

## 二、语法分析

### (6. 递归下降的 $LL(1)$ 语法分析器)

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2024 年 03 月 29 日

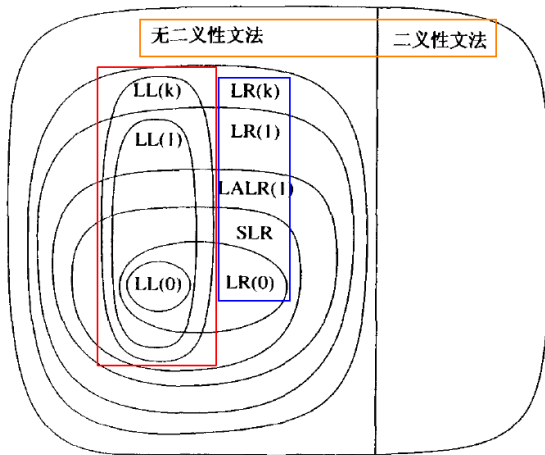


## 构建语法分析树: 自顶向下 *vs.* 自底向上

$\langle \text{Stmt} \rangle$			
if (	$\langle \text{Expr} \rangle$	)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (	$\langle \text{Expr} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$	)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (	$\langle \text{Id} \rangle$ $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$	)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (	x $\langle \text{Optr} \rangle$ $\langle \text{Expr} \rangle$	)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (	x > $\langle \text{Expr} \rangle$	)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (	x > $\langle \text{Num} \rangle$	)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (	x > 9	)	$\langle \text{Stmt} \rangle$
if (	x > 9	{	$\langle \text{StmtList} \rangle$ }
if (	x > 9	{	$\langle \text{StmtList} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (	x > 9	{	$\langle \text{Stmt} \rangle$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (	x > 9	{	$\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (	x > 9	{	x = $\langle \text{Expr} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (	x > 9	{	x = $\langle \text{Num} \rangle ;$ $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (	x > 9	{	x = 0 $\langle \text{Stmt} \rangle$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; $\langle \text{Id} \rangle = \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Expr} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; y = $\langle \text{Id} \rangle \langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; y = y $\langle \text{Optr} \rangle \langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; y = y + $\langle \text{Expr} \rangle ;$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; y = y + $\langle \text{Num} \rangle ;$ }
if (	x > 9	{	x = 0 ; y = y + 1 ; }

只考虑**无二义性**的文法

这意味着, 每个句子对应唯一的一棵语法分析树



今日主题:  **$LL(1)$  语法分析器**

自顶向下的、  
递归下降的、  
基于预测分析表的、  
适用于 $LL(1)$  文法的  
 $LL(1)$  语法分析器

## 自顶向下构建语法分析树

根节点是文法的起始符号  $S$

每个中间节点表示对某个非终结符应用某个产生式进行推导

( $Q$ : 选择哪个非终结符, 以及选择哪个产生式)

叶节点是词法单元流  $w\$$

仅包含终结符号与特殊的文件结束符  $\$$  (EOF)

每个中间节点表示对某个非终结符应用某个产生式进行推导

$Q$ : 选择哪个非终结符, 以及选择哪个产生式

在推导的每一步,  $LL(1)$  总是选择最左边的非终结符进行展开

$LL(1)$ : 从左向右读入词法单元

## 递归下降的典型实现框架

```
void A() {  
1) 选择一个 A 产生式,  $A \rightarrow X_1 X_2 \cdots X_k$ ;  
2)  for ( i = 1 to k ) {  
3)      if (  $X_i$  是一个非终结符号 )  
4)          递归下降调用其它非终结符对应的递归函数  
5)          调用过程  $X_i()$ ;  
6)      else if (  $X_i$  等于当前的输入符号  $a$  )  
7)          匹配当前词法单元  
          读入下一个输入符号;  
          else /* 发生了一个错误 */;  
          }  
          }  
}
```

