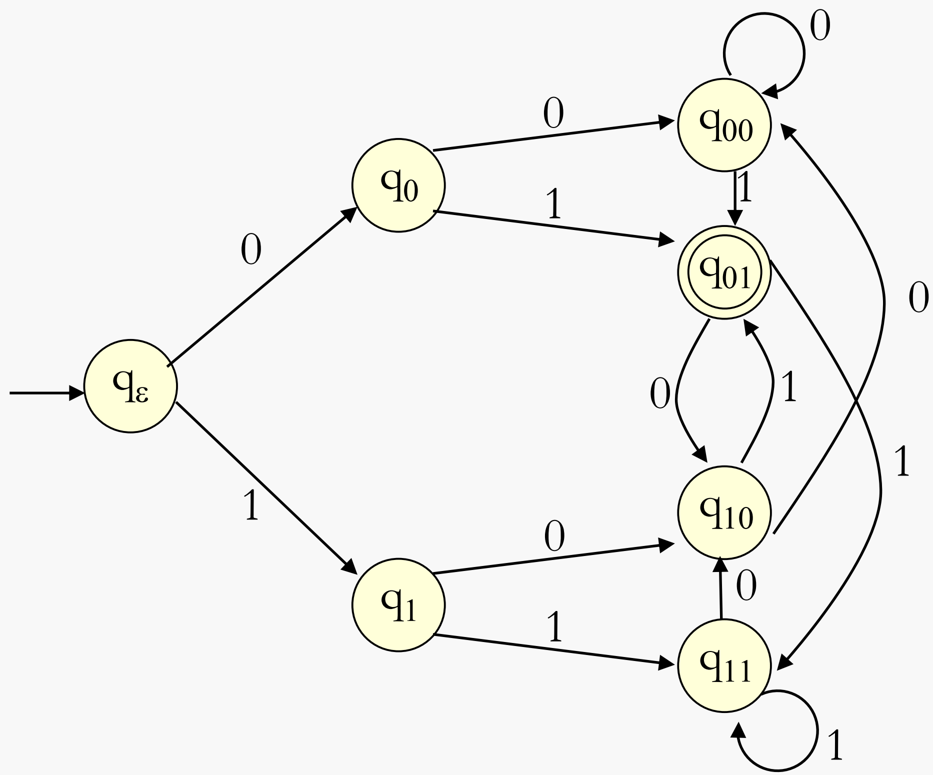
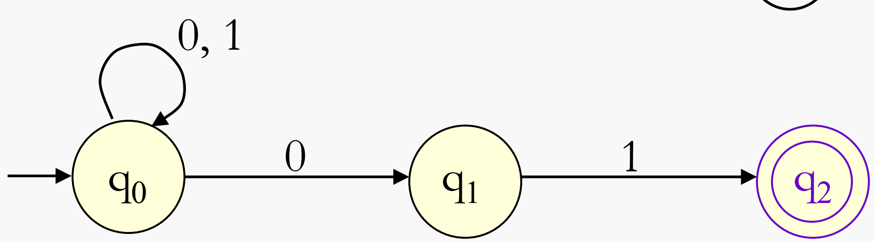
第二章（NFA）2024

NFA与DFA在定义语言能力上是否等价？

- 是否定义了同样的语言？





定义语言L的DFA只有一个还是多个？

定义语言L的NFA只有一个还是多个？

那么，不管多少，定义语言L的DFA和NFA都是彼此相互等价的。

DFA与NFA等价性

- 定理2.12：语言L为某个DFA接受当且仅当它为某个NFA接受

- 字母表Σ相同
- 无论w∈Σ是为DFA所接受还是为NFA接受，当且仅当它们都有一条标记为w的、始端为初始状态、末端为接受状态的路径存在。

- 证明：
  - 当且：构造性证明任一个NFA都能被等价地转换为DFA。
  - 仅当：显然，任一DFA都是NFA特例。

基于状态幂集的构造性证明思路

$NFA(Q, \Sigma, \upsilon, q_0, F) \Longrightarrow DFA$

思路：将Q 的子集作为DFA的状态，求转移弧（子集构造法）

对于S, T ⊆Q， 如果 $\forall p\in T \cdot \exists q\in S \cdot p\in\upsilon(q, a)$，那么$T =\upsilon'(S, a)$，意味着S, T 是DFA的状态，υ' 是DFA的转移函数。从而，

$\upsilon' =\{((S, a), T) \mid S\subseteq Q, a\in\Sigma, T=\bigcup q\in S \cdot \upsilon(q, a)\}$

$F' =\{ S\subseteq Q \mid S\cap F \neq \varphi\}$

$DFA\ (2^Q, \Sigma, \upsilon', \{q_0\}, F')$

最后，去除可达性①和②的状态（无用状态）得到Q_D。即有，

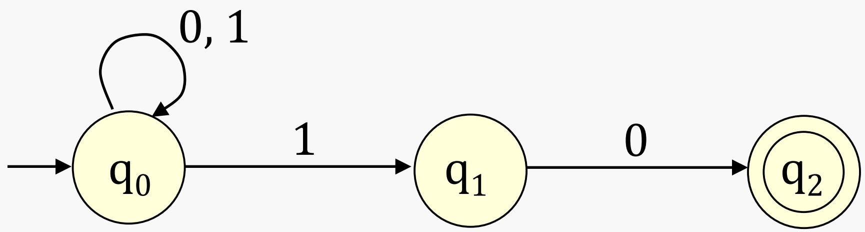
$2^Q \Longrightarrow Q_D$； $\upsilon' \Longrightarrow \upsilon_D$； 同时， $F' \Longrightarrow F_D =\{ S \in Q_D \mid S \cap F \neq \varphi \}$

最终构造出： $DFA\ (Q_D, \Sigma, \upsilon_D, \{q_0\}, F_D)$。

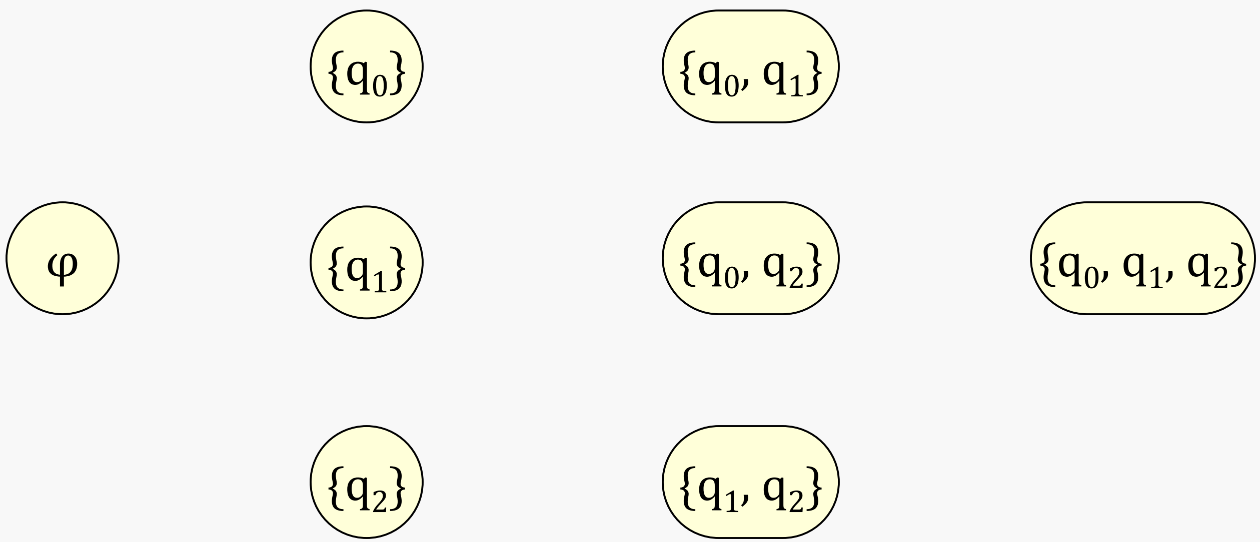
NFA⟹DFA子集构造法

- 状态

NFA:



