$(A|b) \sim (A'|b') \sim ... \sim (u|c)$$

Allora abbiamo $(u|c) = E_3, ..., \underbrace{E_1(A|b)}_{A'|b'}$. Per 3.10, le matrici elementari $E_1, ..., E_5$ sono invertibili.

Dunque anche il prodotto $E = E_3...E_1$, è invertibile con $E^{-1} = E_1^{-1}, ..., E_5^{-1}$.

Abbiamo che E(A—b) = (u—c), ovvero EA = u e Eb = c.

Pertanto, se v $\in M_{nx1}(\mathbf{C})$ è una soluzione di Ax = b, cioè $Av = b$, allora

$$U_v = (EA)v = E(Av) = Eb = c$$

Quindi v è soluzione di Ux = c.

Se $v \in M_{nx1}(\mathbf{C})$ è soluzione di Ux = c, cioè Uv = c, allora:

$$Av = \underbrace{(E^{-1}E)}_{I_n}Av = E^-1(EA)v = E^{-1}(Uv) = E^{-1}c = E^-1(Eb) = b$$

Quindi v è soluzione di Ax = b. $\square$

3.12 Proposizione

Sono equivalenti seguenti annunciati per A $\in M_{nxn}(\mathbf{C})$:

i. Il sistema lineare Ax = b ammette soluzione per qualsiasi b $\in M_{nx1}(\mathbf{C})$

ii. Il rkA di A è pari al numero di righe di A.

3.12.1 Dimostrazione

[(1) $\longrightarrow$ (2)] Supponiamo (1) sia u una forma ridotta di A:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & ... & *** & ... & *** & ... & * \\ \vdots & 1 & \vdots & & & & \\ \vdots & 0 & 1 & & & & \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & & & \\ 0 & ... & ... & 000 & ... & 000 & 0 \end{pmatrix}$$

Queste righe esistono se e solo se rkA = rkU < # righe di u = # righe di A
Esiste una matrice invertibile E tale che u = EA (E = prodotto delle matrici elementari dell'EG).

Consideriamo il vettore $c = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e mettiamo $b = E^{-1}C$. Allora il sistema lineare Ax = b ammette una soluzione v per (1) cioè Av = b. Allora:

$$Uv = Eb = E(E^{-1}C) = C \text{ per } 3.11$$

Per il teorema di Ronché-Capelli, rkU = rk(u—c), cioè

$$(u|c) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & ... & *** & ... & *** & ... & & 0 \\ \vdots & 1 & & & \vdots & & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & ... & ... & 000 & ... & 000 & & 1 \end{array}\right)$$

L'ultima riga non può essere nulla, altrimenti l'ultima colonna di (u—c) sarebbe una colonna dominante.
Dunque rkA = rkU = # righe di U = # righe di A.

[(2) $\longrightarrow$ (1)] Supponiamo (2)
Sia b $\in$ $M_{nx1}(\mathbf{C})$ e consideriamo Ax = b. Eseguendo EG sulla matrice (A—b), otteniamo una forma ridotta (u—c). Siccome rkU = # righe di U, ogni riga di U contiene un *pivot*. Perciò rkU = rk(u—c) e quindi rkA = rk(A—b). Quindi siamo in caso [1] oppure [∞]. del teorema RC. $\square$

4 Matrici invertibili e il determinante

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix}$$

Eseguiamo EG e calcoliamo il prodotto delle matrici elementari contemporaneamente:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 11 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim E_{21}(-5), E_{31}(4) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$E_{32}(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -6 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim E_3\left(-\frac{1}{4}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Siccome rkU = 3, possiamo continuare per ottenere la matrice identità.

$$\begin{aligned}(u|E) \sim E_{23}(1) &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \\ \sim E_{12}(-2) &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Allora:

$$\begin{aligned} I_3 = E_{12}(-2)E_{23}(1)u &= E_{12}(-2)E_{23}(1)EA \\ &= E'A \end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$AE' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ -4 & -10 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = E'$$

4.1 Proposizione

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbf{C})$. A è invertibile se e solo se esiste una sequenza $E_1, ..., E_t$ di matrici elementari tali che $I_n = E_t ... E_1 A$.

4.1.1 Dimostrazione

Supponiamo che A sia invertibile. Per ogni $b \in M_{nx1}(\mathbf{C})$, il vettore $A^{-1}b =: v$ è una soluzione del sistema lineare $Ax = b$.
Infatti:

$$Av = A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = I_n b = b$$

Per 3.12, abbiamo che rkA = n. (Il rango è il numero di righe non nulle nella forma ridotta di A). Esiste una forma ridotta di A:

$$u = \begin{pmatrix} 1 & * & ... & ... & * \\ 0 & 1 & * & ... & * \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Con 1 sulla diagonale e matrici elementari $E_1 ... E_t$ tali che $u = E_t ... E_1 A$.
Proseguendo l'esempio precedente, troviamo matrici elementari $E_{t+1}, ... E_s$ tali che $I_n = E_s ... E_{t+1} u = E_s ... E_{t+1}, E_t ... E_1 A$.
Ora supponiamo che esistano $E_1, ..., E_s$ matrici elementari tali che $I_n = E_s ... E_1 A$.
Per 3.10 le matrici elementari sono invertibili, quindi abbiamo:

$$E_1^{-1} \dots E_s^{-1} = E_1^{-1} ... E_s^{-1} I_n = \overbrace{\underbrace{E_1^{-1} E_s^{-1}}_{(E_s ... E_1)^{-1}} E_s ... E_1}^{I_n} A$$

Dunque A è prodotto di matrici invertibili e quindi A è invertibile con $A^{-1} = E_s ... E_1$. $\square$

4.2 Calcolo della matrice inversa

Data una matrice invertibile $A \in M_{nxn}(\mathbf{C})$.
Usiamo le operazioni elementari per trasformare A nella matrice identità, eseguiamo le medesime operazioni elementari su I_n per ottenere A^{-1} :

$$(A|I_n) \sim E_1(A'|E') \sim E_2 \cdots \sim E_s(I_n|A^{-1})$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim E_{31}(-5) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim E_{32}(4) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim E_{23}(-4) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim E_{13}(-3) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim E_{12}(-2) \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)}_{I_n \qquad\qquad A^{-1}}$$

4.3 Teorema delle matrici invertibili

Sono equivalenti i seguenti enunciati per la matrice $A \in M_{nxn}(\mathbf{C})$:

- (a) A è invertibile.
- (b) Esiste una sequenza $E_1 ... E_t$ di matrici elementari tali che $E_t ... E_1 A = I_n$
- (c) rkA = n
- (d) Il sistema lineare $Ax = b$ ammette soluzione per qualsiasi $b \in M_{nx1}(\mathbf{C})$
- (e) Il sistema lineare $Ax = 0$ (Vettore nullo) ammette la soluzione x = $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
- (f) Esiste una matrice $C \in M_{nxn}(\mathbf{C})$tale che $CA = I_n$
- (g) Esiste una matrice $D \in M_{nxn}((C)$ tale che $AD = I_n$

4.3.1 Dimostrazione

(a) $\iff$ (b) (4.2)
(a) $\implies$ (g)
(a) $\Rightarrow$ (f)
(g) $\implies$ (d) (4.1)
(d) $\implies$ (c) (3.12)
(e) $\implies$ (c)

(f) $\implies$ (e)
Supponiamo che esiste $C \in M_{nxn}(\mathbf{C})$ tale che $CA = I_n$. Sia $v \in M_{nx1}(\mathbf{C})$ una soluzione del sistema Ax = 0. Allora $v = vI_n = (CA)v = C(Av) = C0 = 0$.
Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

4.3.2 Nota

$$D = I_n D = (CA)D = C(AD) = CI_n = C$$

Quindi:

$$C = D = A^{-1}$$

4.4 Proposizione

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbf{C})$ se $ad - bc \neq 0$, allora 0 è invertibile e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Se $ad - bc = 0$ allora A non è invertibile.

4.4.1 Dimostrazione

$$M(\alpha N) = \alpha(MN)$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{ad - bc} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{ad - bc} \left(\begin{pmatrix} ad - bc & -ba + ab \\ cd - dc & -bc + ad \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{ad - bc} \left(\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Se invece $ad - bc = 0$, allora

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc \\ cd - cd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ è soluzione al sistema Ax = 0.

Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora A non è invertibile per 4.3(e).

Se $\begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, allora d = c = 0.
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha rango < 2, quindi A non è invertibile per 4.3(e). $\square$

4.5 Definizione

Definiamo una funzione:

$$det : M_{nxn}(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

Detta *determinante* per ricorrenza:

$$n = 1$$
$$A = (a) \quad detA := a$$

$$n = 2$$
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} detA := ad - bc$$

$$n \geq 3$$
$$A = a_{ij}$$

Si pone

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{ij} detA_{ij}$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la prima riga e la colonna j.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$detA = (-1)^2 \cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^3 \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^4 \cdot 3 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= -6 + 6 - 3 = -3$$

Ulteriore esempio:

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 1(-2-1) - 2(-3-0) + 3(3-0) = -3 + 6 + 9 = 12$$

4.6 Regola di Sarrus

Per una matrice di dimensione 3x3 possiamo usare la regola:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a12a_{21}a_{33}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$detA = 1*1*0+2*3*1+3*0*2-3*1*1-1*3*2-2*0*0 = 6-3-6 = -3$$

4.7 Teorema di Laplace

Il determinante di una matrice $A = (a_{ij})$ può essere sviluppato per qualsiasi riga o colonna come segue:
Sviluppo per la riga i

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è la matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j. Sviluppo per la colonna j

$$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

Il valore $(-1)^{i+j} detA_{ij}$ è detto complemento algebrico di a_{ij}. Il segno si determina secondo a

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 0^- & 1^+ & 3^- \\ 1^+ & 2^- & 0^+ \end{pmatrix}$$

Riga 3:

$$detA = 1 \cdot det \begin{pmatrix} 2^- & 3^+ \\ 1^+ & 3^- \end{pmatrix} - 2 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = (6-3) - 2(3-0) = 3 - 6 = -3$$

Colonna 3

$$detA = 3 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3(0-1) - 3(2-2) = -3$$

4.8 Il determinante e la trasposta

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$detA = ad - bc \qquad detA^t = ad - cb$$

$$\implies detA = detA^t$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad detA = -3$$

$$A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo per riga 1:

$$detA = 1 \cdot det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{11}} -2 \cdot det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A_{12}} +3 \cdot det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A_{13}} = -3$$

Sviluppo per la trasposta la colonna 1:

$$detA^t = 1 \cdot det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{A^t_{11}=(A_{11})^t} -2 \cdot det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A^t_{12}=(A_{12})^t} +3 \cdot det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^t_{13}=(A_{13})^t} = -3$$

Se $A = a_{ij} \in M_{nxn}(\mathbf{C})$, **allora** $detA = detA^t$**.**

4.9 Il principio di induzione

"Dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale una proprietà p(n)"

p(n) = "Ogni matrice di A di dimensione nxn, $detA = detA^t$"

Base dell'induzione

p(n) è vera per $n = 1$ ovvero p(1) è vera.

Passo induttivo

Supponendo che p(n) sia vera; ne consegue che p(n+1) è vera.

Allora p(n) è vera per tutti gli $n \in \mathbf{N}$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Sviluppo per la riga 4:

$$detA = 10 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(Si Laplasizza ulteriormente) Riga 3:

$$10(8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 10 \cdot 8 \cdot (1 \cdot 5 - 0 \cdot 2)$$

$$= 80 \cdot 5$$

$$= 400$$

4.10 Proposizione

Sia $A = a_{ij} \in M_{nxn}(\mathbf{C})$ una matrice triangolo superiore o inferiore. Allora $detA = a_{11}a_{22}...a_{nn}$.

4.10.1 Dimostrazione

(Superiore) Induzione su n.
Proprietà p(n): per $A \in M_{nxn}(\mathbf{C}), detA = a_{11}...a_{nn}$

- **Base dell'induzione**: p(1) è vera:

  $A = a_{11} \in M_{1x1}(\mathbf{C})$

- **Passo induttivo**: Supponiamo p(n):

  $A = a_{ij} \in M_{n+1n+1}(\mathbf{C})$

  Laplace per riga n+1

  $detA = a_{n+1n+1}detA_{n+1n+1} = a_{n+1n+1}(a_{nn}...a_{11})$
  Quindi p(n+1) è vera.