为每个非终结符写一个递归函数

内部按需调用其它非终结符对应的递归函数, 下降一层

$$S \rightarrow F$$

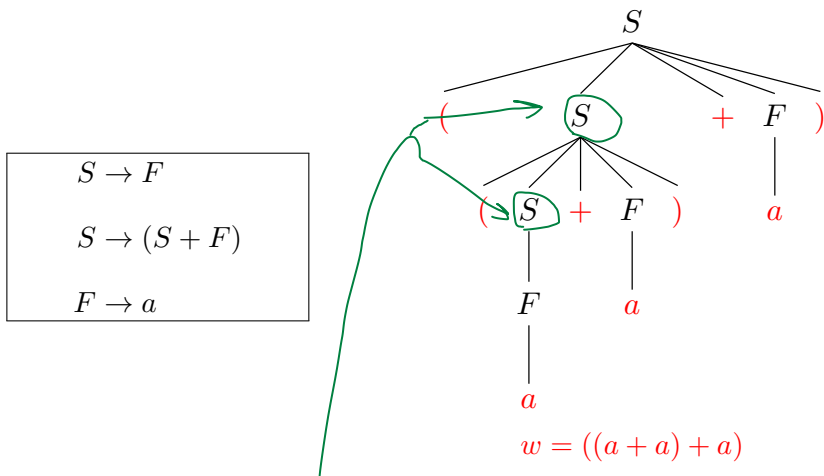
$$S \rightarrow (S + F)$$

$$F \rightarrow a$$

$$w = ((a + a) + a)$$

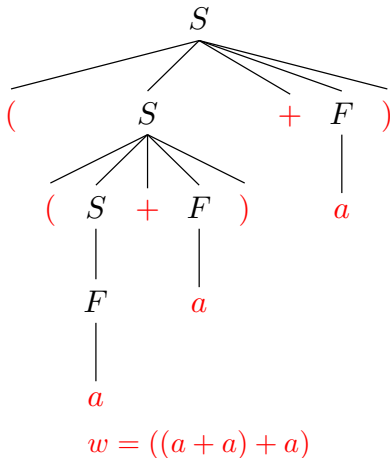
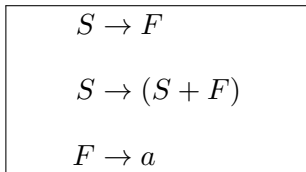


## 演示递归下降过程



每次都选择语法分析树**最左边**的**非终结符**进行展开

同样是展开非终结符  $S$ ,  
为什么前两次选择了  $S \rightarrow (S + F)$ , 而第三次选择了  $S \rightarrow F$ ?



因为它们面对的当前词法单元不同

## 使用预测分析表确定产生式

$S \rightarrow F$
$S \rightarrow (S + F)$
$F \rightarrow a$

		(	)	$a$	+	\$
$S$	2		1			
$F$			3			

指明了每个非终结符在面对不同的词法单元或文件结束符时,  
该选择哪个产生式 (按编号进行索引) 或者**报错** (空单元格)

## Definition ( $LL(1)$ 文法)

如果文法  $G$  的预测分析表是无冲突的, 则  $G$  是  $LL(1)$  文法。

无冲突: 每个单元格里只有一个产生式 (编号)

$S \rightarrow F$
$S \rightarrow (S + F)$
$F \rightarrow a$

	(	)	$a$	+	\$
$S$	2		1		
$F$			3		

对于当前选择的非终结符,

仅根据输入中当前的词法单元 ( $LL(1)$ ) 即可确定需要使用哪条产生式

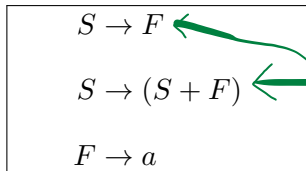
## 非 $LL(1)$ 文法

$$\begin{aligned} S &\rightarrow abC \mid abC \\ C &\rightarrow c \mid d \end{aligned}$$