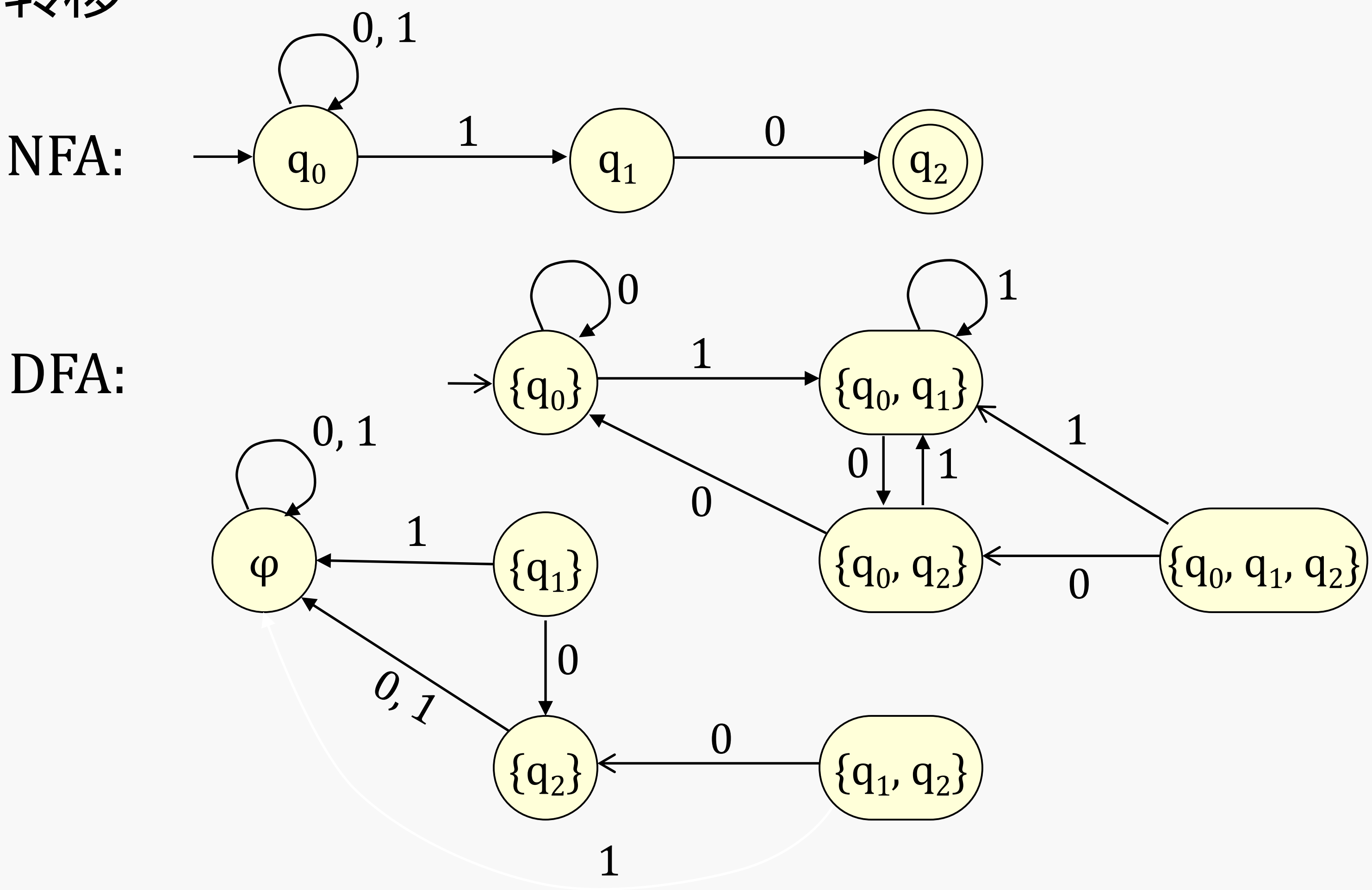
DFA:



