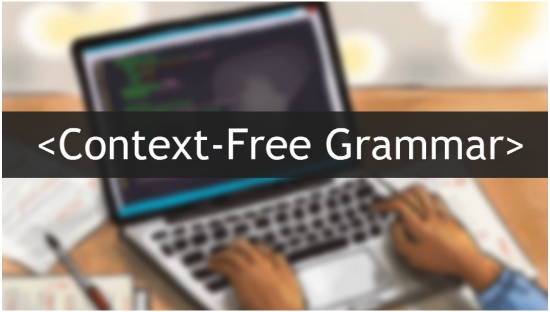
二、语法分析
(5. 上下文无关文法)

魏恒峰

hfwei@nju.edu.cn

2024 年 03 月 29 日

```
functionDecl : type ID '(' formalParameters? ')' block ;

formalParameters : formalParameter (',' formalParameter)* ;

formalParameter : type ID ;

block : '{' stat* '}' ;

stat : block     # BlockStat
     | varDecl   # VarDeclStat
     | 'if' expr 'then' stat ('else' stat)? # IfStat
     | 'return' expr? ';'    # ReturnStat
     | expr '=' expr ';'     # AssignStat
     | expr ';' # ExprStat
     ;
```



上下文无关文法 (CFG)

Definition (Context-Free Grammar (CFG); 上下文无关文法)

上下文无关文法 G 是一个四元组 $G = (T, N, S, P)$:

- T 是**终结符号** (Terminal) 集合, 对应于词法分析器产生的词法单元
- N 是**非终结符号** (Non-terminal) 集合
- S 是**开始** (Start) 符号 ($S \in N$ 且唯一)
- P 是**产生式** (Production) 集合

$$\boxed{A \in N \longrightarrow \alpha \in (T \cup N)^*}$$

头部/左部 (Head) A: **单个**非终结符

体部/右部 (Body) α: 终结符与非终结符构成的串, 也可以是空串 ϵ

$$\boxed{E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid -E \mid \mathbf{id}}$$

$$
\begin{aligned}
E &\to TE' \\
E' &\to +TE' \mid \epsilon \\
T &\to FT' \\
T' &\to *FT' \mid \epsilon \\
F &\to (E) \mid \mathbf{id}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &\to aSa \\
S &\to bSb \\
S &\to a \\
S &\to b \\
S &\to \epsilon
\end{aligned}
$$

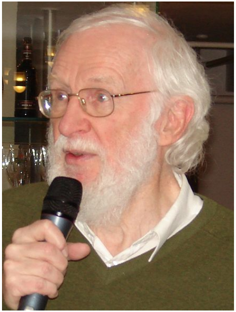
```
functionDecl : type ID '(' formalParameters? ')' block ;

formalParameters : formalParameter (',' formalParameter)* ;

formalParameter : type ID ;

block : '{' stat* '}' ;

stat : block     # BlockStat
     | varDecl   # VarDeclStat
     | 'if' expr 'then' stat ('else' stat)? # IfStat
     | 'return' expr? ';'    # ReturnStat
     | expr '=' expr ';'     # AssignStat
     | expr ';' # ExprStat
     ;
```

[Extended] Backus-Naur form ([E]BNF)

$+ \quad * \quad ?$

John Backus
(1924 ∼ 2007)

1977 (FORTRAN)



Peter Naur
(1928 ∼ 2016)

2005 (ALGOL60)

Niklaus Wirth
(1934 ∼ 2024)

1984 (PLs; PASCAL)

Context-Sensitive Grammar (CSG)
上下文敏感语法

$$S \to aBC$$
$$S \to aSBC$$
$$CB \to CZ$$
$$CZ \to WZ$$
$$WZ \to WC$$
$$WC \to BC$$

举例解释：很简单，比如这里B在前缀元素为a时，转换成ab；在前缀元素为b时，转换成bb

$$aB \to ab$$
$$bB \to bb$$
$$bC \to bc$$
$$cC \to cc$$

$$\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta \qquad A \in N \quad \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma \setminus \{S\})^* \quad \gamma \in (N \cup \Sigma \setminus \{S\})^+$$

语义：上下文无关文法 G 定义了一个**语言** $L(G)$

语言是**串**的集合

串从何来？

推导 (Derivation)

$$\boxed{E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid -E \mid \mathbf{id}}$$

推导即是将某个产生式的左边**替换**成它的右边

每一步推导需要选择**替换哪个非终结符号**, 以及**使用哪个产生式**

推导 (Derivation)

$$\boxed{E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid -E \mid \textbf{id}}$$

Eg1:

$$E \implies -E \implies -(E) \implies -(E+E) \implies -(\textbf{id} + E) \implies -(\textbf{id}+\textbf{id})$$