很显然这不是 $LL(1)$ 文法  
因此就 $C$ 而言，它不知道要自动选择哪一个产生式：  
 $C \rightarrow c$  or  $C \rightarrow d$

```
stat : 'if' expr 'then' stat
      | 'if' expr 'then' stat 'else' stat
      | expr
      ;
```

## 递归下降的、基于预测分析表的实现方法



	(	)	a	+	\$
S	2		1		
F			3		

```

1: procedure MATCH(t)
2:   if token = t then
3:     token ← NEXT-TOKEN()
4:   else

```

```

1: procedure S()
2:   if token = '(' then
3:     MATCH('(')
4:     S()
5:     MATCH('+')
6:     F()
7:     MATCH(')')
8:   else if token = 'a' then
9:     F()
10:  else
11:    ERROR(token, {'(', 'a'})

```

显然，根据LL(1)文法，选择的是二号产生式

```

1: procedure F()
2:   if token = 'a' then

```

自顶向下的、  
递归下降的、  
基于预测分析表的、  
适用于 $LL(1)$  文法的、  
 $LL(1)$  语法分析器

## 如何计算给定文法 $G$ 的预测分析表?

$\text{FIRST}(\alpha)$  是可从  $\alpha$  推导得到的句型的首终结符号的集合

### Definition ( $\text{FIRST}(\alpha)$ 集合)

对于任意的 (产生式的右部)  $\alpha \in (N \cup T)^*$ :

$$\text{FIRST}(\alpha) = \{ \underline{t} \in T \cup \{\epsilon\} \mid \alpha \xRightarrow{*} \underline{t}\beta \vee \alpha \xRightarrow{*} \epsilon \}.$$

考虑非终结符  $A$  的所有产生式  $A \rightarrow \alpha_1, A \rightarrow \alpha_2, \dots, A \rightarrow \alpha_m$ ,

如果它们对应的  $\text{FIRST}(\alpha_i)$  集合互不相交,

则只需查看当前输入词法单元, 即可确定选择哪个产生式 (或报错)

如果互不相交, 说明每一组first对应的终结符不重合, 我们根据最终需要的终结符是什么就可以对应进入这一组



## 如何计算给定文法 $G$ 的预测分析表?

$\text{FOLLOW}(A)$  是可能在某些句型中紧跟在  $A$  右边的终结符的集合

Definition ( $\text{FOLLOW}(A)$  集合)

对于任意的 (产生式的左部) 非终结符  $A \in N$ :

$$\text{FOLLOW}(A) = \{t \in T \cup \{\$\} \mid \exists s. S \xRightarrow{*} s \triangleq \beta \underline{A} t \gamma\}.$$

考虑产生式  $A \rightarrow \alpha$ ,

如果从  $\alpha$  可能推导出空串 ( $\alpha \xRightarrow{*} \epsilon$ ),

则只有当当前词法单元  $t \in \text{FOLLOW}(A)$ , 才可以选择该产生式



## 先计算每个符号 $X$ 的 $\text{FIRST}(X)$ 集合

```
1: procedure  $\text{FIRST}(X)$ 
2:   if  $X \in T$  then
3:      $\text{FIRST}(X) = \{X\}$  ✓
4:   for  $X \rightarrow Y_1 Y_2 \dots Y_k$  do
5:      $\text{FIRST}(X) \leftarrow \text{FIRST}(X) \cup \{\text{FIRST}(Y_1) \setminus \{\epsilon\}\}$ 
6:     for  $i \leftarrow 2$  to  $k$  do
7:       if  $\epsilon \in L(Y_1 \dots Y_{i-1})$  then
8:          $\text{FIRST}(X) \leftarrow \text{FIRST}(X) \cup \{\text{FIRST}(Y_i) \setminus \{\epsilon\}\}$ 
9:       if  $\epsilon \in L(Y_1 \dots Y_k)$  then
10:         $\text{FIRST}(X) \leftarrow \text{FIRST}(X) \cup \{\epsilon\}$ 
```

等价于“add”之前的”  $\triangleright$  规则 1:  $X$  是终结符

$\triangleright$  规则 2:  $X$  是非终结符

$\triangleright$  规则 3:  $X$  可推导出空串

不断应用上面的规则, 直到每个  $\text{FIRST}(X)$  都不再变化 (不动点!!!)