对每一个NFA状态的子集DFA都有一个状态与之对应。

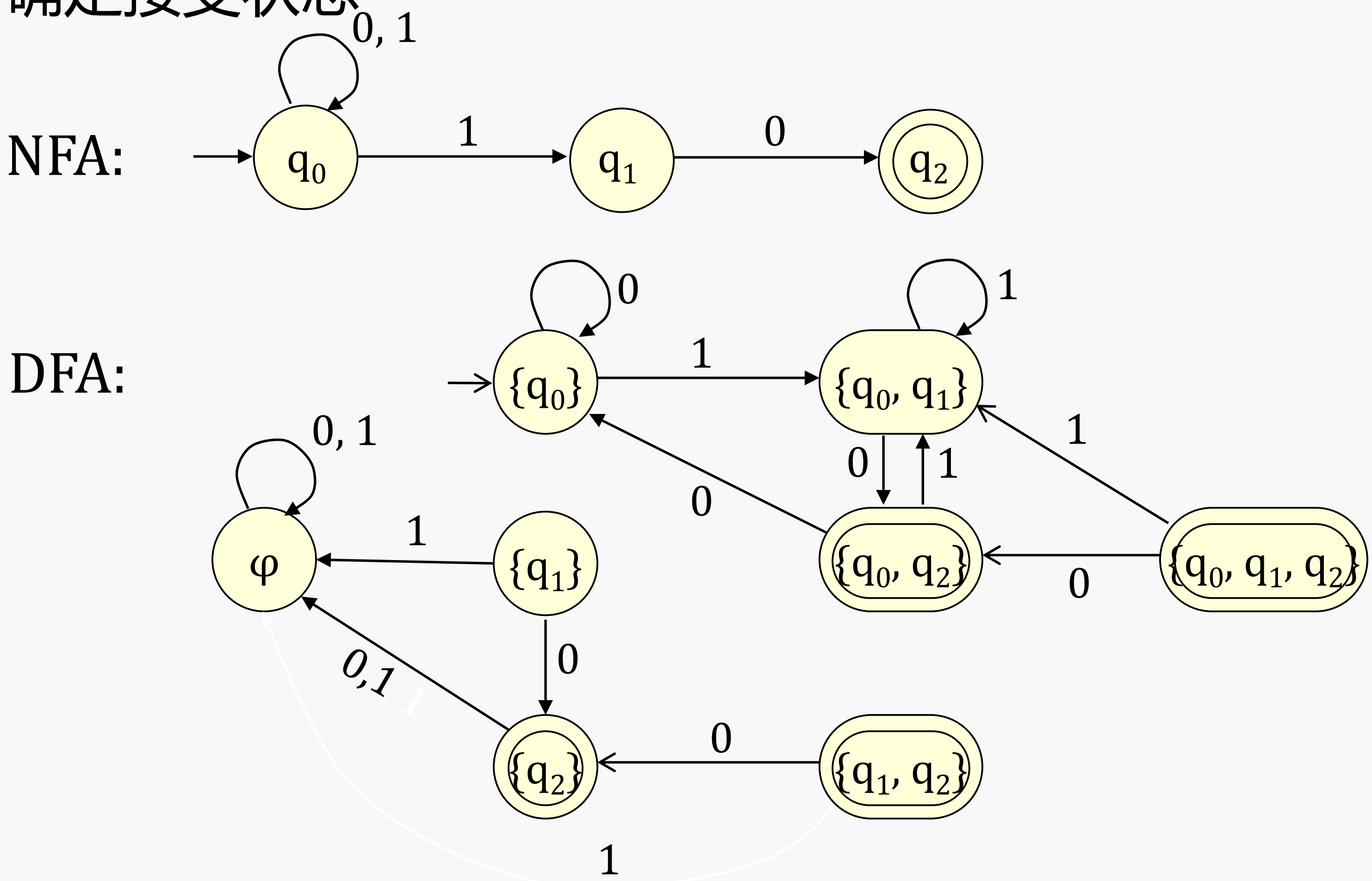
NFA⟹DFA子集构造法

- 转移



NFA⟹DFA子集构造法

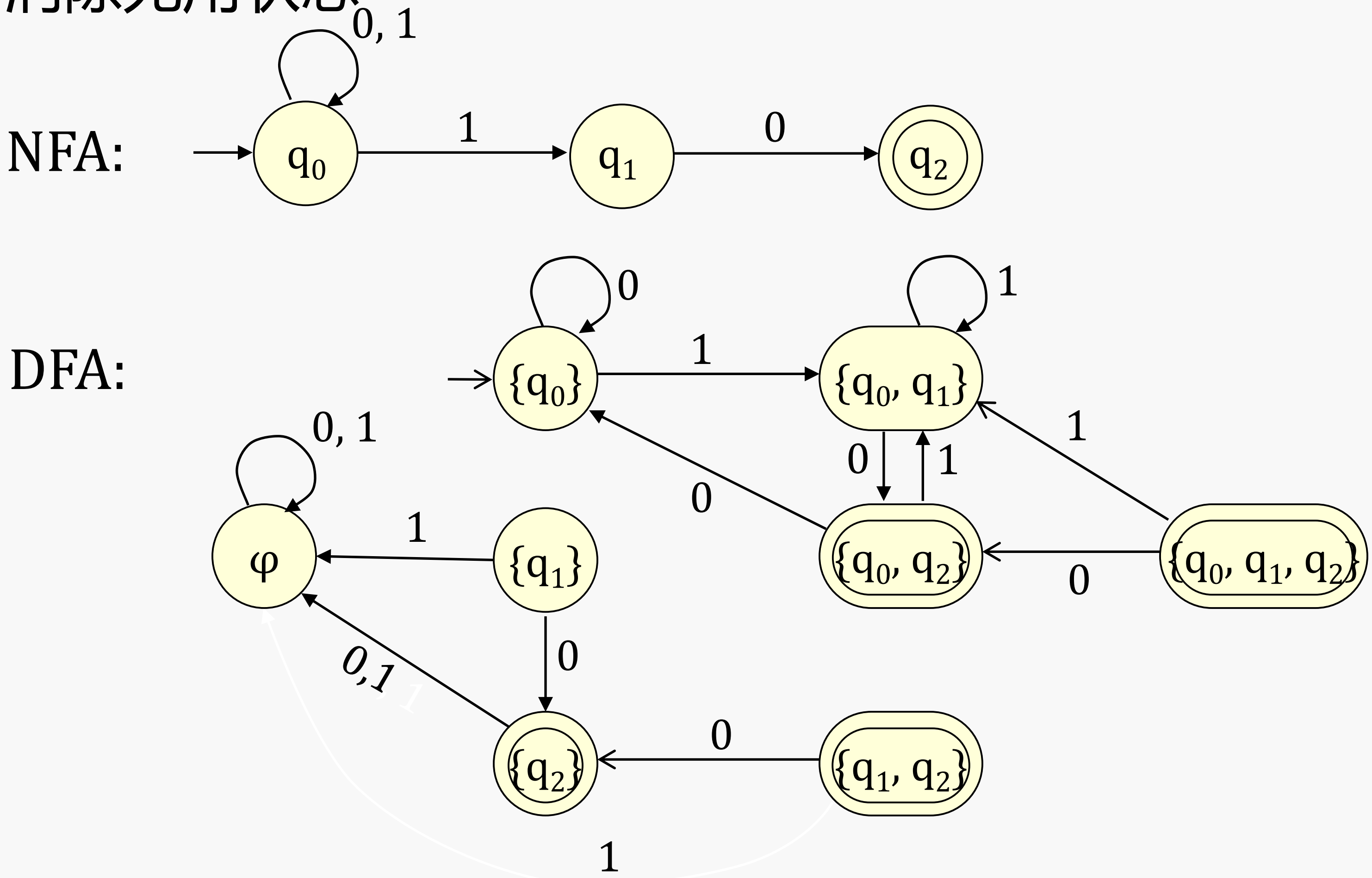
- 确定接受状态



含有NFA接受状态的集合作为DFA接受状态。

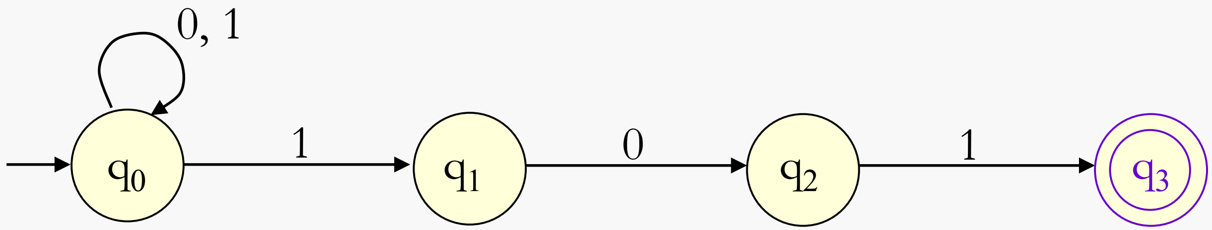
NFA⟹DFA子集构造法

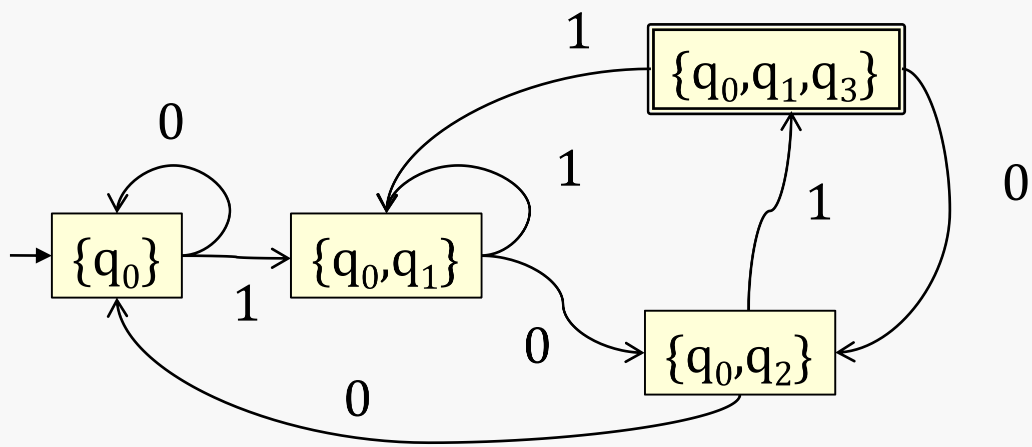
- 消除无用状态



最后，删除不可达和不能到接受状态的那些状态。

基于活动状态集的优化构造方法





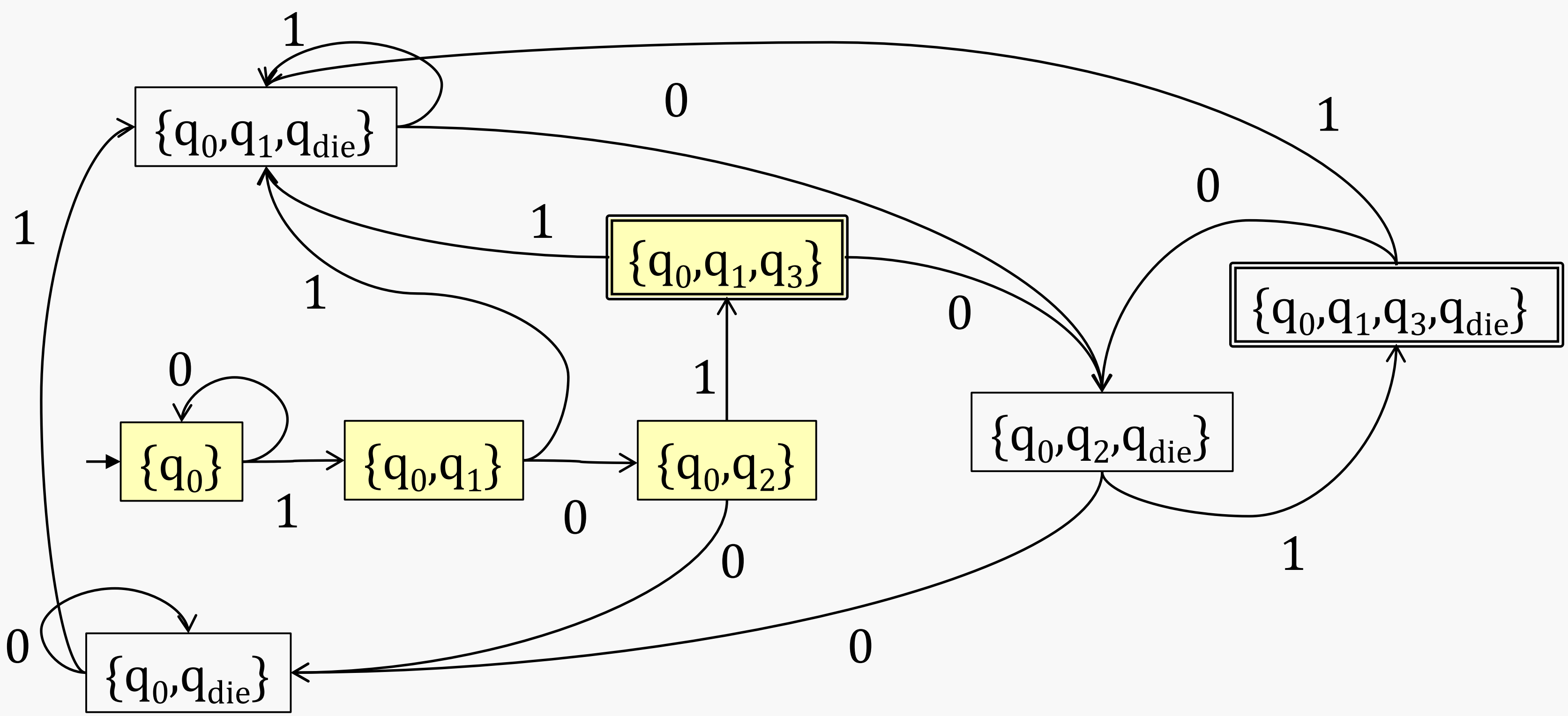
输入串xay

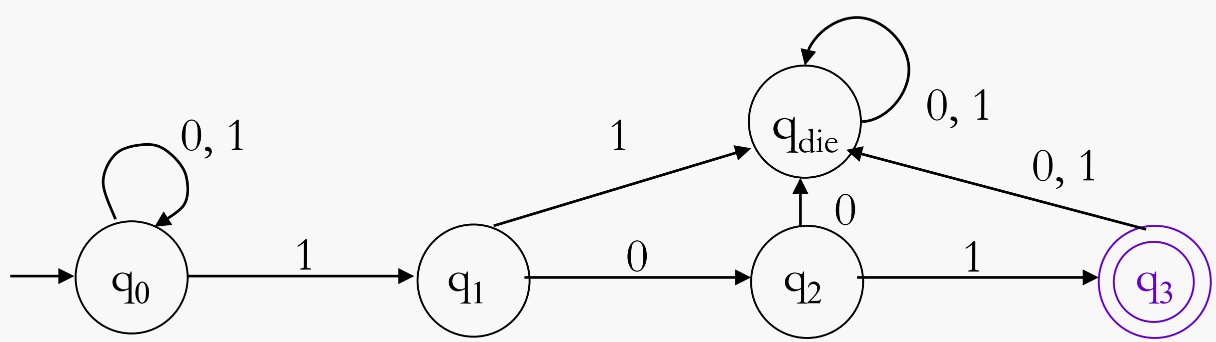
已读前缀x，
剩余串ay；
当前输入符号a；
当前状态集合T_{i-1}；
$T_{i-1}=\tilde{\upsilon}(q_0,x)$

$$T_{i-1} \xrightarrow{a} T_i$$

已读前缀xa，
剩余串y；
当前状态集合T_i；
$T_i=\tilde{\upsilon}(q_0,xa)$

例：基于活动状态集的NFA转DFA





NFA 到 DFA 的子集构造算法

输入：NFA $(Q, \Sigma, \upsilon, q_0, F)$

输出：DFA $(\mathbb{Q}, \Sigma, move[], \{q_0\}, \{S \in \mathbb{Q} \mid S \cap F \neq \varphi\})$