$E \implies -E$: 经过一步推导得出

$E \overset{+}{\implies} -(\textbf{id} + E)$: 经过一步或多步推导得出

$E \overset{*}{\implies} -(\textbf{id} + E)$: 经过零步或多步推导得出

$$E \implies -E \implies -(E) \implies -(E+E) \implies -(E + \textbf{id}) \implies -(\textbf{id}+\textbf{id})$$

Leftmost (最左) Derivation 最左引用　　Rightmost (最右) Derivation 最右引用

Definition (Sentential Form; 句型)

如果 $S \xRightarrow{*} \alpha$, 且 $\alpha \in (T \cup N)^*$, 则称 α 是文法 G 的一个**句型**。

$$\boxed{E \to E + E \mid E * E \mid (E) \mid -E \mid \mathbf{id}}$$

$$E \implies -E \implies -(E) \implies -(E+E) \implies -(\mathbf{id} + E) \implies -(\mathbf{id} + \mathbf{id})$$

是句型，也是句子

都是“句型”

Definition (Sentence; 句子)

如果 $S \xRightarrow{*} w$, 且 $w \in T^*$, 则称 w 是文法 G 的一个**句子**。

Definition (文法 G 生成的语言 $L(G)$)

文法 G 的**语言 $L(G)$** 是它能推导出的**所有句子**构成的集合。

$$L(G) = \{w \mid S \xRightarrow{*} w\}$$

关于文法 G 的**两个基本问题:**

- **Membership 问题:** 给定字符串 $x \in T^*$, $x \in L(G)$?
- $L(G)$ 究竟是什么?

给定字符串 $x \in T^*$, $x \in L(G)$?

(即, 检查 x 是否符合文法 G)

这就是**语法分析器**的任务:

为输入的词法单元流寻找推导、**构建语法分析树**, 或者报错

$L(G)$ 是什么?

这是**程序设计语言设计者**需要考虑的问题

这一部分主要靠积累!

$$
\boxed{\begin{aligned} S &\to SS \\ S &\to (S) \\ S &\to \epsilon \end{aligned}}
$$

$$L(G) = \{\underline{\text{良匹配括号串}}\}$$

$$
\boxed{\begin{aligned} S &\to aSb \\ S &\to \epsilon \end{aligned}}
$$

$$L(G) = \{\underline{a^n b^n} \mid n \geq 0\}$$

字母表 $\Sigma = \{a, b\}$ 上的所有**回文串** (Palindrome) 构成的语言

$$\boxed{\begin{aligned} S &\to aSa \\ S &\to bSb \\ S &\to a \\ S &\to b \\ S &\to \epsilon \end{aligned}}$$

$$\{\underline{b^n a^m b^{2n}} \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &\to bSbb \mid A \\ A &\to aA \mid \epsilon \end{aligned}}$$

$$\{x \in \{a,b\}^* \mid x \text{ 中 } a,b \text{ 个数相同}\}$$

$$\boxed{V \to aVb \mid bVa \mid \epsilon}$$

$$\boxed{V \to aVbV \mid bVaV \mid \epsilon}$$

$$\boxed{V \to VV \mid aVb \mid bVa \mid \epsilon}$$

(By 香港中文大学 (深圳) 华同学)

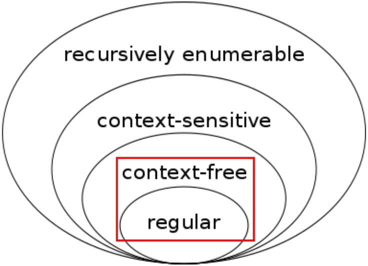
$$\{x \in \{a, b\}^* \mid x \text{ 中 } a, b \text{ 个数不同}\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &\to T \mid U \\ T &\to VaT \mid VaV \\ U &\to VbU \mid VbV \\ V &\to aVbV \mid bVaV \mid \epsilon \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &\to aBC \\ S &\to aSBC \\ CB &\to CZ \\ CZ &\to WZ \\ WZ &\to WC \\ WC &\to BC \\ aB &\to ab \\ bB &\to bb \\ bC &\to bc \\ cC &\to cc \end{aligned}}$$

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

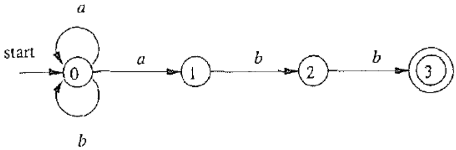
为什么不使用优雅、强大的**正则表达式**描述程序设计语言的语法?