再计算每个符号串  $\alpha$  的  $\text{FIRST}(\alpha)$  集合

$$\alpha = X\beta$$

$$\text{FIRST}(\alpha) = \begin{cases} \text{FIRST}(X) & \epsilon \notin L(X) \\ (\text{FIRST}(X) \setminus \{\epsilon\}) \cup \text{FIRST}(\beta) & \epsilon \in L(X) \end{cases}$$

注意: 如果  $\epsilon \in L(\alpha)$ , 则  $\epsilon \in \text{FIRST}(\alpha)$ 。

$$(1) X \rightarrow Y$$

$$(2) X \rightarrow a$$

$$(3) Y \rightarrow \epsilon$$

$$(4) Y \rightarrow c$$

$$(5) Z \rightarrow d$$

$$(6) Z \rightarrow XYZ$$

最简单的方法：

递归定义，FirstX是所有推导句型  
对应的首终结符

$$\text{FIRST}(X) = \{a, c, \epsilon\} \quad \checkmark$$

$$\text{FIRST}(Y) = \{c, \epsilon\} \quad \checkmark$$

$$\text{FIRST}(Z) = \{a, c, d\} \quad \checkmark$$

$$\text{FIRST}(XYZ) = \{a, c, d\}$$

为每个非终结符  $X$  计算  $\text{FOLLOW}(X)$  集合

---

```
1: procedure FOLLOW( $X$ )
2:   for  $X$  是开始符号 do ▷ 规则 1:  $X$  是开始符号
3:     FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  { $\$$ } add EOF( $\$$ )
4:   for  $A \rightarrow \alpha X$  do ▷ 规则 2:  $X$  是某产生式右部的最后一个符号
5:     FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  FOLLOW( $A$ )
6:   for  $A \rightarrow \alpha X \beta$  do ▷ 规则 3:  $X$  是某产生式右部中间的一个符号
7:     FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  (FIRST( $\beta$ )  $\setminus$  { $\epsilon$ })
8:     if  $\epsilon \in \text{FIRST}(\beta)$  then
9:       FOLLOW( $X$ )  $\leftarrow$  FOLLOW( $X$ )  $\cup$  FOLLOW( $A$ ) ?
```

---

不断应用上面的规则, 直到每个  $\text{FOLLOW}(X)$  都不再变化 (不动点!!!)

$$(1) X \rightarrow Y$$

$$(2) X \rightarrow a$$

$$(3) Y \rightarrow \epsilon$$

$$(4) Y \rightarrow c$$

$$(5) Z \rightarrow d$$

$$(6) Z \rightarrow XYZ$$

$$\text{FOLLOW}(X) = \{a, c, d, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Y) = \{a, c, d, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Z) = \emptyset$$

Handwritten calculation of FOLLOW sets:

- $\text{FOLLOW}(Y) =$ 
  - 1.  $\phi$
  - 2.  $X \rightarrow Y$        $\text{FOLLOW}(X)$
  - $\text{FOLLOW}(Y) \text{ add } \text{FOLLOW}(X)$
  - 3.  $\text{FOLLOW}(Y) \text{ add } \text{FIRST}(\epsilon) \text{ if } \epsilon \in \text{FIRST}(Y)$
  - $\Rightarrow \text{FOLLOW}(Y) = \phi, \text{FOLLOW}(X), a, c, d$
- $\text{FOLLOW}(Z) =$ 
  - 1.  $\phi$
  - 2. add  $\text{FOLLOW}(Z)$
  - $\Rightarrow \text{FOLLOW}(Z) = \phi$
- $\text{FOLLOW}(X) =$ 
  - $\phi$
  - $\text{FOLLOW}(X) = a, c, d$

如何根据FIRST 与 FOLLOW 集合计算给定文法  $G$  的预测分析表?