$\mathbb{Q} = \varphi$;

move[] = NULL;

将$\{q_0\}$加入$\mathbb{Q}$ 且未标记;

while ($\mathbb{Q}$ 中存在一个未标记元素S) {

标记S ;

for ($a \in \Sigma$) {

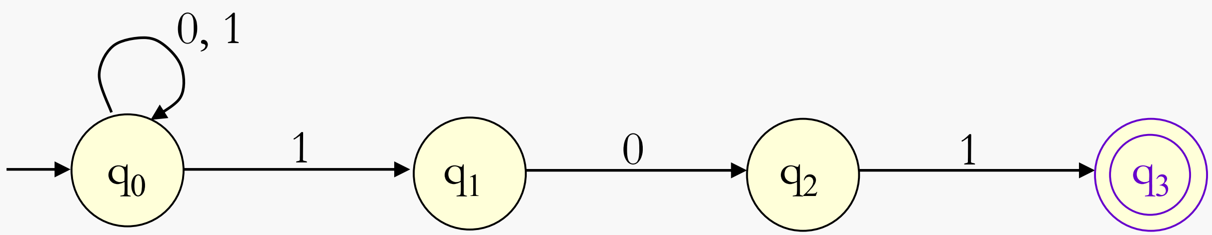
$T = \bigcup q \in S \cdot \upsilon(q, a)$;

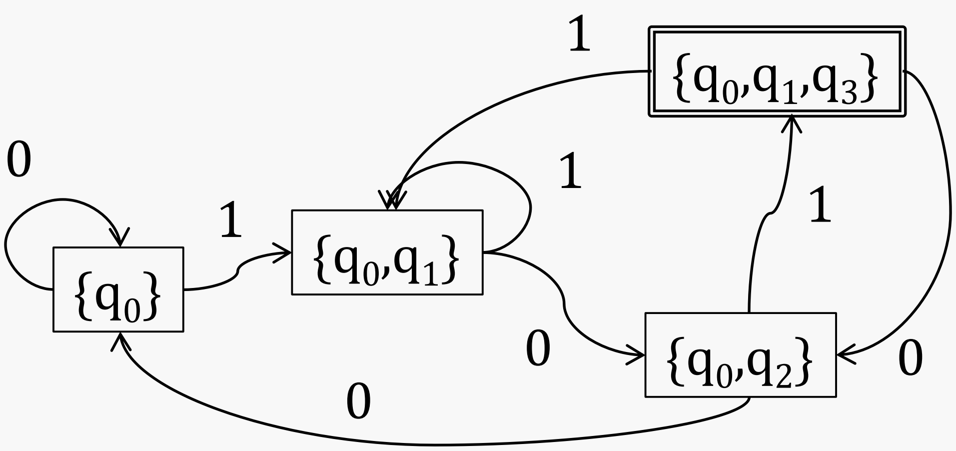
if ($T \notin \mathbb{Q}$) 将T 加入$\mathbb{Q}$ 中且未标记;

move[S, a] = T }

}

子集法示例

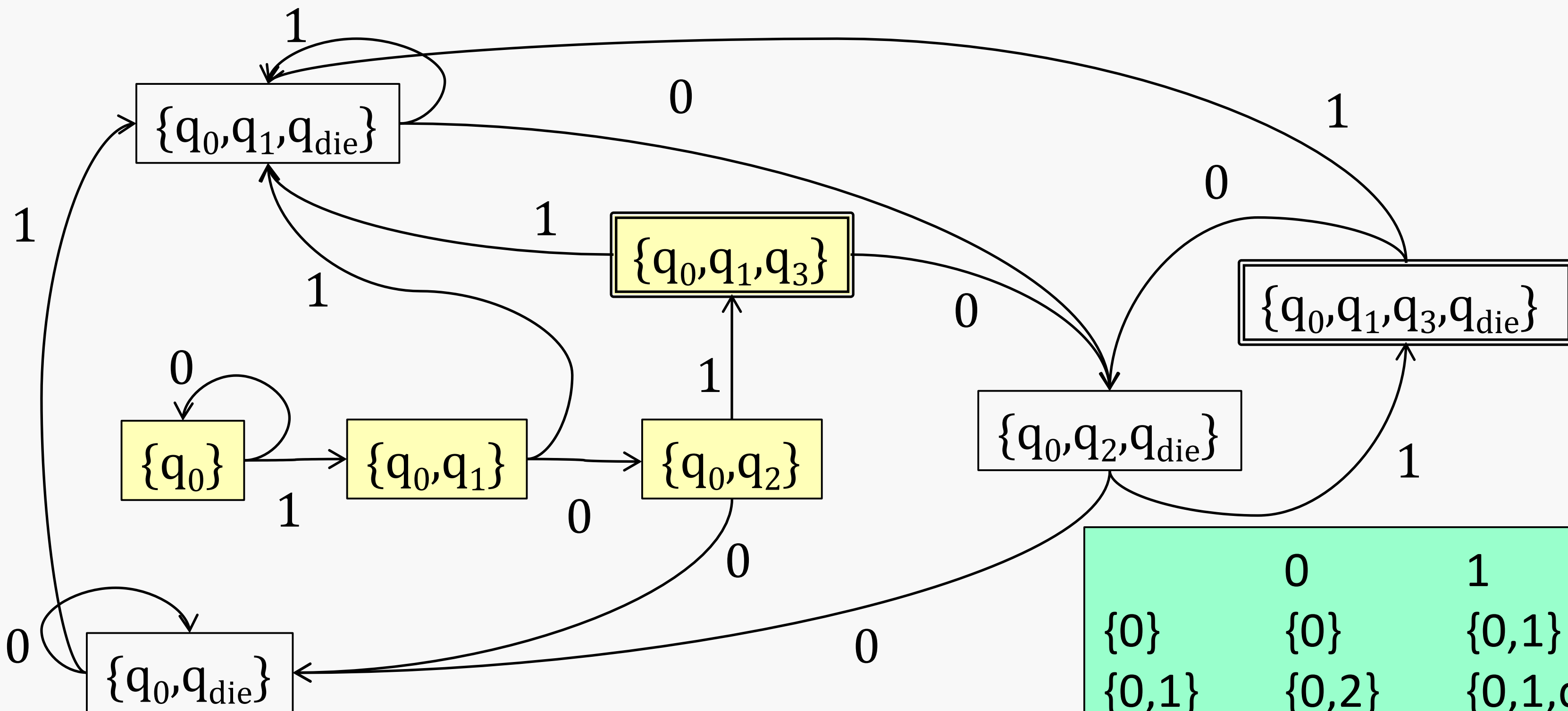


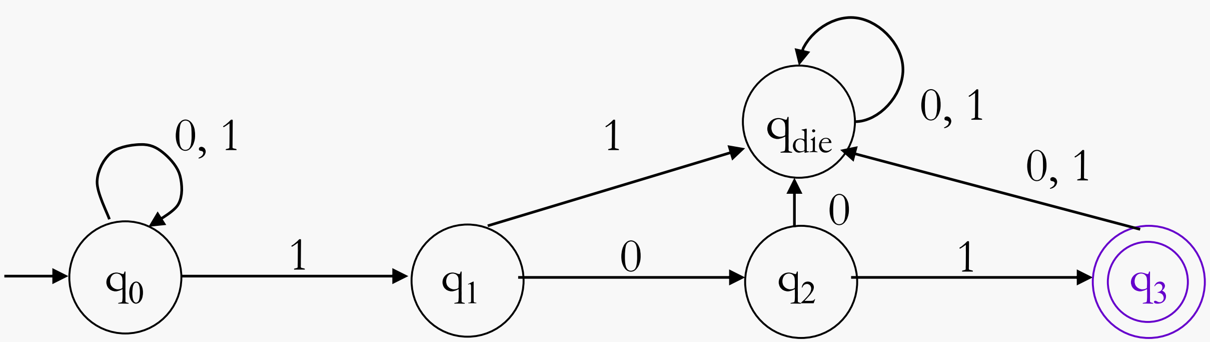


	0	1
{0}	{0}	{0,1}
{0,1}	{0,2}	{0,1}
{0,2}	{0}	{0,1,3}
{0,1,3}	{0,2}	{0,1}

括号中数字i代表状态q_i

子集法示例





	0	1
{0}	{0}	{0,1}
{0,1}	{0,2}	{0,1,d}
{0,2}	{0,d}	{0,1,3}
{0,1,3}	{0,2,d}	{0,1,d}
{0,1,d}	{0,2,d}	{0,1,d}
{0,d}	{0,d}	{0,1,d}
{0,2,d}	{0,d}	{0,1,3,d}
{0,1,3,d}	{0,2,d}	{0,1,d}