正则表达式的表达能力**严格弱于**上下文无关文法

每个正则表达式 r 对应的语言 $L(r)$ 都可以使用上下文无关文法来描述

$$r = (a|b)^* abb$$



$$
\begin{aligned}
A_0 &\to aA_0 \mid bA_0 \mid aA_1 \\
A_1 &\to bA_2 \\
A_2 &\to bA_3 \\
A_3 &\to \epsilon
\end{aligned}
$$

此外, 若 $\delta(A_i, \epsilon) = A_j$, 则添加 $A_i \to A_j$

$$\boxed{\begin{aligned} S &\to aSb \\ S &\to \epsilon \end{aligned}}$$

$$L = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$$

该语言**无法**使用正则表达式来描述

Theorem

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ 无法使用正则表达式描述。

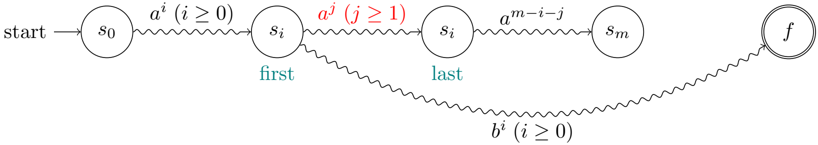
review:
RE <=> e-NFA <=> DFA

反证法

假设存在正则表达式 r: $L(r) = L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

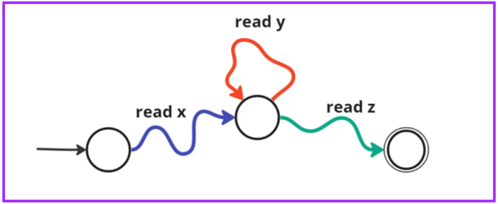
则存在**有限**状态自动机 $D(r)$: $L(D(r)) = L$; 设其**状态数**为 $k \geq 1$

$\boxed{\text{考虑输入 } a^m \ (m \geq k)}$



$D(r)$ 也能接受 $a^{i+j} b^i$; **矛盾!**

Pumping Lemma for Regular Languages (@ wiki)



Theorem

If L *is a regular language, then there exists a number* $p \geq 1$ *(pumping length) such that any string* s *in* L *of length* $\geq p$ *can be divided into three pieces,* $s = xyz$*, satisfying the following conditions:*

(i) $|y| \geq 1$

(ii) $|xy| \leq p$

(iii) $\forall i \geq 0 : xy^iz \in L$

Example

$D = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\}$ is not regular.

$$\text{考虑 } s = 1^{p^2} \qquad (p \text{ is the pumping length})$$

$$|s| \geq p$$ |S|是串的长度，是p^2，显然是大于p的

$$s = xyz$$

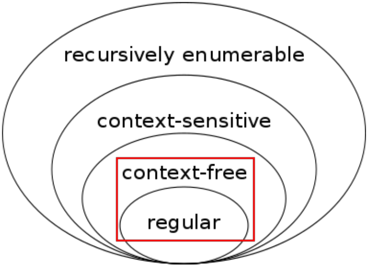
$$xy^2z \in D$$

$$p^2 < |xy^2z| = |xyz| + |y| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

两个完全平方数之间不存在完全平方数

$$xy^2z \notin D$$

$L = \{a^n b^n \mid n \ge 0\}$ 无法使用正则表达式描述



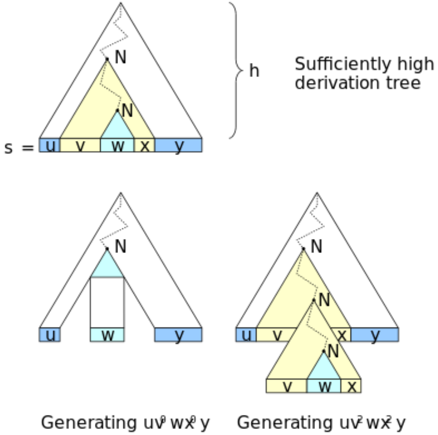
Q : 上下文无关文法描述能力的界限在那里?

$$
\boxed{\begin{aligned}
S &\to aBC \\
S &\to aSBC \\
CB &\to CZ \\
CZ &\to WZ \\
WZ &\to WC \\
WC &\to BC \\
aB &\to ab \\
bB &\to bb \\
bC &\to bc \\
cC &\to cc
\end{aligned}}
$$

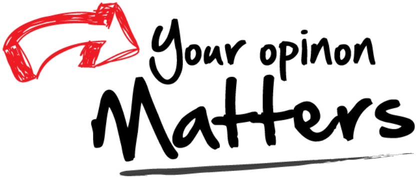
$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Pumping Lemma for Context-free Languages (@ wiki)




Thank You!



Office 926

hfwei@nju.edu.cn