对应每条产生式  $A \rightarrow \alpha$  与终结符  $t$ , 如果

可以理解为  
“夹逼定理”

$$\left\{ \begin{array}{ll} t \in \text{FIRST}(\alpha) & \text{在 } \alpha \text{ 的前面} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha \xRightarrow{*} \epsilon \wedge t \in \text{FOLLOW}(A) & \text{在 } A \text{ 的后面} \end{array} \right. \quad (2)$$

则在表格  $[A, t]$  中填入  $A \rightarrow \alpha$  (编号)。

Definition ( $LL(1)$  文法)

如果文法  $G$  的预测分析表是无冲突的, 则  $G$  是  $LL(1)$  文法。

$$t \in \text{FIRST}(\alpha) \quad (1)$$

$$\epsilon \in \text{FIRST}(\alpha) \wedge t \in \text{FOLLOW}(A) \quad (2)$$

当下的选择未必正确，但此刻“你别无选择”。



$$(1) X \rightarrow Y$$

$$(2) X \rightarrow a$$

$$(3) Y \rightarrow \epsilon$$

$$(4) Y \rightarrow c$$

$$(5) Z \rightarrow d$$

$$(6) Z \rightarrow XYZ$$

$$\text{FIRST}(X) = \{a, c, \epsilon\}$$

$$\text{FIRST}(Y) = \{c, \epsilon\}$$

$$\text{FIRST}(Z) = \{a, c, d\}$$

$$\text{FIRST}(XYZ) = \{a, c, d\}$$

$$\text{FOLLOW}(X) = \{a, c, d, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Y) = \{a, c, d, \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(Z) = \emptyset$$

	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	\$
<i>X</i>	1, 2	1	1	1
<i>Y</i>	3	3, 4	3	3
<i>Z</i>	6	6	5, 6	

## $LL(1)$ 语法分析器

$L$ : 从左向右 (left-to-right) 扫描输入

$L$ : 构建最左 (leftmost) 推导

1: 只需向前看一个输入符号便可确定使用哪条产生式



**You**

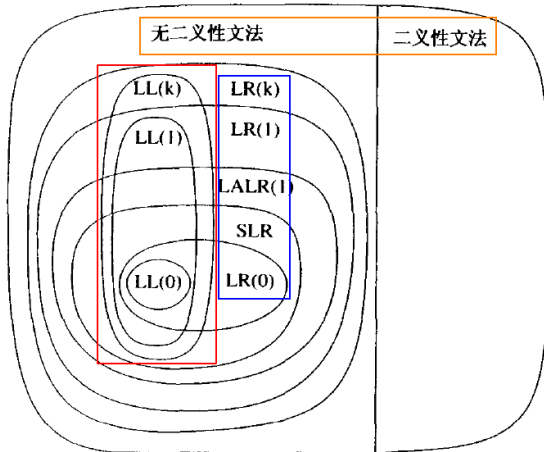
Please write a 10-line poem about the LL(1) parsing algorithm, each line consisting of at least 5 words.



**ChatGPT**

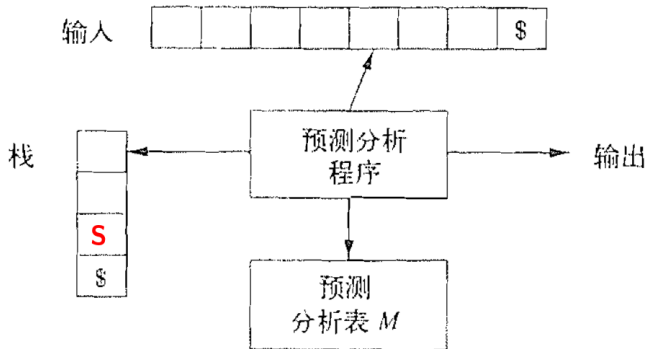
In LL(1)'s world, symbols dance,  
Predictive tables guide its chance.  
Look-ahead of one, it seeks,  
Grammar's rules, it carefully peeks.  
Leftmost derivation, its creed,  
Parsing paths, it does lead.  
With clarity, it parses bright,  
Syntax trees, it brings to light.  
LL(1) parsing, a graceful art.