Per il principio di induzione, abbiamo dimostrato che p(n) è vera per ogni $n \in \mathbf{N}$. La dimostrazione per A triangole inferiore è simile. $\square$

Esempio:

$$(1) \qquad u = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5-i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$detu = 1$$

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$detu' = 0$$

Poiché il prodotto degli elementi sulla diagonale è uguale a 0.

$$(2) \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad detA = -3$$

$$det(E_{23}A) = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (LPj = 1) = 1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$6 - 0 - (6 - 3) = 3 = -detA$$

$$det(E_2(2)A = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -12 + 6$$

$$= -6 = 2detA$$

$$det(E_{13}(2)A = det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (j=1) 3det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 1det \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3(-6) + 1(18-3)$$

$$= -3 = detA$$

4.11 Teorema

Siano $A \in M_{nxn}(\mathbf{C}), 0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$, allora:

$$det(EA) := \begin{cases} -detA \quad se \quad E = E_{ij} \\ \alpha detA \quad se \quad E = E_i(\alpha) \\ detA \quad se \quad E = E_{ij}(\alpha) \end{cases}$$

NB:

$$\det I_n = 1 \text{ (Matrice diagonale)}$$

$$\det E_{ij} = \det E_{ij} I_n = -1$$

$$\det E_i(\alpha) = \det E_i(\alpha) I_n = \alpha$$

$$\det E_{ij}(\alpha) = \det E_{ij}(\alpha) I_n = 1$$

Quindi per $A \in M_{nxn}(\mathbf{C})$ ed ogni matrice elementare E, abbiamo

$$\det EA = \det E \det A$$

4.11.1 Dimostrazione

(n=2):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{nxn}(\mathbf{C})$$

$$detA = ad - bc$$

$$det(E_{12}A \quad o \quad E_{21}A) = det \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = cb - ad = -detA$$

$$det(E_1(\alpha)A = det \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha ad - \alpha bc$$
$$\alpha(ad - bc) = \alpha detA$$

$$det(E_{21}(\alpha)A = det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \alpha a & d + \alpha b \end{pmatrix} = a(\alpha + \alpha b) - b(c + \alpha a)$$
$$= ad + \cancel{\alpha ab} - bc - \cancel{\alpha ab}$$
$$= detA \qquad \square$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim E_{31}(-1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim E_3\left(-\frac{1}{3}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{u}$$

$$detu = 1$$
$$u = E_3\left(-\frac{1}{3}\right) E_{31}(-1)A$$
$$A = E_{31}(-1)^{-1} E_3\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} u$$
$$E_{31}(1)E_3(-3)u$$

$$\det u = det(E_{31}(1)E_3(-3)u) =$$
$$= det(E_3(-3)u) = -3 \cdot detu = -3$$

4.12 Corollario

Se $A \in M_{nxn}$, allora $\det A \neq 0$ se e solo se A è invertibile.

4.12.1 Dimostrazione

Sia u una forma ridotta di A:

$$\det A \neq 0 \underset{4.3}{\Longleftrightarrow} \det u \neq 0 \underset{4.10}{\Longleftrightarrow} rkU = n \underset{4.3}{\Longleftrightarrow} \text{A è invertibile} \qquad \square$$

4.13 Corollario

Siano $A, B \in M_{nxn}(\mathbf{C})$. Allora $\det AB = \det A \det B$.

4.13.1 Dimostrazione

Caso 1: A non è invertibile allora $\det A = 0$. Se AB è invertibile, allora $A(B(AB)^{-1}) = AB(AB)^{-1} = I_n$ e $B(AB)^{-1}$ sarebbe l'inversa di A. Quindi AB non è invertibile. Allora $\det AB = 0 = \det A \det B$.

Caso 2: A è invertibile.
Per 4.1, esiste una sequenza $E_1 \dots E_t$ di matrici elementari tali che $E_t \dots E_1 A = I_n$.
Siccome $E_1 \dots E_t$ sono invertibili, possiamo considerare

$$\begin{aligned} A &= (E_1^{-1} \dots E_t^{-1}) E_t \dots E_1 A \\ &= E_1^{-1} \dots E_t^{-1} I_n = E_1^{-1} \dots E_t^{-1} \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \det AB &= \det E_1^{-1} \dots E_t^{-1} B \\ &= (teo.) \det E_t^{-1} \det E_2^{-1} \dots \det E_t^{-1} \det B \\ &= (teo.) \det E_1^{-1} \dots \det E_t^{-1} \det B \\ &= \det A \det B \qquad \square \end{aligned}$$

4.14 Formula per A^{-1}

Se $\det A \neq 0$, allora

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A*$$

è la matrice i cui coefficienti sono i complementi algebrici di A^t e $\det A^t = \frac{1}{\det A}$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A* = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\det A^{-1} = -\frac{1}{3}$$

4.15 Teorema di Cramer

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbf{C})$ con $\det A \neq 0$, sia $b \in M_{nx1}(\mathbf{C})$. Allora il sistema lineare:

$$Ax = b$$

possiede un'unica soluzione.

$$p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

dove $p_i = \frac{\det A_i}{\det A}$ dove A_i è la matrice ottentua da A sostituendo la colonna i con il vettore b.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A \quad \det A = -3$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A_1 = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -6$$

$$\det A_2 = 3$$

$$\det A_3 = -1$$

$p_1 = \frac{-6}{-3} = 2$, $p_2 = \frac{3}{-3} = -1$, $p_3 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

Dunque $p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione del sistema lineare $Ax = b$.

5 Spazi vettoriali e sottospazi

Esempio:

$$\text{Possiamo identificare } R^2 \text{ con l'insieme } M_{2x1} = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} | a, b \in \mathbf{R} \right)$$

Possiamo

- Sommare i vettori
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix}$$
- Moltiplicare per uno scalare $\alpha \in \mathbf{R}$
$$\alpha \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{pmatrix}$$

5.1 Definizione

Sia $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oppure $\mathbf{K} = \mathbf{C}$; sia uno *spazio vettoriale* su $\mathbf{K}$ è un insieme non vuoto $\mathbf{V}$ i cui elementi sono detti *vettori* sul quale sono definite due operazioni:

i. per $v, w \in \mathbf{V}$ abbiamo $v + w \in \mathbf{V}$ (*addizione*)

ii. per $\alpha \in \mathbf{R}, v \in \mathbf{V}$ abbiamo $\alpha\mathbf{V} \in \mathbf{V}$ (*moltiplicazione per uno scalare*)

che godono della seguenti proprietà:

i. Valgono le seguenti proprietà:

   - $(v+u)+w = v+(u+w)$ per tutti i vettori dell'insieme $v, w, u \in \mathbf{V}$ (*associativa*)
   - esiste $0_v \in \mathbf{V}$ tale che $v+0_v = v = 0_v+v$ per ogni $v \in \mathbf{V}$ (*elemento neutro*)
   - Per ogni $v \in \mathbf{V}$ esiste $w \in \mathbf{V}$ tale che $v + w = 0_v = w + v$, scriviamo $w = -v$
   - $v + w = w + v$ per tutti $v, w \in \mathbf{V}$ (*Commutativa*)

ii. per ogni $v \in \mathbf{V}$

$$1v = v$$

iii. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ per tutti gli scalari $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ e tutti i vettori $v \in \mathbf{V}$

iv. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$
$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta w$ (*Leggi Distributive*)

Esempi:

i. $v = M_{nxn}(\mathbf{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$ con addizione di matrici e moltiplicazioni per scalari uguali

$$0_v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$0_v = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

In particolare scirivamo

$$\mathbf{K}^n = M_{nx1}(\mathbf{K})$$

$$0_{\mathbf{K}n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. $\mathbf{K}[x]$ l'insieme dei polinomi a coefficenti in $\mathbf{K}$.

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

ES:

$$f = 1 - 2x + 3x^2 + 0x^3$$

$$9 = 1 + 6x^3 + 4x^4$$

$$9 = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$$

$$f + 9 = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$\alpha f = (\alpha a_0) + (\alpha a_1)x^1 + \dots + (\alpha a_n)x^n$$

$\mathbf{K}[x]$ è uno spazio vettoriale.
L'elemento neutro:

$$0 + 0x + \cdots + 0x^n$$

$\mathbf{K}[x]$ l'insieme di polinomi di grado $\leq n$ a coefficenti in $\mathbf{K}$ è uno spazio vettoriale.

iii. Le successioni $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}$
Esempio:
$$(1, -1, 2, 3, 6, i, \dots) \in \mathbf{C}$$
formano uno spazio vettoriale S su K.
$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} + (b_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a_n + b_n)_{n\in\mathbf{N}}$$
$$\alpha(a_n)_{n\in\mathbf{N}} = (\alpha a_n)_{n\in\mathbf{N}}$$
L'insieme di successioni che soddisfano la relazione '
$$a_{k+2} - 5a_{k+1} + 3a_k = 0$$
per $k = 1, 2, 3, \dots \in \mathbf{N}$.
Esempio:
$$(1, 0, -3, -15, -66, \dots)$$
è uno spazio vettoriale.
$$0_v = 0_{v'} = (0, 0, 0, 0, \dots)$$

iv. L'insieme di funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è uno spazio vettoriale:
$$f, g \in \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$$
$$f + g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$\alpha \in \mathbf{R}$,
$$\alpha f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$
$0_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}$ è la funzione: $0_{\mathbf{R}^{\mathbf{R}}}(x) = 0$

v. $\mathbf{V} = 0_v$ è uno spazio vettoriale. Scriviamo $\mathbf{V} = 0$. PIPO

5.2 Osservazioni

Sia **V** uno spazio vettoriale su **K**. Siano $v \in \mathbf{V}$, $a \in \mathbf{K}$

- $\alpha 0_v = 0_v$ infatti $\alpha 0_v = \alpha(0_v + 0_v) = \alpha 0_v + \alpha 0_v$
  Sommando con $-\alpha 0_v$, si ottiene

$$\alpha 0v + (-\alpha 0v) = (\alpha 0v + \alpha 0v) + (\alpha 0v)$$

$$= \alpha 0v + (\alpha 0v + (-\alpha 0v))$$

$$= \alpha 0v + 0v$$

$$\alpha 0v$$

- 0.v = 0v
  $v = 1.v = (1 + 0).v = 1.v + 0.v = v + 0.v$
  Sommando con $-v$, si ottiene

$$0v = v + (-v) = (v + 0.v) + (-v) = 0.v + (v + (-v))$$

$$= 0.v + 0v$$

$$= 0.v$$

- Se $\alpha.v = 0v$, allora $\alpha = 0$ oppure $v = 0v$.
  Se $\alpha = 0$ allora

$$0.v = 0v \qquad \square$$

  Se $v = 0v$:

$$\alpha.0v = 0v \qquad \square$$

- $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$

5.3 Definizione di combinazione lineare

Sia **V** uno spazio vettoriale su **K** e siano $v_1 \dots v_n \in \mathbf{V}$, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbf{K}$. Il vettore $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_n v_n$ è detto *combinazione lineare* di $v_1, \dots, v_n$ con coefficienti $\alpha_1, \dots, v_n$.
Esempio:

Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^3$ è combinazione lineare di $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con coefficienti 1, 2, 3. Infatti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un'altra combinazione lineare

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO:

$$f = 2x^2 + 4x + 3 \in \mathbf{R}[x]$$

è una combinazione lineare

$$g_1 = x^2 + 2x,\ g_2 = x - 1,\ g_3,\ \tfrac{1}{2}x - 1$$

infatti

$$2g_1 + 3g_2 + (-6)g_3 = 2(x^2 + 2x) + 3(x - 1) - 6\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

$$= 2x^2 + 4x + 3x - 3 - 3x + 6$$
$$= 2x^2 + 4x + 3 = f$$

5.4 Definizione

Sia $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale e siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{V}$. Se ogni $v \in \mathbf{V}$ è combinazione linare di $v_1, \ldots, v_n$ si dice $(v1, \ldots, v_n)$ è un insieme di generatori e $\mathbf{V}$ è detto *finitamente generato*.

Esempi:

$$(1) e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un insieme di genetarore $\mathbb{K}^3 = M_{3x1}(\mathbf{K})$

per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Infatti se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, allora:

$$v = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scrivendo $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

abbiamo che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{K}^n$

Dunque $\mathbb{K}^n$ è finitamente generato.

Esempio:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori di $\mathbb{R}^2$

(2)

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è un insieme di generatori $\mathbb{R}^2$.

Infatti, se $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, allora

$$v = (v_1 - v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(v_2 - v_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (v_1 - v_2) + v_2 \\ 3(v_1 - v_2) + v_2 + 3(v_2 - v_1) \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$$

$$v = 0. \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 4. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0. \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I coefficenti della combinazione lineare non sono univocamenti determinati:

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$= 0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Gli spazi vettoriali $\overbrace{\mathcal{S}}^{successioni}$, $\overbrace{\mathbf{K}[x]}^{polinomi}$, $\overbrace{R^R}^{funzioni}$ non sono finitamente generati

5.5 Definizione

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sotto insieme $\emptyset \neq \mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ è detto *sottospazio* di $\mathbb{V}$ se soddisfa le proprietà:

i. Per ogni u, $u' \in \mathbb{U}$, $u + u' \in \mathbb{U}$

ii. per ogni $u \in \mathbb{U}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha u \in \mathbb{U}$

5.5.1 Osservazione

In tal caso $\mathbb{U}$ è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni $+, \cdot$ di $\mathbb{V}$.