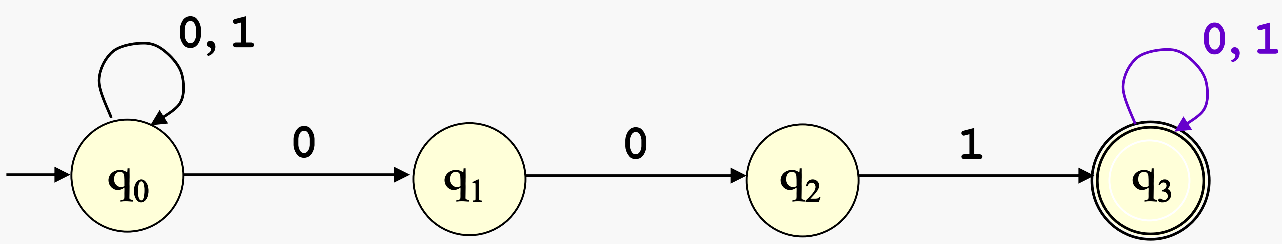
括号中符号i代表状态q_i

子集构造法的正确性

- 定理2.11: 若 DFA D 是从NFA N 通过子集构造法构造而成，则 L(D) = L(N)。
- 依照w 长度归纳 $\tilde{\upsilon}_N(q_0, w) = \tilde{\upsilon}_D(\{q_0\}, w)$
  - 基础：对于w = ε，$\tilde{\upsilon}_N(q_0, \varepsilon) = \tilde{\upsilon}_D(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0\}$。
  - 归纳步：假定归纳假设（IH）是对短于w 的串成立。令w =xa，则IH对于x 成立。
  - 那么，令$\tilde{\upsilon}_N(q_0, x) = \tilde{\upsilon}_D(\{q_0\}, x) = S$
  - 令$T = \bigcup_{p \in S} \upsilon_N(p, a)$
  - 则根据子集构造法知$\tilde{\upsilon}_D(\{q_0\}, w) = \upsilon_D(\tilde{\upsilon}_D(\{q_0\}, x), a) = \upsilon_D(S, a) = \bigcup_{p\in S} \upsilon_N(p, a) = T$
  - 同时根据定义知$\tilde{\upsilon}_N(q_0, w) = \bigcup_{p\in\tilde{\upsilon}_N(q_0, x)} \upsilon_N(p, a) = T$
  - 得证。

子集法举例

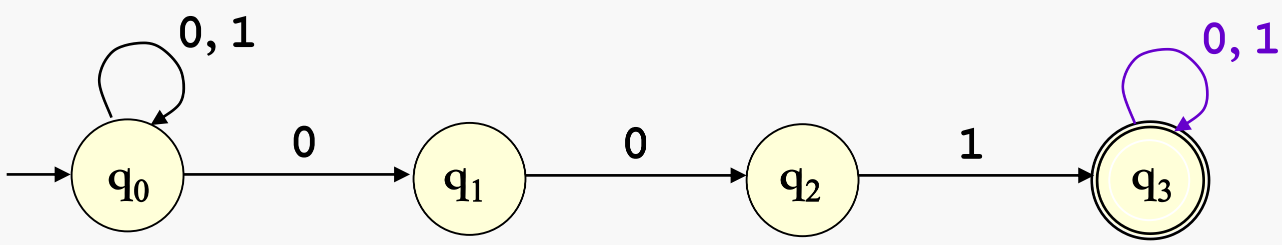
- 识别包含11子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
$\{q_0\}$		

子集法举例

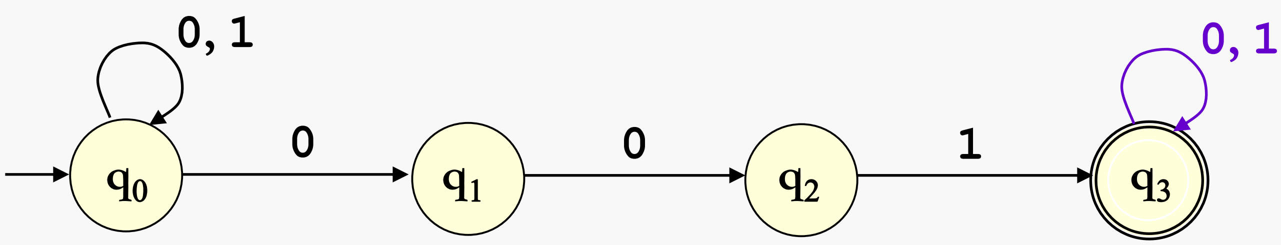
➢ 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$

子集法举例

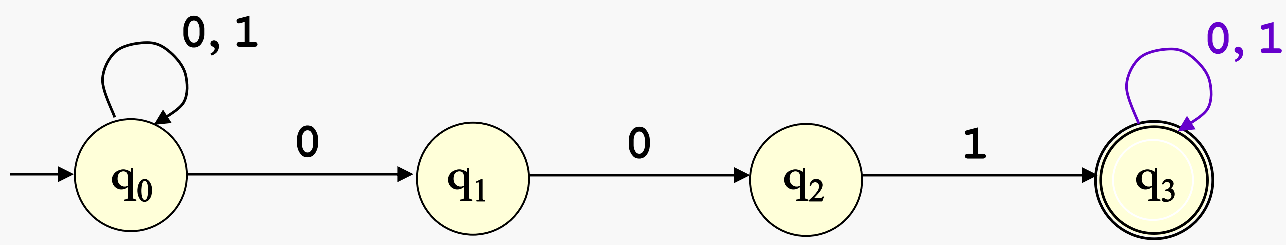
- 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$		

子集法举例

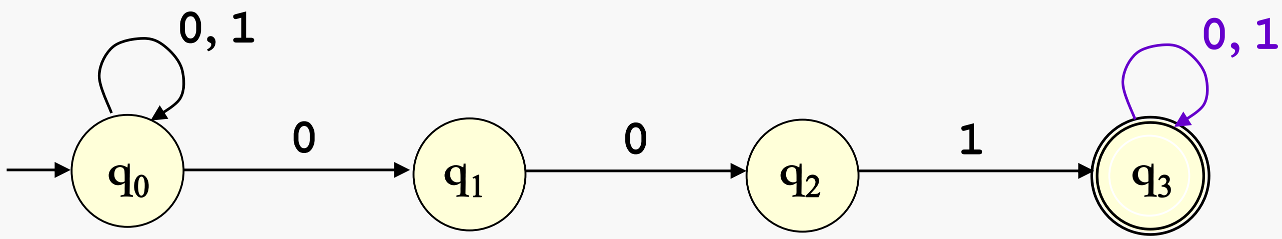
- 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$

子集法举例

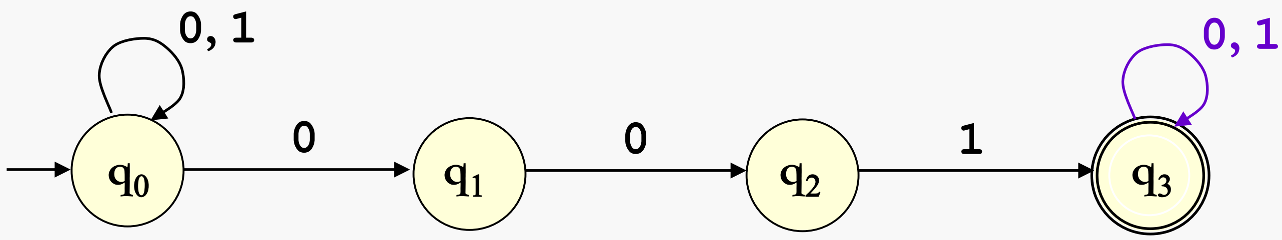
- 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1,q_2\}$		

子集法举例

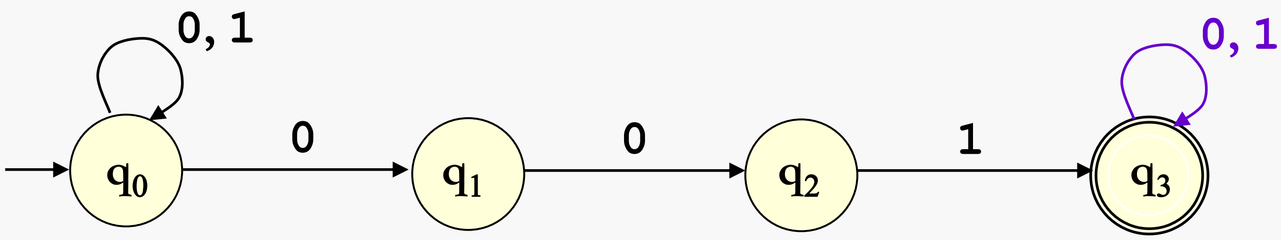
- 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_3\}$
$\{q_0,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$
$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$
$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$

子集法举例

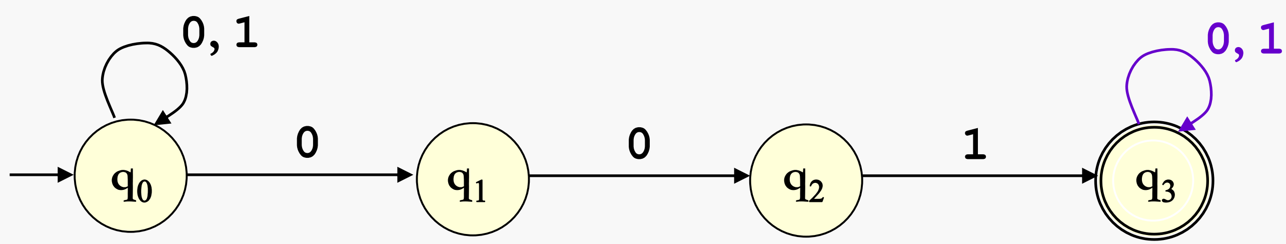
- 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
->$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_3\}$
*$\{q_0,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$
*$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$
*$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$

子集法举例

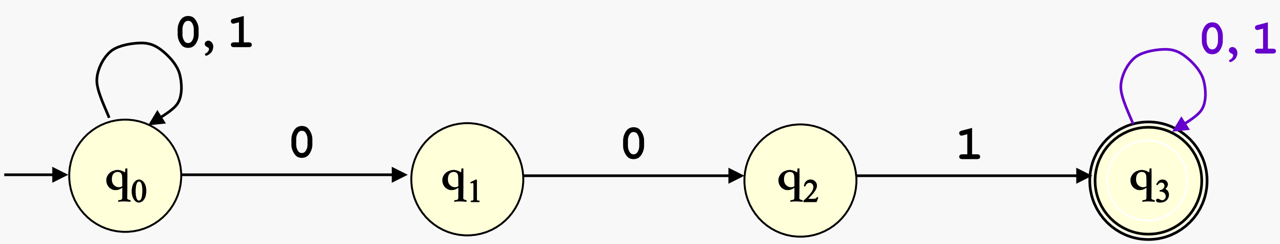
- 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
->$\{q_0\}$/p_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1\}$/p_1	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0,q_1,q_2\}$/p_2	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_3\}$
*$\{q_0,q_3\}$/p_3	$\{q_0,q_1,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$
*$\{q_0,q_1,q_3\}$/p_4	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$
*$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$/p_5	$\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$	$\{q_0,q_3\}$

子集法NFA转DFA结果

- 识别包含001子串的0-1串，NFA转换为DFA



	0	1
$\rightarrow p_0$	p_1	p_0
p_1	p_2	p_0
p_2	p_2	p_3
$*p_3$	P_4	p_3
$*p_4$	p_5	p_3
$*p_5$	p_5	p_3

Command:

List of States:

State[0]
State[1]
State[2]
State[3] - Final state
State[4] - Final state
State[5] - Final state

List of Transitions:

State[0] --> 0 --> State[1]
State[0] --> 1 --> State[0]

State[1] --> 0 --> State[2]
State[1] --> 1 --> State[0]

State[2] --> 0 --> State[2]
State[2] --> 1 --> State[3]

State[3] --> 0 --> State[4]
State[3] --> 1 --> State[3]

State[4] --> 0 --> State[5]
State[4] --> 1 --> State[3]

Automata Design

Input sentence: 010011 Execute

> Input= 010011
> Executed Transitions:

State[0] --> 0 --> State[1]
State[1] --> 1 --> State[0]
State[0] --> 0 --> State[1]
State[1] --> 0 --> State[2]
State[2] --> 1 --> State[3]
State[3] --> 1 --> State[3]

> Results:

- State[3] is a Final State
- Input ACCEPTED

Input sentence: 0101011 Execute

> Input= 0101011
> Executed Transitions:

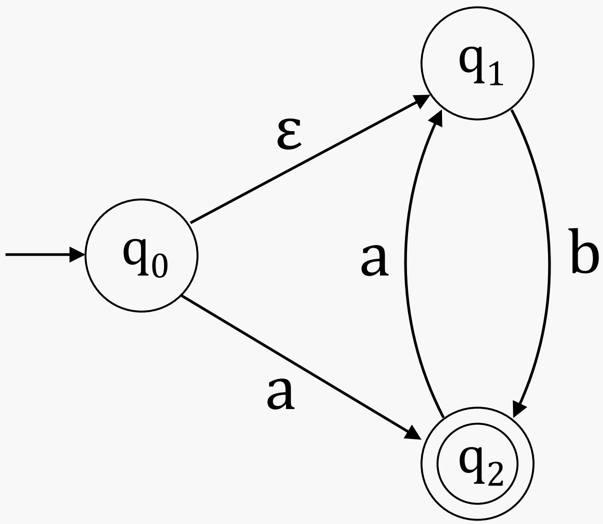
State[0] --> 0 --> State[1]
State[1] --> 1 --> State[0]
State[0] --> 0 --> State[1]
State[1] --> 1 --> State[0]
State[0] --> 0 --> State[1]
State[1] --> 1 --> State[0]
State[0] --> 1 --> State[0]

> Results:

- State[0] is NOT a Final State
- Input REJECTED

ε-转移与ε-NFA

- ε-转移：不消耗输入符号发生状态转移
- 用符号ε标记ε-转移。含有ε-转移的NFA就是ε-NFA



接受：

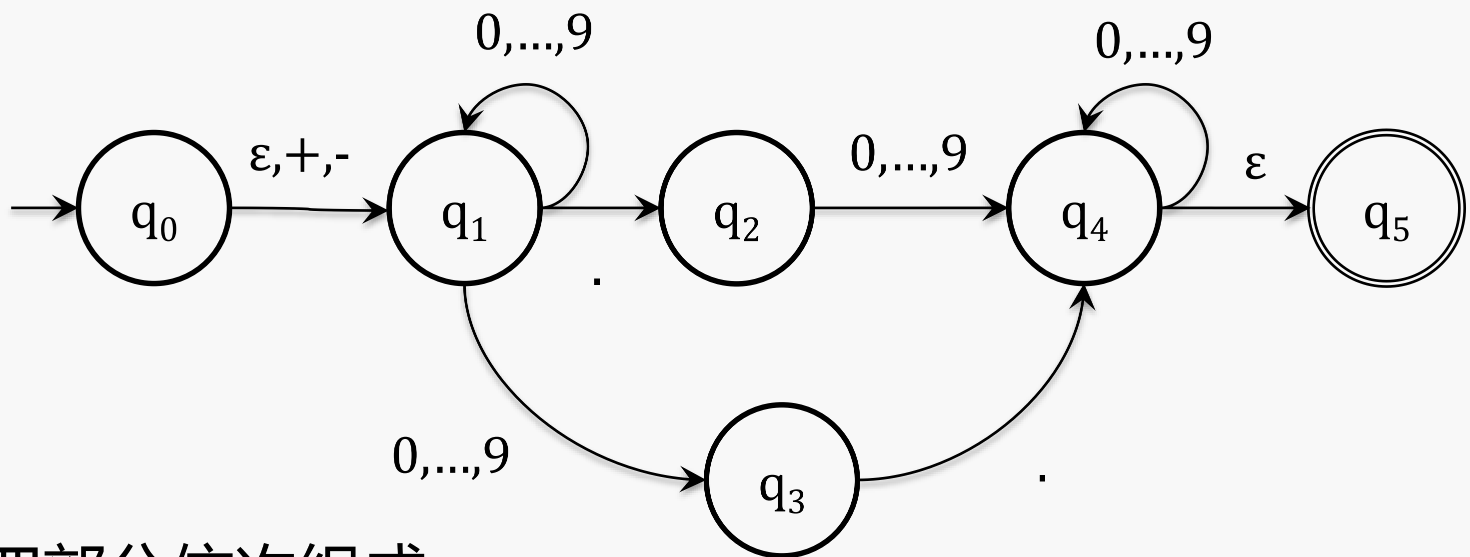
a, b, aab, bab, aabab, …

拒绝：

ε, aa, ba, bb, …

观察活动状态集变化情况：初始为 $\{q_0, q_1\}$；遇到a或b都转移到 $\{q_2\}$；$\{q_2\}$遇到a转移到 $\{q_1\}$。

例：十进制定点数



由四部分依次组成：

（1）+号，-号或空；

（2）数字串或空；

（3）小数点；

（4）数字串或空。

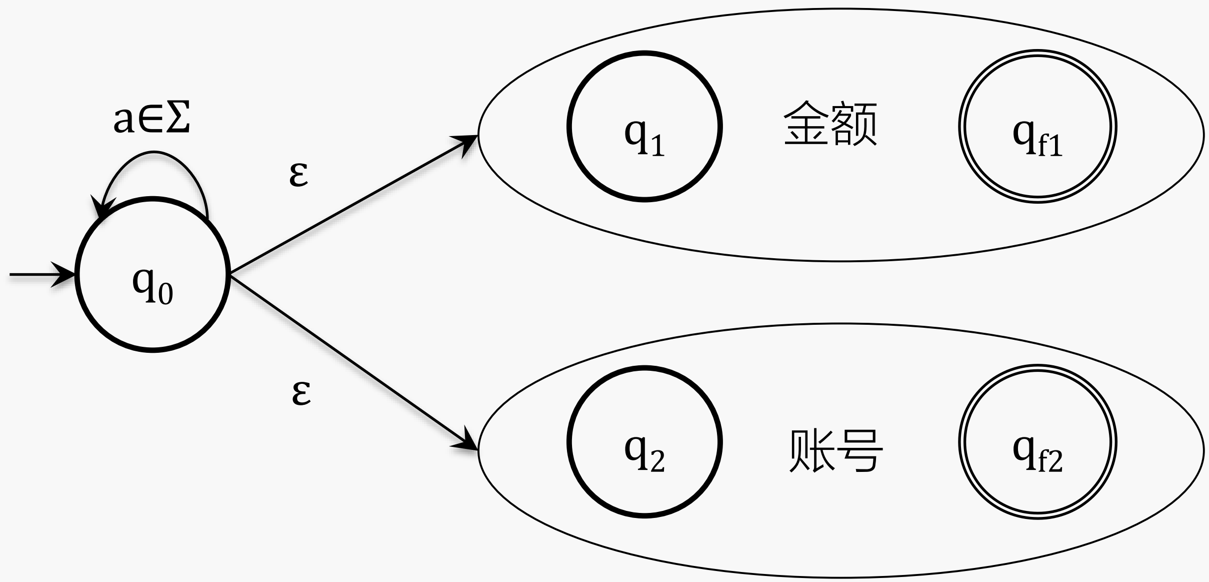
限定（2）和（4）不能同时为空。

精化：

1）无前0、后0

2）可无小数点

例：识别金额和账号的NFA

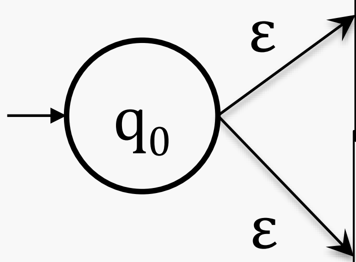


识别的这个符号串可能是金额，也可能是账号。类似地：识别这样的0-1符号串，它或者包含偶数个0或者包含奇数个1

	0	1
→*e_0	e	e_0
e	e_0	e

	0	1
→o	o	o_1
*o_1	o_1	o

例：识别串含有偶数个0或者奇数个1



	0	1
$\rightarrow *e_0$	e	e_0
e	e_0	e

	0	1
$\rightarrow o$	o	o_1
$*o_1$	o_1	o

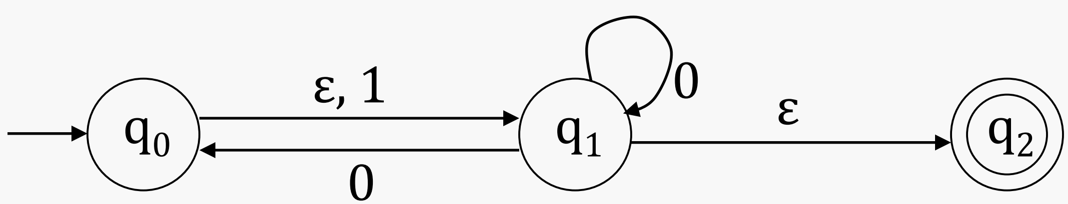
	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	φ	φ	$\{e_0, o\}$
$*e_0$	$\{e\}$	$\{e_0\}$	φ
e	$\{e_0\}$	$\{e\}$	φ
o	$\{o\}$	$\{o_1\}$	φ
$*o_1$	$\{o_1\}$	$\{o\}$	φ

状态的ε-闭包

- 状态q 的ε-闭包，记为ω(q)，指自身以及经过连续ε-转移所能到达的状态的集合（不消耗输入）

	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	φ	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0,q_1\}$	φ	$\{q_2\}$
$^*q_2$	φ	φ	φ

	ω()
q_0	$\{q_0,q_1,q_2\}$
q_1	$\{q_1,q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$



ε-闭集

- ε-NFA中状态q的ε-闭包：ω(q)
- 状态集合的ε-闭包：$\omega(S)=\cup q\in S\cdot\omega(q)$
- ε-闭集：状态集合S为ε-闭集当且仅当$S=\omega(S)$
- 对任意状态集合S，ω(S)是ε-闭集
- ε-闭集概念扩展了活动状态集概念用于实现ε-NFA判定性质

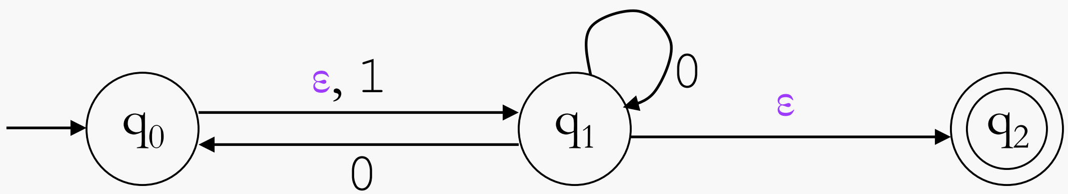
	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	φ	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0,q_1\}$	φ	$\{q_2\}$
$*q_2$	φ	φ	φ

给定ε -NFA

S	求ε-闭包ω(S)
φ	φ
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1,q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$
$\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$
$\{q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_2\}$
$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$

ε-闭集与ε-NFA判定性质

输入串：ε；00；001；101；11



	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	φ	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0,q_1\}$	φ	$\{q_2\}$
$*q_2$	φ	φ	φ

	ω()
φ	φ
$\{q_0\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1,q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$
$\{q_0,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$
$\{q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_2\}$
$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$

已读前缀x；剩余串ay；
当前输入符号a；
当前状态集合$S=\tilde{\upsilon}(q_0,x)$

输入串xay

已读前缀xa；剩余串y；
转移状态集合：
$T=\omega(\cup_{p\in S}\cdot\upsilon(p,a))$

$$\boxed{S}\xrightarrow{a}\boxed{T}$$

扩展的转移函数

- 基础: $\tilde{\upsilon}(q, \varepsilon) = \omega(q)$
- 归纳: $\tilde{\upsilon}(q, xa) = ?$
  - 令: $\tilde{\upsilon}(q, x) = S$
  - 令: $T = \bigcup_{p\in S} \cdot \upsilon(p, a)$
  - 则: $\tilde{\upsilon}(q, xa) = \bigcup_{p\in T} \cdot \omega(p)$，或者，

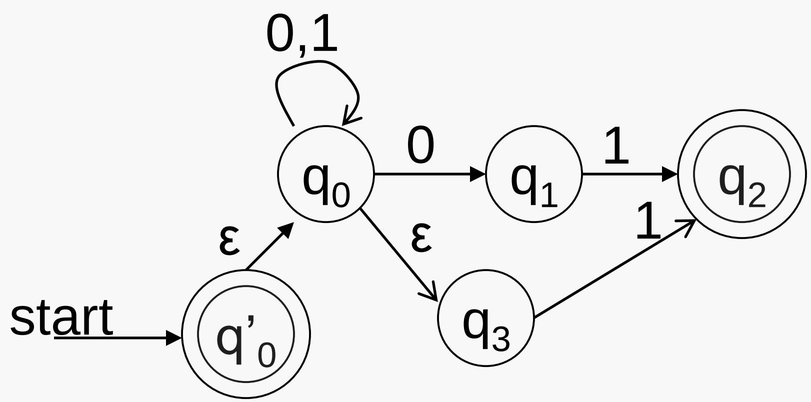
    $\tilde{\upsilon}(q, xa) = \omega(T)$

- $\tilde{\upsilon}(q, w)$ 是始端为q，标记为w 的路径的末端之集合。

ε-NFA语言：
对于ε-NFA $N = (Q, \Sigma, \upsilon, q_0, F)$, 其中$\upsilon : Q\times\Sigma\cup\{\varepsilon\} \rightarrow 2^Q$,
语言为$L(N) = \{w\in\Sigma^* \mid \tilde{\upsilon}(q_0, w)\cap F \neq \varphi\}$

扩展转移函数的例子

$\tilde{\upsilon}(q, \varepsilon) = \omega(q)$;
$\tilde{\upsilon}(q, xa) = \omega(\cup r\in\tilde{\upsilon}(q, x) \cdot \upsilon(r, a))$



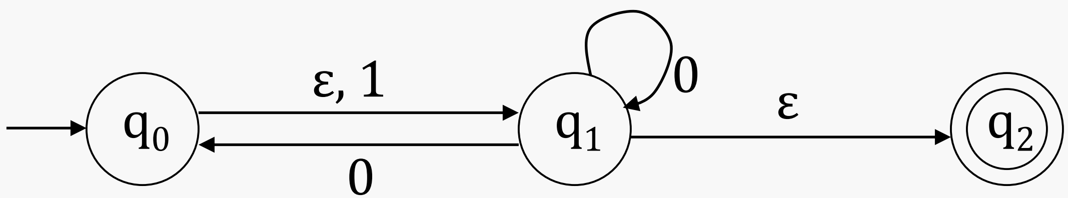
	0	1	ε
$\to{}^*q'_0$	φ	φ	$\{q_0\}$
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{q_0\}$	$\{q_3\}$
q_1	φ	$\{q_2\}$	φ
$^*q_2$	φ	φ	φ
q_3	φ	$\{q_2\}$	φ

- 模拟w =101? 式中ω为求 ε-闭包函数

$\tilde{\upsilon}(q_0', 101) = \cup x\in\tilde{\upsilon}(q_0', 10) \cdot \omega\upsilon(x, 1)$
$= \cup x\in(\cup y\in\tilde{\upsilon}(q_0', 1) \cdot \omega\upsilon(y, 0)) \cdot \omega\upsilon(x, 1)$
$= \cup x\in(\cup y\in(\cup z\in\tilde{\upsilon}(q_0', \varepsilon) \cdot \omega\upsilon(z, 1))) \cdot \omega\upsilon(y, 0)) \cdot \omega\upsilon(x, 1)$
$= \cup x\in(\cup y\in(\cup z\in\{q_0', q_0, q_3\} \cdot \omega\upsilon(z, 1)) \cdot \omega\upsilon(y, 0)) \cdot \omega\upsilon(x, 1)$
$= \cup x\in(\cup y\in\{q_0, q_2, q_3\} \cdot \omega\upsilon(y, 0)) \cdot \omega\upsilon(x, 1)$
$= \cup x\in\{q_0, q_1, q_3\} \cdot \omega\upsilon(x, 1) = \{q_0, q_2, q_3\}$

消除ε-转移（转为NFA）

- ε-NFA $(Q, \Sigma, \upsilon, q_0, F) \Rightarrow$ NFA $(Q, \Sigma, move[], q_0, F)$
- $move[q, a]=\omega(\cup_{p\in\omega(q)}\upsilon(p, a)), q\in Q, a\in\Sigma$
- 消除NFA中不可达情形①和②即得结果。

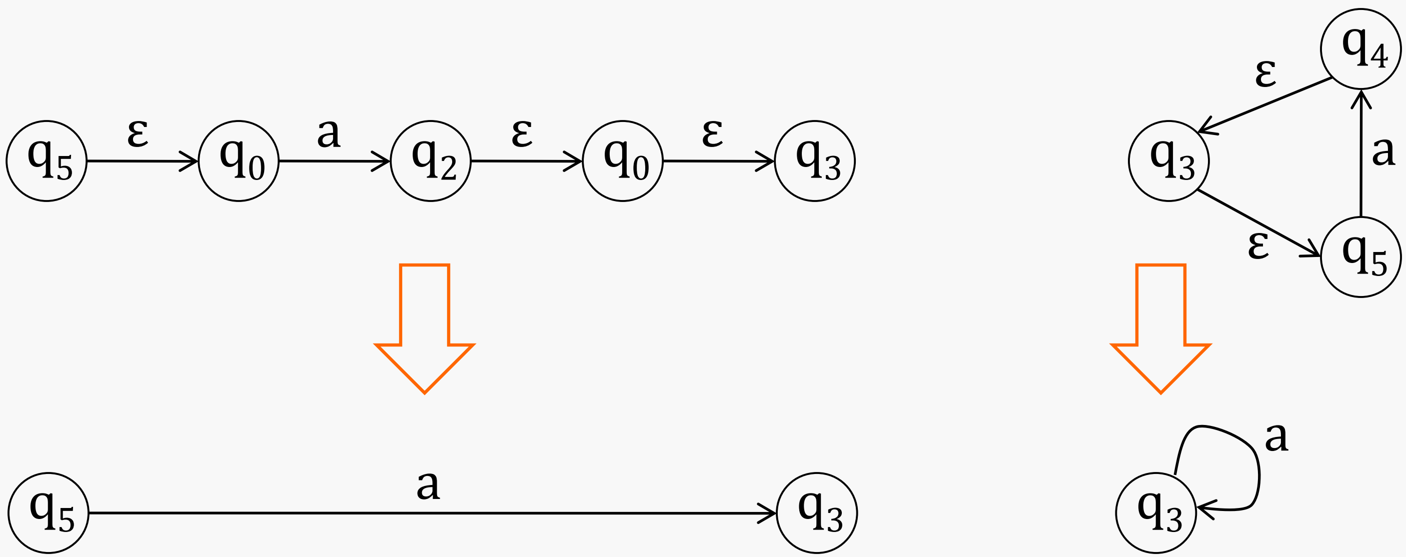


	0	1	ε
->q_0	φ	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0,q_1\}$	φ	$\{q_2\}$
*q_2	φ	φ	φ

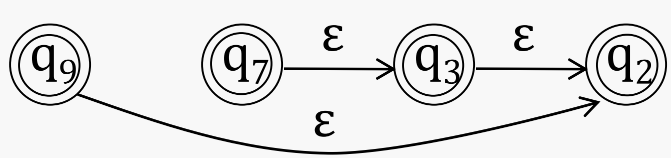
	0	1
→q_0	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_2\}$
q_1	$\{q_0,q_1,q_2\}$	φ
*q_2	φ	φ

减少ε-转移

- 带有ε弧的路径用单一的转移替代



- 经ε弧到达原终结状态的所有状态都是结束状态



ε-NFA 到 DFA 的子集构造法

输入： ε-NFA $(Q, \Sigma, \upsilon, q_0, F)$

输出： DFA $(\mathbb{Q}, \Sigma, move[], \omega(q_0), \{S \in \mathbb{Q} \mid S \cap F \neq \varphi\})$

$\mathbb{Q} = \varphi$; $move[] = NULL$;

$\omega(\{q_0\})$加入$\mathbb{Q}$且未标记;

while $\mathbb{Q}$ 中存在一个未标记元素S {

标记S;

for $(a \in \Sigma)$ {

$T = \omega(\cup q \in S \cdot \upsilon(q, a))$;

if $(T \notin \mathbb{Q})$ T加入$\mathbb{Q}$ 中且未标记;

move[S, a] = T

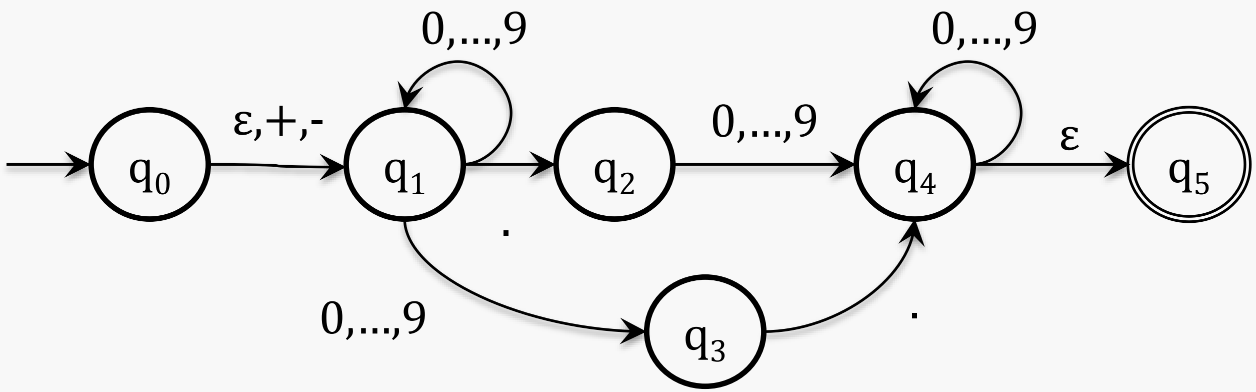
}

}

	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	φ	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_0,q_1\}$	φ	$\{q_2\}$
$*q_2$	φ	φ	φ

	0	1
$\rightarrow * \{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_2\}$
$* \{q_1,q_2\}$	$\{q_0,q_1,q_2\}$	φ

子集法举例



	0-9	+,-	.
→$\{q_0,q_1\}$	$\{q_1,q_3\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
$\{q_1,q_3\}$	$\{q_1,q_3\}$	φ	$\{q_2,q_4,q_5\}$
$\{q_1\}$	$\{q_1,q_3\}$	φ	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_4,q_5\}$	φ	φ
*$\{q_2,q_4,q_5\}$	$\{q_4,q_5\}$	φ	φ
*$\{q_4,q_5\}$	$\{q_4,q_5\}$	φ	φ

子集构造法的正确性

- **定理2.22: 语言L 被某个ε-NFA接受当且仅当L 为某个DFA接受。**
- 依照w 长度归纳 $\tilde{\upsilon}_N(q_0, w)=\tilde{\upsilon}_D(\omega(\{q_0\}), w)$。
  - 基础：对于w=ε， $\tilde{\upsilon}_N(q_0, \varepsilon)=\tilde{\upsilon}_D(\omega(\{q_0\}), \varepsilon)=\omega(\{q_0\})$。
  - 归纳：归纳假设IH对所有短于w 的串成立。
    令w =xa, 已知IH对于x 成立。令,
    $$\tilde{\upsilon}_N(q_0, x)=\tilde{\upsilon}_D(\omega(\{q_0\}), x)=S。$$
  - 那么有如下推导:
    ① 根据定义$\tilde{\upsilon}_N(q_0, xa)=\cup_{p\in S}\cdot\omega(\upsilon_N(p, a))=\omega(\cup_{p\in S}\cdot\upsilon_N(p, a))$，令为T；
    ② 则根据子集构造法有 $\upsilon_D(S,a)=\cup_{p\in S}\cdot\omega(\upsilon_N(p, a))=T$；
    ③ 那么$\tilde{\upsilon}_D(\omega(\{q_0\}), xa)=\upsilon_D(\tilde{\upsilon}_D(\omega(\{q_0\}), x),a)=\upsilon_D(S,a)=T=\tilde{\upsilon}_N(q_0, w)$。 得证。
  - 结论：DFA ≡ NFA ≡ ε-NFA，都接受正则语言

小结

- 知识点：NFA（包括ε-NFA）转DFA的子集构造法、状态的ε-闭包、状态集合的ε-闭包、 ε-闭集、扩展转移函数、NFA语言、NFA三种表示
- 形式化记号：转移函数υ()、扩展转移函数ῦ()、ε-闭包ω()、集合运算$\bigcup_{q\in S} \cdot \upsilon(q, a)$
- 作业：p50-51：2.5~2.7