What is  $LL(0)$ ?

## 非递归的预测分析算法

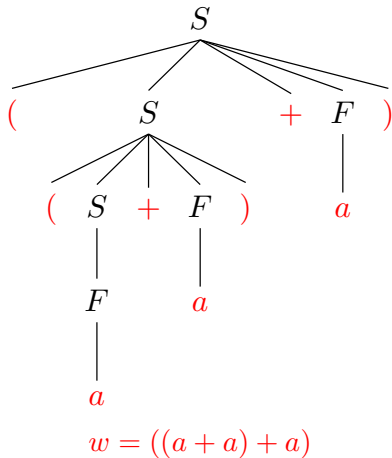


## 非递归的 (栈)、基于预测分析表的实现方法

$$S \rightarrow F$$

$$S \rightarrow (S + F)$$

$$F \rightarrow a$$



## 非递归的预测分析算法

设置  $ip$  使它指向  $w$  的第一个符号, 其中  $ip$  是输入指针;

令  $X$  = 栈顶符号;

while (  $X \neq \$$  ) { /\* 栈非空 \*/

if (  $X$  等于  $ip$  所指向的符号  $a$  ) 执行栈的弹出操作, 将  $ip$  向前移动一个位置;

else if (  $X$  是一个终结符号 )  $error()$ ;

else if (  $M[X, a]$  是一个报错条目 )  $error()$ ;

else if (  $M[X, a] = X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$  ) {

输出产生式  $X \rightarrow Y_1 Y_2 \cdots Y_k$ ;

弹出栈顶符号;

将  $Y_k, Y_{k-1}, \dots, Y_1$  压入栈中, 其中  $Y_1$  位于栈顶。

}

令  $X$  = 栈顶符号;

}

不是  $LL(1)$  文法怎么办?

**改造它**

消除左递归

提取左公因子



$E$  在**不消耗任何词法单元**的情况下, 直接递归调用  $E$ , 造成**死循环**

$$E \rightarrow E + E \mid E - E \mid E * E \mid E / E \mid (E) \mid \mathbf{id} \mid \mathbf{num}$$

$$E \rightarrow E + T \mid E - T \mid T$$

$$T \rightarrow T * F \mid T / F \mid F$$

$$F \rightarrow (E) \mid \mathbf{id} \mid \mathbf{num}$$

$$\text{FIRST}(E + T) \cap \text{FIRST}(T) \neq \emptyset$$

**不是  $LL(1)$  文法**

改写成“右递归”文法 (右结合!!!)

$$E \rightarrow TE'$$

$$E' \rightarrow +TE' \mid \epsilon$$

$$T \rightarrow FT'$$

$$T' \rightarrow *FT' \mid \epsilon$$

$$F \rightarrow (E) \mid \mathbf{id}$$

非终结符号	输入符号					
	id	+	*	(	)	\$
$E$	$E \rightarrow TE'$			$E \rightarrow TE'$		
$E'$		$E' \rightarrow +TE'$			$E' \rightarrow \epsilon$	$E' \rightarrow \epsilon$
$T$	$T \rightarrow FT'$			$T \rightarrow FT'$		
$T'$		$T' \rightarrow \epsilon$	$T' \rightarrow *FT'$		$T' \rightarrow \epsilon$	$T' \rightarrow \epsilon$
$F$	$F \rightarrow \mathbf{id}$			$F \rightarrow (E)$		

$$\text{FIRST}(F) = \{(\mathbf{id})\}$$

$$\text{FIRST}(T) = \{(\mathbf{id})\}$$

$$\text{FIRST}(E) = \{(\mathbf{id})\}$$

$$\text{FIRST}(E') = \{+, \epsilon\}$$

$$\text{FIRST}(T') = \{*, \epsilon\}$$

$$\text{FOLLOW}(E) = \text{FOLLOW}(E') = \{), \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(T) = \text{FOLLOW}(T') = \{+, ), \$\}$$