Esempi:
(1) Il sottoinsieme

$$u = \left\{ \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; v_2 = mv_1 \right\}$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$ per qualsiasi $n \in \mathbb{R}$.
Infatti:
(i)

$$\begin{pmatrix}v\\mv\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u\\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v+u\\m(v+u)\end{pmatrix} \in U$$

(ii)

$$\alpha\begin{pmatrix}v\\mv\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha v\\\alpha mv\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha v\\m(\alpha)v\end{pmatrix} \in U$$

5.6 Definizione

Dati $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{V}$, l'insieme $< v_1, \dots, v_n = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n | \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$ è un sottospazio di $\mathbf{V}$. Infatti:

i. $(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) + (\sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i)$

$= \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$

$= (\alpha_1 v_1 + beta_1 v_1) + \cdots + (\alpha_n v - n + \beta_n v_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \in < v_1, \dots, v_n >$

ii. $\beta(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\beta \alpha_i) v_i \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Diciamo che $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ è il sottospazio generato da $v_1, \dots, v_n$

Esempi:

$$v = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{L} \subseteq \mathbb{R}^2$$

è il sottospazio guidato da $\binom{1}{m}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \frac{1}{m} | \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$\mathbf{S}'$ è il sottospazio di $\mathcal{S}$ generato da u_1 e u_2.

5.7 Definizione

Se u, w sono sottospazi di $\mathbf{V}$ allora l'intersezione

$$u \cap w = \{ v \in \mathbf{V} | v \in U \wedge v \in W \}$$

è un sottospazio di $\mathbf{V}$.
In generale, l'unione

$$u \cup w = \{ v \in \mathbf{V} | v \in U \vee v \in W \}$$

Esempio:

$$v = \mathbb{R}^2$$
$$u = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$
$$w = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} | \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$
$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U \cup W$$

Quindi $U \cup W \subseteq \mathbf{V}$ non soddisfa (i).

L'insieme $U + W = \{u + w | u \in U \wedge w \in W\}$ è un sottospazio di $\mathbf{v}$, detto che la somma di U e W.
NB:

$$U \cup W \subseteq U + W$$

perché

$$u = \{u = u + 0_v \quad | \quad u \in U\}$$
$$w = \{w = 0_v + w \quad | \quad w \in W\}$$

5.8 Definizione

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{nxn}(\mathbb{K})$.

Il sottospazio di $\mathbb{K}^n$

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right\rangle$$

generato dalle colonne di A è detto lo spazio delle colonne di A.

Esempio:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2x3}(\mathbb{R})$$

$$C(A) \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$C(A) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad | \quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$C(A) = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + (3) \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in C(A)$$

NB:

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 6x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

5.9 Proposizione

Sia $A = (a_{ij}) \in M_{nxn} \in (\mathbb{K})$
Lo spazio delle colonne $C(A)$ consiste di tutti i vettori $b \in \mathbb{K}^n$ per i quali il sistema lineare Ax=b possiede soluzione.

5.9.1 Dimostrazione

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \quad \middle| \quad v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

$$\left\{ b \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \exists v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \;\middle|\; Av = b \right\} \qquad \square$$

5.10 Definizione di spazio nullo

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$. L'insieme $N(A) = \left\{ v \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; Av = 0 \right\}$ dove $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è detto spazio nullo di A.

NOTAZIONE: $N(A)$ sta per Null(A).

5.11 Proposizione

Lo spazio nullo $N(A)$ di una matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ è uno sottospazio di K^n.

5.11.1 Dimostrazione

Siano $v, u \in N(A)$ cioè $Av = 0 = Au$, e sia $\alpha \in \mathbb{K}$. Allora

- $A(v+u) = Av + Au = 0 + 0 = 0$ (*legge distributiva del prodotto di matrici)*
  Quindi $v + u \in N(A)$
- $A(\alpha v) = \alpha(Av)$ (*Proprietà di moltiplicazione con uno scalare*)
  $= \alpha.0 = 0$
  Quindi $\alpha v \in N(A)$

Dunque $N(A)$ è un sottospazio. $\square$

Esempio: (1)

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}, N(A) \subseteq \mathbb{C}$$

N(A) = Soluzioni del sistema lineare Ax = 0
Risolviamo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim E_1 - i \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \sim E_{31}(-i) \wedge E_{23}(1)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{quindi N(A)} \left\{ 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(2)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, N(A) \subseteq \mathbb{R}^3$$

Risolviamo il sistema lineare Ax = 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim E_2\left(\frac{1}{6}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow x_3 = t$$

$$\begin{cases} x_1 = -2(-\frac{1}{2}t) = t \\ x_2 = -\frac{1}{2}tx_3 = t \end{cases} \quad \in \mathbb{R} \text{ Quindi}$$

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \in R^3$$

6 Dipendenza e indipendenza lineare

Esempio:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_{2x1}(\mathbb{R}) \right\}$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ insieme di generatori.}$$

Infatti, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{V}$,

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_2 - 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (v_1 - 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(v_1 - \frac{3}{2} v_2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v_2}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I sottoinsiemi $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{C}$ sono insieme di generatori.

In particolare:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.1 Proposizione e definizione di insieme di generatori

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme di generatori di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su $\mathbb{K}$ e v_n è combinazione di lineare $v_1, \ldots, v_n$ allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è un **insieme di generatori.**

6.1.1 Dimostrazione

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$. Per ogni $v \in \mathbb{V}$, esistono $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$\begin{aligned} v &= \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1} + \beta_n v_n \\ &= \beta_1 v_1 + \cdots + b_{n-1} v_{n-1} + \beta_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i \right) \\ &= (\beta_1 + b_n \alpha_1) v_1 + \cdots + (\beta_n + \beta_n \alpha_{n-1}) v_{n-1} \end{aligned}$$

Quindi $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è un insiemi di generatori. $\square$.

6.2 Definizione di linearmente dipendente

Siano $v_1, \dots v_n \in \mathbb{V}$ dei vettori in uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$.
Un insieme $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ è detto *linearmente dipendente.* Se almeno uno dei vettori $v_1, \dots, v_n$ è combinazione lineare dei rimanenti.

6.3 Teorema e definizione di linearmente indipendente

Siano $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{V}$. Sono equivalenti i seguenti enunciati:

i. $\{v_1, \dots, v_n\}$ **non** è linearmente dipendente

ii. se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$, allora $\alpha_i = \beta_i \;\; \forall\, 1 \leq i \leq n$.

iii. Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sono coefficenti tali che $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0v$, allora $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Se valgono le condizioni (i), (ii), (iii), allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è detto *linearmente indipendente.*

6.3.1 Dimostrazione

Dimostreremo che (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (i)

$\neg(ii) \Longrightarrow \neg(i) \Longrightarrow \neg(iii)$

[¬2 => ¬3]

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \Longrightarrow \alpha_i = \beta_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.
Supponiamo che

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n &= 0v \\ &= 0.v_1 + 0.v_2 + \cdots + 0.v_n \end{aligned}$$

Quindi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ per (2).

$[\neg(2) \Longrightarrow \neg(1)]$

Supponiamo che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$ e $\alpha_j \neq \beta_j$ per qualche $1 \leq i \leq n$.
Quindi $0v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) v_i$.

E allora $v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{b_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i + \sum_{i=j+1}^{n} \frac{b_i - \alpha_i}{\alpha_j - \beta_j} v_i$

Dunque $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente dipendente.

$[\neg(1) \Longrightarrow \neg(3)]$

Supponiamo che $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente dipendente cioè esistono

$$\alpha_i, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

tali che

$$v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_i v_i + \sum_{i=j+1}^{n} \alpha_i v_i$$

Allora $0v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots ... + \alpha_n v_n$

Dunque (3) non vale.

Esempi: (1)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è linearmente indipendente. Infatti se

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$ e $2\alpha_2 = 0$.
Abbiamo $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_1 = 0$

(2)

Un insieme $\{v_1, v_2\} \subseteq \mathbb{V}$ è linearmente dipendente se e solo se esiste $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha v_1 = v_2$ oppure $\alpha v_1 = v_2$ oppure $v_1 = \alpha v_2$.

(3)

Un insieme $\{v\} \subseteq \mathbb{V}$ è linearmente dipendente se e solo se $v = 0v$.
Inoltre, per ogni $\{v_1, \ldots, v_n\}$ se $v_j = 0v$ per qualche j, allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è linearmente dipendente perché $0v = \underbrace{0v_1}_{0v} + \cdots + \underbrace{0v_{j-1}}_{0v} + \underbrace{0v_j}_{0v} + \underbrace{0v_{j+1}}_{0v} + \cdots + \underbrace{0v}_{0v}$.
e quindi $\neg(3)$.

6.4 Definizione di base

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$. L'insieme $U = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è detto **base** di $\mathbb{V}$ se U è un insieme di generatori di $\mathbb{V}$ e U è linearmente indipendente.

6.5 Osservazione

Per teorema 6.4, un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{V}$ è una base se e solo se possiamo ricostruire in modo unico tutti i vettori di $\mathbb{V}$ medianti combinazione lineari. Possiamo pensare di una base $U = \{b_1, \ldots, b_n\}$ di $\mathbb{V}$ come un sistema di coordinate:

Sia $v \in \mathbb{V}$. Esiste un unico vettore $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$\mathbb{V} = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n.$$

$$\text{Scriviamo } [v]_u \text{ per il vettore } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Esempi: (1)

$$\mathbb{V} = \mathbb{K}^n, \mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n} \right\}$$

è una base di $\mathbb{K}^n$ detta **base canonica**.

Infatti per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, abbiamo $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$.

Supponiamo $\mathbb{O} = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, quindi $v_1 = 0, v_2 = 0, \dots, v_n = 0$.

(2)

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^2$.

6.5.1 Base di C(U) per una matrice u in forma ridotta

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(U) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

Le colonne dominanti formano una base di C(U): Infatti
Insiemi di generatori

Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}7\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2 7\\\alpha_2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\alpha_3\\\alpha_3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_1 + 7\alpha_2\\\alpha_2 + \alpha_3\\\alpha_3\\0\end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_3 = 0, \alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \alpha_1 = \alpha_1 + 7\alpha_2 = 0$

Insieme di generatori

Proposizione 6.1:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix}7\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori di C(U).

In generale le colonne dominanti di una matrice $\mathbb{U}$ in forma ridotta formano una base $C(U)$. Inoltre le colonne non nulle di U^t (cioè le righe non nulle di U) formano una base di $C(U^t)$.

6.6 Proposizione

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

(1) $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori minimo, cioè nessun sottoinsieme di $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori.
(2) $\mathcal{B}$ è massimamente linearmente dipendente, cioè nessun insieme di vettori che contenga propriamente $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente.

6.7 Teorema

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale $\mathbb{K}$ finitamente generato.

- Se $\mathbb{V} \neq 0$, allora $\mathbb{V}$ possiede una base.
- Se $\mathbb{V} = 0$, allora $\mathbb{V}$ *non* possiede una base.

6.7.1 Dimostrazione

Se $V = 0 = \{0v\}$, allora ogni sottoinsieme non-vuoto di $\mathbb{V}$ contiene $0v$ e quindi non può essere linearmente indipendente.
Supponiamo $V \neq 0$. Sia $\mathcal{B}_n = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un insieme di generatori. Se $\mathcal{B}_n$ è linearmente indipendente, allora $\mathcal{B}_n$ è una base di $\mathbb{V}$. Altrimenti uno dei vettori di $\mathcal{B}_n$ è combinazione lineare dei rimanenti.
Senza perdita di generalità, supponiamo che:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Per 6.1, $\mathcal{B}_{n-1} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme di generatori. Se $\mathcal{B}_{n-1}$ è linearmente indipendente allora è una base.
Altrimenti continuiamo come sopra. Proseguendo così, otteniamo un sottoinsieme di $\mathcal{B}_n$ che è una base.

Esempio:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$$

$$\mathcal{C}_3 = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{v_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{v_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}^{v_3} \right\}$$

$\mathcal{C}_3$ è un insieme di generatori, ma non è linearmente dipendente:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3v_2 + 2v_1$$

Allora

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme di generatori. Inoltre $\mathcal{C}_2$ è linearmente dipendente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$. Allora $\mathcal{C}_2$ è una base.

6.8 Lemma di Steinitz (senza dimostrazione)

Sia $\mathcal{G} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un insieme di generatori di $\mathbb{V}$ e $\mathcal{L} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ un insieme linearmente dipendente. Allora $m \leq n$ ed esiste un insieme di generatori di $\mathbb{V}$ forrmato da $\mathcal{L}$ e $n - m$ vettori di $\mathcal{G}$.

6.9 Corollario

Se $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ sono basi di uno spazio vettoriale, allora $n = m$.

6.9.1 Dimostrazione

Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_1$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_2$ per il teorema di Steinitz, si ha $m \leq n$. Ponendo $\mathcal{G} = \mathcal{B}_2$ e $\mathcal{L} = \mathcal{B}_1$ si ha $n \leq m$. $\square$

6.10 Definizione di dimensione

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale finitamente generato. Il numero di vettori che formano un base di $\mathbb{V}$ è detto *dimensione* di $\mathbb{V}$ e si indica con $dim_k\mathbb{V}$.

Esempio:
(1)

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{V} = \mathbb{C}$$

$$\{1\} \text{ è una base di } \mathbb{V} \text{ su } \mathbb{C}. \text{ Dunque } dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V} = dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$$

(2)

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{V} = \mathbb{C}$$

$\{1, \text{i}\}$ è una base di $\mathbb{V}$ su $\mathbb{R}$
[Insieme di generatori]
$z \in \mathbb{C} = \mathbb{V}$ $z = a + bi = a(1) + b(i), a, b \in \mathbb{R}$.
[Linearmente indipendente]
$0v \in \mathbb{C}$
$0 = 0 + 0\text{i}$ è l'unico modo di scrivere 0 come combinazione lineare di $\{1, i\}$.
$\implies dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V} = dim_{\mathbb{K}}\mathbb{C} = 2$.

6.11 Corollario

In uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ di dimensione $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V} = n$, si ha

i. Un insieme con $> n$ vettori è linearmente dipendente.

ii. Se n vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base

iii. Ogni insieme di generatori consiste di almeno n vettori.

6.12 Proposizione

Sia $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{V} = n$. Allora ogni sottospazio U di V ha dimensione $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{U} \leq n$. Inoltre $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{U} = n$ se e solo se $\mathbb{U} = \mathbb{V}$.

6.12.1 Dimostrazione

Sia $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base di $\mathbb{U}$. Allora $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente in $\mathbb{V}$ perché 0v = 0u. Quindi possiamo completare $\mathcal{B}$ a una base di $\mathcal{B}'$ di $\mathbb{V}$ (usando il teorema di Steinitiz). Allora

$$\#\mathcal{B} \leq \#\mathcal{B}'$$

Abbiamo che $\mathcal{B}$ contiene n elementi (cioè $dim_{\mathbb{K}}\mathbb{U} = n$) se e solo se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{V}$. Quindi in tal caso, abbiamo $\mathbb{U} =< u_1, \ldots, u_n >= \mathbb{V}$ $\square$

7 Applicazione Lineare

7.1 Definizione di applicazione lineare

Siano $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Un'**applicazione** $f : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{V}$ si dice **lineare** se per $u, u' \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ si ha

i. $f(u + u') = f(u) + f(u')$

ii. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

7.1.1 Osservazioni

(a)

$$f(0u) \overset{5.2(b)}{=} f(0.0u) \overset{7.1(ii)}{=} 0.f(0u) \overset{5.2(b)}{=} 0v$$

(b)

$$f(-u) \overset{5.2(d)}{=} f((-1).u) \overset{7.1(ii)}{=} -1.f(u) \overset{5.2(d)}{=} -f(u)$$

Esempi:

$$\mathbb{U} = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = M_{2x1}(\mathbb{R})$$
$$f : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{V}$$
$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2$$
$$f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \\ a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

f è lineare. Infatti, $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q = b_0 + b_1x + b_2x^2$:

i.

$$f(p + q) = f((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) =$$
$$= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \end{pmatrix}$$
$$f(p) + f(q) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_0 + b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 + b_0 \\ (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Quindi $f(p+q) = f(p) + f(q)$

ii.

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

$$f(\alpha p) = f(\alpha(a_0) + \alpha(a_1 x) + \alpha(a_2 x^2))$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha f(p) = \alpha \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_0 \\ \alpha(a_0 + a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$

Quindi $f(\alpha p) = \alpha f(p) s$

7.2 Applicazioni lineari $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$, definiamo

$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$

per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ $f(v) = Av$

f_A è lineare:

i. $f_A(v+w) = A(v+w) = Av + Aw = f_A(v) + f_A(w)$

ii. $f_A(\alpha v) = A(\alpha v) = \alpha(Av) = \alpha f_A(v)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1-i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3x2}(\mathbb{C})$$

$$f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$$

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 0 & 1-i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+iy \\ (1-i)y \\ x \end{pmatrix}$$

(2)

$$f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= x\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dunque $f = f_A$ dove $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Quindi

$$f_A(v) = Av$$

Per ogni applicazione lineare $f : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$ e per $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, abbiamo che:

$$v = v_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} + v_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2} + \cdots + v_n \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_n}$$

$$f(v) = f(v_1e_1 + v_2e_2 + \cdots + v_ne_n) =$$

$$= f(v_1e_1) + f(v_2e_2) + \cdots + f(v_ne_n) =$$

$$= v_1f(e_1) + v_2f(e_2) + \cdots + v_nf(e_n) =$$

$$= (f(e_1), \dots, f(e_n)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$
$$= Av$$

dove $A = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$. Allora $f = f_A$. La matrice A è detta la *matrice associata* a f (rispetto alla base canonica).
NB: Per una matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ invertibile abbiano $f_A : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$ e $f_{A^{-1}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$. Osserviamo che:

$$f_{A^{-1}}(f_A(v)) = f_{A^{-1}}(Av) = A^{-1}(Av) = (A^{-1}A)v = I_n v = v$$
$$f_A(f_A^{-1}(v)) = f_A(A^{-1}v) = AA^{-1}v = I_n v = v$$

7.3 Definizione di Isomorfismo

Un'applicazione lineare $f : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{W}$ è detta **isomorfismo** se esiste $g : \mathbb{W} \mapsto \mathbb{V}$ tale che $g(f(v)) = v$ per ogni $v \in \mathbb{V}$ e $f(g(w)) = w$ per ogni $w \in \mathbb{W}$. L'applicazione lineare g è detta inversa di f e si dice che $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ sono **isomorfi**. Scriviamo $f^{-1} = g$ e $\mathbb{V} \cong \mathbb{W}$.

Esempio: Sia $f : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare. Allora esiste una matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ tale che $f = f_A$. L'applicazione lineare f è un *isomorfismo* se e solo se A è invertibile.
Infatti, supponiamo che esiste f^{-1} e consideriamo la matrice associata B, cioè $f^{-1} = f_B$. Allora, per ogni $v \in \mathbb{K}^n$, abbiamo:

$$(BAv = f_B f_A(v) = f^{-1}f(v) = v = ff^{-1}(v) = f_A f_B(v) = f_A(Bv) = (AB)v$$

Ne segue $AB = I_n = BA$. Quindi $B = A^{-1}$.

7.4 Applicazione delle coordinate

Sia $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ una base di uno spazio vettoriale $\mathbb{V}$ su $\mathbb{K}$. Per ogni $\alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n = v \in \mathbb{V}$ abbiamo definito i vettori $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. L'applicazione:

$$C_{\mathcal{B}} = \mathbb{V} \mapsto \mathbb{K}^n$$

definita come:

$$C_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

è lineare ed è detta **applicazione delle coordinate** rispetto alla base $\mathcal{B}$. Infatti, per $v = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$ e $w = \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, abbiamo:

i. $C_{\mathcal{B}}(v + w) = C_{\mathcal{B}} = (\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_n b_n) =$

$= C_{\mathcal{B}} = ((\alpha_1 + \beta_1)b_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)b_n)$

$= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$

$C_{\mathcal{B}}(v) + C_{\mathcal{B}}(w) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$

ii. $C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_n \end{pmatrix}$

$\alpha C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

Quindi $C_{\mathcal{B}}(\alpha v) = \alpha C_{\mathcal{B}}(v)$.

Esempio:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[x], \mathbb{K} = \mathbb{R}$$
$$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2\}$$
$$\mathcal{B} = \{b_1 = 1 + x, b_2 = 1 + x^2, b_3 = x + x^2\}$$

è una base di $\mathbb{V}$.
Prendiamo $v = 6 + 3x - x^2 \in \mathbb{V}$. Poichè $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{V}$, esistono $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3$.

$$6 + 3x - x^2 = \alpha_1(1 + x) + \alpha(1 + x^2) + \alpha_3(x + x^2)$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_1 x) + (\alpha_2 + \alpha_2 x^2) + (\alpha_3 x + \alpha_3 x^2)$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_3)x^2$$

Quindi

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 6 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \alpha_1 = 6 - \alpha_2 = 5 \\ \alpha_2 = 3 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_3 = -2 \end{cases}$$

Quindi

$$6 + 3x - x^2 = v = 5b_1 + b_2 + 2b_3 =$$
$$= 5(1 + x) + (1 + x^2) - 2(x + x^2)$$

7.5 Applicazione delle coordinate $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^{\ltimes}$

Esempio:

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \\ 2\alpha_2 + 3\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Quindi $C_{\mathbb{B}}(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema lineare $Ax = v$ dove $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (b_1 b_2)$

Siccome $\mathcal{B}$ è una base, α_1 e α_2 sono univocamente determinati e quindi $Ax = v$ ha soluzione per ogni $v \in \mathbb{R}^2$. Per Teorema 4.2, A è invertibile e $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v$. Calcolando A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Operazioni Elementari}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Dunque, per ogni $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$C_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = A^{-1}v = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{8}v_2 \\ \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{4}v_2 \end{pmatrix}$$

In generale per una base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ di $\mathbb{K}^n$, la matrice $A = (b_1, \dots, b_n)$ è invertibile e $C_{\mathcal{B}} = f_{A^{-1}}$. Dunque $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^\ltimes$ è *isomorfismo* con inversa f_A.

7.6 Teorema per cui l'applicazione lineare $C_{\mathcal{B}}$ è isomorfa

Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. L'applicazione lineare $C_{\mathcal{B}} = \mathbb{V} \mapsto \mathbb{K}^n$ è un *isomorfismo*.

7.6.1 Dimostrazione

Definiamo $g_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{V}$,

$$g_{\mathcal{B}} = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$$

Mostriamo $g_{\mathcal{B}}$ è l'inversa di $C_{\mathcal{B}}$. Infatti:

$$C_{\mathcal{B}}(g_{\mathcal{B}} \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right) = C_{\mathcal{B}}(\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Per ogni $v = \alpha_1 b_1 + \dots \alpha_n b_n \in \mathbb{V}$,

$$g_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}) = g_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}\right) = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n = v$$

Dunque $g_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}}^{-1}$. $\square$

7.7 Osservazione

Se $f : V \mapsto W$ è un isomorfismo e $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ è una base di V, allora $\{f(b_1), \dots, f(b_n)\}$ è una base di W. In particolare, $dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} W$.

7.8 Corollario

Due spazi vettoriale V e W sono isomorfi se e solo se $dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} W$.

7.8.1 Dimostrazione del corollario

Se $f : V \mapsto W$ è un isomorfismo, allora $dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} W$. (Osservazione 7.7)
Supponiamo V, W sono spazi vettoriali tali che $dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} W$. Allora esiste una base di $V, \mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ ed esiste una base di $W, \mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$.
Consideriamo $C_{\mathcal{B}} : V \mapsto \mathbb{K}^n$ e $C_{\mathcal{C}} : W \mapsto \mathbb{K}^n$.
Notiamo che abbiamo:

dove $C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(v) = C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}(v)}$.
L'applicazione lineare ha inversa $C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}} : W \mapsto V$ dove $C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}}(w) = C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w))$ per ogni $w \in W$. Infatti:

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}}(w)) &= C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w))) \\ &= C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(w)) \\ &= w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{C}}(C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(v)) &= C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{C}}(C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(v))) \\ &= C_{\mathcal{B}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(v)) \end{aligned}$$

$$= v$$

Dunque V e W sono isomorfi. $\square$
NB: Per ogni $b_i \in \mathcal{B}$, abbiamo

$$C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(b_i) = C_{\mathcal{C}}^{-1}(C_{\mathcal{B}}(b_i))$$

Ricordiamo che

$$b_i = 0.b_1 + \cdots + 0.b_n$$

$$= C_{\mathcal{C}}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots 0 \end{pmatrix}$$

Per ottenere l'inversa:

$$C_{\mathcal{C}}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i c_i$$

$$= C_{\mathcal{C}}^{-1} = \{C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(b_1), \ldots, C_{\mathcal{C}}^{-1} \cdot C_{\mathcal{B}}(b_n)\}$$

$$= \{c_1, \ldots, c_n\} = C$$

7.9 Matrice del cambio base

Esempio: $V = \mathbb{K}^2$ con basi:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Sia $v \in V$. Dati numeri $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ tali che $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, come possiamo determinare $\beta_1 \beta_2 \in \mathbb{K}$ tali che $v = \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 \alpha_2 = \beta_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$?

$$\begin{tikzcd}
& \overbrace{V}^{\mathbb{K}^2} \arrow[dl, "C_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "C_{\mathcal{D}}"] & \\
\mathbb{K}^2 \arrow[rr, "C_{\mathcal{D}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & & \mathbb{K}^2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix} = [v]_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{D}}(v) = C_{\mathcal{D}}(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 \\
= C_{\mathcal{D}}\left(C_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right)\right) \\
= C_{\mathcal{D}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1}([v]_{\mathcal{B}})
\end{aligned}$$

Per 7.5, $C_{\mathcal{B}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_c$ per una matrice C, cioè per ogni $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$, $C_{\mathcal{B}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}\right) = C\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$.

In questo esempio abbiamo che $C_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$ e $C_{\mathcal{B}}^{-1} : \mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^2$ sono della forma

$$C_{\mathcal{B}} = f_{A^{-1}} \text{ e } C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_{\mathcal{B}}$$
$$\text{dove } B = \begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Allora

$$f_{A^{-1}B} = f_{A^{-1}} \cdot f_B = C_{\mathcal{B}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1} = f_c$$

Quindi $C = A^{-1}B$. Calcolando A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1\end{array}\right) \overset{EG}{\Longrightarrow} \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\frac{10}{3} & -4\\ \frac{4}{3} & 0\end{pmatrix}$$

Allora, per ogni $v \in V$, abbiamo

$$\begin{pmatrix}\frac{10}{3} & -4\\ \frac{4}{3} & 0\end{pmatrix}[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{D}}$$

7.9.1 Teorema

Siano $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $\mathcal{C}? = \{c_1, \dots, c_n\}$ basi di uno spazio vettoriale V. Esiste una matrice $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ tale che $[v]_{\mathcal{C}} = A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$. Le colonne di $A_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ sono i vettori $[b_1]_{\mathcal{C}}, \dots, [b_n]_{\mathcal{C}}$ è detta matrice del cambio di base $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

7.9.2 Dimostrazione

$$
\begin{tikzcd}
 & \overbrace{V}^{\mathbb{K}^2} \arrow[dl, shift right, "C_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "C_{\mathcal{C}}"] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[ur, shift right, "C_{\mathcal{B}}^{-1}"'] \arrow[rr, "C_{\mathcal{C}} \cdot C_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

Esempio:

$$V = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2\}$$
$$\mathcal{B} = \{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$$
$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$$

NB:

$$C_{\mathcal{C}}(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$A_{\mathcal{B}\mapsto\mathcal{C}} = ([b_1]_{\mathcal{C}}, [b_2]_{\mathcal{C}}, [b_3]_{\mathcal{C}}) =$$
$$= (C_{\mathcal{C}}[b_1], C_{\mathcal{C}}[b_2], C_{\mathcal{C}}[b_3])$$
$$= (C_{\mathcal{C}}[1 + x], C_{\mathcal{C}}[1 + x^2], C_{\mathcal{C}}[x + x^2]) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

per ogni $a_0 + a_1x + a_2x^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_0 + a_2 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix} = [a_0 + a_1x + a_2x^2]_{\mathcal{C}}$$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 = (a_0 + a_1)(1 + x) + (a_0 + a_2)(1 + x^2) + (a_1 + a_2)(x + x^2)$$

7.10 Matrice associata a f rispetto a basi

Esempio:

$$U = \mathbb{R}_2[x], V = \mathbb{R}^2$$

$$f : U \mapsto V$$

tale che $f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$ Ovvero, per ogni $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$,

$$f(p) = f(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ base di U e $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ base di V.

Per 7.2, esiste una matrice A associata a $C_{\mathcal{B}} \cdot f \cdot C_{\mathcal{C}}^{-1}$ rispetto alla base canonica:

$$C_{\mathcal{B}} \cdot f \cdot C_{\mathcal{C}}^{-1} = f_A$$

dove

$$A = (C_{\mathcal{B}} \cdot f(1), C_{\mathcal{B}} \cdot f(x), C_{\mathcal{B}} \cdot f(x^2))$$

$$= C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per ogni $p \in U$, $[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} [p]_{\mathcal{C}}$

Es. $p = 3 + 2x - x^2 \qquad f(p)?$

$$[p]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[f(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(p) = 4b_1 - b_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7.10.1 Teorema

Siano U, V spazi vettoriale su $\mathbb{K}$, $f : U \mapsto V$, $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ base di U, $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ base di V. Esiste una matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ tale che $A[u]_{\mathcal{C}} = [u]_{\mathcal{B}}$ per ogni $u \in U$. A è detta *matrice associata ad f rispetto alla base $\mathcal{C}$ di U e la base $\mathcal{B}$ di V*, Le sue colonne sono $[f(c_1)]_{\mathcal{B}}, \dots, [f(c_n)]_{\mathcal{B}}$.

Esempio: Definiamo l'applicazione $id : V \mapsto V$ come $id(v) = v$ per ogni $v \in V$. Allora la matrice associata a id rispetto ad una base $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ di V è la matrice del cambio base $A_{\mathcal{C} \mapsto \mathcal{B}}$.

8 Rank + Nullity

8.1 Definizione di spazio nullo e immagine

Sia $f : V \to W$ un applicazione linare, allora:

$$N(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0w\}$$

è un sottospazio di V, detto lo spazio nullo di f. Inoltre

$$Im(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

è un sottospazio di W detto immagine di f.

Esempi:
(1)

$$A = (a_{ij}) \in M_{nxn}(\mathbb{K})$$
$$f_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$N(f_A) = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = 0\} = N(A)$$
$$Im(f_A) = \{Av \in \mathbb{K}^n \mid v \in \mathbb{K}^n\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nxn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 & \dots & a_{1n}v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}v_1 & \dots & a_{nxn}v_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11}v_1 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{nn}v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \;\middle|\; v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K} \right\}$$

$$= C(A)\text{Spazio delle colonne di A}$$

(2)

$$\mathbb{V} = \mathbb{R}^2, \mathbb{W} = \mathbb{R}^2, f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix}$$

$$p = a_0 + a_1x + a_2x^2, f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

$$N(f) = \left\{ p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \;\middle|\; f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 = 0, a_1 + a_2 = 0\}$$

$$Im(f) = \left\{ f(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

8.2 Teorema (Nullità + Rango)

Sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione lineare. Allora:

$$dim_{\mathbb{K}} V = dim_{\mathbb{K}} N(f) + dim_{\mathbb{K}} Im(f)$$

8.2.1 Dimostrazione

Notiamo che $N(f) \subseteq V$ e inoltre è un sottospazio di V. Quindi

$$dim_{\mathbb{K}} N(f) = m \leq n = dim_{\mathbb{K}} V$$

per 6.11.
Sia $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq N(f) \subseteq V$ una base di $N(f)$. Per il teorema di Steinitz, possiamo completare $\{v_1, \ldots, v_n\}$ a una base di V

$$\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$$

Si può dimostrare che l'insieme $\{f(v_{m+1}), \ldots, f(v_n)\}$ è una base di $Im(f)$, cioè $dim_{\mathbb{K}} Im(f)$ è uguale $n - m$. Dunque

$$dim_{\mathbb{K}} V = n = (n - m) + n = dim_{\mathbb{K}} N(f) + dim_{\mathbb{K}} Im(f) \quad \square$$

Esempio:

$$f : V \mapsto W, V = \mathbb{R}_2[x], W = \mathbb{R}^2$$

Per ogni $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, definiamo $f(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix}$

$$N(f) = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0 = 0, a_1 = -a_2\}$$

$$= \{ax + ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{a(x-x^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$
$$< x - x^2 >$$

L'insieme $\{x-x^2\}$ è un insieme di generatori ed è anche linearmente indipendente, cioè è una base di $N(f)$.
Completiamo $\{x-x^2\}$ a una base di $V = \mathbb{R}_2[x]$:

$$\{x-x^2, 1, x\} \subseteq V$$

Dimostriamo che $\mathcal{B} = \{f(1), f(x)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
è una base di $Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \middle| \, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Linearmente indipendente

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}$

Quindi $\alpha = 0$ e $\beta = \alpha + \beta = 0$.

Insieme di generatori

Per ogni $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \in Im(f)$, abbiamo che

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} = a_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (a_1 + a_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi $\mathcal{B}$ è un insieme di generatori.

8.3 Dimensione di C(A)

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$:

$$C(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{E_1\left(\left(\frac{1}{3}\right)\right)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3}0 & \end{pmatrix} \overset{E_{21}1, E_{31}(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

In 6.6 abbiamo visto che le colonne dominanti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ formano una base di $C(U)$ e $dim_{\mathbb{K}}C(U) = 2$.

Il problema è che $C(U) \neq C(A)$, in particolare $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin C(U)$.

$$\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha + \frac{2}{3}\beta = 3 \\ \beta = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema lineare non ha soluzione.

8.3.1 Proposizione

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ e sia $U \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ una forma ridotta di A. Allora lo spazio delle colonne $C(A)$ e lo spazio delle colonne di $C(U)$ sono isomorfi e quindi $dim_{\mathbb{K}}C(A) = dim_{\mathbb{K}}C(U) = rkU = rkA$.

8.3.2 Dimostrazione

Sia E la matrice invertibile tale che $U = EA$ e $A = E'U$. Consideriamo l'applicazione lineare:

$$f_E : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n, f_E(v) = Ev$$

Con inversa $f_E^{-1} : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}^n, f_E^{-1} = f_{E^{-1}}(v) = E^{-1}v$.

$$\mathbb{K}^n \xleftrightarrow[f_{E^{-1}}]{f_E} \mathbb{K}^n$$

$$C(A) \xleftrightarrow[f_{E^{-1}}]{f_E} C(U)$$

E, per $w \in C(U)$, abbiamo $f_{E^{-1}}(w) \in C(A)$. Infatti

$C(A) =< a_1, \ldots, a_n >$ dove$A = (a_1, \ldots, a_n)$e$C(U) =< u_1, \ldots, u_n >$ dove$u = (u_1, \ldots, u_n)$

Inoltre $(u_1, \dots, u_n) = U = EA = E(a_1, \dots, a_n) = (Ea_1, \dots, Ea_n)$
e quindi $a_1 = E^{-1}u_1, \dots, a_n = E^{-1}u_n$. Dunque, per ogni:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in C(A)$$

abbiamo che

$$f_E(v) = f_E\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_E(a_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i E(a_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in C(U)$$

e, per ogni $w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i \in C(U)$, abbiamo che $f_{E^{-1}}(w) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(E^{-1}u_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \in C(A)$.
Quindi abbiamo un'applicazione lineare $f_E : C(A) \mapsto C(U)$ con inversa $f_{E^{-1}} : C(U) \mapsto C(A)$, dunque f_E è un isomorfismo e $dim_{\mathbb{K}}C(A) \overset{7.7}{=} dim_{\mathbb{K}}C(U) = rkU$. $\square$

Esempio:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di C(U), quindi:

$$\left\{ f_{E^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_{E^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $C(A)$ per 7.7. In generale, le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$.

8.4 Dimensione di N(A)

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$. Per il teorema Nullità+Rango dice

$$n = dim_{\mathbb{K}\ltimes} K^n = \underbrace{dim_{\mathbb{K}\ltimes} N(f_A)}_{dim_{\mathbb{K}\ltimes} N(A)} + \underbrace{dim_{\mathbb{K}\ltimes} Im(f_A)}_{dim_{\mathbb{K}\ltimes} C(A)=rkA}$$

8.4.1 Corollario

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$. Allora

$$dim_{\mathbb{K}} N(A) = n - rkA$$

8.5 Procedimento per determinare basi di C(A) e N(A)

Sia $A \in M_{mxn}(\mathbb{K})$ con $r = rkA$ e $d = n - r = n - rkA$.

(1) Per determianre una base di C(A):

- Si trasforma A in forma ridotta U
- Le colonne di A che corrispondono alle colonne dominanti di U formano una base di $C(A)$

(2) Per determinare una base di N(A):

- Si risolve il sistema lienare omogeneo $Ax = 0$. assegnando parametri $t_1, \dots, t_d$ alle d variabili libere e ricavando le rimanenti variabile tramite "sostituzione all'indietro".
- $1 \leq i \leq d$ si ottiene una soluzione u_i di $Ax = 0$ assegnando 1 al parametro t_i e 0 ai rimanenti parametri.
- Così facendo otteniamo $\{u_1, \dots, u_d\}$ un insieme linearmente indipendente
- dunque $\{u_1, \dots, u_d\}$ è una base di $N(A)$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3x4}(\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{E_{31}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

Le colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ formano una base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{di } C(A)$$

Allora $dim_{\mathbb{K}} N(A) = 4 - rkA = 4 - 2 = 2$ (Nullità). Risolviamo il sistema lineare $Ax = 0$:

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -2(-t - 2s) - 3t = -t + 4s \\ x_2 = -t - 2s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

Soluzioni:

$$\begin{pmatrix} -t + 4s \\ -t - 2s \\ t \\ s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'insieme $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $N(A)$.

8.6 Proposizione

Sia $f : V \mapsto W$ un'applicazione lineare tra spazi vettoriali V, W. Se A è la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V e una base $\mathcal{B}$ di W, allora

$$dim_{\mathbb{K}}(Im(f)) = rkA$$

Di conseguenza $dim_{\mathbb{K}} N(f) = dim_{\mathbb{K}} V - rkA$. La dimensione $dim_{\mathbb{K}}(Imf)$ è detta *rango* di f e scriviamo $rk(f)$. La dimensione $dim_{\mathbb{K}} N(f)$ è detta la *nullità* di f.

8.7 Teorema sulla relazione tra spazio nullo e soluzioni di sistemi lineari

Siano $A \in M_{mxn}(\mathbb{K}), b \in \mathbb{K}^n$. Se $p \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione di $Ax = b$, allora l'insiemen di tutte le soluzioni di $Ax = b$ è

$$L = \{p + u \mid u \in N(A)\}$$

Utile soltanto se ho una matrice con infinite soluzioni.

8.7.1 Dimostrazione

Se $v = p + u$ con $u \in N(A)$ allora $Av = A(p+u) = Ap + Au \underbrace{=}_{Au=0} Ap \underbrace{=}_{\text{soluzione}} b$

Quindi v è una soluzione di $Ax = b$. Viceversa, se v è una soluzione di $Ax = b$, allora $Av = b = Ap$. Quindi

$$0 = Av - Ap = A(v-p) \quad \text{e} \quad \underbrace{v-p}_{u} \in N(A)$$

Dunque $v = (v-p) + p = u + p \in L$. $\square$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\left(A \mid \begin{matrix} 6 \\ 4 \\ 16 \end{matrix} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Ponendo le variabili libere uguale a 0: $x_3 = x_4 = 0$. Troviamo una soluzione particolare $p = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dunque l'insieme di soluzioni $Ax = b$ è

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

9 Autovalori e autovettori

$$f : \mathbb{K}^m \mapsto \mathbb{K}^m$$

$$\exists A \in M_{mxm}(\mathbb{K}) \text{ tale che } f = f_A$$

Esempi: Consideriamo un'applicazione lineare:

$$f_A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

pern una matrice $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$

1)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}^2$$

Allora

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$$

Allora

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \beta v_2 \end{pmatrix}$$

Ma se $v_2 = 0$ o $v_1 = 0$:

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta v_2 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Allora

$$f_A\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3v_1 - 2v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

per ogni $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$f_A\left(\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Per ogni $\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$, abbiamo che

$$f_A\left(\begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6t-2t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

9.1 Definizione di autovalore e autovettore

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$. Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto **autovalore** di A se esiste un vettore $0 \neq v \in \mathbb{K}^n$ tale che:

$$Av = \lambda v$$

In tal caso v è detto **autovettore** di A rispetto all'autovalore λ.

NB: Se $v = 0$, si ha sempre che $Av = A0 = 0 = \lambda 0 = \lambda v$ per qualsiasi λ. Quindi è essenziale richiedere $v \neq 0$ nella definizione.

Esempio: $\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$ sono autovettori di $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ogni vettore della forma $v_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ per $t = 0$ è autovettore di A rispetto $\lambda_1 = 1$.
Ogni vettore di forma $v_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ per $t \neq 0$ è autovettore di A rispetto a $\lambda_2 = 2$.

9.2 Osservazione

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$, $v \neq 0$ in $\mathbb{K}^n$.

(1) v è auttovettore di A rispetto a $\lambda \in \mathbb{K} \overset{DEF}{\iff} Av = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v \to Av - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} v \to \left(A - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) v \to (A - \lambda I_n)v$

$\iff v \in N(A - \lambda I_n)$
$\iff v$ è soluzione del sistema lineare $(A - \lambda I_n)x = 0$

(2) $\lambda \in \mathbb{K}$ è autovalore di A
$\iff$ il sistema lineare ha $(A - \lambda I_n)x = 0$ possiede una soluzione diversa da 0. $\overset{4.3}{\iff} (A - \lambda I_n)$ non è invertibile. $\iff \det A - \lambda I_n = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det(A - \lambda I_n) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -3\lambda + \lambda^2 + 2$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

λ è autovalore di $A \iff (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \iff \lambda = 1$ o $\lambda = 2$.

9.3 Definizione di polinomio caratteristico

Data una matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$, il polinomio di grado n $P_a = \det A - \lambda I_n \in \mathbb{K}[\lambda]$ è detto **polinomio caratteristico**.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A = \det A - \lambda I_2 = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^2 + 1$$

Quindi A non possiede autovalori reali, però A ha autovalori complessi $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$.

9.4 Teorema dell'autospazio

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$:

1. Gli autovalori di A sono esattamente gli zeri del polinomio caratteristico p_A.
2. Gli autovettori relativi a un autovalore λ sono esattamente le soluzioni non nulle del sistema lienare $(A - \lambda I_n)x = 0$ ovvero gli elementi non nulli di $N(A)$. Chiamiamo $N(A - \lambda I_n)$ l'**autospazio** di λ e scriviamo:
$$E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$$

9.5 Corollario

Ogni matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ ha al massimo n autovalori. Ogni matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{C})$ possiede n autovalori in $\mathbb{C}$ (non sono necessariamente distinti) per il teorema fondamentale dell'algebra (1.3).

$$p_A = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

9.6 Definizione di molteplicità

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalore di $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$.

1. Si dice **moltiplicità algebrica** di λ, la molteplicità n_λ di λ come uno zero di p_A cioè $p_A = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$, allora la moltiplicità algebrica di λ_i e n_i per ogni $1 \leq i \leq r$.

2. Si dice **moltiplicità geometrica** di λ la dimensione di $E_A(\lambda)$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \in M_{nxn}(\mathbb{C})$$

Autovalori di A: $p_A = det(A - \lambda I_2)$

$$p_A = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda) + 8 =$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 =$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1)$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 1$. Molteplicità algebrica: $n_1 = 1, n_2 = 1$.
Molteplicità geometrica: $E_A(\lambda) = N(A - \lambda I_n)$.

$$= \left\{ v \in \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_A(3) = N\left(\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \right) = \left\{ v \in \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$d_1 = dim_{\mathbb{K}} E_A(3) = 2 - rk \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \overset{EG}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2-1=1$$

$$E_A(1) = N\left(\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\right) = \left\{v \in \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$d_2 = dim_{\mathbb{K}} E_A(1) = 2 - rk\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix} \overset{EG}{\sim} \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$= 2-1=1$$

9.7 Osservazione

Siano $v_1, \dots, v_n$ autovettori di una matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ rispetto a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Supponiamo che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sia linearmente indipendente.

NB:

$$U = \underbrace{< v_1, \dots, v_r >}_{\{\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i | \alpha_i \in \mathbb{K}\}} \subseteq \overbrace{\mathbb{K}^n}^{\text{sottospazio}}$$

quindi $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di U. Sia $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in U$. Allora

$$Av = A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r)$$

$$= \alpha_1(Av_1) + \dots + \alpha_r(Av_r)$$

$$\underbrace{=}_{Av_i = \lambda_i v_i} \alpha_1(\lambda_1 v_1) + \dots + \alpha_r(\lambda_r v_r)$$

$$= (\alpha_1\lambda_1)v_1 + \dots + (\alpha_r\lambda_r)v_r \in U$$

Abbiamo che $f_A : U \mapsto U$ è un applicazione lineare. Allora

$$[f_A(v)]_{\mathcal{B}} = [Av]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}\alpha_1\lambda_1\\ \vdots\\ \alpha_r\lambda_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r\end{bmatrix}[v]_{\mathcal{B}}$$

Quindi $D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r\end{bmatrix}$ è la matrice associata a f_A rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e nel codominio per teorema 7.11. In particolare se $n = r$, allora $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbb{K}^n$ e abbiamo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, shift left, "C_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "C_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "f_D"'] \arrow[u, shift left, "C_{\mathcal{B}^{-1}}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

che equivale

$$
\begin{tikzcd}
v = \sum_{i=1}^n \alpha_1 v_1 \arrow[r] \arrow[d] & Av \arrow[d] \\
\left[v\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \arrow[r] & \left[Av\right]_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}
$$

quindi $f_D = C_{\mathcal{B}} f_A C_B^{-1}$.

Abbiamo $C_B^{-1} = f_{\mathcal{B}}$ dove $(v_1, \ldots, v_n) = B$ per 7.5 e $C_{\mathcal{B}} = (C_{\mathcal{B}}^{-1})^{-1}$ e $f_{\mathcal{B}} = f_{\mathcal{B}^{-1}}$. Allora

$$f_D = f_{B^{-1}} f_A f_B = f_{B^{-1}AB}$$

e quindi

$$D = B^{-1}AB$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Autovalori: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$.
Gli autovettori rispetto $\lambda_1 = 3 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \neq 0$.

Gli autovettori rispetto a $\lambda_2 = 1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} s, s \neq 0$. Quindi $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.

Dunque:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $D = B^{-1}AB$. Calcoliamo $B^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{EG}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

9.8 Proposizione

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$. Se $v_1, \dots, v_r$ sono autovettori di A che corrispondono a r autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, allora $\{v_1, \dots, v_r\}$ è linearmente indipendente. In particolare, se abbiamo n autovalori distinti, allora esiste una base $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori.

9.8.1 Dimostrazione (r=2)

$\{v_1, v_2\}$ linearmente indipendennte $\overset{6.3}{\Longleftrightarrow}$ v_1 non è combinazione lineare di v_2 (cioè v_1 non è multiplo di v_2). Mostriamo che non è possibile trovare $\alpha \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha v_2 = v_1$. Se $v_1 = \alpha v_2$, allora

$$\lambda_1 v_1 = Av_1 = A(\alpha v_2) = \alpha(Av_2) = \alpha(\lambda_2 v_2)$$

Quindi

$$\alpha\lambda_2 v_2 = \lambda_1 v_1 = \lambda_1(\alpha v_2) = \alpha\lambda_1 v_2$$

cioè

$$\phi = \alpha\lambda_2 v_2 - \alpha\lambda_1 v_2 = \alpha(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$$

Perciò $v_2 = 0$ (definizione di autovettore) e $\lambda_2 \neq \lambda_1$ (quindi $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$), concludiamo che $\alpha = 0$. Ma è impossibile che $v_1 = 0$ perché v_1 è autovettore. Dunque non esiste un tale scalare α. $\square$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3x3}(\mathbb{R})$$

i. autovalori di A

ii. moltiplicità algebriche

iii. moltiplicità geometriche e basi di $E_A(\lambda_i)$

i. Calcoliamo il $\det(A - \lambda I_3) = P_A$ il polinomio caratteristico della matrice A. Le radici di P_A sono gli autovalori di A.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

utilizziamo la regola di Sarrus per calcolare il determinante:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= -\lambda^3 + 1 + 1 - (-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

Osserviamo che $\lambda = 2$ è radice di p_A.
Dividiamo $\lambda - 2$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & 3 & 2 \\ & & & & \\ 2 & & -2 & -4 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow p_A = \lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1)$. Allora le radici di $-\lambda^2 - 2\lambda - 1$ sono:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-1)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = -1$$

Quindi $p_A = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$ e gli autovalori sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$.

ii. Molteplicità algebriche: $n_1 = 1, n_2 = 2$.

iii. Molteplicità geometriche: $d_1 = dim_{\mathbb{R}} E_A(2), d_2 = dim_{\mathbb{R}} E_A(-1)$.

$$E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_3)$$

$$E_A(2) = N\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{3 - rk\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{Rank+Nullity}$$

$$E_A(2) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{3 - rk\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Rank+Nullity}$$

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$rk(A - \lambda_1 I_3) = 2$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$E_A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - 1 = 2$$

Calcoliamo una base per $E_A(2) = N\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ usando il metodo in capitolo per il calcolo di base di spazi nulli:

$$\begin{cases} v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_2 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \\ v_3 = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} v_1 = t \\ v_2 = t \\ v_3 = t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base dell'autospazio $E_A(2)$. Calcoliamo ora una base di $E_A(-1) = N\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} v_1 = -t-s \\ v_2 = t \\ v_3 = s \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-t-s\\ t\\ s\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \right\}$$

Osserviamo che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. Infatti $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente $\iff B = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ha rango 3 $\iff \det B \neq 0$.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Come possiamo notare, la matrice possiede 3 colonne dominanti e quindi la matrice è di rango 3. Quindi $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente e allora è anche una base di $\mathbb{R}^3$.

Per 9.7, la matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

e la matrice invertibile:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

tali che $D = B^{-1}AB$ e $BDB^{-1} = \underbrace{BB^{-1}}_{I_n} A \underbrace{B^{-1}B}_{I_n} = A$.

9.9 Definizione di simile e diagonalizzabile

Due matrici $A, B \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ sono **simili** se esiste matrice invertibile $S \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ tale che $B = S^{-1}AS$.

Se $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ è detta **diagonalizzabile** se esiste una matrice diagonale D tale che A e D sono simili.

10 Diagonalizzazione di matrici

10.1 Proposizione (Proprietà di matrici simili)

Siano $A, B \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ due matrici simili, cioè esiste una matrice invertibile S tale che $B = S^{-1}AS$.

1. $$\begin{gathered} \det A = \det B \\ \Longleftrightarrow \\ p_A = p_B \end{gathered}$$

2. A e B hanno gli stessi autovalori.

3. $A^n = SB^nS^{-1}$

4. Se $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ è diagonale, allora $\det A = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ e

$$A^n = S \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

10.1.1 Dimostrazione

1. abbiamo supposto che $B = S^{-1}AS$

$$\begin{aligned} \det B &= \det S^{-1}AS \\ &\overset{4.13}{=} \det S^{-1} \det A \det S \\ &\overset{4.14}{=} \frac{1}{\det S} \det S \det A \\ &= \det A \end{aligned}$$

Analogamente si vede $p_A = p_B$.

2. Gli autovalori di una matrice sono le radici del polinomio caratteristico quindi segue da (1) che gli autovalori coincidono.

3.
$$A = I_n A I_n = (SS^{-1})A(SS^{-1}) = S(S^{-1}AS)S^{-1}$$
$$= SBS^{-1}$$

Allora
$$A^n = \underbrace{(SBS^{-1})(SBS^{-1})\dots(SBS^{-1})(SBS^{-1})}_{n \text{ volte}}$$
$$= SB\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}B\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}...\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}B\underbrace{(S^{-1}S)}_{I_n}BS^{-1}$$
$$= SB^nS^{-1}$$

4. $\det A = \det B \overset{4.10}{=} \lambda_1, \dots, \lambda_n$
Osserviamo:
$$B^n = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}}_{n \text{ volte}}$$
$$= \begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n\end{pmatrix}$$
Quindi $A = SB^nS^{-1} = S\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n\end{pmatrix}S^{-1}$ □

Esempio:
$$A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^6 = SD^6S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}64 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}64 & 64 & 64\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}66 & 63 & 63\\ 63 & 66 & 63\\ 63 & 63 & 66\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}22 & 21 & 21\\ 21 & 22 & 21\\ 21 & 21 & 22\end{pmatrix}$$

10.2 Teorema

Una matrice $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ è diagonalizzabile $\iff$ esiste una base di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di A.

10.2.1 Dimostrazione

($\Longleftarrow$) Se esiste una base di autovettori, allora abbiamo dimostrato in 9.7 che A è diagonalizzabile.
($\Longrightarrow$) Supponiamo che $A = PDP^{-1}$ dove P è una matrice invertibile e diagonale. $P = (v_1, \dots, v_n)$ dove $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$ sono le colonne di P.

$$D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Allora $AP = (PDP^{-1})P = (PD)\underbrace{(P^{-1}P)}_{I_n} = PD$.

$$AP = A(v_1 \dots v_n) = (Av_1 \dots Av_n)$$

$$PD = (v_1 \dots v_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \dots \lambda_n v_n)$$

Allora $Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2 \dots Av_n = \lambda_n v_n$. Siccome $v_i \neq 0$ per ogni $1 \leq i \leq n$ perché la matrice è invertibile. Dunque $v_1 \dots v_n$ sono tutti autovettori di A rispetto agli autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_n$.
Siccome P è invertibile, il rango di P è uguale a n (per il teorema delle matrici invertibili). Per 8.3, le colonne di P sono linearmente indipendente. Per 6.12 $\{v_1 \dots v_n\}$ è un insieme di generatori, cioè $\mathcal{B}$ è una base. $\square$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

A ha autovalori $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

10.3 Corollario

Se $A \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ possiede n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

10.3.1 Dimostrazione (10.2 + 9.8 + 6.12) $\square$

10.4 Osservazione

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile, ma gli autovalori sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ (abbiamo solo **due** autovalori distinti) (la molteplicità algebrica di λ_2 è uguale a $n_2 = 2$).
La condizione di 10.3 è sufficiente ma non è necessaria.

Esempio:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_M = \det(M - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Autovalore: $\lambda_1 = 1$, $n_1 = 2$.

$$E_m(\lambda_i) = E_m(1) = N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,\middle|\, v_2 = 0\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Gli insiemi di autovettori linearmente indipendenti $\left\{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, t \neq 0$. Quindi non esiste una base di $\mathbb{R}^2$ formata di autovettori di M perché ogni base contiene due vettori. Per 10.2 la matrice non è diagonalizzabile.

10.5 Lemma

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{C})$ con autovalori distinti $\lambda_1 \dots \lambda_r$ con molteplicità algebriche $n_1 \dots n_r$ e molteplicità geometriche $d_1 \dots d_r$.

1. $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$
2. $1 \leq d_i \leq n_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$

10.5.1 Dimostrazione

$$p_A = \det(A - \lambda I_n) = (\lambda - \lambda_r)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$$

Quindi

$$n = n_1 + \cdots + n_r \qquad \square$$

10.6 Teorema

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{C})$ con autovalori distinti $\lambda_1 \dots \lambda_r$ molteplicità algebriche $n_1 \dots n_r$ e molteplicità geometriche $d_1 \dots d_r$

I seguenti enunciati sono equivalenti:

(1) A è diagonalizzabile

(2) $d_1 + \cdots + d_r = n$

(3) $n_i = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$

10.6.1 Dimostrazione

$$\begin{tikzcd}
(1) \arrow[rr] & & (2) \arrow[dl] \\
& (3) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

[(1) $\to$ (2)] Supponiamo che A sia diagonalizzabile. Per 10.2, esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}^n$ formata da autovettori di A.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}_{E_A(\lambda_i)}, \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{\mathbb{K}^n} \qquad t_i = \#(\mathcal{B} \cap E_A(\lambda_i))$$

$$t_i = \#(\mathcal{B} \cap E_A(\lambda_i)) = \text{numero di elementi di } \mathcal{B} \text{ contenuti in } E_A(\lambda_i)$$

NB:

$$E_A(\lambda_i) \subseteq \mathbb{K}^n = N(A - \lambda_i I_n) = \{\text{autovettori di A rispetto a } \lambda_i\} \cup 0v$$

Allora $t_i \leq d_i = dim_{\mathbb{C}} E_A(\lambda_i)$ perché gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti. Inoltre

$$n = t_1 + t_2 + \ \dots \ + t_r \leq d_1 + \ \dots \ + d_r \underbrace{\leq}_{10.5} \leq n_1 + \ \dots \ + n_r = n$$

Dunque

$$n = d_1 + \ \dots \ d_r$$

[(2) $\to$ (3)] Supponiamo (2) cioè

$$d_1 + \ \dots \ + d_r = n \stackrel{10.5}{=} n_1 + \ \dots \ + n_r$$

Siccome $1 \leq d_i \leq n_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$, concludiamo che $d_i = n_i$

[(3) → (1)] Supponiamo che $n_i = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$. Per ogni $1 \leq i \leq r$, scegliamo una base $\mathcal{B}_i = \{v_1, \ldots, v_{d_i}\}$ di $E_A(\lambda_i)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_A(\lambda_1) \\ \end{pmatrix}}_{E_A(\lambda_i)}, \begin{pmatrix} E_A(\lambda_2) \\ \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} E_A(\lambda_i) \\ \end{pmatrix}_{\mathbb{K}^n}$$

Mostreremo che $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \ldots \cup \mathcal{B}_r$

Perché $\mathcal{B}$ contiene esattamente

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_r = n_1 + n_2 + \ldots n_r = n$$

elementi, basta verificare indipendenza lineare.

$$0v = \underbrace{\alpha_{11}v_{11} + \ldots + \alpha_{1d_1}v_{1d_1}}_{w_1} + \underbrace{\alpha_{21}v_{21} + \ldots \alpha_{2d_2}v_{2d_2}}_{w_2} + \ldots$$
$$\ldots \underbrace{\alpha_{r1}v_{r1} + \ldots \alpha_{rd_r}v_{rd_r}}_{w_r}$$

Vogliamo dimostrare che $a_{ij} = 0$ per ogni $1 \leq i \leq r$ e ogni $1 \leq j \leq d_i$. Definiamo $w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \ldots + \alpha_{id_i}v_{id_i}$ per ogni $1 \leq i \leq r$ e notiamo $w_i \in E_A(\lambda_i)$.

Quindi w_i è un autovettore di A rispetto a λ_i oppure $w_i = 0$. Quindi

$$0 = w_1 + w_2 + \ldots w_r$$

una combinazione lineare di autovettori rispetto a autovalori distinti. Per 9.8, autovettori rispetto ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Dunque $w_1 = w_2 = \ldots = w_r = 0$. Allora, per ogni $1 \leq i \leq r$, abbiamo

$$0 = w_i = \alpha_{i1}v_{i1} + \ldots + \alpha_{id_i}v_{id_i}$$

Poiché $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, \ldots, v_{id_i}\}$ è una base, concludiamo che $\alpha_{i1} = \cdots = \alpha_{id_i} = 0$. Dunque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ è linearmente indipendente con n elementi e quindi è una base di $\mathbb{C}^n$ $\square$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2x2} \in (\mathbb{C})$$

Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico:

$$\begin{aligned} P_A &= \det(A - \lambda I_2) \\ &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-\lambda)^2 - (-1) \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

Autovalori: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Molteplicità algebrica: $n_1 = 1$, $n_2 = 1$
Molteplicità geometrica: (lemma 10.5)

$$d_i = dim_{\mathbb{C}} E_A(\lambda_i)$$

$$1 \le d_1 \le n_1 = 1 \to d_1 = 1$$

$$1 \le d_2 \le n_2 = 1 \to d_2 = 1$$

Allora $n_1 = d_1$ e $n_2 = d_2$, quindi A è diagonalizzabile.
Abbiamo $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ la matrice diagonale. Nella dimostrazione, abbiamo visto che $P = (v_1, v_2)$ dove $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $E_A(\lambda_i)$. Calcoliamo $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$:

$$E_A(\lambda_1) = N\left(\begin{pmatrix} 0 - \lambda_1 & -1 \\ 1 & 0 - \lambda_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Risolviamo

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \overset{E_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(i)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 - ix_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \quad \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 = it \\ x_2 = t \end{matrix}$$

$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_A(\lambda_1)$

Risolviamo ora per λ_2

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} -ix_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - ix_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \overset{E_{12}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \overset{E_{21}(-i)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + ix_2 = 0 \\ x_2 = t \end{cases} \qquad \rightsquigarrow \begin{matrix} x_1 = -it \\ x_2 = t \end{matrix}$$

$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $E_A(\lambda_2)$

Dunque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_\in = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calcoliamo $\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} i & -i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \overset{EG}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

10.7 Algoritmo per la diagonalizzazione

Data una matrice quadrata di $A \in M_{nxn}(\mathbb{C})$

(1) Calcoliamo il polinomio caratteristico $P_A = \det(A - \lambda I_n)$ e determiniamo gli zeri distinti $\lambda_1, \ldots \lambda_r \in \mathbb{C}$ con molteplicità algebrica $n_1, \ldots n_r$, ovvero $P_A = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$

(2) Per ciascuno $1 \leq i \leq r$ calcoliamo la molteplicità geometrica

$$d_i = dim_{\mathbb{C}} E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_n) = n - rk(A - \lambda_i I_n)$$

(3) Verifichiamo se $n_i = d_i$ per ogni $1 \leq i \leq r$ (oppure se $d_1 + \ldots + d_r = n$)

(4) In caso positivo determiniamo una base di $E_A(\lambda_i) = N(A - \lambda_i I_n)$ (usando 8.5) per ogni $1 \leq i \leq r$.

(5) L'unione delle basi da luogo ad una base $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ di $\mathbb{C}^n$ composta da autovettori di A.

(6) Ponendo $P = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ e D la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_2 \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} \lambda_r & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Su cui diagonale abbiamo autovalori $\lambda_1 \dots, \lambda_r$ con le loro molteplicità.

(7) Calcoliamo P^{-1} usando 4.2 oppure 4.14

(8) Otteniamo $D = P^{-1}AP$

10.8 Osservazione

Sia A una matrice su $\mathbb{R}$. Se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. Infatti in tal caso la matrice $(A-\lambda_i I_n)$ sono tutte matrici su $\mathbb{R}$ e possiamo risolvere i sistemi lineari $(A - \lambda_i I_n)x = 0$ su $\mathbb{R}$ ottenendo una base di $\mathbb{R}^n$ composta di autovettori di A e $P, D \in M_{nxn}(\mathbb{R})$

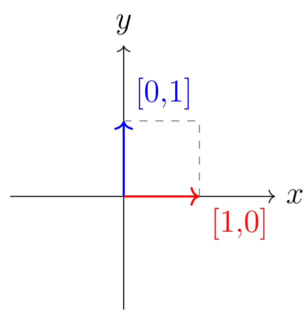
10.9 Teorema spettrale

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica cioè $A = A^t$ $\left(Es : \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\right)$. Allora tutti gli autovalori di A sono reali e A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

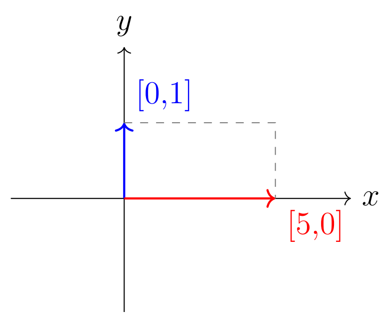
11 Basi ortonomali

Esempio:

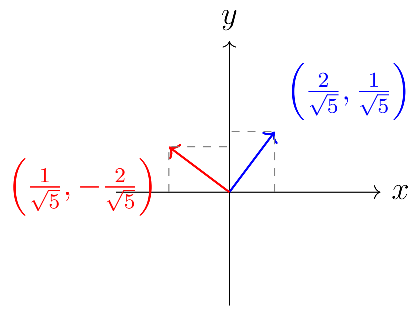
$$V = \mathbb{R}^2 \qquad \mathcal{B}_{can} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right\}$$



Nota bene: Per ogni $b_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, abbiamo che:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

11.1 Prodotto interno

Sia $A \in M_{nxn}(\mathbb{C})$. La matrice *coniugata* $\overline{A}$ di $A = (a_{ij})$ è la matrice $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$. La matrice $A^H = \overline{A^t} = \overline{A}^t$.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 3 \\ 2+i & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 2-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^H = \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ -i & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, il prodotto:

$$(v \mid w) = v^H w = \begin{pmatrix} \overline{v_1} & \dots & \overline{v_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i w_i$$

è detto prodotto interno (standard) in $\mathbb{K}^n$.

Valgono le seguenti priorità per $v, w, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

i. $(v \mid w) = \overline{(w \mid v)}$

ii. $(v \mid \alpha w + \beta z) = \alpha(v \mid w) + \beta(v \mid z)$, in particolare, possiamo definire:

$$f_v : \mathbb{K}^n \mapsto \mathbb{K}, f_v(w) = (v \mid w)$$

dove f_v è un applicazione lineare.

iii. $(\alpha v + \beta w \mid z) = \overline{\alpha}(v \mid z) + \overline{\beta}(w \mid z)$

iv. Se $v \neq 0$, allora

$$(v \mid v) = v^H v = \overline{v_1} v_1 + \cdots + \overline{v_n} v_n = |v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 \in \mathbb{R} > 0$$

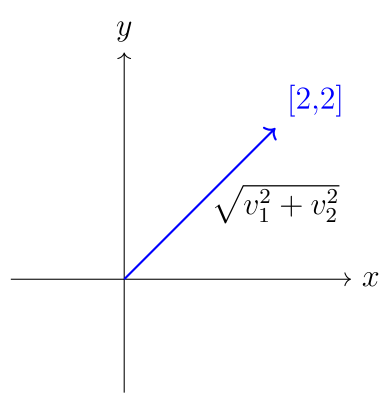
v. in generale, se v e $w \in \mathbb{R}^n$ allora:

$$(v \mid w) \in \mathbb{R}$$

11.2 Norma euclidea

Esempio:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$



$$(v \mid v) = v_1^2 + v_2^2$$
$$\sqrt{(v \mid v)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

è la lunghezza di v.

Sia $v \in \mathbb{K}^n$. Il numero reale $\|v\| = \sqrt{(v \mid v)} \in \mathbb{R} > 0$ è detta *norma euclidea* di v. Valgono le seguenti proprietà per $v, w, \in \mathbb{K}^n, \alpha \in \mathbb{K}^n$:

i. $\|\alpha v\| = \sqrt{(\alpha v \mid \alpha v)} = |\alpha|\|v\|$

ii. Se $v \neq 0$, allora $\|v\| > 0$

iii. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$, detta disuguaglianza triangolare.

11.3 Interpretazione geometrica del prodotto interno di $\mathbb{R}^2$

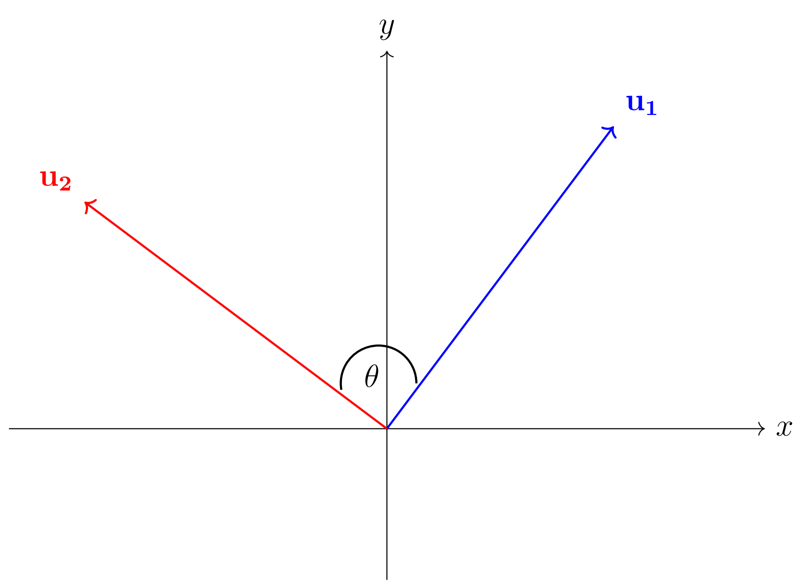


Figure 4: Vectors $\mathbf{u_1}$ and $\mathbf{u_2}$ with angle θ between them

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

L'angolo tra v e w. Vale la formula:

$$(v \mid w) = \|v\|\|w\| \cos\theta$$

Si ottiene la formula per calcolare l'angolo θ:

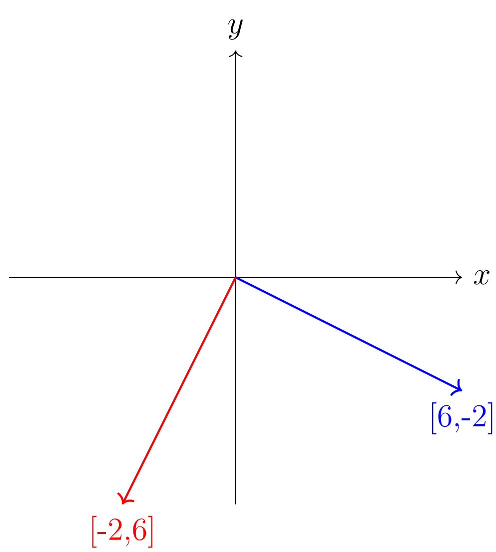
$$\cos\theta = \frac{(v \mid w)}{\|v\|\|w\|}$$

11.4 Definizione

Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali* se $(v \mid w) = 0$. Un'insieme di vettori $\{v_1, \ldots, v_r\}$ è detto *ortogonale* se $(v_j \mid v_j) = 0$ per ogni $1 \leq i, j \leq r$ con $i \neq j$.

Esempi:

$$\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}}_{w} \right\}$$



$$(v \mid w) = 6 \cdot -2 + (-2) \cdot (-6) = 0$$

11.5 Proposizione

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme ortogonale di vettori non nulli di $\mathbb{K}^n$. Allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente.

11.5.1 Dimostrazione

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che $alpha_1 v_n + \dots + \alpha_n v_n = 0$ per ogni $1 \leq k \leq n$

$$0 = (v_k \mid 0) = (v_k \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) =$$
$$= \alpha_1 (v_k \mid v_1) + \dots + \alpha_n (v_k \mid v_n) = \alpha_k \underbrace{(v_k \mid v_k)}_{\neq 0}$$

Concludiamo che $0 = \alpha_k$ (dividendo per $(v_k \mid v_k)$)
Dunque $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente.

Esempio:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è ortogonale e quindi è linearmente indipendente. Siccome $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$, abbiamo una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

11.6 Osservazione

Sia $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$ una base ortogonale di $\mathbb{K}^n$ e sia $u \in \mathbb{K}^n$. Allora $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ e

$$(v_k \mid u) = (v_k \mid \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) =$$
$$= \alpha_1 (v_k \mid v_1) + \dots + \alpha_n (v_k \mid v_n) = \alpha_k (v_k \mid v_k)$$

Quindi

$$\alpha_k = \frac{(v_k \mid u)}{(v_k \mid v_k)}$$

per ogni $1 \leq k \leq n$.

Esempio:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un insieme ortogonale quindi è una base di $\mathbb{C}^2$. Esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tali che $u = \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Per 11.6 abbiamo che

$$\alpha_1 = \frac{(v_1 \mid u)}{(v_1 \mid v_1)}$$

e

$$\alpha_2 = \frac{(v_2 \mid u)}{(v_2 \mid v_2)}$$

$$(v_1 \mid u) = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = -2i + 5 - 7i = 5 - 9i$$

$$(v_1 \mid v_1) = \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

$$(v_2 \mid u) = \begin{pmatrix} \bar{i} \bar{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+5i \\ -7i \end{pmatrix} = -2i + 5 + 7i = 5 + 5i$$

$$(v_2 \mid v_2) = \begin{pmatrix} -i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2$$

Dunque $\alpha_1 = \frac{5}{2} - \frac{9}{2}i$ e $\alpha_2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$.

11.7 Definizione

Un insieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ortogonale tale che $||v_i| = 1$ per ogni $1 \leq i \leq n$ è detto **ortonormale**.

Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots v_n\}$ è ina base ortonormale di $\mathbb{K}^n$ e $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in \mathbb{K}^n$, allora $\alpha_k = (v_k \mid u)$ per ogni $1 \leq k \leq n$.

NB

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{e_1}_{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \ldots, \underbrace{e_n}_{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}\} \qquad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$(e_k \mid u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = u_k$$

Per ogni $u \in \mathbb{K}^n$, al combinaizone lineare di $\mathcal{B}_{can}$ uguale a u è data da:

$$u = u_1 e_1 + \dots + u_k e_k + \dots u_n e_n$$

Esempio:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\|v_1\| = \sqrt{v_1 \mid v_1} = \sqrt{2}, \|v_2\| = \sqrt{2}$$

$$\overset{Normalzizzazione}{\rightsquigarrow} \mathcal{B}' = \left\{ \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \right\}$$

NB

$$\|u_i\| = \| \frac{1}{\|v_i|} v_i \| \overset{11.2}{=} \frac{1}{\|v_i\|} \|v_i\| = 1$$

$$\to (u_1 \mid u_2) = \left(\frac{1}{\|v_1\|} v_1 \;\middle|\; \frac{1}{\|v_2\|} v_2 \right) \overset{11.10}{=} \frac{1}{\|v_2\|} \left(\frac{1}{\|v_1\|} v_1 \;\middle|\; v_2 \right) =$$

$$\frac{1}{\|v_1\|} \frac{1}{\|v_2\|} (v_1 \mid v_2) = 0$$

$$\dots (u_1 \mid u_2) = 0$$

Dunque $\mathcal{B}'$ è **una base ortonormale**.

11.8 Algoritmo di Gram-Schmidt per l'ortonormalizzazione

Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ un insieme di generatori di un sottospazio U di $\mathbb{K}^n$.
Poniamo:

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \alpha_{12} u_1$$

dove

$$\alpha_{12} = \frac{(u_1 \mid v_2)}{(u_1 \mid u_1)} = \frac{(u_1 \mid v_2)}{\|u_1\|^2}$$

$$(u_1 \mid u_2) = (v_1 \mid v_2 - \alpha_{12} v_1) = (v_1 \mid v_2) - \alpha_{12} (v_1 \mid v_1) =$$

$$(v_1 \mid v_2) = \frac{(v_1 \mid v_2)}{(v_1 \mid v_1)}(v_1 \mid v_1)$$

$$= (v_1 \mid v_2) = (v_1 \mid v_2) - (v_1 \mid v_2)\frac{(v_1 \mid v_1)}{(v_1 \mid v_1)} = 0$$

$$(u_2 \mid u_1) = (v_2 - \alpha_{12}v_1 \mid v_1) =$$
$$= (v_2 \mid v_1) - \overline{\alpha_{12}}(v_1 \mid v_1) =$$
$$= (v_2 \mid v_1) - \frac{\overline{(v_1 \mid v_2)}}{\overline{v_1 \mid v_1}}(v_1 \mid v_1) =$$
$$= (v_2 \mid v_1) - \overline{(v_1 \mid v_2)}\frac{(v_1 \mid v_1)}{(v_1 \mid v_1)} =$$
$$(v_2 \mid v_1) - \overline{(v_1 \mid v_2)} \overset{11.1}{=} 0$$

$\ldots u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_{ik}u_i$ dove

$$\alpha_{ik} = \frac{(u_i \mid v_i)}{(u_i \mid u_i)}$$

Allora $\{u_1 \ \ldots, u_n\}$ è un insieme di generatori ortogonali di U. Normalizzando i vettori, ovvero ponendo

$$u'_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

otteniamo un insieme di generatori ortonormale $\{u'_1, \ldots, u'_n\}$ di U.

11.9 Corollario

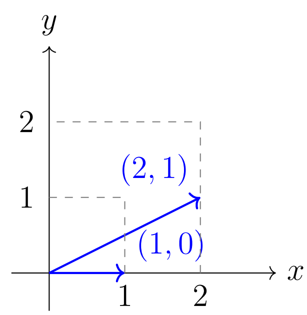
Ogni sottospazio di U di $\mathbb{K}^n$ possiede una base **ortonormale**.

11.9.1 Dimostrazione

Sia $\{v_1, \ \ldots, v_n\}$ una base di U. Allora l'insieme di generatori di ortonormale ottenuto con l'algoritmo di Gram-Schmidt è una base ortonormale di U per 11.5. $\square$

Esempio di ortonormalizzazione:

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\|v_1\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\alpha_{12} = \frac{(v_1 \mid v_2)}{(v_1 \mid v_1)} = \frac{2}{5}$$

$$u_1 = v_1$$

$$u_2 = v_2 - \alpha_{12}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(v_1 \mid v_2)}{(v_1 \mid v_1)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$(u_1 \mid u_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}$$

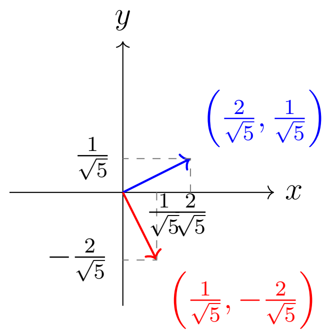
è una *base ortogonale*.
Normalizzando otteniamo:

$$u_1' = \frac{1}{\|u_1\|} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{(5)}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{(u_2 \mid u_2)} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$u_2' = \frac{1}{\|u_2\|} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Dunque $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$


y
x
$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\frac{2}{\sqrt{5}}$
$-\frac{2}{\sqrt{5}}$
$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$