$$\text{FOLLOW}(F) = \{+, *, ), \$\}$$

## 直接左递归 (Direct Left Recursion)

$$A \rightarrow A\alpha \mid \beta$$

$$A \rightarrow \beta A'$$

$$A' \rightarrow \alpha A' \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow A\alpha_1 \mid A\alpha_2 \mid \dots A\alpha_m \mid \beta_1 \mid \beta_2 \mid \dots \beta_n$$

其中,  $\beta_i$  都不以  $A$  开头

$$A \rightarrow \beta_1 A' \mid \beta_2 A' \mid \dots \mid \beta_n A'$$

$$A' \rightarrow \alpha_1 A' \mid \alpha_2 A' \mid \dots \mid \alpha_m A' \mid \epsilon$$

## 间接左递归 (Indirect Left Recursion)

$$S \rightarrow Ac \mid c$$

$$A \rightarrow Bb \mid b$$

$$B \rightarrow Sa \mid a$$

$$S \Rightarrow Ac \Rightarrow Bbc \Rightarrow Sabc$$

$$A_i \rightarrow A_j \alpha \Rightarrow i < j$$

- 1) 按照某个顺序将非终结符号排序为  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- 2) for ( 从 1 到  $n$  的每个  $i$  ) {
- 3)     for ( 从 1 到  $i-1$  的每个  $j$  ) {
- 4)         将每个形如  $A_i \rightarrow A_j \gamma$  的产生式替换为产生式组  $A_i \rightarrow \delta_1 \gamma \mid \delta_2 \gamma \mid \dots \mid \delta_k \gamma$ ,  
       其中  $A_j \rightarrow \delta_1 \mid \delta_2 \mid \dots \mid \delta_k$  是所有的  $A_j$  产生式
- 5)     }
- 6)     消除  $A_i$  产生式之间的立即左递归
- 7) }

$$S \rightarrow Ac \mid c$$

$$A \rightarrow Bb \mid b$$

$$B \rightarrow Sa \mid a$$

$$B \rightarrow Sa \mid a$$

$$\rightarrow (Ac \mid c)a \mid a$$

$$\rightarrow Aca \mid ca \mid a$$

$$\rightarrow (Bb \mid b)ca \mid ca \mid a$$

$$\rightarrow Bbca \mid bca \mid ca \mid a$$

$$S \rightarrow Ac \mid c$$

$$A \rightarrow Bb \mid b$$

$$B \rightarrow (bca \mid ca \mid a)B'$$

$$B' \rightarrow bcaB' \mid \epsilon$$

$$A_i \rightarrow A_j \alpha \implies i < j$$

## 算法要求:

文法中不存在环 (形如  $A \xRightarrow{*} A$  的推导)

文法中不存在  $\epsilon$  产生式 (形如  $A \rightarrow \epsilon$  的产生式)

$$S \rightarrow Aa \mid b$$

$$A \rightarrow Ac \mid Sb \mid \epsilon$$

## 提取左公因子 (Left-Factoring)

```
7  /*
8  decl : 'int' ID ';'
9        | 'int' ID '=' ID ';'
10         ;
11  */
12
13  decl : 'int' ID optional_init ';' ;
14  optional_init
15      : '=' ID # Init
16      |       # NoInit
17      ;
18
19  /*
20  decl : 'int' ID ('=' ID)? ';'
21  */
```

ANTLR 4 可以处理有左公因子的文法



```

stat : 'if' expr 'then' stat
    | 'if' expr 'then' stat 'else' stat
    | expr
    ;

stat : 'if' expr 'then' stat stat_prime ;
stat_prime : 'else' stat
            |
            ;

expr : ID ;

```

很明显, 提取左公因子无助于消除文法二义性

Thank  
You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn