

第四章 根轨迹法

内 容 提 要

根轨迹法是一种图解法，根据系统的开环零极点分布，用作图的方法简便地确定闭环系统的特征根与系统参数的关系，进而对系统的特性进行定性分析和定量计算。根轨迹的基本条件，常规根轨迹绘制的基本规则，广义根轨迹的绘制，用根轨迹图确定闭环极点及系统性能指标。如何利用MATLAB绘制系统的根轨迹。

知 识 要 点

传递函数的零，极点表示，根轨迹的概念，根轨迹的基本条件，根轨迹的基本规则，等效开环传递函数的概念，根轨迹定性分析系统性能指标随系统参数变化的趋势，确定系统闭环零极点及系统性能指标。

第四章 根轨迹法

§4-1 根轨迹

§4-2 绘制根轨迹的基本法则

§4-3 广义根轨迹

§4-4 控制系统的根轨迹分析

§4-5 用MATLAB绘制根轨迹图

4-1 根轨迹

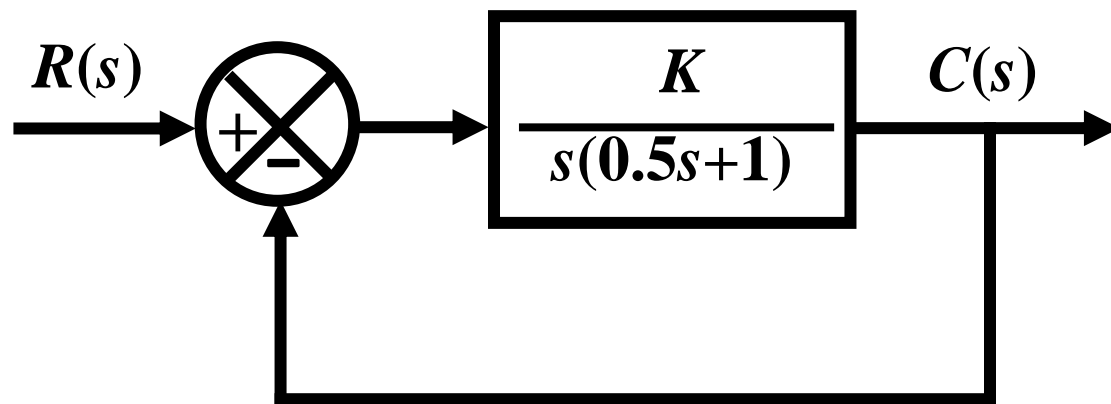
4.1.1 根轨迹的基本概念

反馈控制系统的性质取决于闭环传函。只要求解出闭环系统的根，系统的响应就迎刃而解。但是对于3阶以上的系统求根比较困难。如果系统中有一个可变参数时，求根更困难了。

1948年，伊凡思提出了一种确定系统闭环特征根的图解法——根轨迹法。在已知开环零极点分布的基础上，当某些参数变化时确定闭环极点的一种简单的图解方法。

定义：当系统开环传递函数中某一参数从 $0 \rightarrow \infty$ 时，闭环系统特征根在 s 平面上的变化轨迹，就称作**系统根轨迹**。一般取开环传递系数作为可变参数。

举例说明：已知系统的方框图，分析 $0 < K < \infty$ ，闭环特征根在 s 平面上的移动路径及其特征。



解：系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(0.5s + 1)} = \frac{2K}{s(s + 2)} = \frac{K_g}{s(s + 2)}$$

式中， K 为系统的开环比例系数。 $K_g = 2K$ 称为系统的开环根轨迹增益。

系统的闭环传递函数为： $\Phi(s) = \frac{2K}{s^2 + 2s + 2K}$

系统的闭环特征方程为： $s^2 + 2s + 2K = 0$

用解析法求得系统的两个闭环特征根为：

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 2K}$$

闭环特征根 s_1, s_2 随着 K 值得改变而变化。

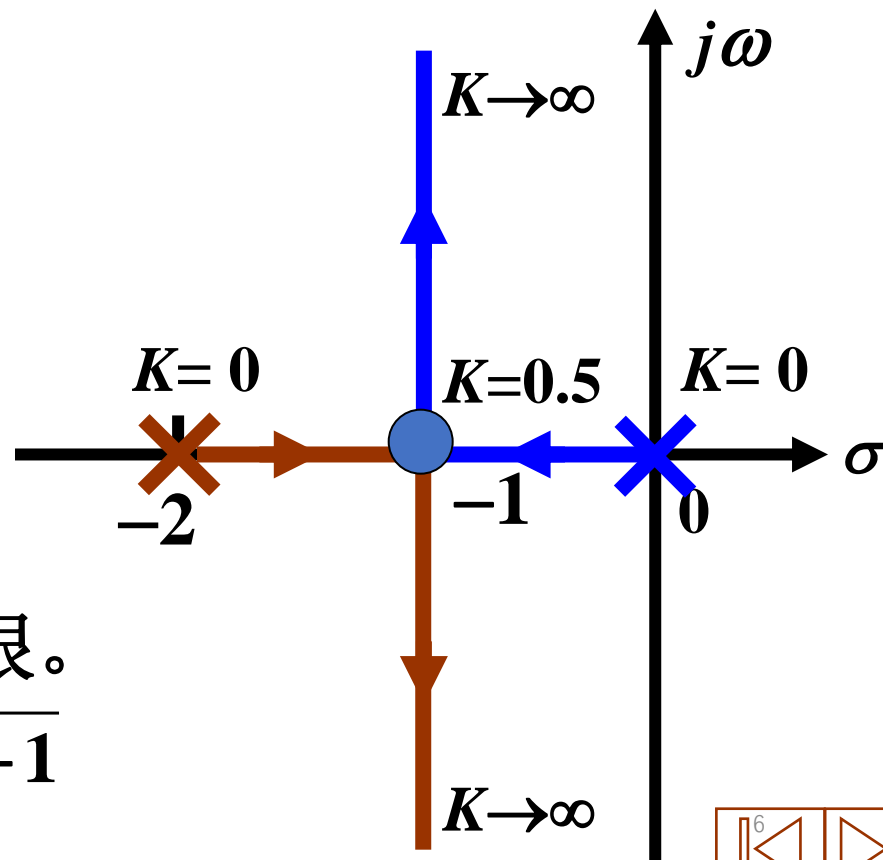
(1) $K=0$: $s_1=0, s_2=-2$, 是根迹的起点, 用“ \times ”表示。

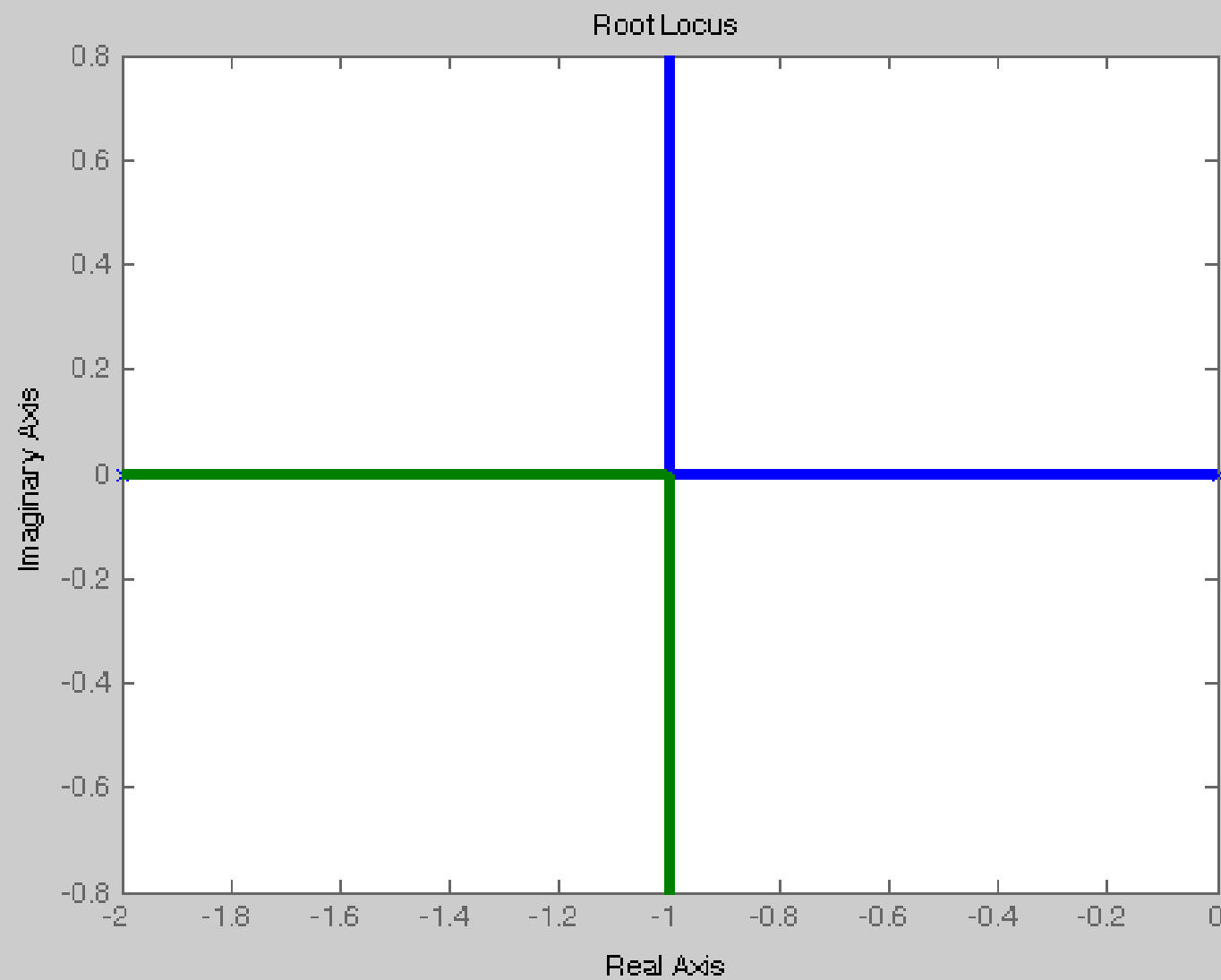
(2) $0 < K < 0.5$: s_1, s_2 均是负实数。 $K \uparrow \rightarrow s_1 \downarrow, s_2 \uparrow$ 。

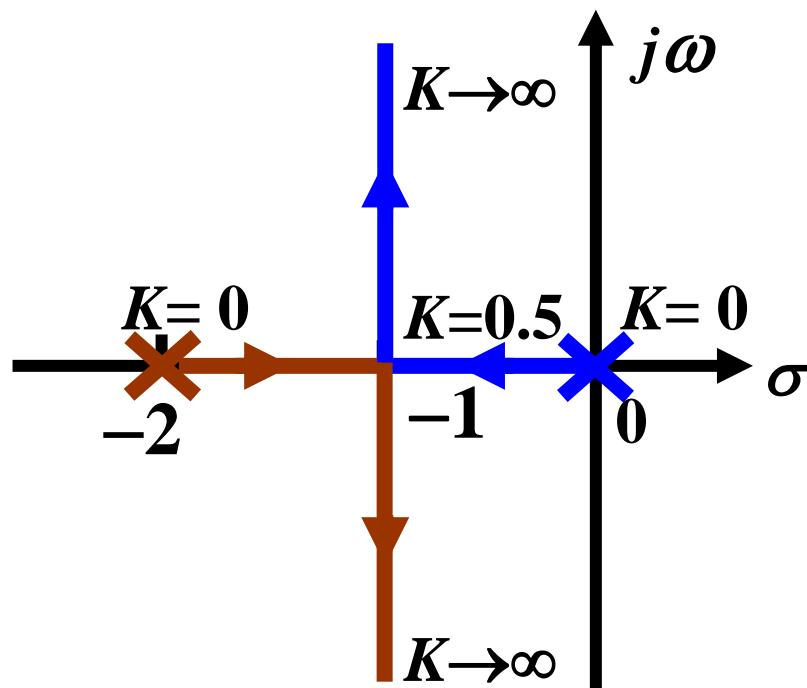
s_1 从坐标原点开始沿负实轴向左移动; s_2 从 $(-2, j0)$ 点开始沿负实轴向右移动。

(3) $K=0.5$: $s_1=s_2=-1$, 重根。

(4) $K > 0.5$: $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2K-1}$



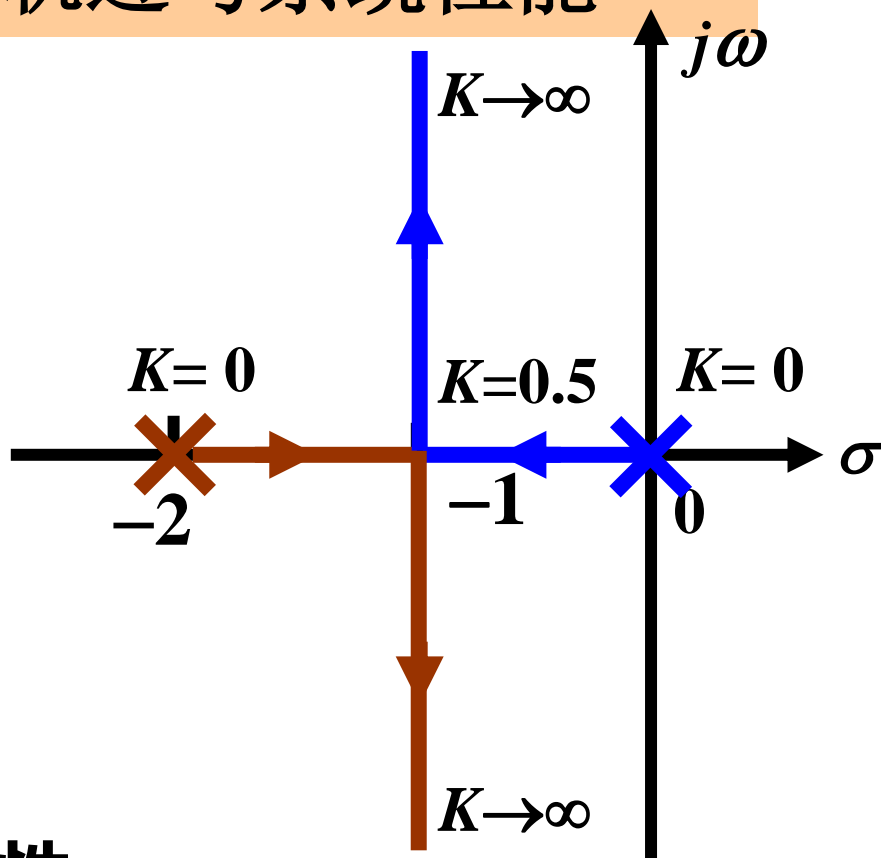




二阶系统有两个特征根，它的轨迹有两条分支。因此：

- (1) n 阶系统有 n 条分支；
- (2) 每条分支的起点($K=0$)位于开环极点处；
- (3) 各分支的终点($K \rightarrow \infty$)或为开环零点处或为无限点；
- (4) $(-1, j0)$ 点有重根，称为分离点。

4.1.2 根轨迹与系统性能

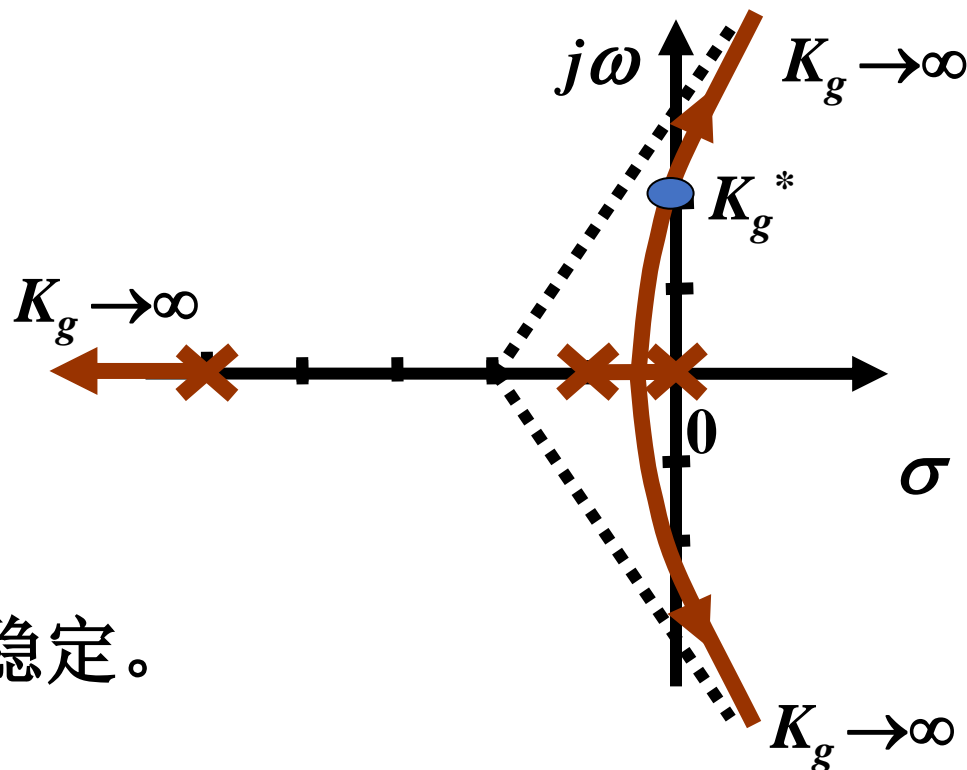


1. 稳定性

当 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 时，图中的根轨迹不会越过虚轴进入 s 右半平面，因此二阶系统对所有的 K 值都是稳定的。

如果高阶系统的根迹有可能进入 s 右半平面，此时根迹与虚轴交点处的 K 值，就是临界开环增益。

当 $K < K_g^*$ 时，系统稳定。



2. 稳态性能

开环系统在坐标原点有一个极点，系统属于1型系统，因而根迹上的 K 值就是静态速度误差系数 K_v 。如果给定系统 e_{ss} 的要求，则由根迹图可以确定闭环极点位置的容许范围。

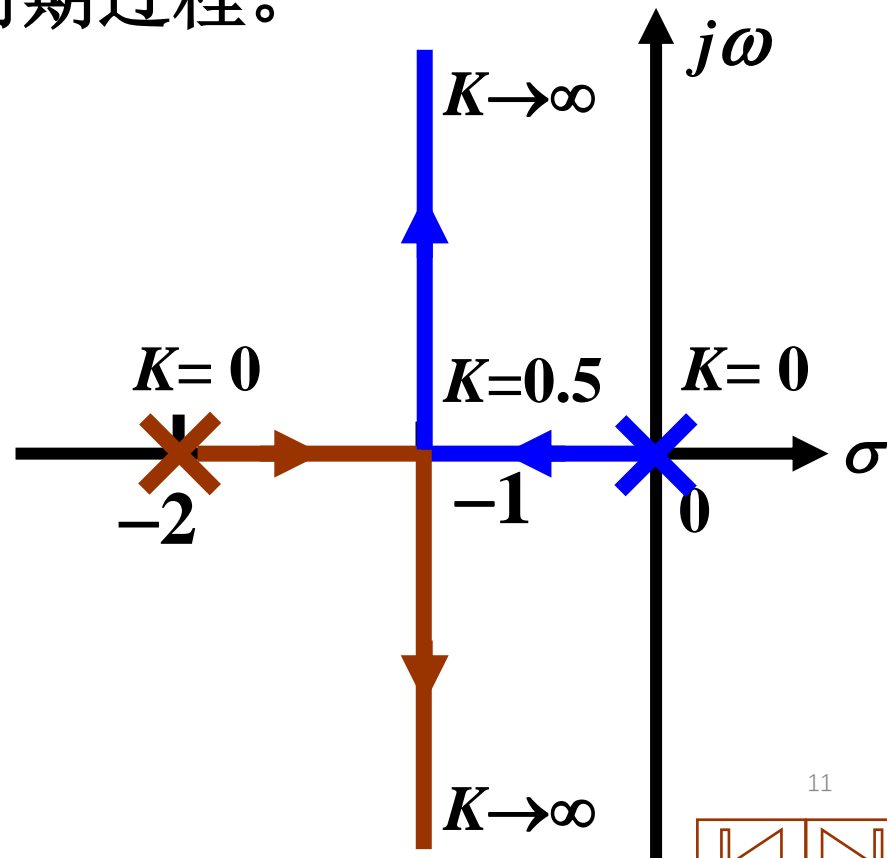
3. 动态性能

由图可见，当 $0 < K < 0.5$ 时，闭环极点均位于负实轴上，系统为过阻尼系统，单位阶跃响应为非周期过程。

当 $K = 0.5$ 时，闭环两个实极点重合，系统为临界阻尼系统，单位阶跃响应为非周期过程。

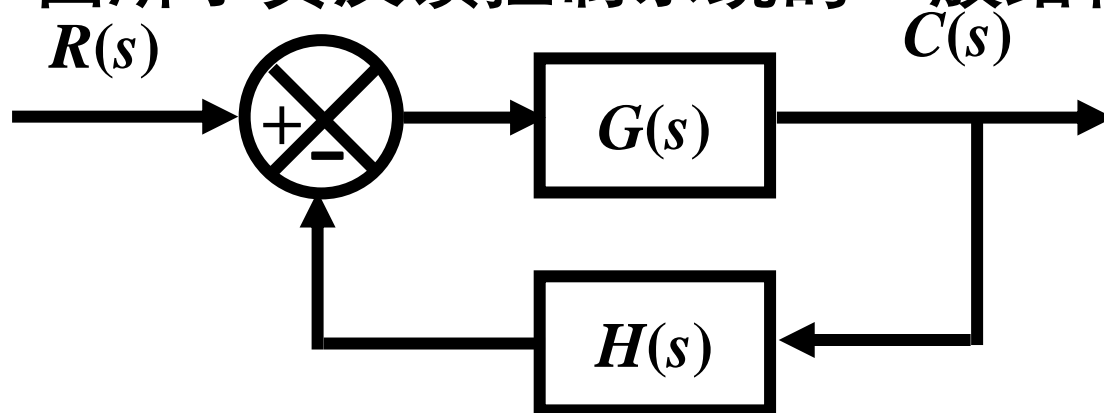
当 $K > 0.5$ 时，闭环极点为一对共轭复数极点，系统为欠阻尼系统，单位阶跃响应为阻尼振荡过程。

$K \uparrow \Rightarrow \xi \downarrow \Rightarrow \sigma_p \% \uparrow$ ，但是 t_s 不变



4.1.3 根轨迹方程

研究下图所示负反馈控制系统的一般结构。



系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

该系统的特征方程为: $D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$

或 $G(s)H(s) = -1$

上式称之为系统的根轨迹方程。

系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 写成如下形式

$$G(s)H(s) = K_g \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

式中 K_g 为系统的根迹增益， z_i 为系统的开环零点， p_j 为系统的开环极点。此时称为常规（ 180° ）根轨迹，根轨迹方程又可写为：

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -\frac{1}{K_g}$$

根轨迹的幅值方程：

$$\frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{1}{K_g}$$

根轨迹的相角方程：

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

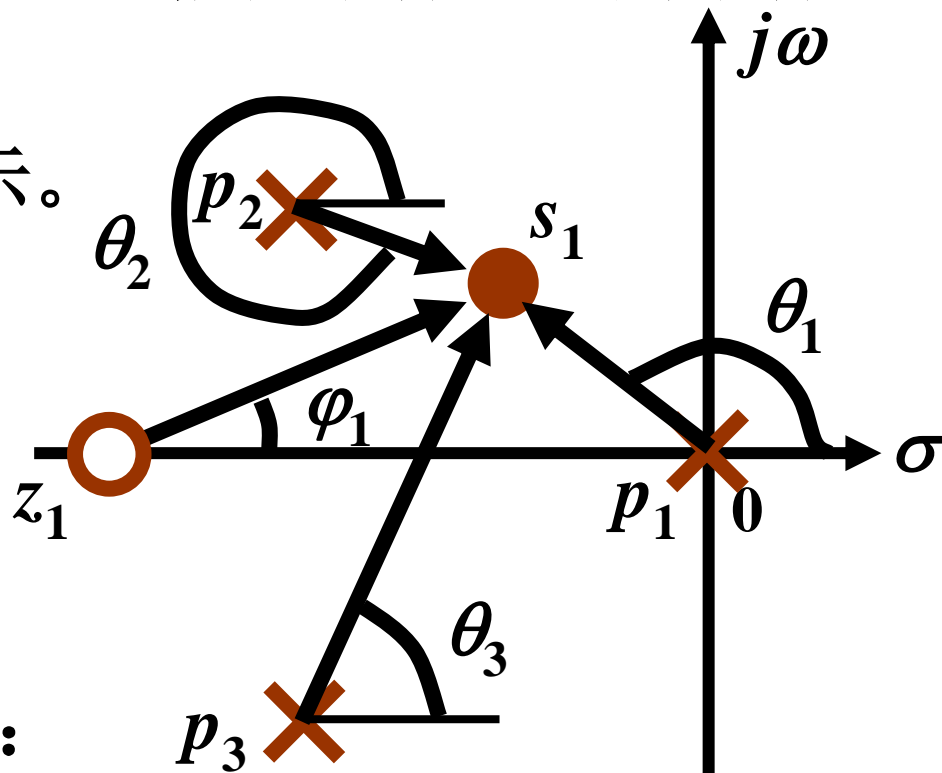
式中， $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ （全部整数）。

根据这两个条件，可完全确定 s 平面上根轨迹及根轨迹上对应的 K_g 值。**相角条件**是确定 s 平面上根轨迹的**充要条件**，这就是说，绘制根轨迹时，只需要使用相角条件；而当需要确定根轨迹上各点的 K_g 值时，才使用幅值条件。

下面看看怎样按上式表示的幅值条件和相角条件绘制系统的闭环根轨迹图。

已知开环零极点分布如图示。

在 s 平面找一点 s_1 ，
画出各开环零、极点
到 s_1 点的向量。



检验 s_1 是否满足相角条件：

$$\begin{aligned} & \angle(s_1 - z_1) - [\angle(s_1 - p_1) + \angle(s_1 - p_2) + \angle(s_1 - p_3)] \\ &= \varphi_1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = (2k+1)\pi \quad ? \end{aligned}$$

如果 s_1 点满足相角条件，则是根轨迹上的一点。寻找

在 s 平面内满足相角条件的所有 s_1 点，将这些点连成光滑曲线，即是**闭环系统根轨迹**。

在1948年，伊凡思提出了用图解法绘制根迹的一些基本法则，可以迅速绘制闭环系统的概略根迹，在概略根迹的基础上，必要时可用相角条件使其精确化，从而使整个根迹的绘制过程大为简化。

4-2 绘制根轨迹的基本法则

4.2.1 绘制180°根轨迹的基本法则

法则1 根轨迹的起点($K_g=0$)和终点($K_g\rightarrow\infty$)：根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点。

证明：

$$G(s)H(s) = K_g \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$



当 $K_g = 0$ 时，有

$$s = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

上式说明 $K_g = 0$ 时，闭环特征方程的根就是开环极点。

将特征方程改写为：

$$\frac{1}{K_g} \prod_{j=1}^n (s - p_j) + \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

当 $K_g \rightarrow \infty$ 时，有

$$s = z_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

所以根轨迹必终于开环零点。

在实际系统中，开环传函中 $m \leq n$ ，有 m 条根轨迹终点为开环零点处，有 $n - m$ 条根轨迹的终点将在无穷远处。

$$K_g = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\prod_{j=1}^n |s - p_j|}{\prod_{i=1}^m |s - z_i|} = \lim_{s \rightarrow \infty} |s|^{n-m} \rightarrow \infty$$

如果把有限数值的零点称为有限零点，而把无穷远处的零点称为无限零点，那么根轨迹必终于开环零点。

[证毕]

法则2 根轨迹的分支数、对称性和连续性：系统根轨迹的分支数与开环有限零点数 m 和有限极点数 n 中的大者相等，根轨迹是连续的并且对称于实轴。

证明： $1 + G(s)H(s) = 0$

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$



特征方程式的阶数 = $\max\{n, m\}$

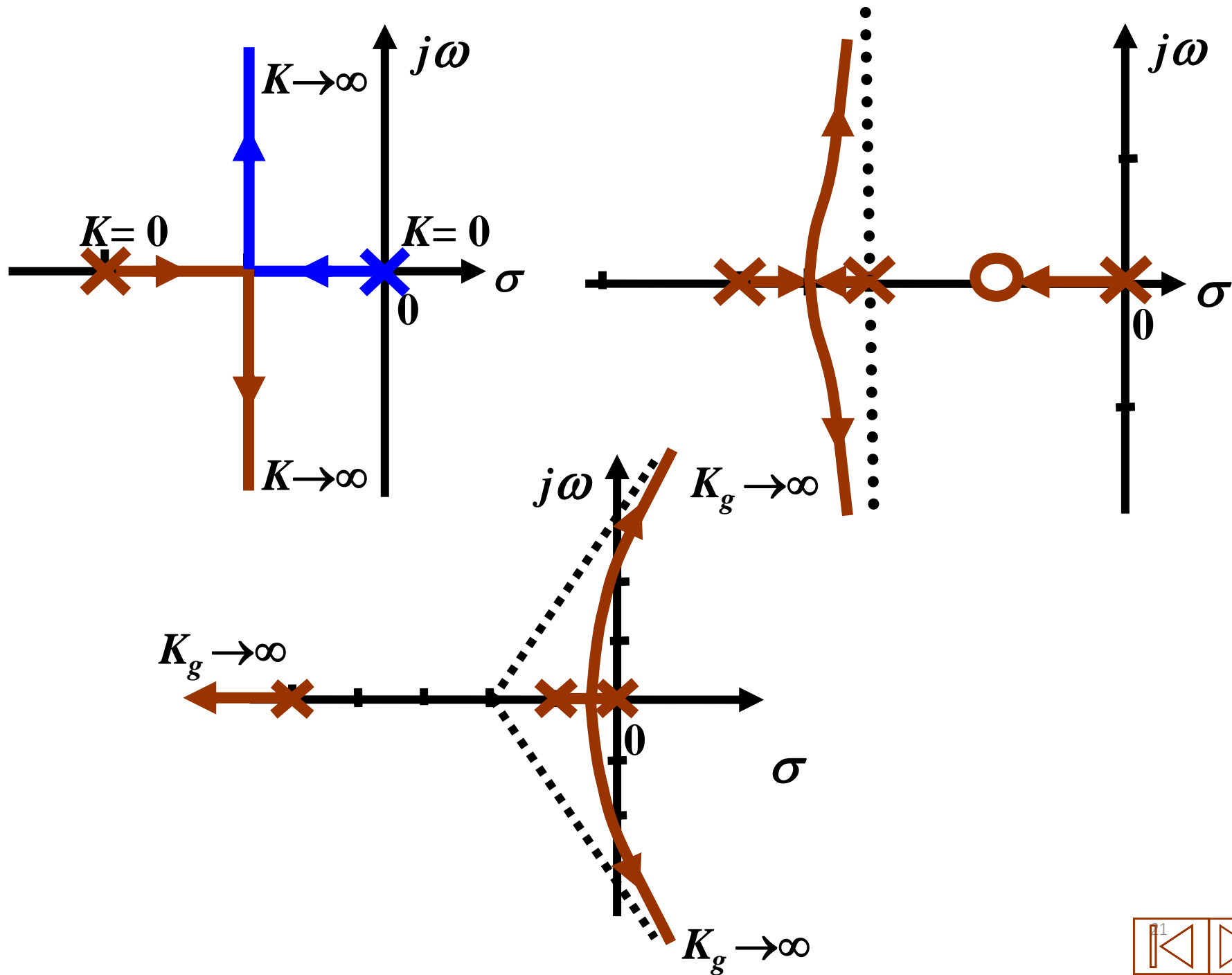
特征根的个数 = 方程的阶数

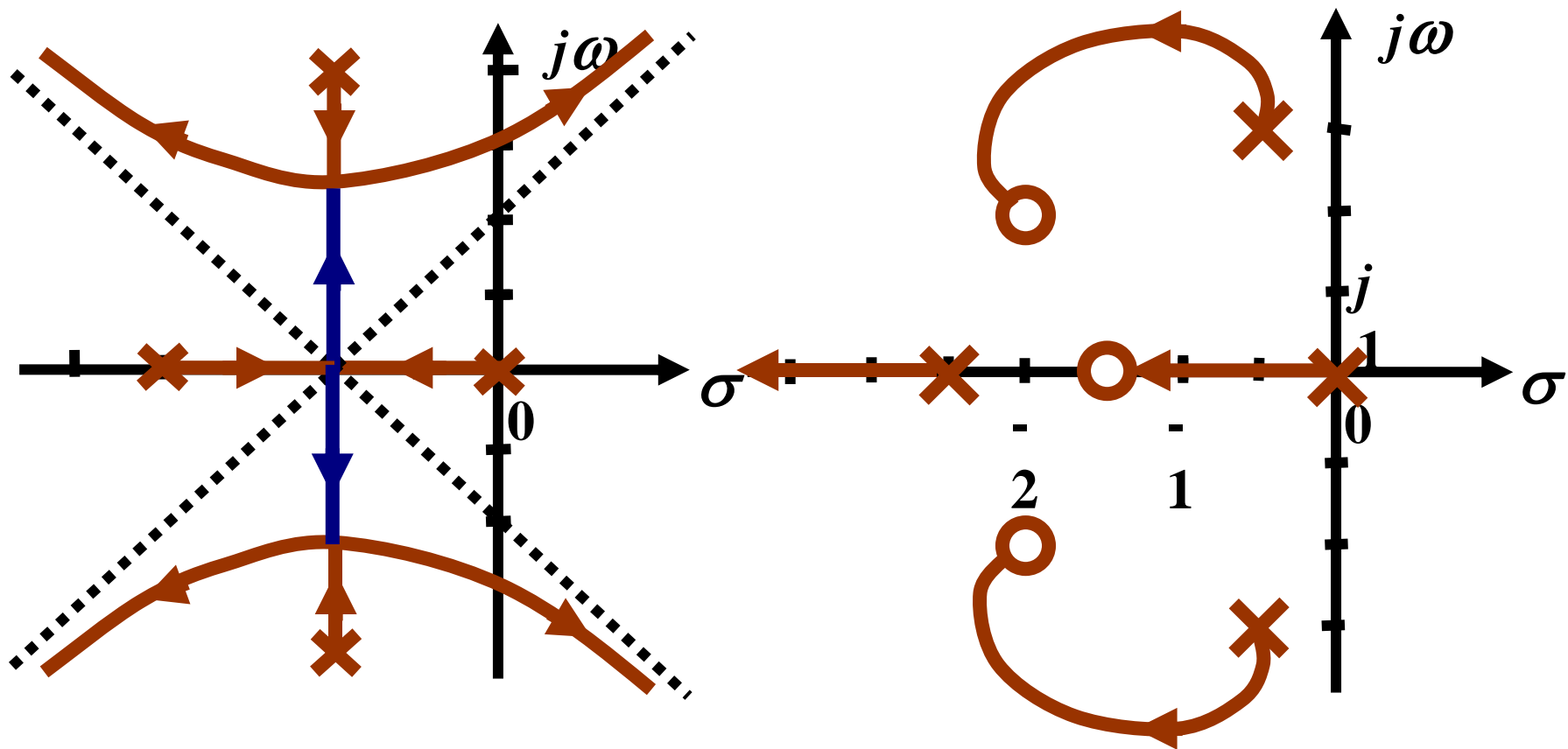
= 根轨迹的分支数 = $\max\{n, m\}$

由于闭环特征方程中的某些系数是根迹增益的函数，所以当 K_g 从 $0 \rightarrow \infty$ 连续变化时，特征方程的某些系数也随之而连续变化，因而特征方程根的变化也必然是连续的，故根轨迹具有连续性。

因为闭环传函为有理分式，所以闭环特征方程的根只有实根和复根两种，实根本身位于实轴上，复根必成对共轭出现，而根轨迹是根的集合，所以必然对称于实轴。

[证毕]





法则3 根轨迹的渐近线：当开环传函中 $m < n$ 时，有 $n - m$ 条根轨迹分支沿着与实轴交角为 φ_a ，交点为 σ_a 的一组渐近线趋于无穷远处，且有：

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, \dots, n-m-1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

证明：假设在 ∞ 有特征根 s_k ，则 s 平面上有开环有限零点 z_i 和极点 p_j 到 s_k 的矢量幅角相等，即

$$\angle(s_k - z_i) = \angle(s_k - p_j) = \varphi_a$$

代入相角条件

$$\sum_{i=1}^m \angle(s_k - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s_k - p_j) = m\varphi_a - n\varphi_a = (2k+1)\pi$$

$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, \dots, n-m-1)$$

考虑到 s 平面上所有开环有限零点 z_i 和极点 p_j 到无穷远处特征根 s_k 的矢量长度都相等。于是，对于 s_k 而言，所有开环零点、极点都汇集在一起，其位置为实轴上一点 σ_a ，得到

$$z_i = p_j = \sigma_a$$

$$\frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{\left| s^m + \sum_{i=1}^m (-z_i) s^{m-1} + \dots + \prod_{i=1}^m (-z_i) \right|}{\left| s^n + \sum_{j=1}^n (-p_j) s^{n-1} + \dots + \prod_{j=1}^n (-p_j) \right|} = \frac{1}{K_g}$$

$$\text{即} \left| \frac{1}{(s - \sigma_a)^{n-m}} \right| = \frac{1}{\left| s^{n-m} + \left(\sum_{i=1}^m (-z_i) - \sum_{j=1}^n (-p_j) \right) s^{n-m-1} + \dots + \right|}$$

令上式中 s^{n-m-1} 项的系数相等，即

$$(n-m) \sigma_a = \sum p_j - \sum z_i$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

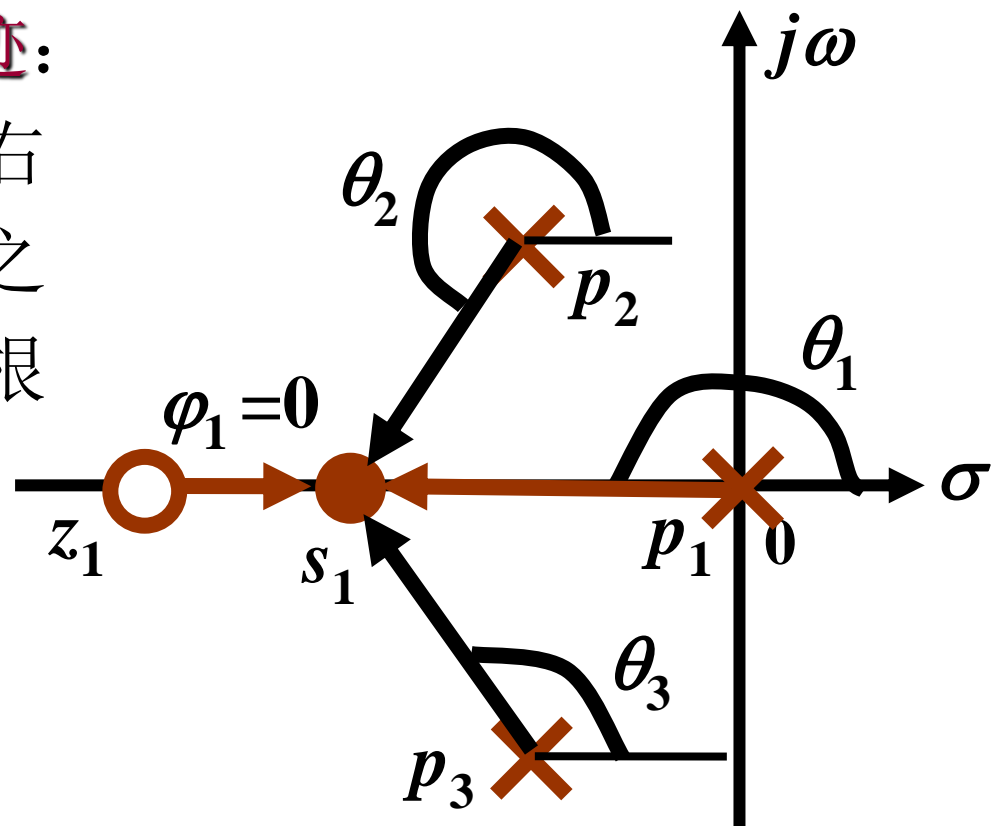
[证毕]



法则4 实轴上的根轨迹:

实轴上的某一区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。

证明：设零、极点分布如图示



在实轴上取一测试点 s_1 。

由图可见，复数共轭极点 to 实轴 s_1 点的向量相角和为 2π ，复数共轭零点如此。因此在确定实轴上的根轨迹时，可以不考虑复数零、极点的影响。

s_1 点左边开环实数零、极点到的向量相角为零。
而 s_1 点右边开环实数零、极点到的向量相角为 π 。

如果 s_1 是根轨迹，则应满足相角条件：

$$\sum \varphi_j - \sum \theta_i = (2k + 1)\pi$$

$$m_1 \cdot \pi - n_1 \cdot (-\pi) = (2k + 1)\pi$$

$$m_1 + n_1 = 2k + 1$$

即 s_1 右边开环实数零、极点个数之和为奇数。

[证毕]

例4-1 设某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$

试确定系统根轨迹条数、起点和终点、渐近线及根轨迹在实轴上的分布。

解：开环极点 $p_1=0$ 、 $p_2=-1$ 、 $p_3=-5$ 。

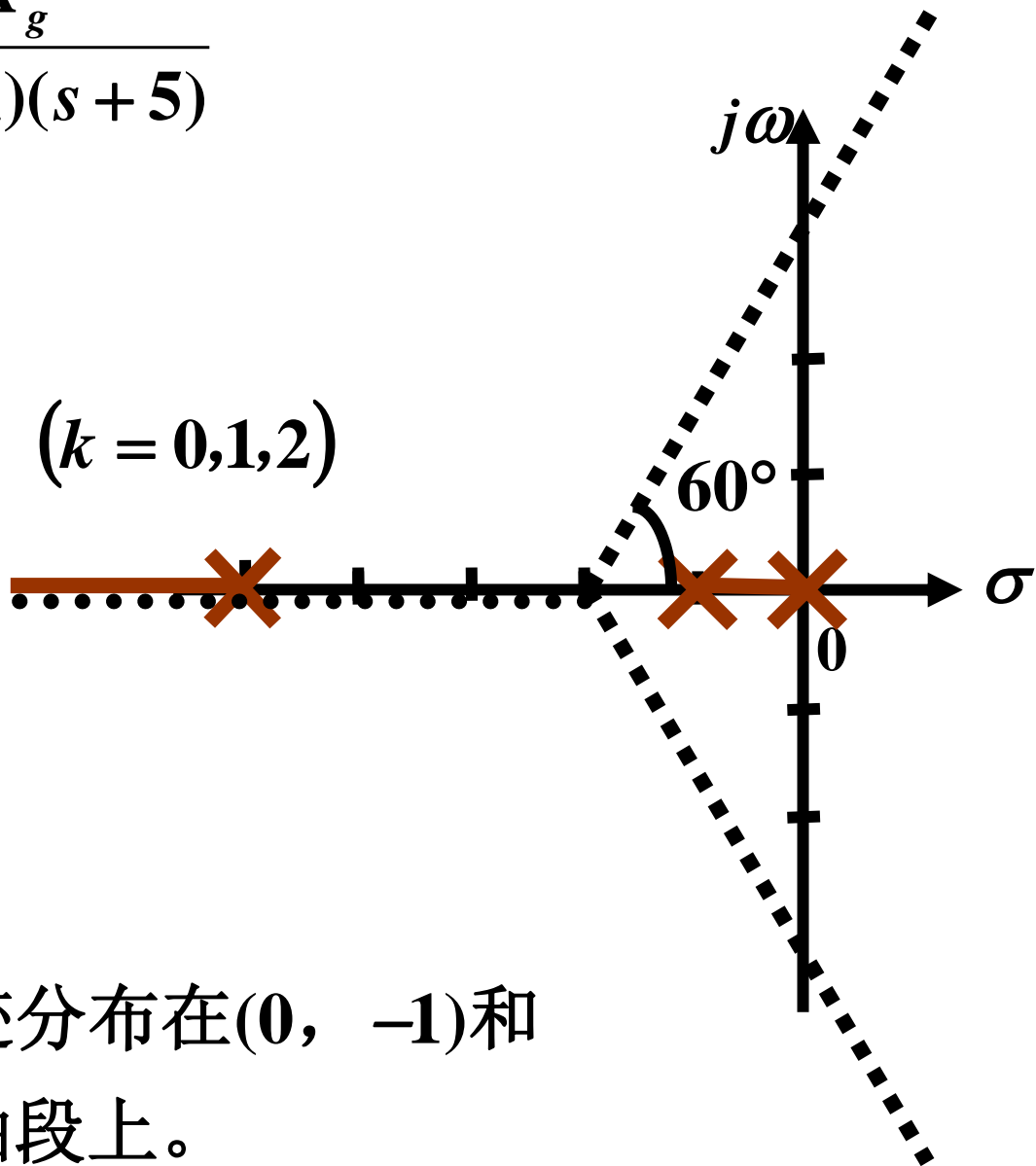
系统的根轨迹有三条分支，分别起始于系统的三个有限的开环极点，当 $K_g \rightarrow \infty$ 时，沿着三条渐近线趋向无穷远处；三条渐近线在实轴上的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-1-5}{3-0} = -2$$

$$G(s)H(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{3}\pi$$

$$= \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \quad (k=0,1,2)$$



实轴上的根轨迹分布在(0, -1)和
(-5, -∞)的实轴段上。

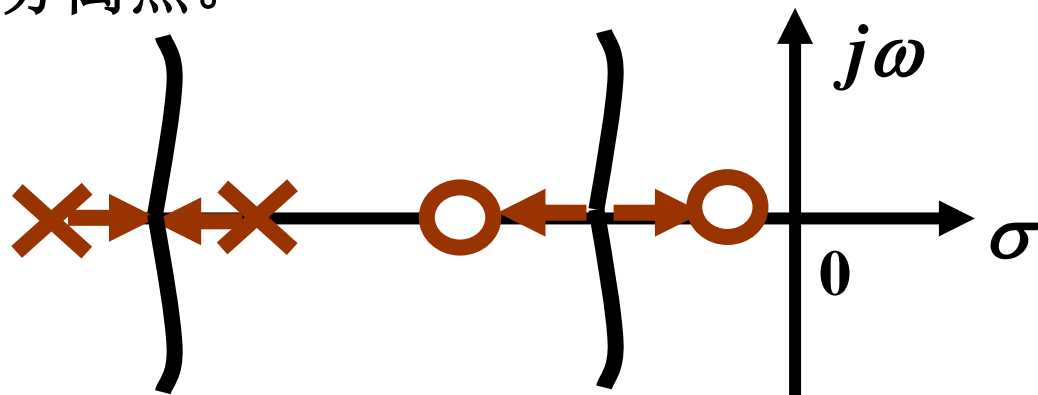
法则5 根轨迹分离点（会合点）与分离角：两条或两条以上的根轨迹在 s 平面上相遇后立即分开（或分开后又相遇）的点，称为根轨迹的分离点(会合点)。

特性：1) 分离点是系统闭环重根。

2) 由于根轨迹是对称的，所以分离点或位于实轴上，或以共轭形式成对出现在复平面上。

3) 位于两实数开环零（极）点之间若有根轨迹，则必有一个分离点或会合点。

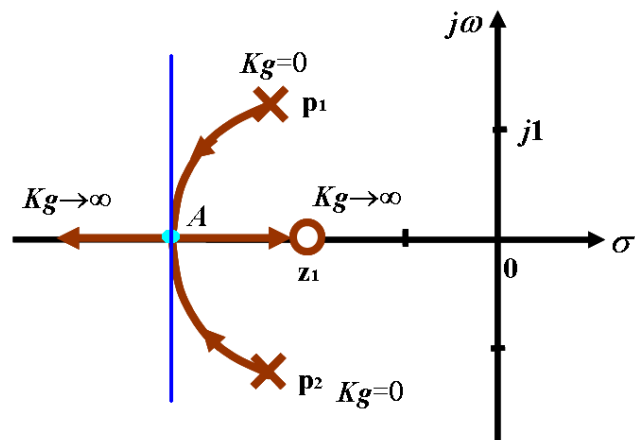
4) 在一个开环零点和一个开环极点之间若有根轨迹，或无分离点或多个分离点。



分离角：根轨迹进入分离点切线方向与离开分离点的切线方向之间的夹角。

当 l 条根轨迹分支进入并立即离开分离点时

$$\text{分离角} = \frac{(2k+1)\pi}{l}, k = 0, 1, \dots, l-1$$



确定分离点位置的方法（**均需验证**）：

法一：重根法（极值法）

$$\frac{dD(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[1 + K_g \frac{M(s)}{N(s)} \right] = 0$$

法二：公式法

设分离点的坐标为 d ，则 d 满足如下公式：

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d - p_j} \quad \text{牢记!}$$

式中， z_i 、 p_j 是系统的有限开环零点和开环极点。

证明：根轨迹在 s 平面上相遇，说明闭环特征方程有重根出现，设 $s = d$ 处为分离点，重根数为 l 。

$$\prod_{j=1}^n (s - p_j) + K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$
$$\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^n (s - p_j) + K_g \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

$$\frac{\frac{d}{ds} \prod_{j=1}^n (s - p_j)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \frac{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}$$

$$(\ln V)' = \frac{V'}{V}$$

$$\frac{d \ln \prod_{j=1}^n (s - p_j)}{ds} = \frac{d \ln \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{ds}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\ln(s - p_j)}{ds} = \sum_{i=1}^m \frac{\ln(s - z_i)}{ds}$$

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{s - p_j}$$

[证毕]

例4-2 求例4-1系统根轨迹的分离点。

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$

解：根据例4-1，系统实轴上的根轨迹段 $(-1, 0)$ ，位于两个开环极点之间，该轨迹段上必然存在根轨迹的分离点。设分离点的坐标为 d ，则

$$\frac{1}{d-0} + \frac{1}{d+1} + \frac{1}{d+5} = 0$$

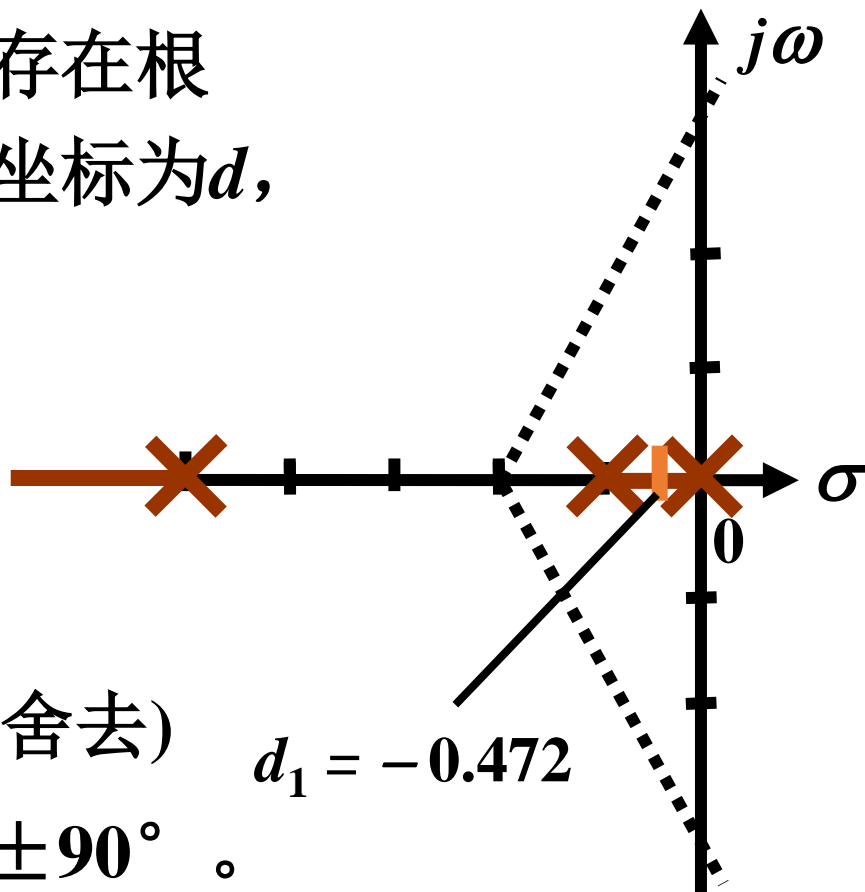
$$3d^2 + 12d + 5 = 0$$

$$d_1 = -0.472 \quad d_2 = -3.53(\text{舍去})$$

$$d_1 = -0.472$$

分离点上根轨迹的分离角为 $\pm 90^\circ$ 。

如果方程的阶次高时，可用试探法确定分离点。



例4-3 已知系统开环传函为

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

试绘制系统的根轨迹。

解：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{0 - 2 - 3 - (-1)}{3 - 1} = -2$$

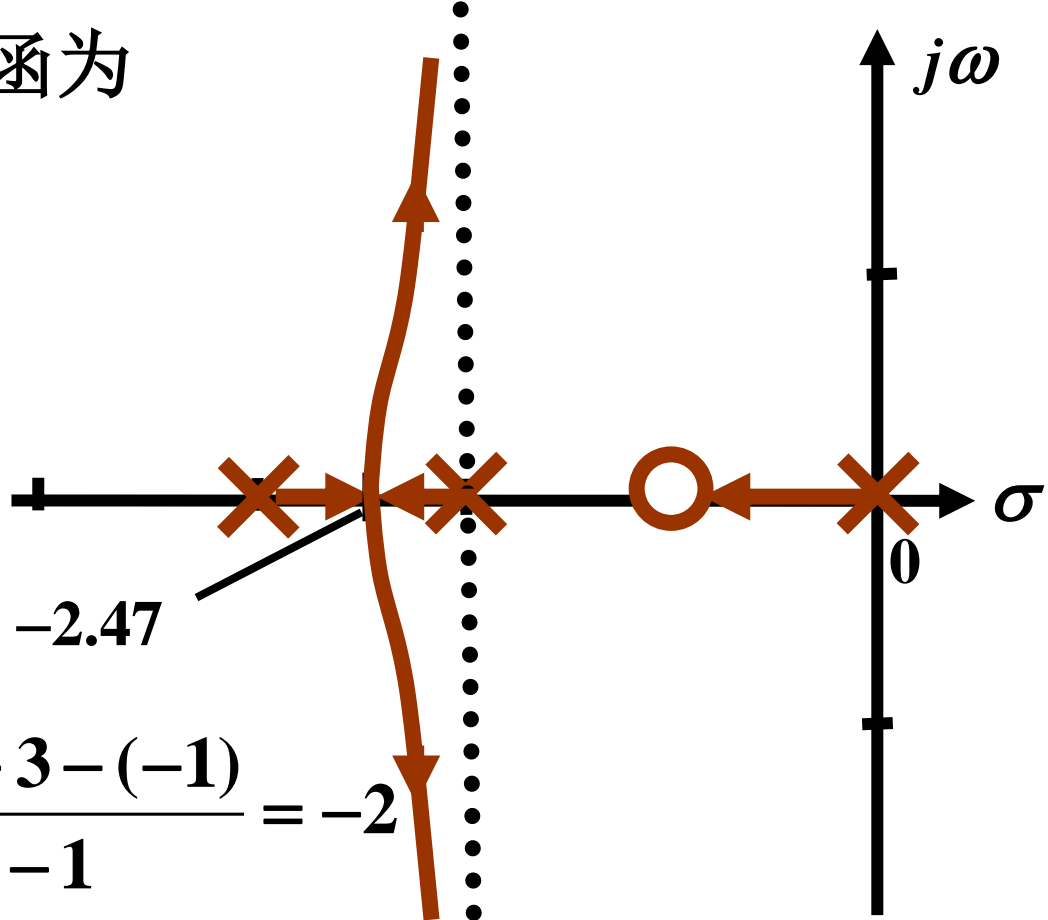
$$d = -2.47$$

$$d = -2.5 \quad \text{左} = -0.67 \quad \text{右} = -0.4$$

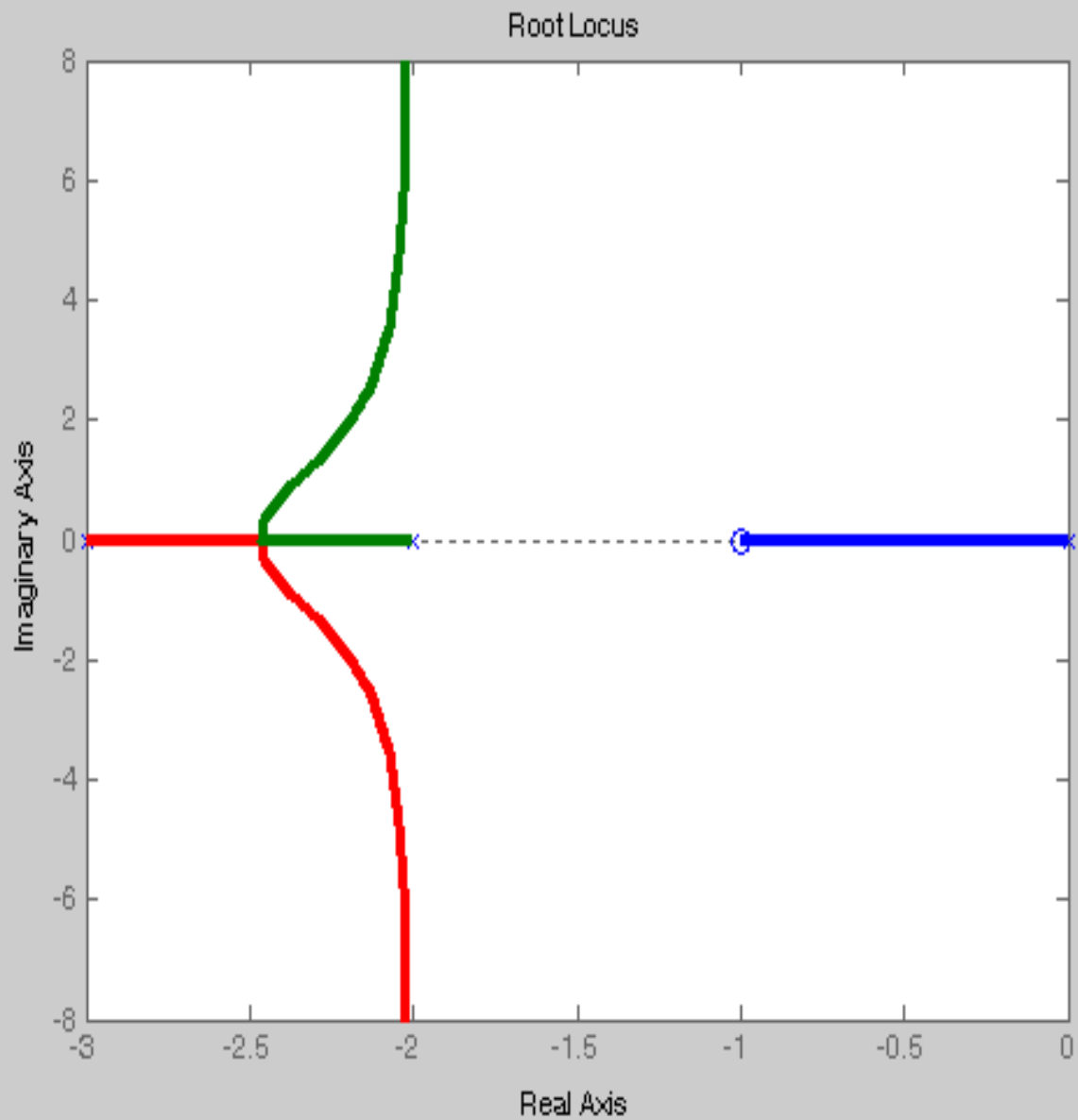
$$d = -2.01 \quad \text{左} = -0.99 \quad \text{右} = -99.49$$

$$d = -2.25 \quad \text{左} = -0.8 \quad \text{右} = -3.11$$

$$d = -2.47 \quad \text{左} = -0.68 \quad \text{右} = -0.65$$



$$\frac{1}{d+1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+3}$$



$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$$

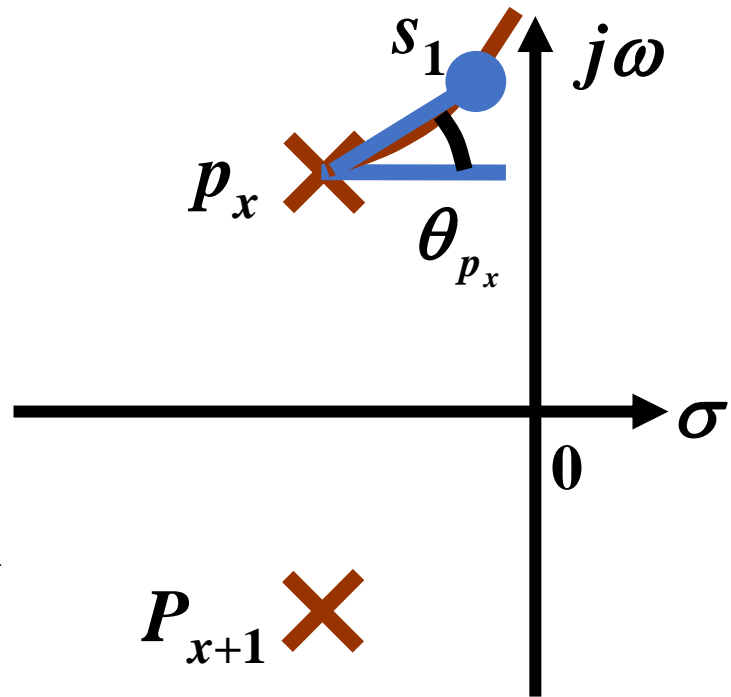
法则6 根轨迹的出射角与入射角：根轨迹离开开环复数极点处的切线与正实轴方向的夹角，称为出射角(起始角)，以 θ_{p_x} 标志；根轨迹进入开环复数零点处的切线与正实轴方向的夹角，称为入射角(终止角)，以 ϕ_{z_x} 标志。

$$\theta_{p_x} = 180^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i) - \sum_{j=1, j \neq x}^n \angle(p_x - p_j)$$

$$\phi_{z_x} = 180^\circ - \sum_{i=1, i \neq x}^m \angle(z_x - z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(z_x - p_j)$$

证明：设开环系统有一对共轭复数极点 $p_{x,x+1}$ 。在十分靠近待求起始角的复数极点 p_x 的根轨迹上取一点 s_1 。

由于 s_1 无限接近 p_x ，因此，除 p_x 外，所有其它开环零、极点 到 s_1 点的向量相角，都可以用它们 到 p_x 的向量相角来代替，而 p_x 到 s_1 点的向量相角即为起始角。根据 s_1 点必满足相角条件，应有



$$\sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i) - \sum_{j=1, j \neq x}^n \angle(p_x - p_j) - \theta_{p_x} = 180^\circ$$

移项后，立即得到法则中的公式。

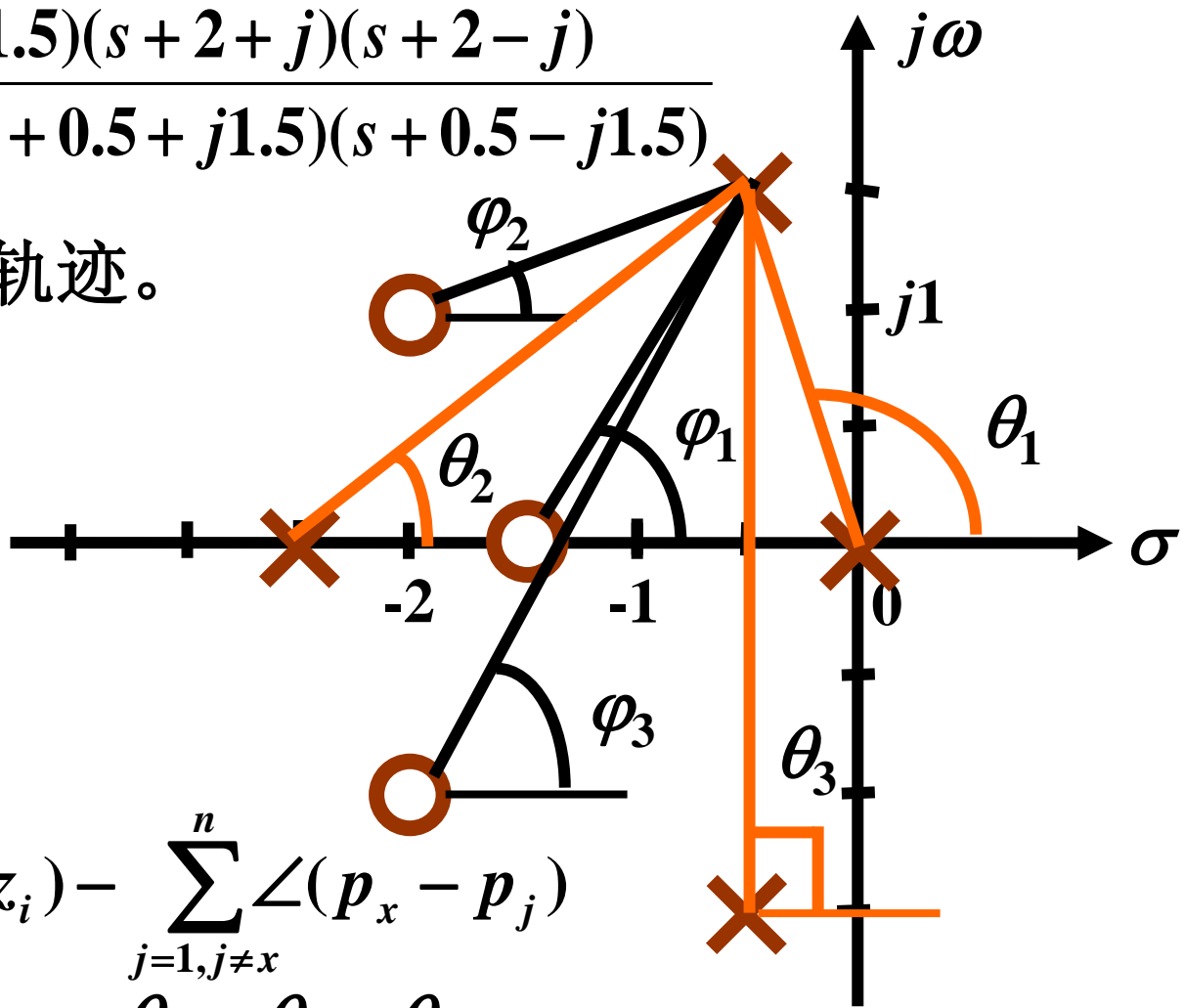
[证毕]

例4-4 设负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1.5)(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+2.5)(s+0.5+j1.5)(s+0.5-j1.5)}$$

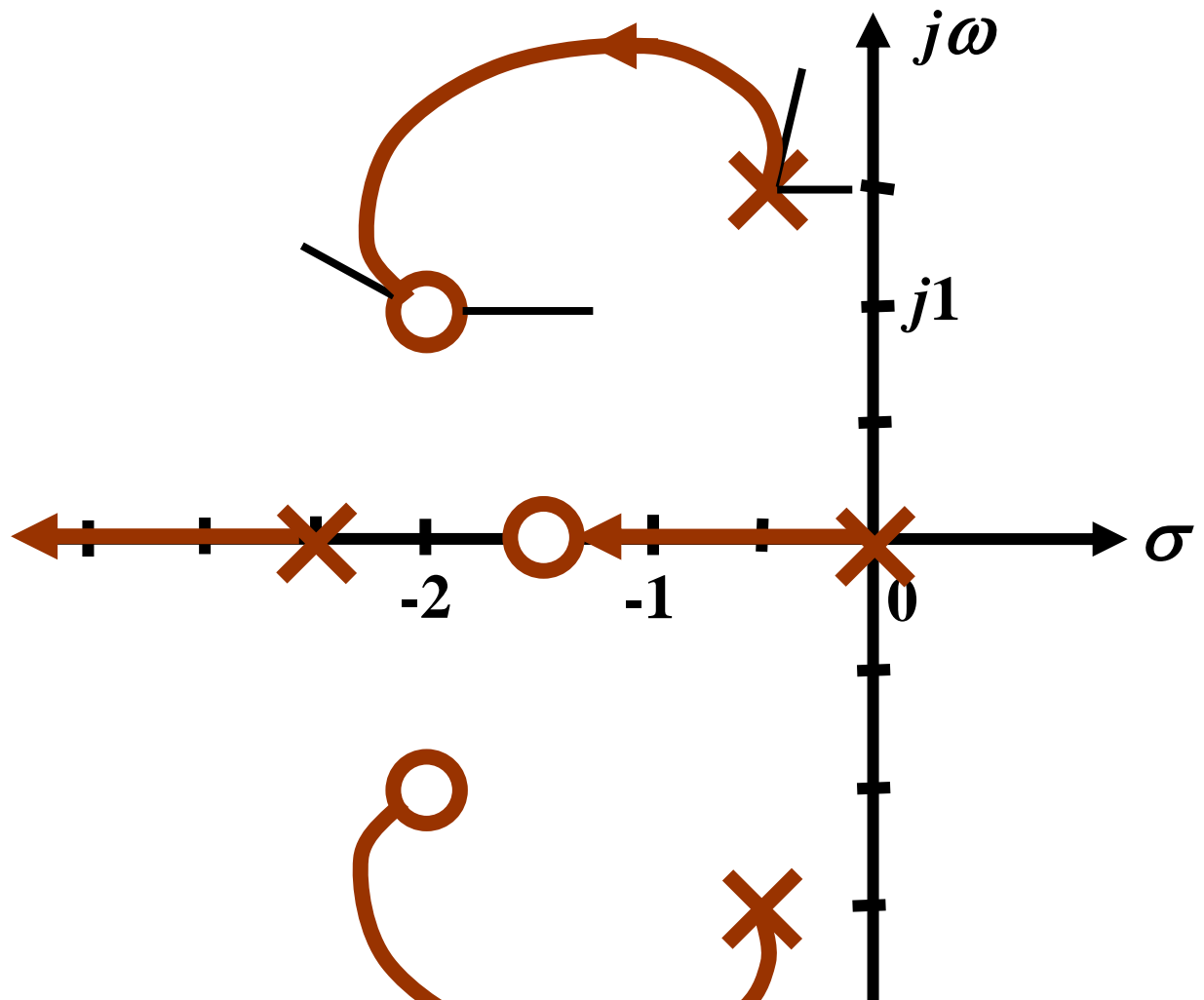
试绘制出系统的根轨迹。

解：



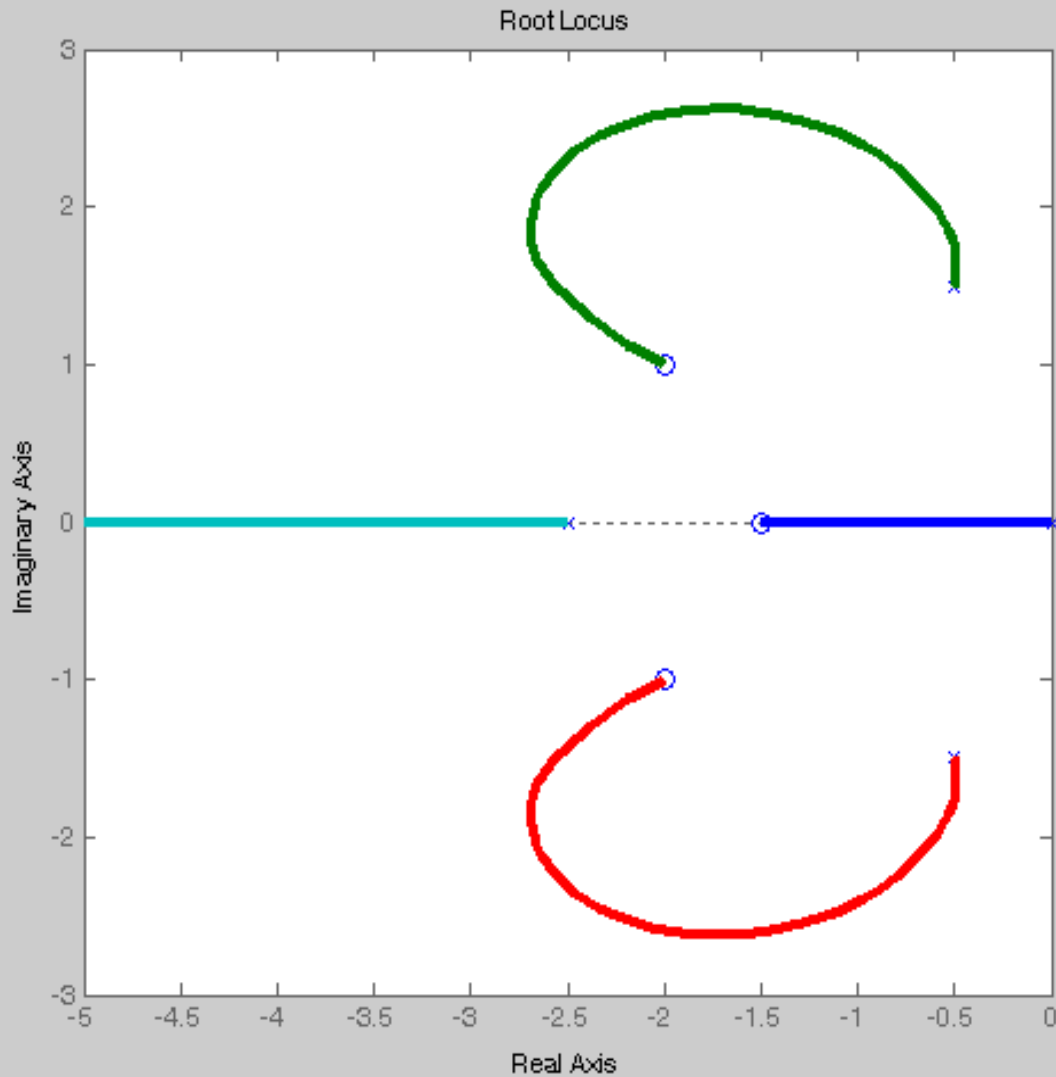
起始角与终止角

$$\begin{aligned} \theta_{p_x} &= 180^\circ + \sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i) - \sum_{j=1, j \neq x}^n \angle(p_x - p_j) \\ &= 180^\circ + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3 \\ &= 180^\circ + 56.5^\circ + 19^\circ + 59^\circ - 108.5^\circ - 37^\circ - 90^\circ = 79^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varphi_{z_x} &= 180^\circ - \sum_{i=1, i \neq x}^m \angle(z_x - z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(z_x - p_j) \\ &= 180^\circ - 117^\circ - 90^\circ + 153^\circ + 63.5^\circ + 119^\circ + 121^\circ = 149.5^\circ\end{aligned}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 1.5)(s + 2 + j)(s + 2 - j)}{s(s + 2.5)(s + 0.5 + j1.5)(s + 0.5 - j1.5)}$$



法则7 根轨迹与虚轴交点：若根轨迹与虚轴相交，则交点上的坐标可按下述两种方法求出：

方法一：在系统的闭环特征方程 $D(s)=0$ 中，令 $s = j\omega$ ， $D(j\omega)=0$ 的解即是交点坐标。

方法二：由劳斯稳定判据求出。

例4-5 求例4-1系统的根轨迹与 s 平面虚轴的交点的交点坐标。

解：
$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)} = 0$$

方法一：
$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_g = 0$$

令 $s=j\omega$ ，则

$$(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 5(j\omega) + K_g = 0$$

$$-\omega^3 + 5\omega = 0$$

$$-6\omega^2 + K_g = 0$$

$$\omega = 0, \sqrt{5} \quad K_g = 0(\text{舍去}), \quad K_g = 30$$

方法二:

$$s^3 + 6s^2 + 5s + K_g = 0$$

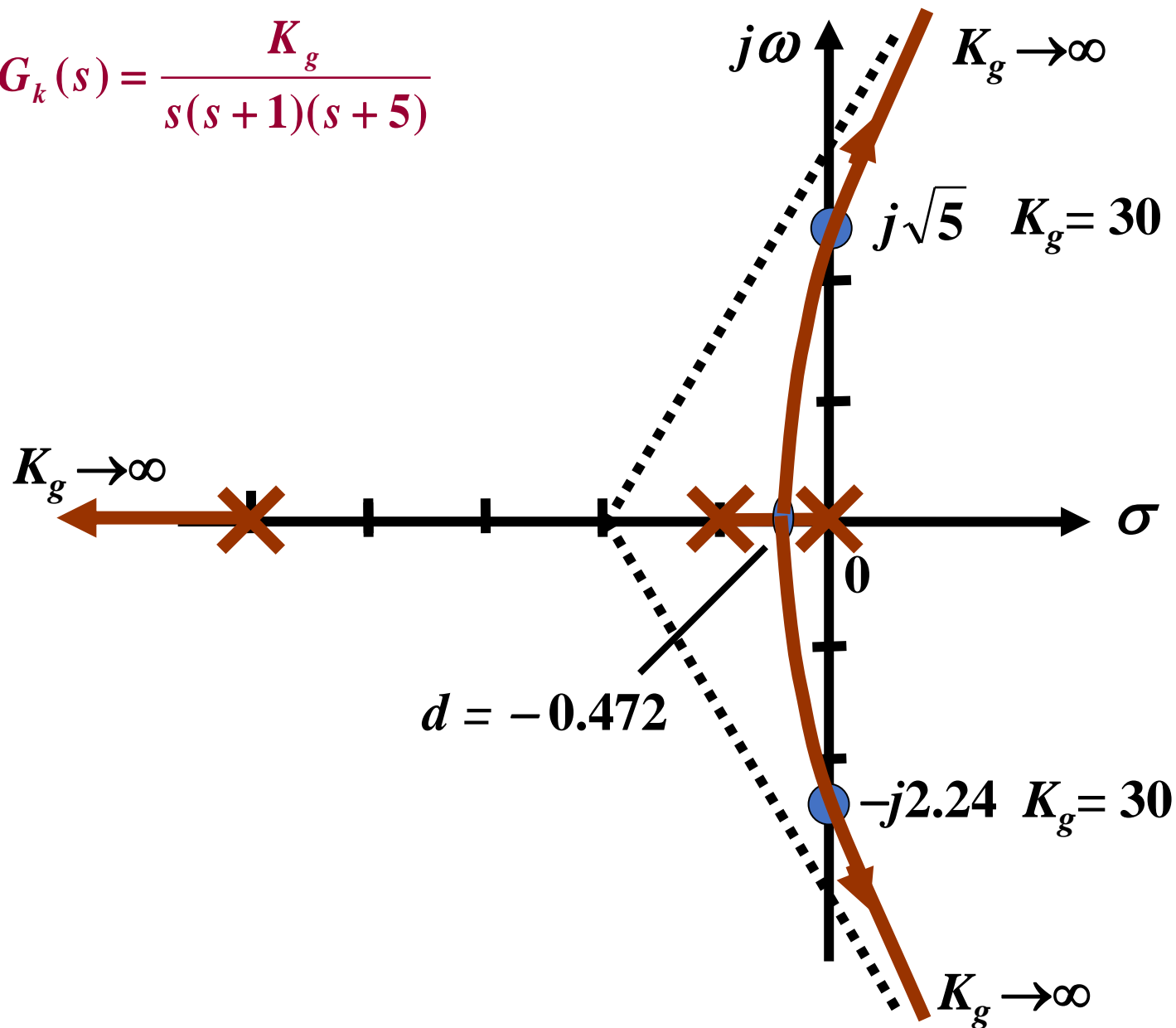
劳斯表为

s^3	1	5
s^2	6	K_g
s^1	$(30 - K_g)/6$	
s^0	K_g	

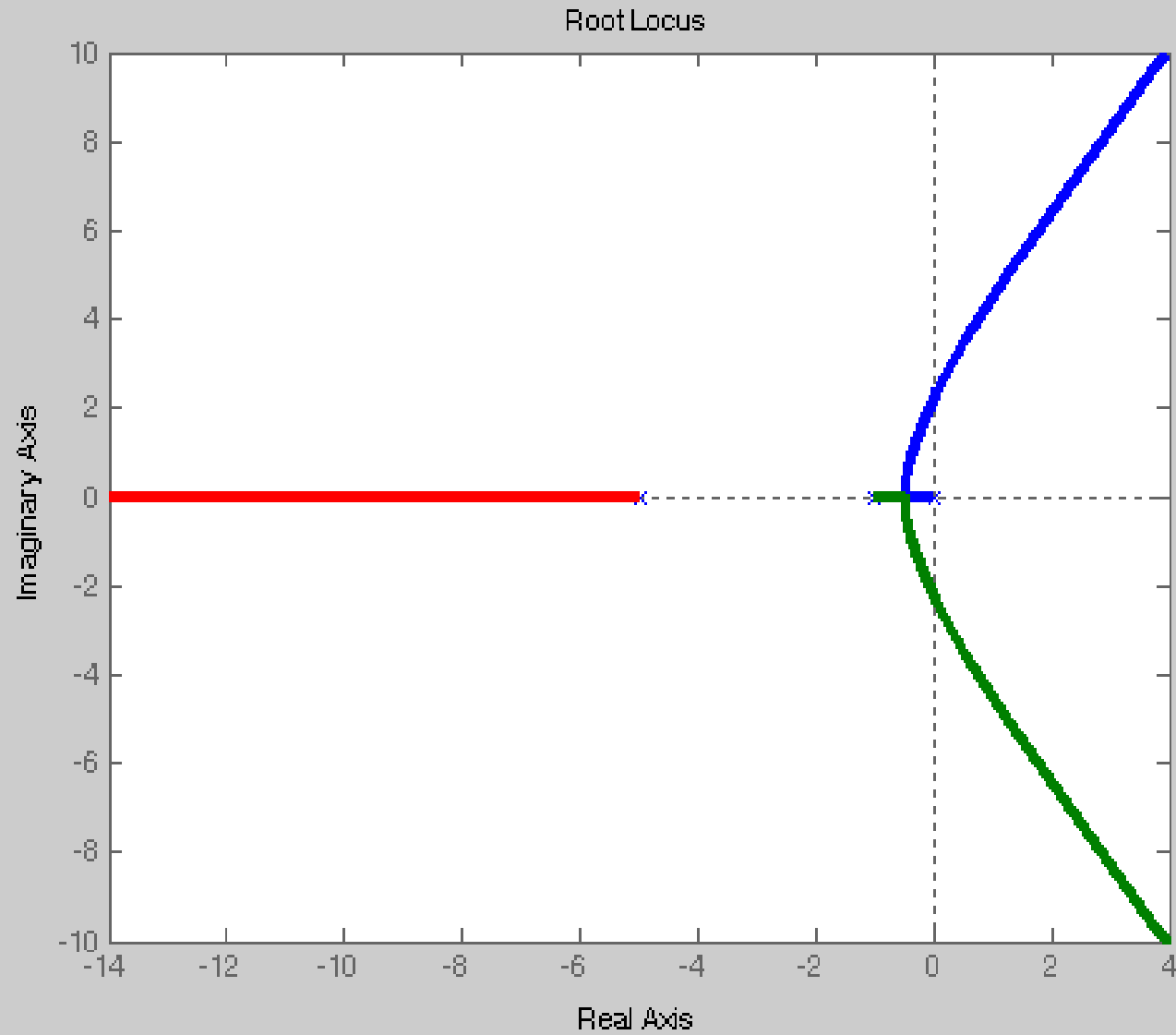
当 $K_g=30$ 时， s^1 行全零，劳斯表第一列不变号，系统存在共轭虚根。共轭虚根可由 s^2 行的辅助方程求出：

$$6s^2 + K_g = 0 \quad s = \pm j\sqrt{5}$$

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$



$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s+1)(s+5)}$$



例4-6 设负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_g}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

试绘制出系统的根轨迹。

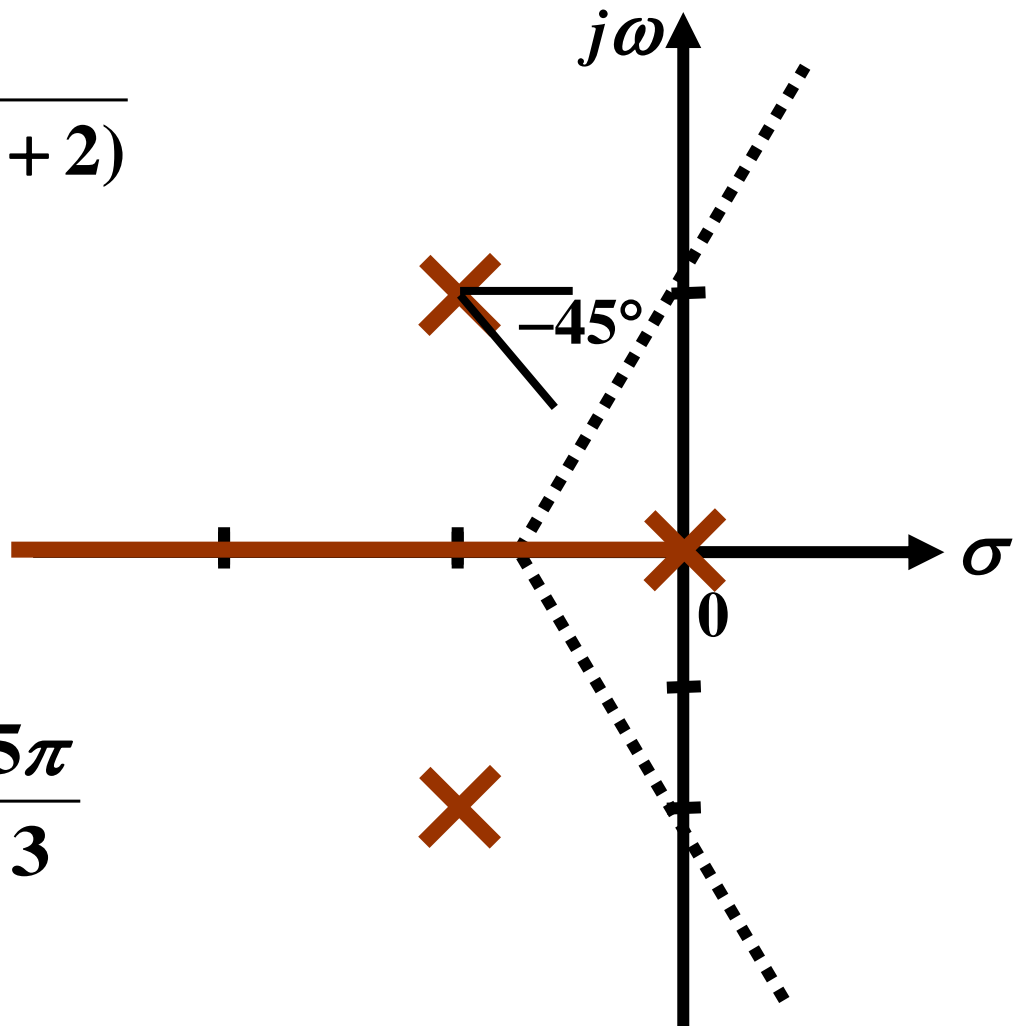
解：三个开环极点

$$p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -1 \pm j$$

渐近线：3条

$$\varphi_a = \frac{2k+1}{n-m}\pi = \frac{\pi}{3}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{3}$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{3} = -\frac{2}{3}$$



实轴上根轨迹： $(-\infty, 0)$ ，即整个负实轴。

出射角： $\theta_{p_2} = 180^\circ - \angle(p_2 - p_1) - \angle(p_2 - p_3) = -45^\circ$

根轨迹与虚轴交点：系统的闭环特征方程为

$$s^3 + 2s^2 + 2s + K_g = 0$$

$$\frac{K_g}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

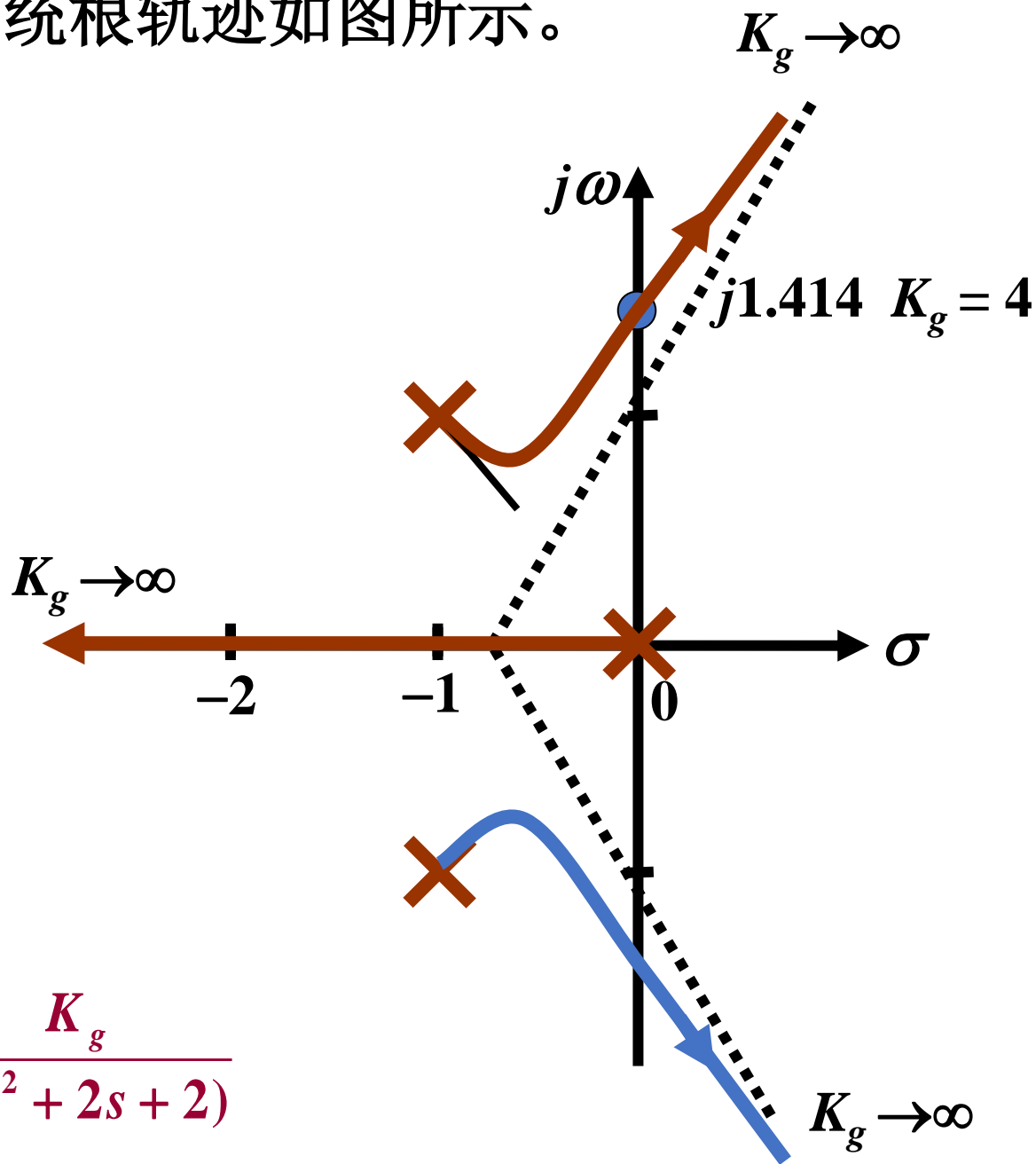
劳斯表	s^3	1	2
	s^2	2	K_g
	s^1	$(4 - K_g)/2$	
	s^0	K_g	

令 s^1 系数为0，得 $K_g = 4$

代入辅助方程 $2s^2 + K_g = 0$

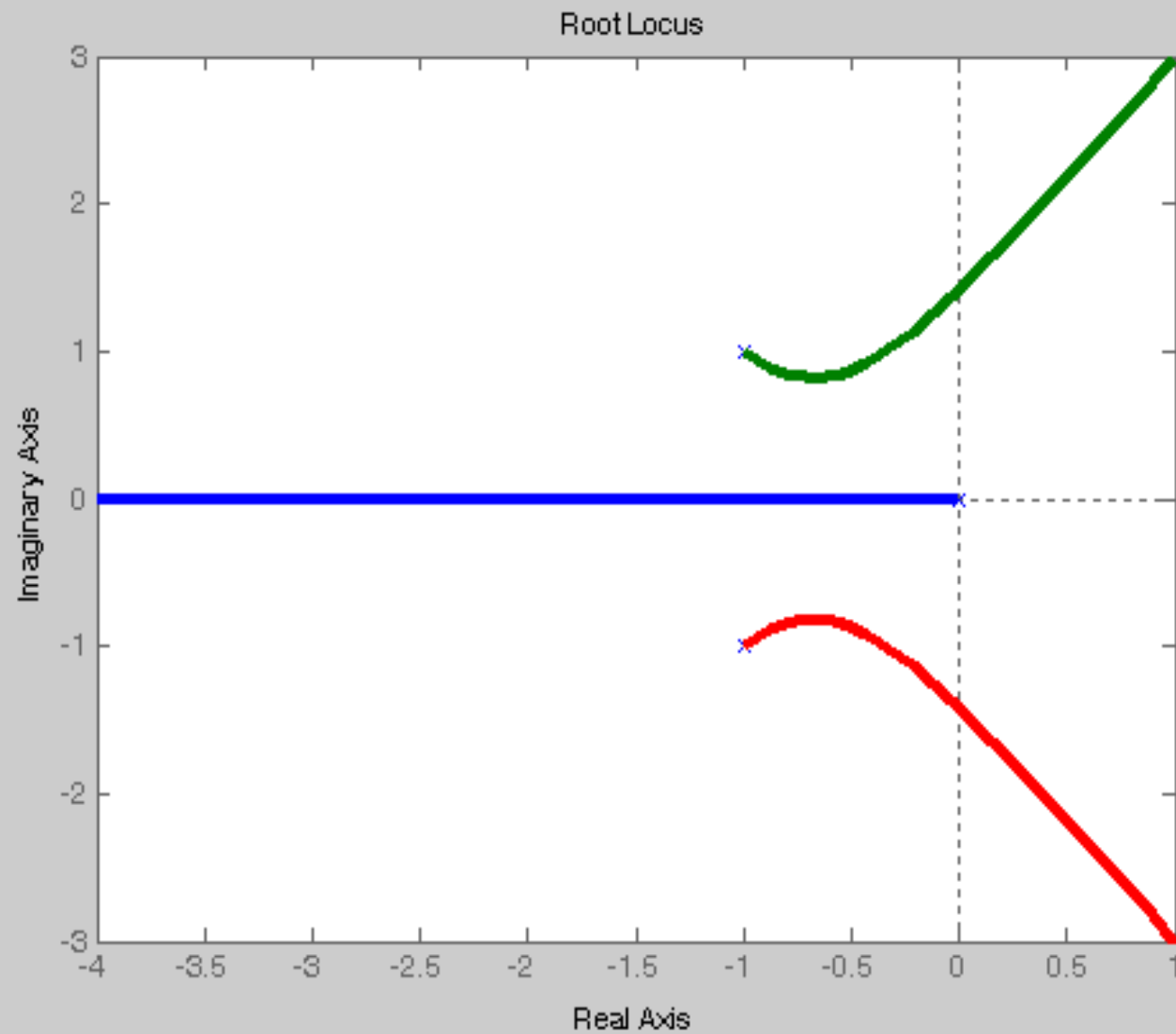
$$s = \pm j\sqrt{2}$$

绘制出系统根轨迹如图所示。



$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$G_k(s) = \frac{K_g}{s(s^2 + 2s + 2)}$$



法则8 闭环极点的和与积：若开环传函分母阶次 n 比分子阶次 m 高2次或2次以上，即 $n - m \geq 2$ ，则系统闭环极点之和等于其开环极点之和。

- 1) 根的分量之和是一个与 K_g 无关的常数；
- 2) 各分支要保持总和平衡，走向左右对称。

证明：

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= K_g \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K_g \prod (s - z_i)}{\prod (s - p_j)} \\ &= \frac{K_g (s^m + b_1 s^{m-1} + \dots)}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots} \end{aligned}$$

式中 $a_1 = \sum_{j=1}^n (-p_j), b_1 = \sum_{i=1}^m (-z_i)$

若 $n - m \geq 2$, 则

$$1 + G(s)H(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots = 0$$

根据高阶方程系数与根的关系式

$$\text{闭环 } n \text{ 个根之和} = -a_1 = \sum p_j = \text{开环极点之和}$$

[证毕]

根据代数方程根和系数的关系, 得

$$1 + G(s)H(s) = 1 + K_g \frac{M(s)}{N(s)} = 1 + \frac{K_g \prod (s - z_i)}{\prod (s - p_j)}$$

$$D(s) = \prod (s - p_j) + K_g \prod (s - z_i) = 0$$

常数项:

$$\prod (-p_j) + K_g \prod (-z_i) = \text{闭环极点之积}$$

若 $n - m \geq 2$, 则

$$1 + G(s)H(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots = 0$$

根据高阶方程系数与根的关系式

闭环 n 个根之和 $= -a_1 = \sum p_j =$ 开环极点之和

[证毕]

 4-7 设负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K_g (0.5s + 1)}{0.5s^2 + s + 1}$$

试绘制出系统的根轨迹。

解:

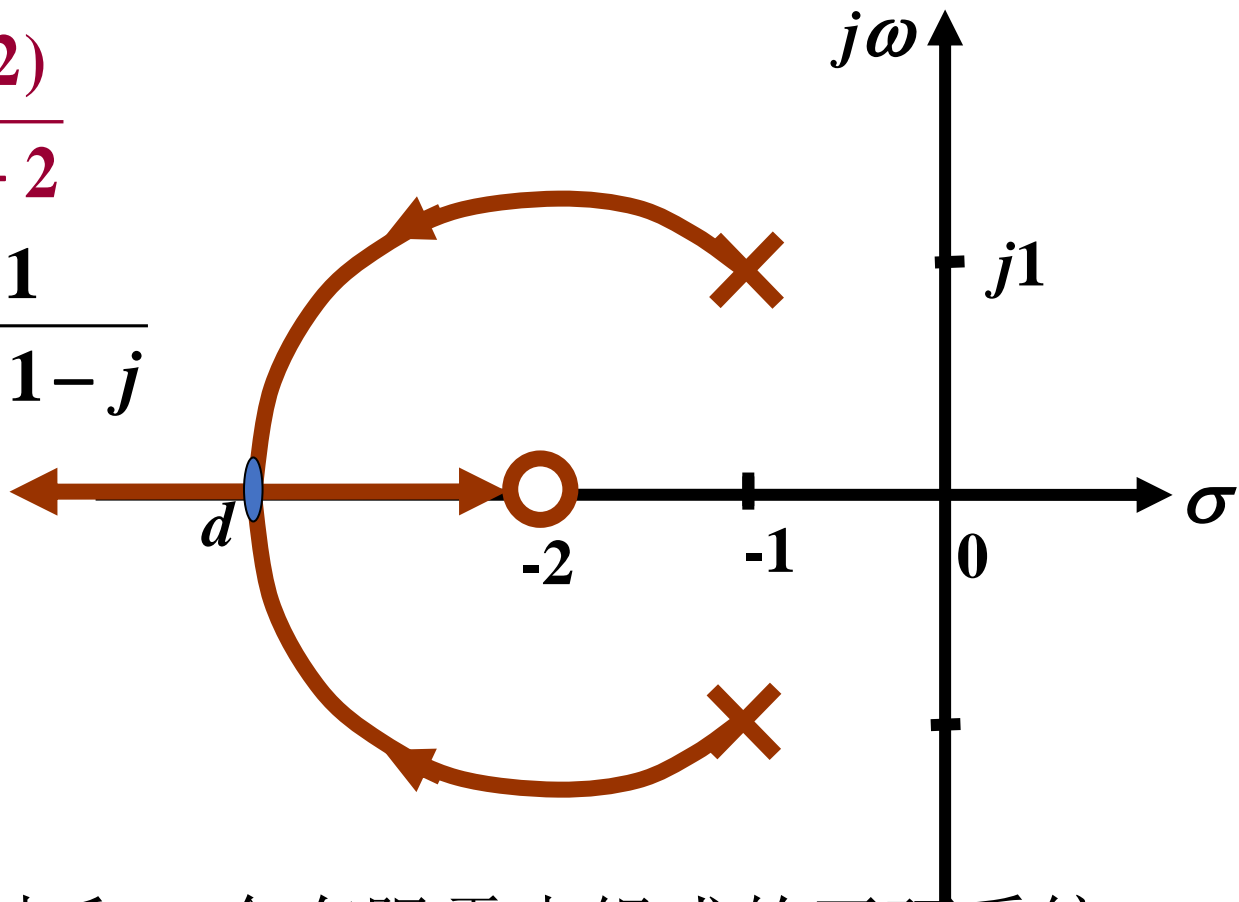
$$G(s)H(s) = \frac{K_g (s + 2)}{s^2 + 2s + 2}$$

$$G(s)H(s) = \frac{K_g(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\frac{1}{d+2} = \frac{1}{d+1+j} + \frac{1}{d+1-j}$$

$$d = -0.59(\text{舍去})$$

$$d = -3.41$$



结论： 由两个极点和一个有限零点组成的开环系统，只要有限零点没有位于两个实数极点之间，当 K 从 $0 \rightarrow \infty$ 时，闭环根轨迹的复数部分，是以有限零点为圆心，以有限零点到分离点为半径的一个圆，或圆的一部分。

例4-8 设负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+2)(s+5)}$$

要求：1) 试绘制系统的根轨迹，并讨论系统的稳定性。

2) 如果改变反馈通路传递函数，使 $H(s)=1+2s$ ，讨论 $H(s)$ 的变化对系统稳定性的影响。

解：1) **渐近线**： $\sigma_a = (0 + 0 - 2 - 5)/4 = -7/4$

$$\varphi_a = (2k+1)\pi/4 = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

实轴上的根迹： $[-5 \ -2]$

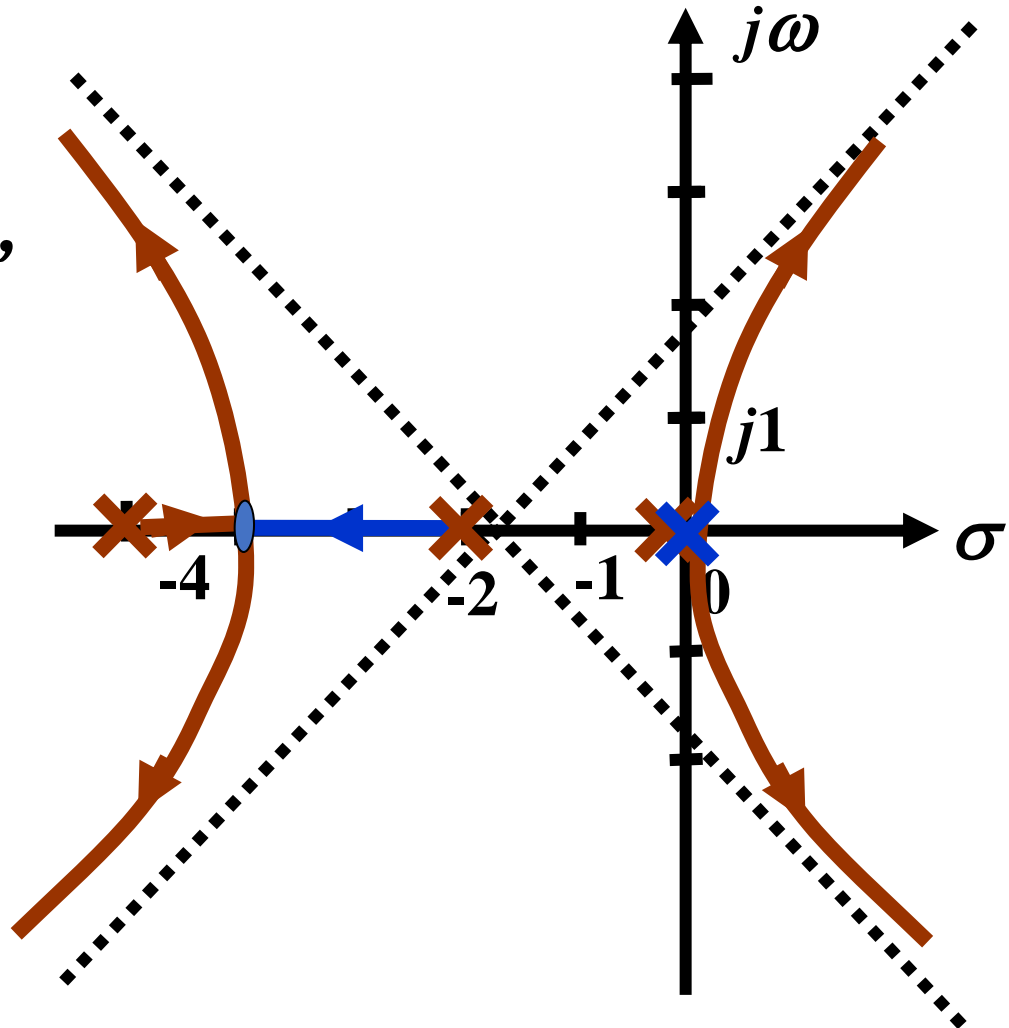
分离点： $\frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = 0$ $4d^2 + 21d + 20 = 0$
 $d = -4$ $d = -1.25$ (舍去)

$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+2)(s+5)}$$

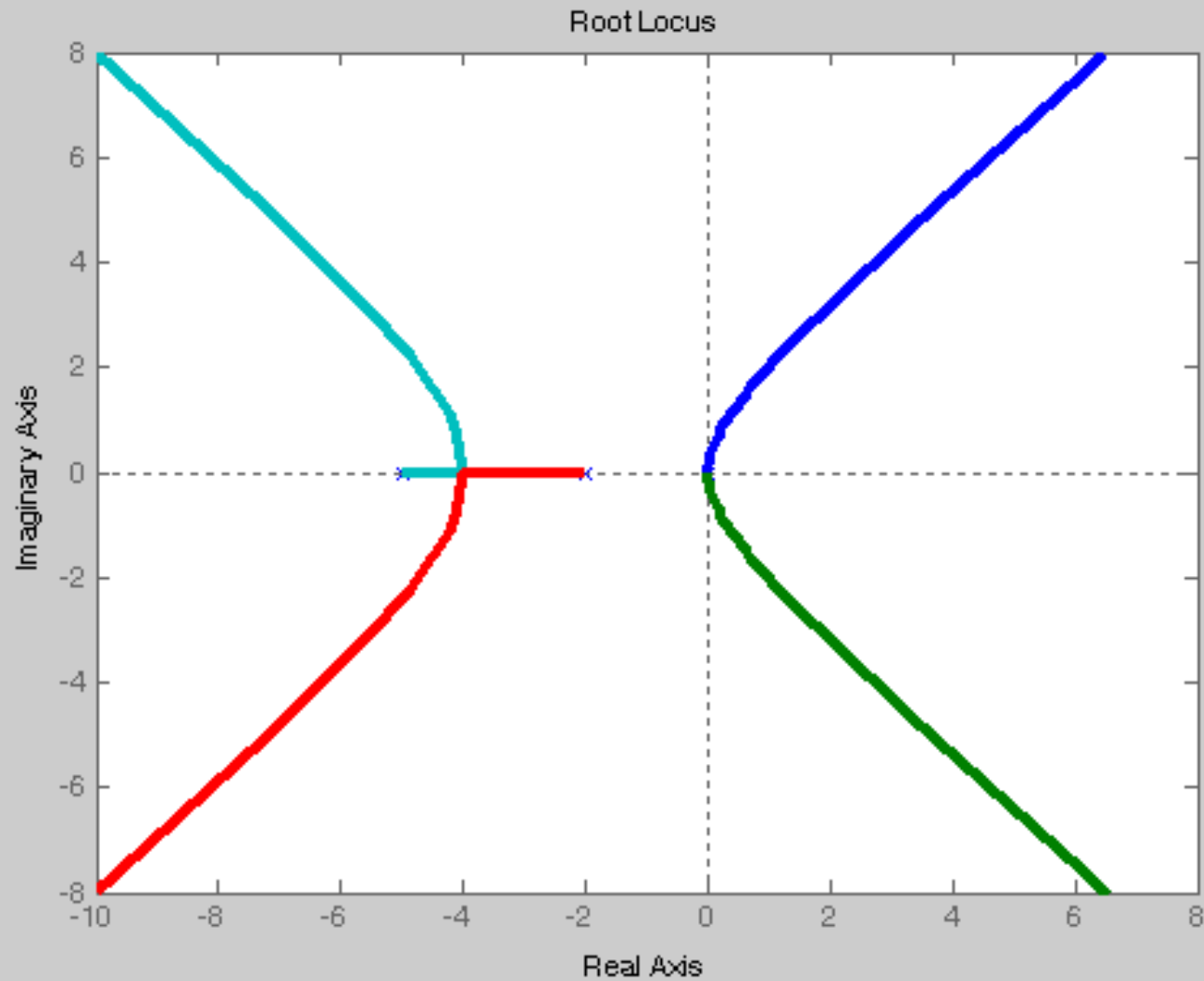
与虚轴交点：

$$s^4 + 7s^3 + 10s^2 + K = 0$$

特征方程式中 s^1 缺项，
系统不稳定。



$$G(s) = \frac{K}{s^2(s+2)(s+5)}$$



$$2) \quad G(s) = \frac{K(1+2s)}{s^2(s+2)(s+5)}$$

渐近线: 3条 $\sigma_a = [(0+0-2-5)-(-0.5)]/3 = -2.17$

$$\varphi_a = (2k+1)\pi/3 = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

实轴上的根迹: $[-2 \quad -0.5]$

分离点: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d} + \frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+5} = \frac{1}{d+0.5}$

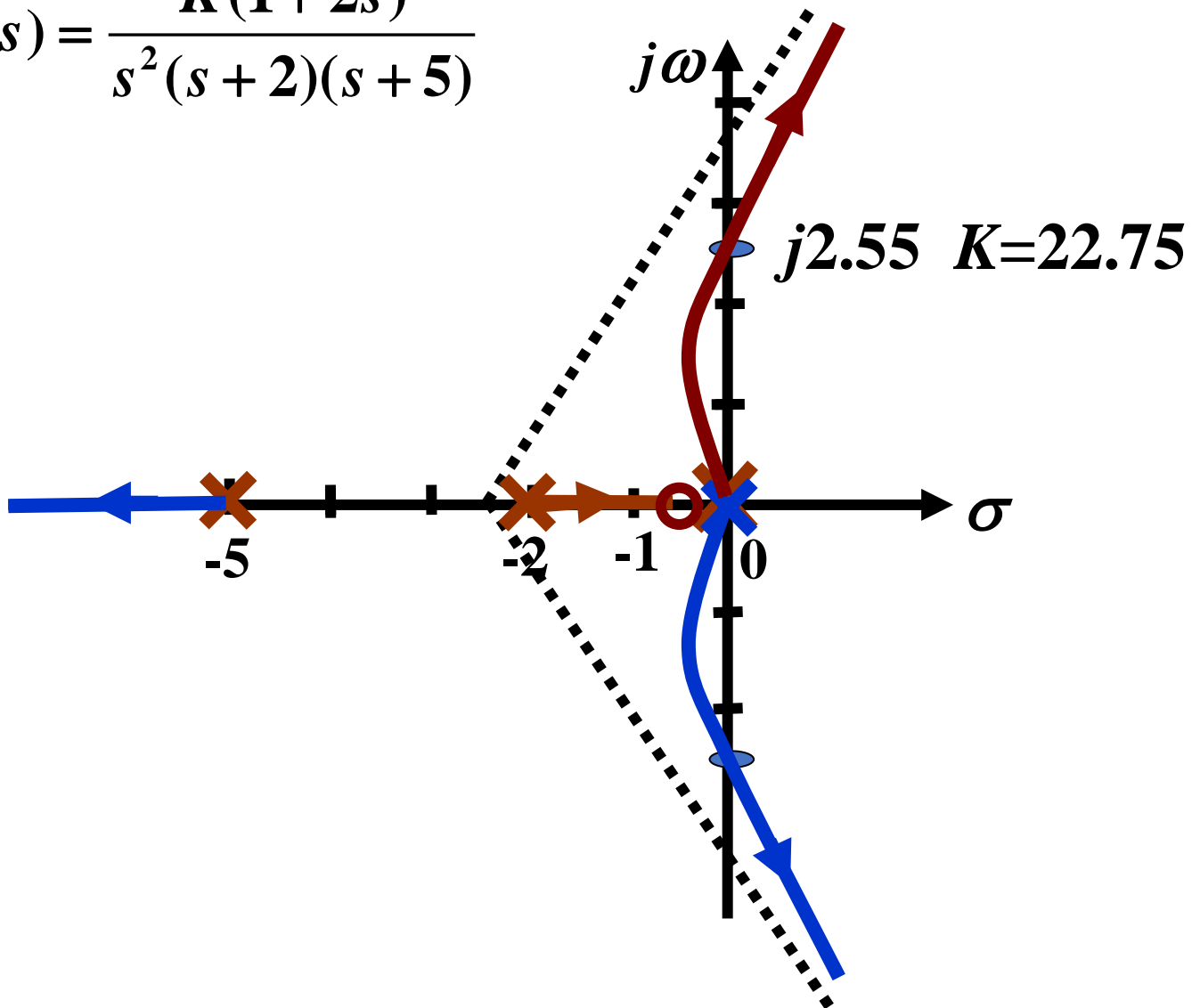
$$d = -1.9 \quad \text{左} = 9.27 \quad \text{右} = -0.71$$

$$d = -0.6 \quad \text{左} = -2.39 \quad \text{右} = -10$$

无分离点



$$G(s) = \frac{K(1+2s)}{s^2(s+2)(s+5)}$$



与虚轴交点:

$$s^4 + 7s^3 + 10s^2 + 2Ks + K = 0$$

劳 斯 表	s^4	1	10	K
	s^3	7	$2K$	
	s^2	$(70-2K)/7$	K	
	s^1	$K(91-4K)/(70-2K)$		
	s^0	K		

要使系统稳定 : $70-2K > 0$

$$91-4K > 0$$

$$0 < K < 22.75$$

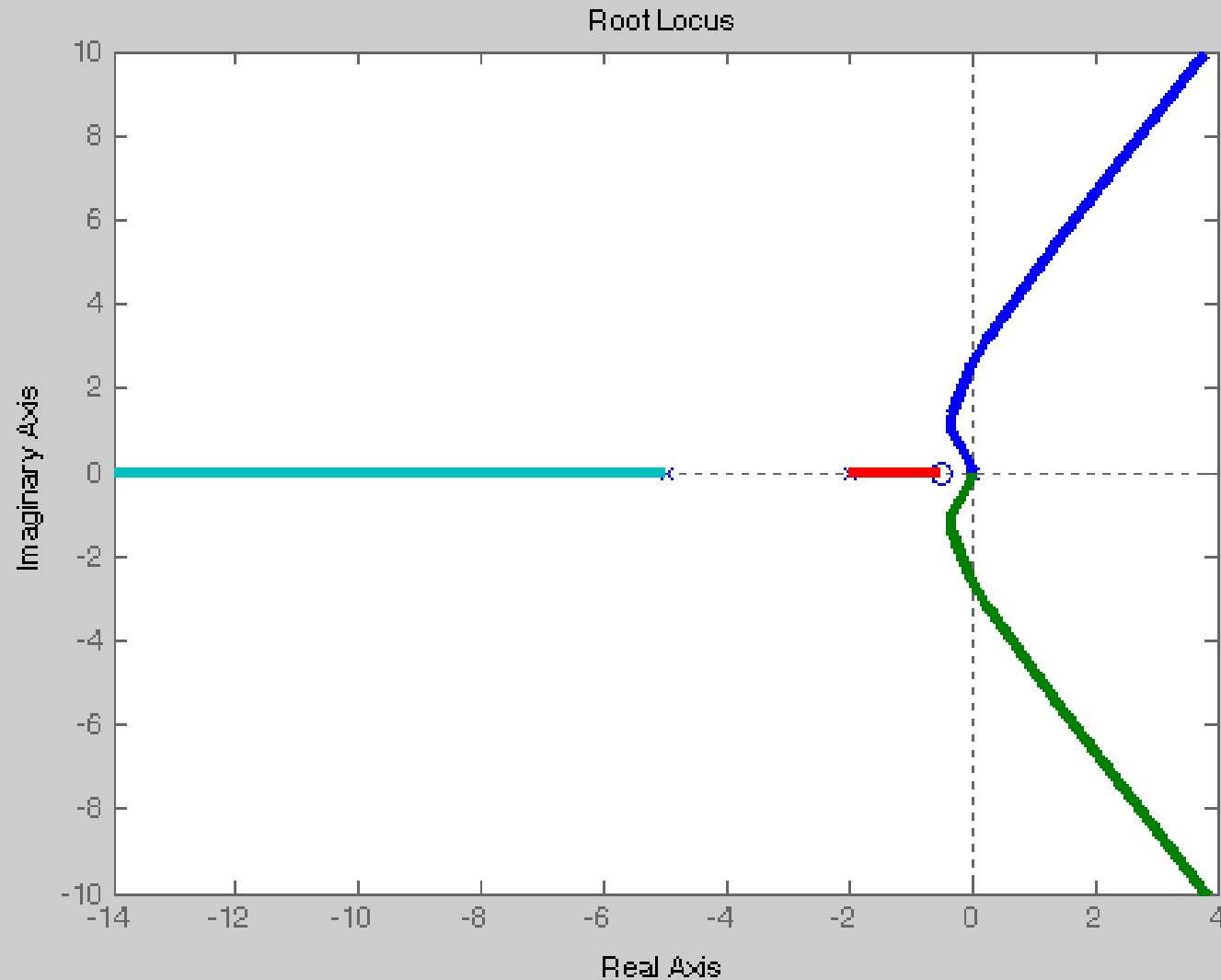
$$K > 0$$

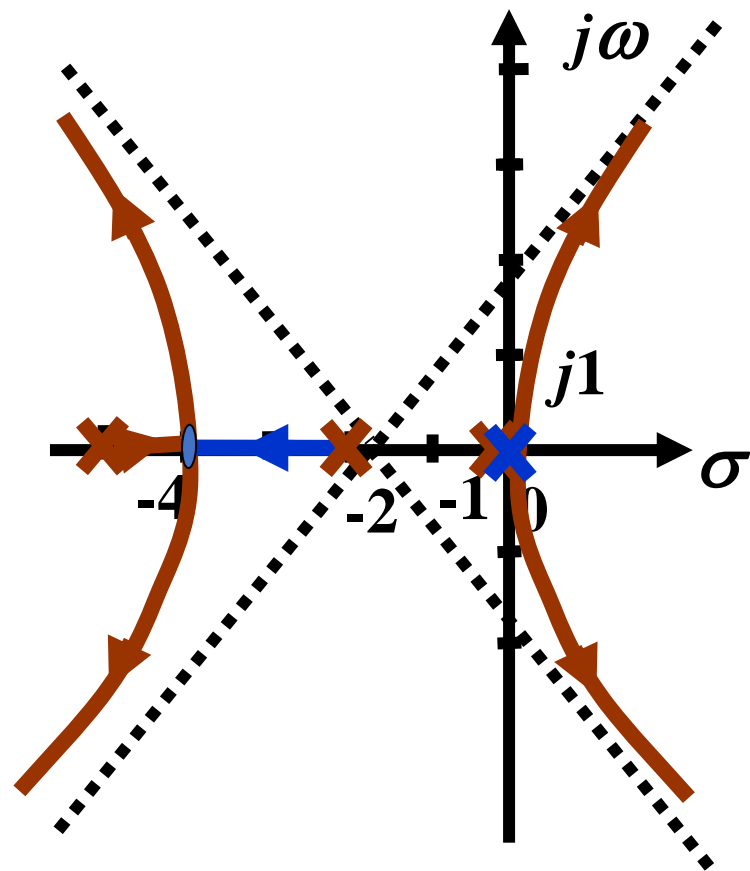
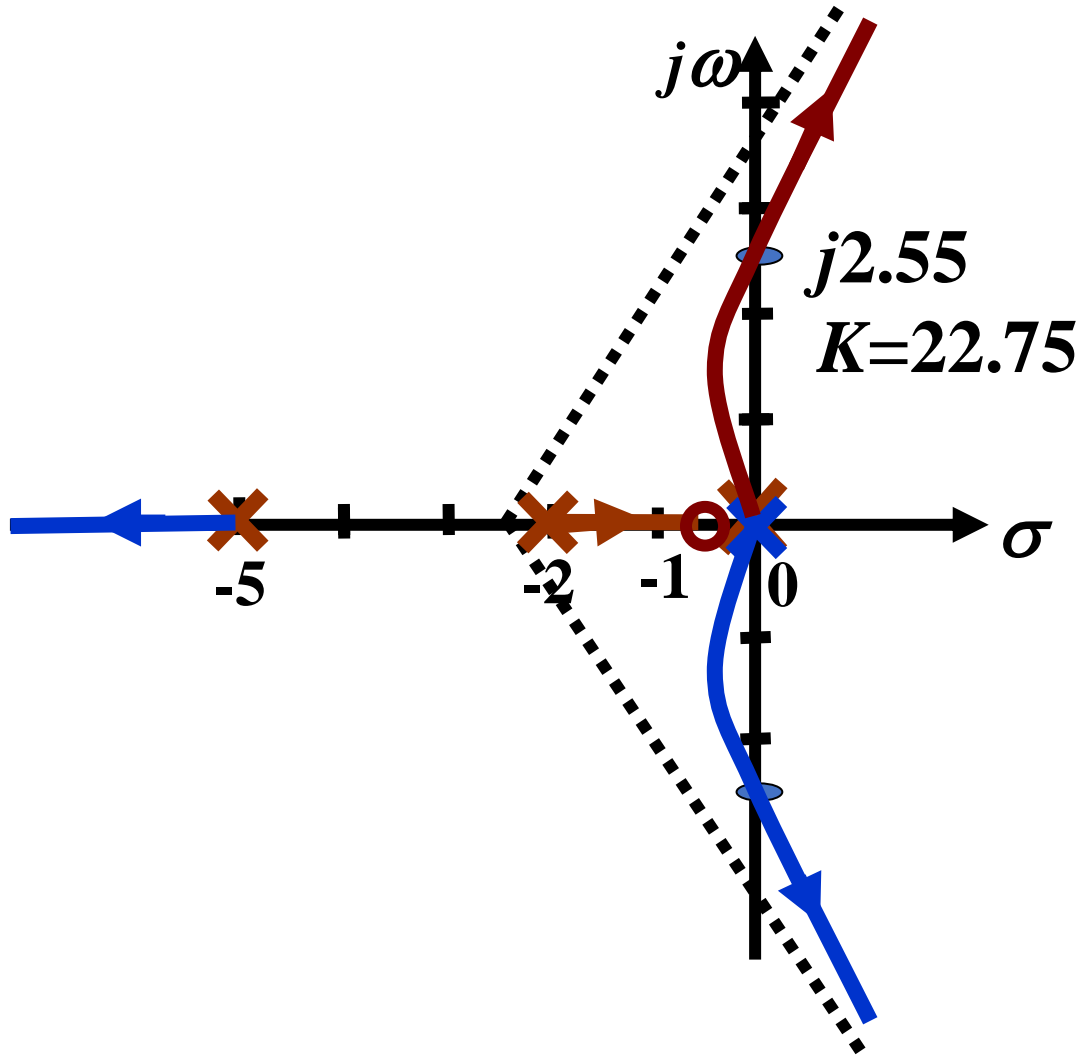
当 $K = 22.75$ 时, 系统临界稳定。

$$[(70-2K)/7]s^2 + K = 0$$

$$s = \pm j2.55$$

$$G(s) = \frac{K(1+2s)}{s^2(s+2)(s+5)}$$





当 $H(s) = 1 + 2s$ 时（微分负反馈）{或系统串联PD调节器}，使系统由结构不稳定变为条件稳定的系统，改善了系统的稳定性。

例4-9 设负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+a)} \quad a > 4$$

试绘制出系统的根轨迹。

解： $s^2 + 4s + a = (s+2)^2 + a - 4$ 一对共轭复数根

渐近线： $\varphi_a = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$

$$\sigma_a = \frac{0 - 4 - 2 + j\sqrt{4-a} - 2 - j\sqrt{4-a}}{4} = -2$$

实轴上的根迹： $[-4 \ 0]$

分离点：

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+4} + \frac{1}{d+2+j\sqrt{4-a}} + \frac{1}{d+2-j\sqrt{4-a}} = 0$$

$$\frac{2d+4}{d(d+4)} + \frac{2(d+2)}{d^2+4d+a} = 0$$

$$2(d+2)[2d^2+4d+a] = 0$$

$$d_1 = -2$$

$$d_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-8a}}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{8-a}$$

讨论：1) $4 < a < 8$ 有三个实数分离点。

2) $a = 8$ 一个实数分离点 $d = -2$ 。

3) $a > 8$ 一个实数分离点，一对共轭复数分离点。

根轨迹与虚轴交点： 系统的闭环特征方程为

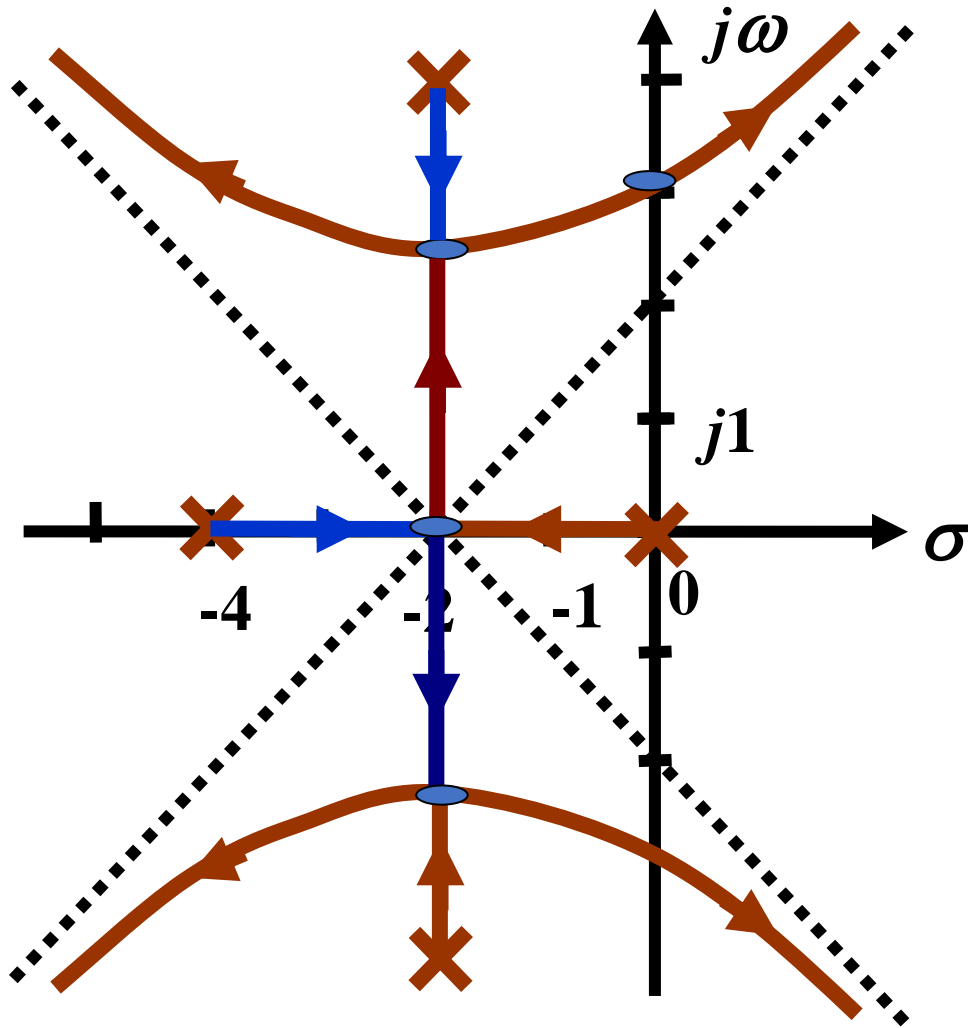
$$s^4 + 8s^3 + (16 + a)s^2 + 4as + K = 0$$

劳斯表

s^4	1	$16 + a$	K
s^3	8	$4a$	
s^2	$16 + 0.5a$	K	
s^1	$(2a^2 + 64a - 8K)/(16 + 0.5a)$		
s^0	K		

令 s^1 的系数为零

$$K = \frac{a(a + 32)}{4} \quad s = \pm j\sqrt{\frac{a}{2}}$$



$$a > 8$$

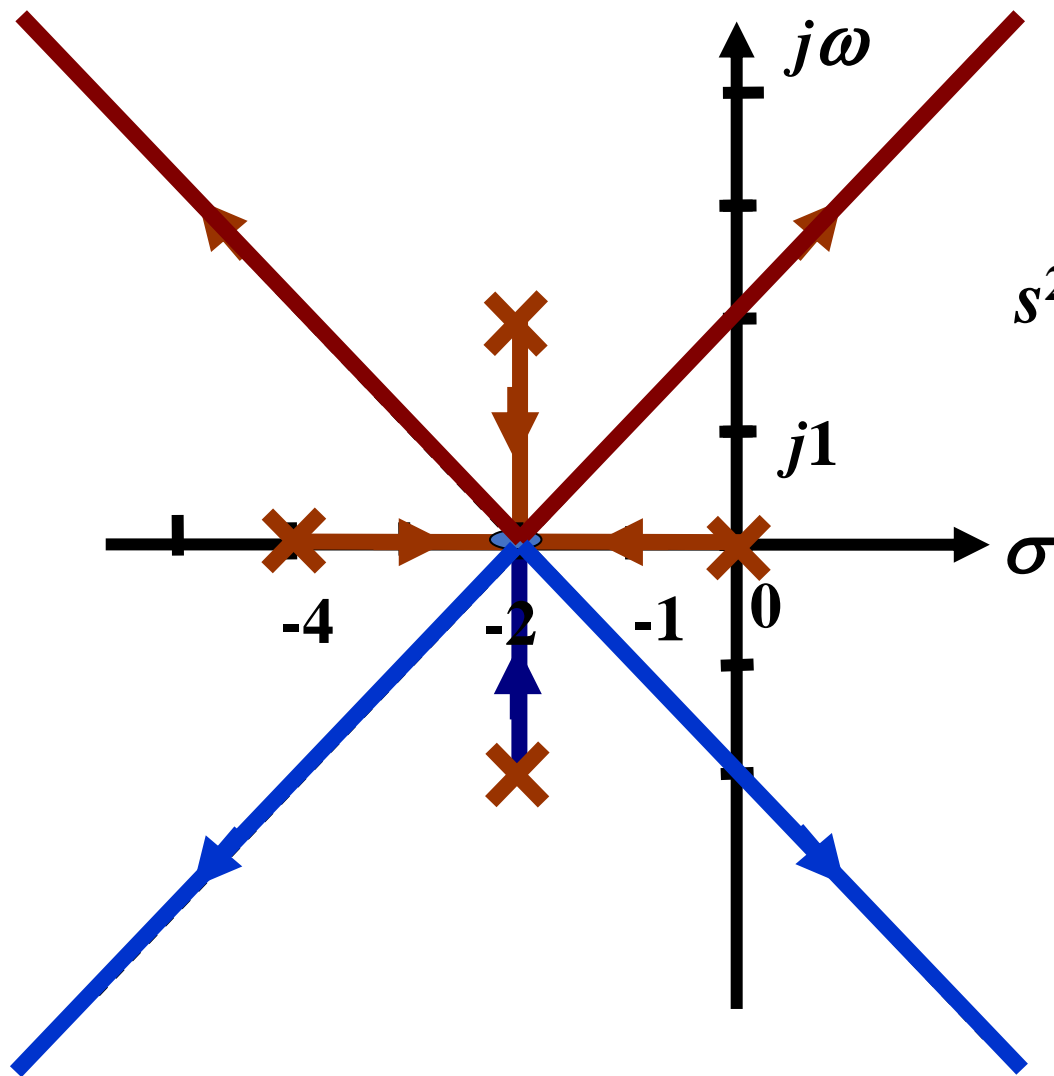
$$s^2 + 4s + a = (s + 2)^2 + a - 4$$

$$d_1 = -2$$

$$d_{2,3} = -2 \pm j \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a - 8}$$

$$K = \frac{a(a + 32)}{4} \quad s = \pm j \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 4)(s^2 + 4s + a)} \quad a > 4$$



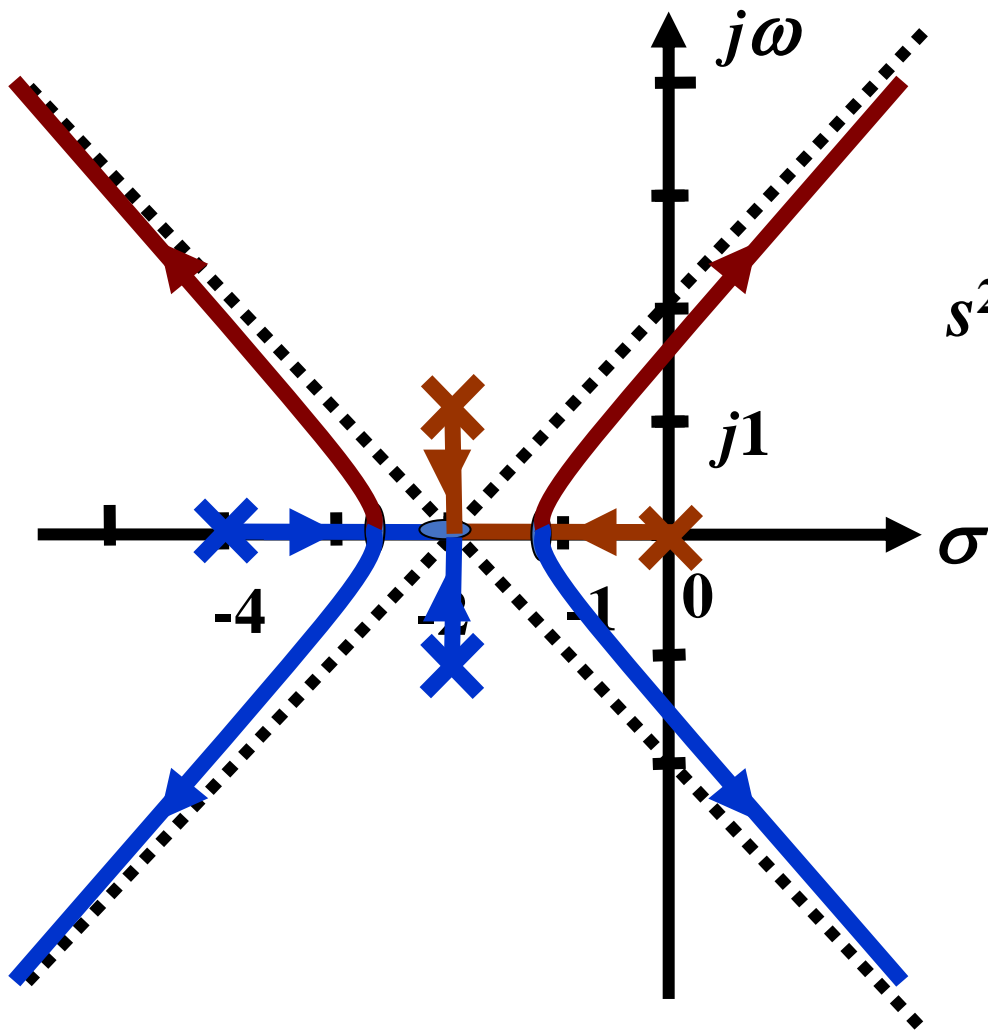
$$a = 8$$

$$s^2 + 4s + a = (s + 2)^2 + a - 4$$

$$d_1 = -2$$

$$K = \frac{a(a + 32)}{4}$$

$$s = \pm j\sqrt{\frac{a}{2}}$$



$$4 < a < 8$$

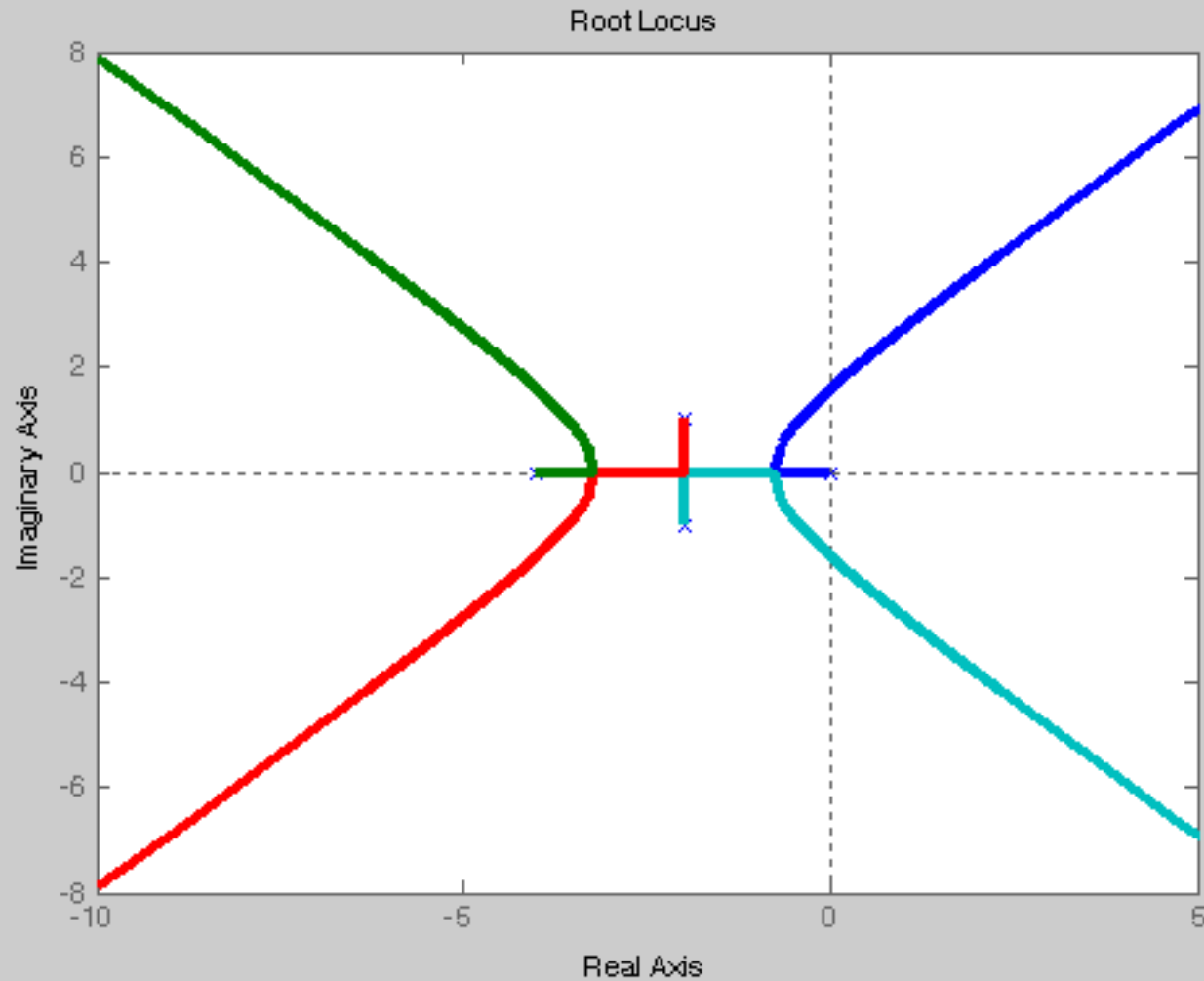
$$s^2 + 4s + a = (s + 2)^2 + a - 4$$

$$d_1 = -2$$

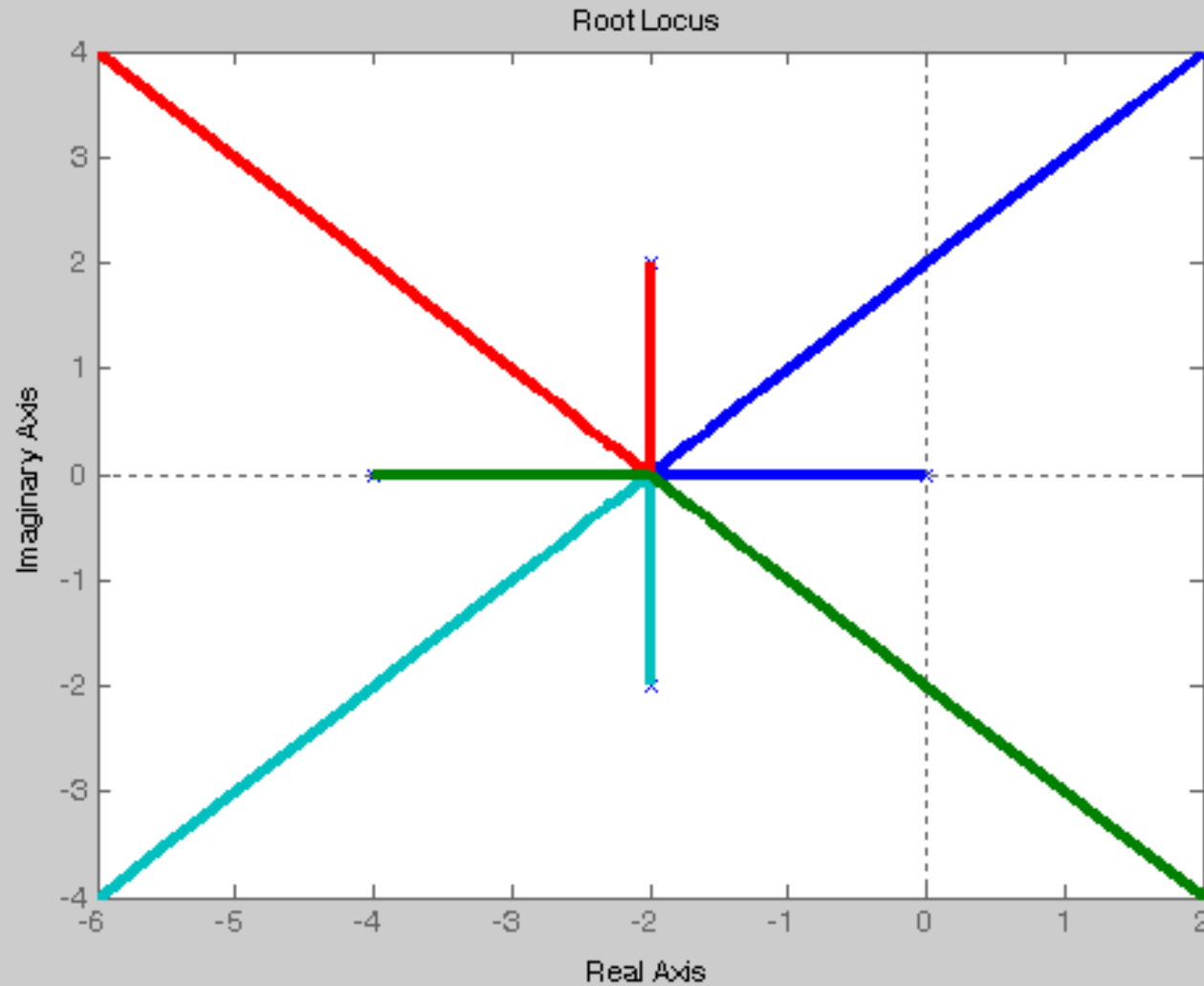
$$d_{2,3} = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{8 - a}$$

$$K = \frac{a(a + 32)}{4} \quad s = \pm j \sqrt{\frac{a}{2}}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2 + 4s + a)} \quad a > 4 \quad a=5$$

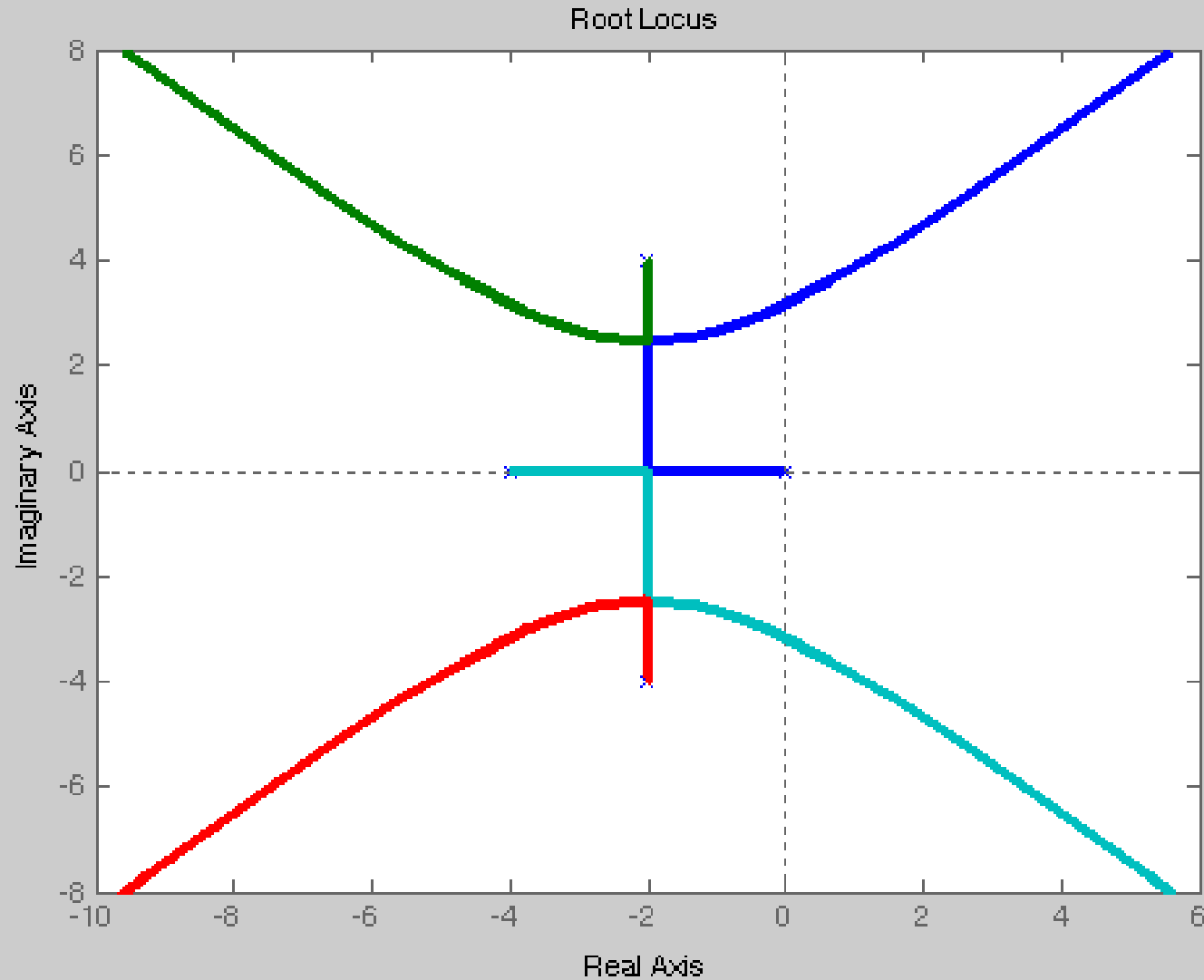


$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+a)} \quad a > 4 \quad a=8$$



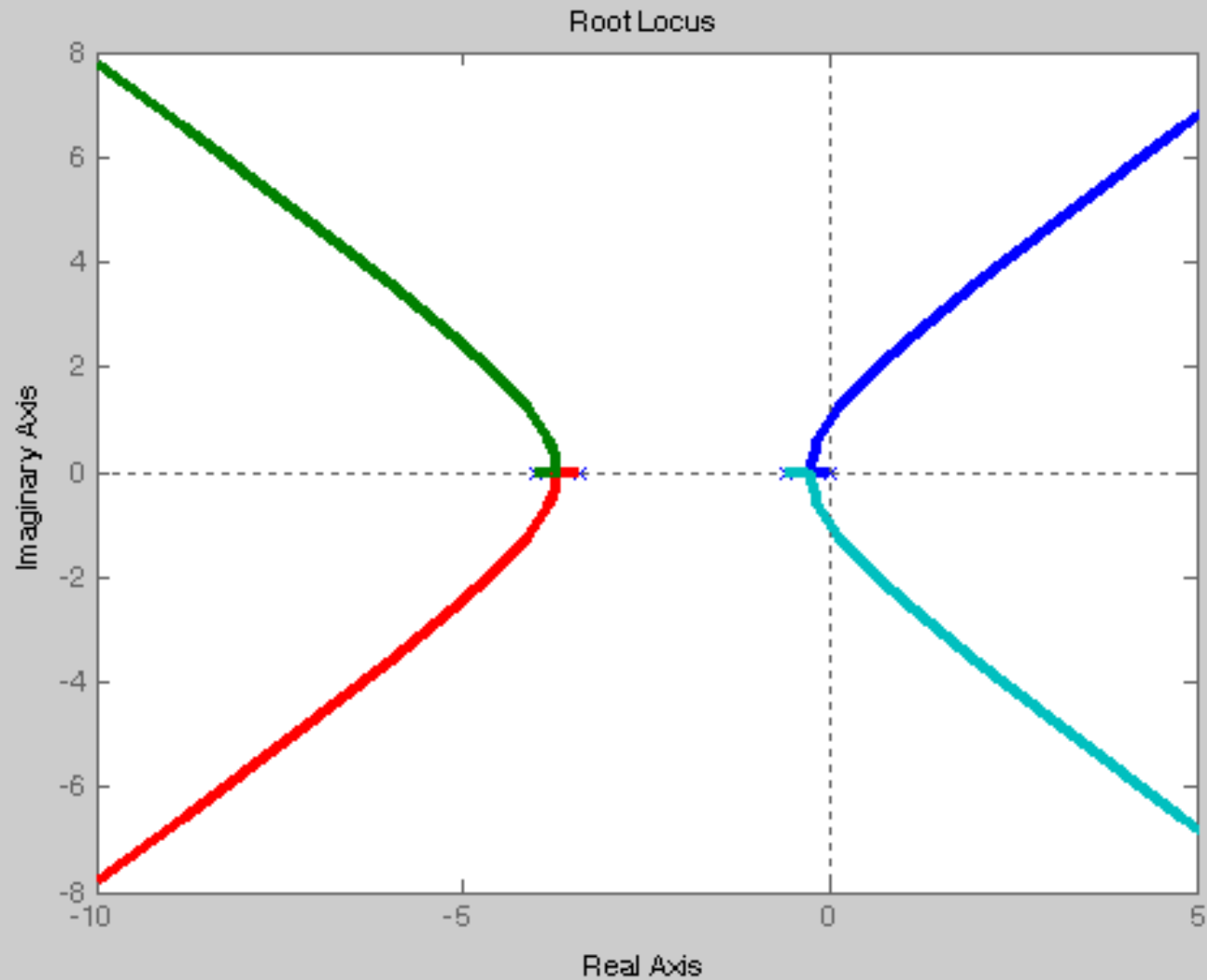
$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2+4s+a)} \quad a > 4$$

$$a=20$$



$$G(s) = \frac{K}{s(s+4)(s^2 + 4s + a)}$$

$$a=2$$



4-3 广义根轨迹

4.3.1 0°根轨迹的基本法则

$$G(s)H(s) = K_g \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

此时研究正反馈系统，系统的特征方程式为

$$D(s) = 1 - G(s)H(s) = 0$$

或

$$\frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = \frac{1}{K_g}$$

此时的根轨迹称为0°根轨迹。

根轨迹的幅值方程:

$$\frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{1}{K_g}$$

根轨迹的相角方程:

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = 2k\pi$$

法则1 根轨迹的起点($K_g=0$)和终点($K_g \rightarrow \infty$): 根轨迹起始于开环极点, 终止于开环零点。

法则2 根轨迹的分支数 and 对称性: 系统根轨迹的分支数与开环有限零点个数 m 和有限极点个数 n 中的大者相等, 根轨迹是连续的并且对称于实轴。

***法则3 根轨迹的渐近线：**当开环传函中 $m < n$ 时，有 $n - m$ 条根轨迹分支沿着与实轴交角为 φ_a ，交点为 σ_a 的一组渐近线趋于无穷远处，且有：

$$\varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, \dots, n-m-1)$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$$

***法则4 实轴上的根轨迹：**实轴上的某一区域，若其右边开环实数零、极点个数之和为**偶数**，则该区域必是根轨迹。

法则5 根轨迹分离点和会合点:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d - p_j}$$

*法则6 根轨迹的出射角与入射角:

$$\theta_{p_x} = \sum_{i=1}^m \angle(p_x - z_i) - \sum_{j=1, j \neq x}^n \angle(p_x - p_j)$$

$$\varphi_{z_x} = \sum_{i=1, i \neq x}^m \angle(z_x - z_i) + \sum_{j=1}^n \angle(z_x - p_j)$$

法则7 根轨迹与虚轴交点：若根轨迹与虚轴相交，则交点上的坐标可按下述两种方法求出：

方法一：在系统的闭环特征方程 $D(s)=0$ 中，令 $s = j\omega$ ， $D(j\omega)=0$ 的解即是交点坐标。

方法二：由劳斯稳定判据求出。

法则8 闭环极点的和：若开环传函分母阶次 n 比分子阶次 m 高2次或2次以上，即 $n - m \geq 2$ ，则系统闭环极点之和等于其开环极点之和。

- 1) 根的分量之和是一个与 K_g 无关的常数；
- 2) 各分支要保持总和平衡，走向左右对称。

例 4-10 设单位正反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_g (s + 1)}{(s + 2)(s + 4)}$$

试绘制系统的概略根轨迹。

解：单位正反馈系统的闭环特征方程为

$$D(s) = 1 - G(s) = \frac{K_g (s + 1)}{(s + 2)(s + 4)} = 0$$

即系统的根轨迹方程为

$$\frac{K_g (s + 1)}{(s + 2)(s + 4)} = 1$$

系统根轨迹需按 0° 根轨迹的绘制法则绘制。

实轴上的根轨迹： $[-4, -2] \quad [1, \infty]$

分离点： 在 $(-4, -2)$ 和 $(1, \infty)$ 存在分离点。

$$\frac{1}{d+2} + \frac{1}{d+4} = \frac{1}{d+1} \quad d_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

根轨迹与虚轴的交点： 系统的闭环特征方程

$$s^2 + (6 - K_g)s + 8 - K_g = 0$$

令 $s = j\omega$, 得

$$(j\omega)^2 + (6 - K_g)(j\omega) + 8 - K_g = 0$$

分别令实部和虚部为零, 得

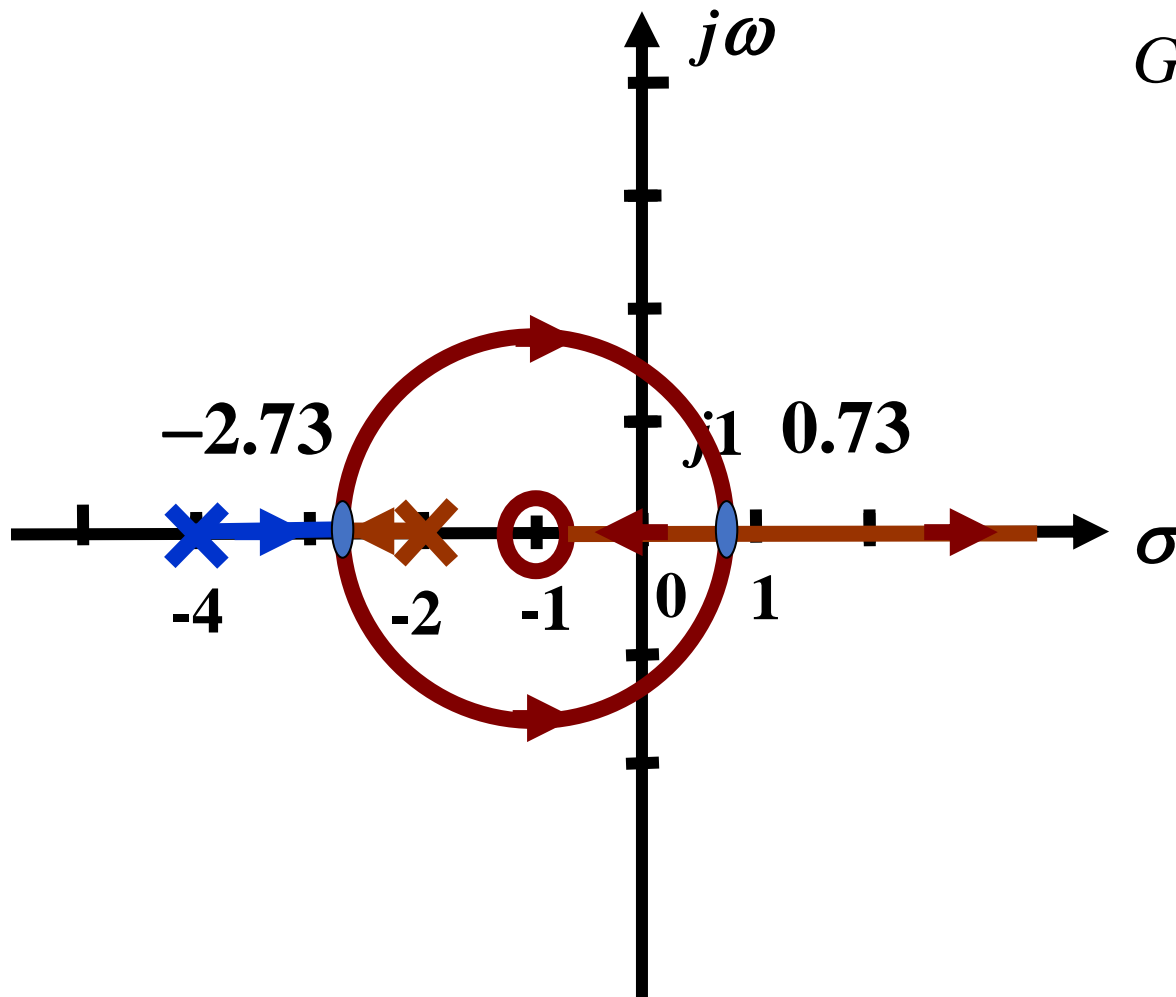
$$-\omega^2 + 8 - K_g = 0$$

$$6 - K_g = 0$$

$$\omega = \pm 1.414, \quad K_g = 6$$



$$G(s) = \frac{K_g (s + 1)}{(s + 2)(s + 4)}$$



当 $K_g < 6$ 时，正反馈闭环系统是稳定的。

如果此系统为负反馈系统，则系统总是稳定的。

4.3.2 参变量系统的根轨迹

设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = GH(s, A)$$

A 为系统的参变量。则系统的闭环特征方程可表示为

$$D(s) = 1 \pm G(s)H(s) = 1 \pm GH(s, A) = 0$$

可整理为

$$1 \pm GH'(s) = 1 \pm A \frac{P(s)}{Q(s)}$$

式中， $GH'(s)$ 为系统等效的开环传递函数。此时根轨迹可以化为常规根轨迹或 0° 根轨迹。

例4-11 已知某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{0.25(s+a)}{s^2(s+1)}$$

试绘制参数 a 从零变化到正无穷时，闭环系统的根轨迹。

解：系统的闭环特征方程为

$$s^3 + s^2 + 0.25s + 0.25a = 0$$

$$1 + GH'(s) = 1 + \frac{0.25a}{s^3 + s^2 + 0.25s}$$

系统等效的开环传递函数为

$$GH'(s) = \frac{0.25a}{s^3 + s^2 + 0.25s}$$

把 a 视为根迹增益，可绘制出 a 变化时系统的常规根轨迹。

$$GH'(s) = \frac{0.25a}{s^3 + s^2 + 0.25s}$$

渐近线:

$$\sigma_a = -1/3$$

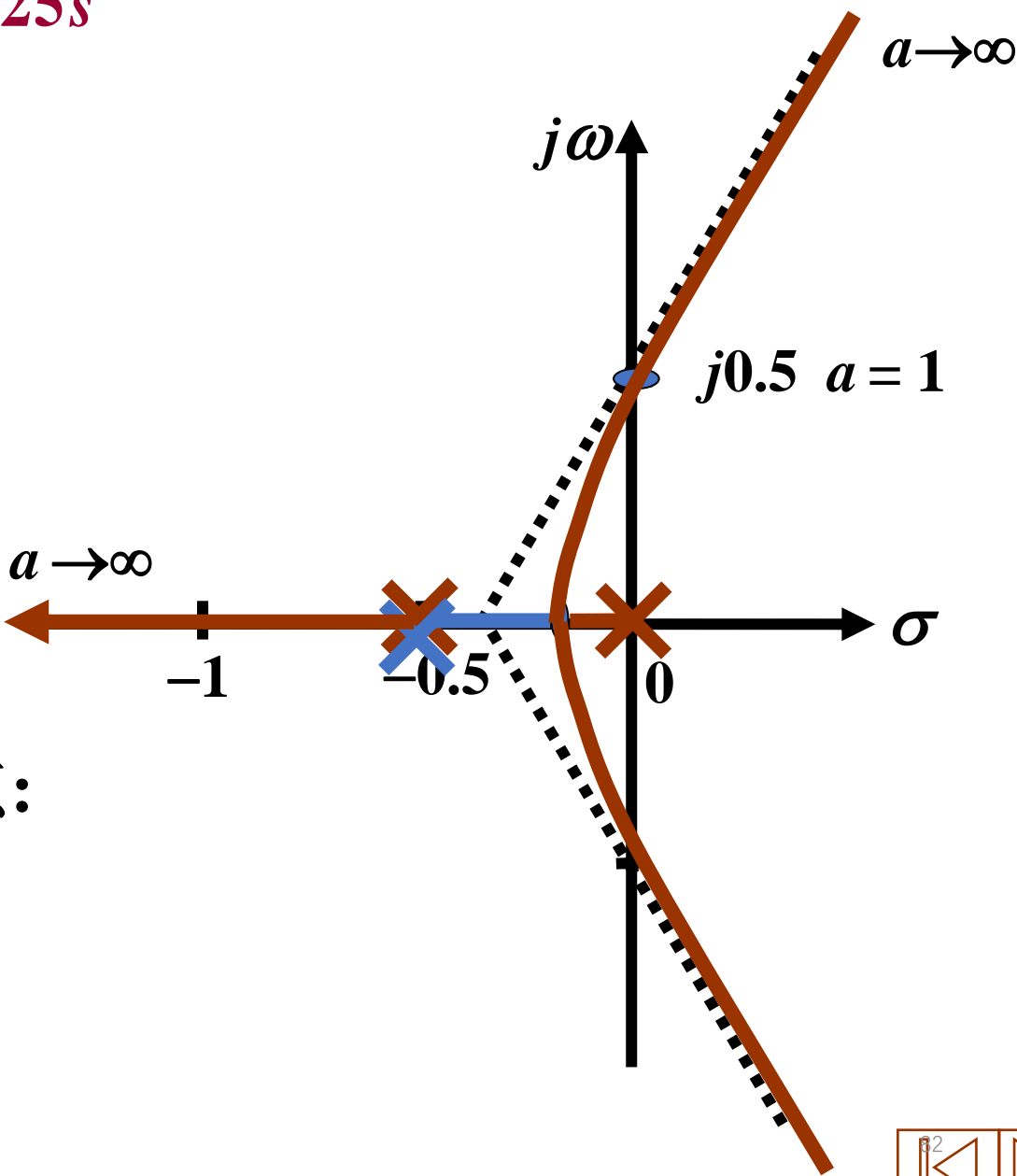
$$\varphi_a = \pi/3, 5\pi/3, \pi.$$

分离点:

$$d_1 = -1/6, d_2 = -1/2.$$

根轨迹与虚轴的交点:

$$a = 1 \quad s = \pm j/2$$



例4-12 已知某负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}$$

其中开环根迹增益 **K** 可自行选定。试分析时间常数 **T** 对系统性能的影响。

解：系统的闭环特征方程为

$$s(s+1)(s+2) + K(1+Ts) = 0$$

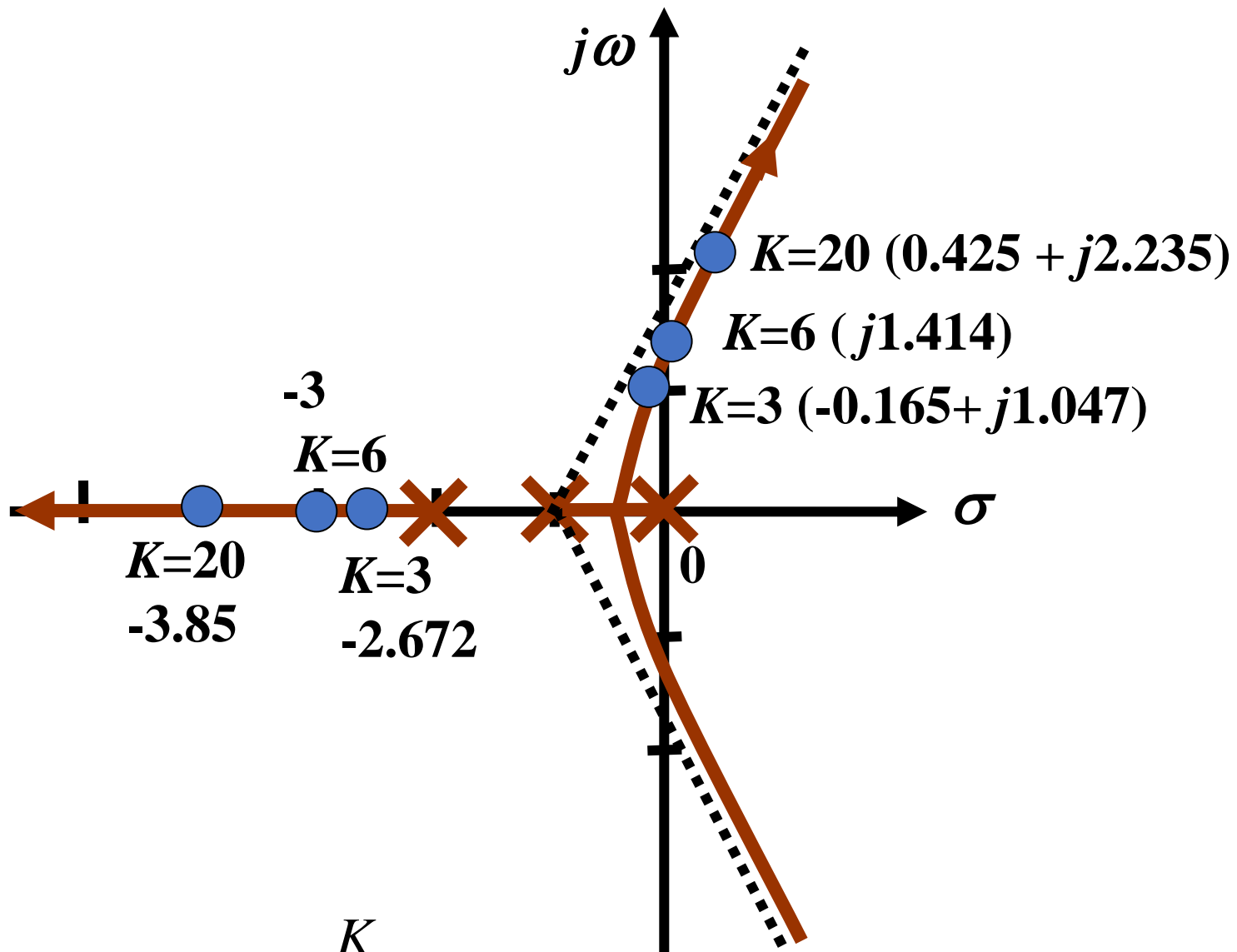
或改写为

$$s(s+1)(s+2) + K + KTs = 0$$

系统等效开环传递函数为

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{KTs}{s(s+1)(s+2) + K}$$

等效开环极点为 **$s(s+1)(s+2) + K = 0$** 的根，也就是当 **$T = 0$** ，以 **K** 为可变参数的闭环极点。



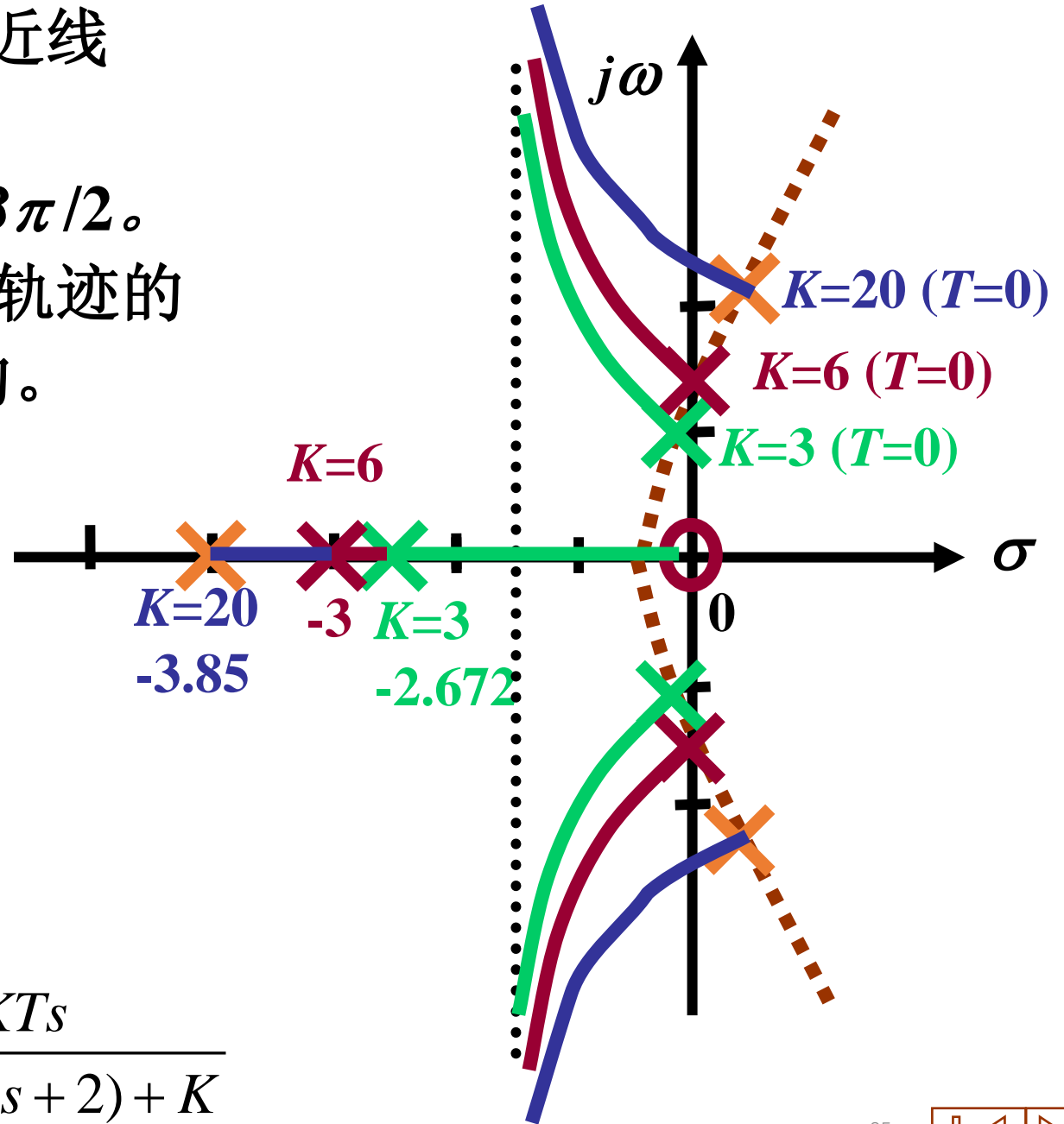
$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

渐近线：有2条渐近线

$$\sigma_a = -1.5$$

$$\varphi_a = \pi/2, 3\pi/2。$$

不论 K 为何值，根轨迹的渐近线都是一样的。



$$G_1(s)H_1(s) = \frac{KTs}{s(s+1)(s+2) + K}$$

4-4 控制系统的根轨迹分析

根轨迹图是设计和分析线性时不变控制系统的有力帮手，它揭示了稳定性、阻尼系数、振型等动态性能，用根轨迹图分析控制系统主要有以下方面：

4.4.1 根轨迹与稳定性

用根轨迹图分析控制系统的稳定性，比仅仅知道一组闭环极点要深刻得多。比如，当 K 在 $(0, \infty)$ 间取值时，如果 n 支根轨迹全部位于虚轴的左边，就意味着不管 K 取任何值闭环系统都是稳定的。反之，根轨迹只要有一支全部位于虚轴的右边，就意味着不管 K 取何值，闭环系统都不可能稳定，这种情况下，如果开环零、极点是系统固有的、不可改变的，那么要使系统稳定就必须人为增加开环零、极点，这就是通常讲的要改变系统的结构，而不仅仅是改变系统的参数。

根轨迹只要有一支穿越虚轴，就说明闭环系统的稳定是有条件的，知道了根轨迹与虚轴交点的 K 值，就可以确定稳定条件，进而确定合适的 K 值。

初学者容易把开环极点和闭环极点混淆，因为画根轨迹图时首先标在图上的是开环零、极点，根轨迹的起点是开环极点，有读者就误认为根轨迹上的点都是开环极点，这是不对的。根轨迹图上除了起点和终点，其它都是闭环极点的可能取值。

4.4.2 开环零极点对系统的影响

对于图4-1所描述的系统，影响系统稳定性有三大因素：**开环增益**、**开环极点**、**开环零点**。开环增益的影响上面已经讨论，现在讨论开环零、极点的影响，请看下图所示的例子。

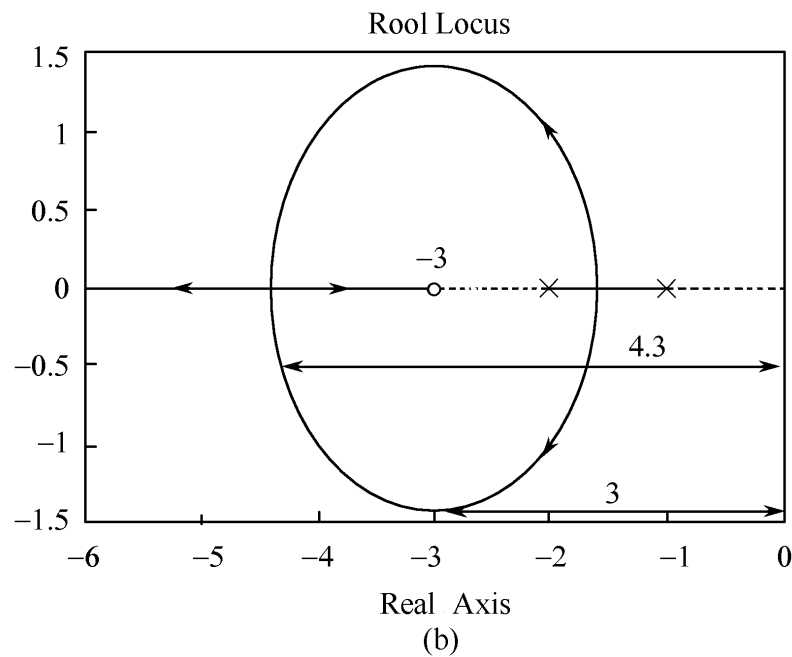
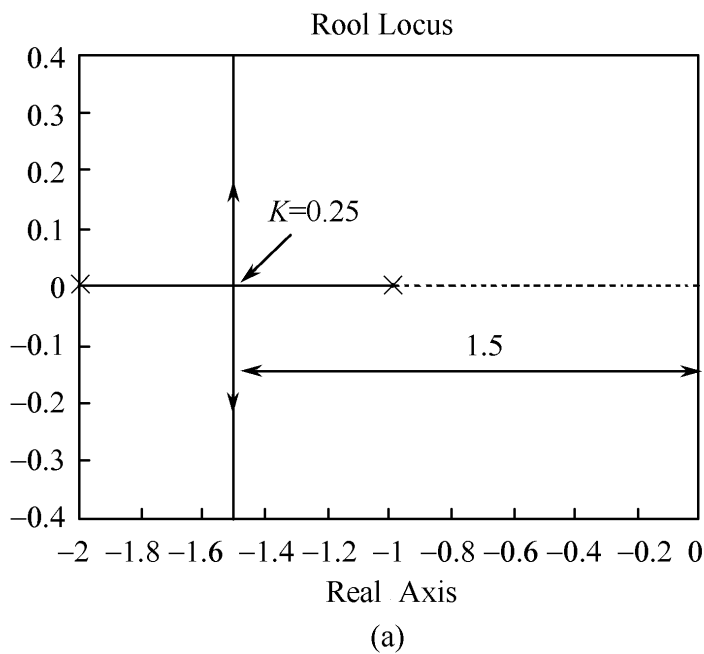


图 a, b 开环零、极点对系统的影响

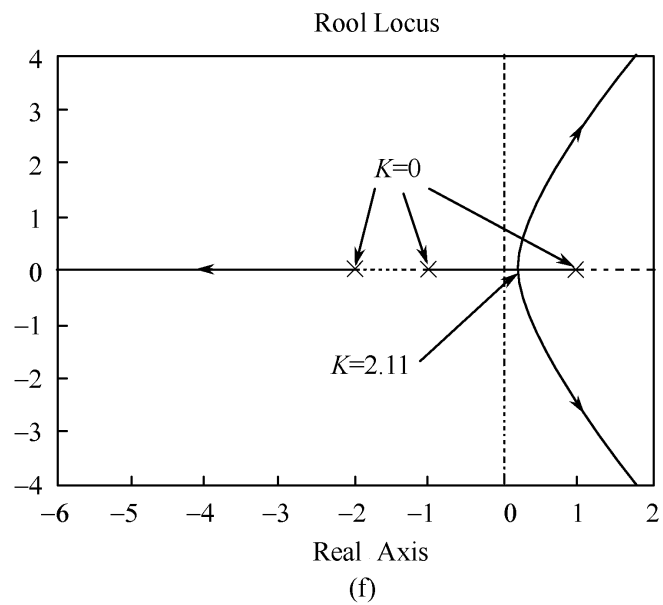
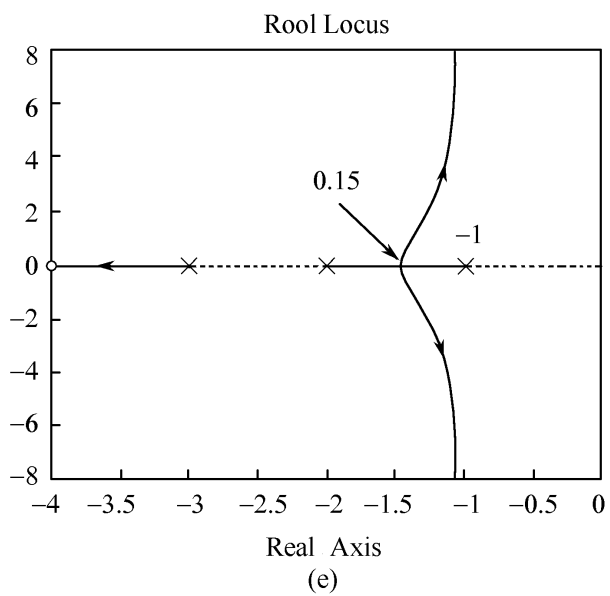
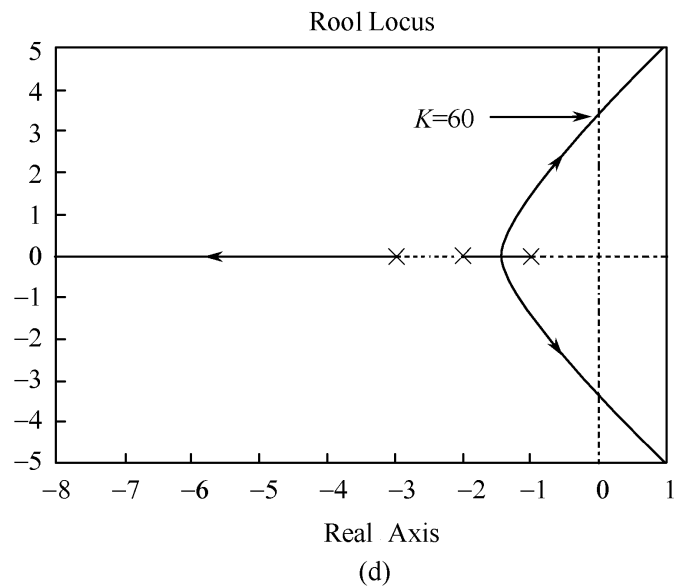
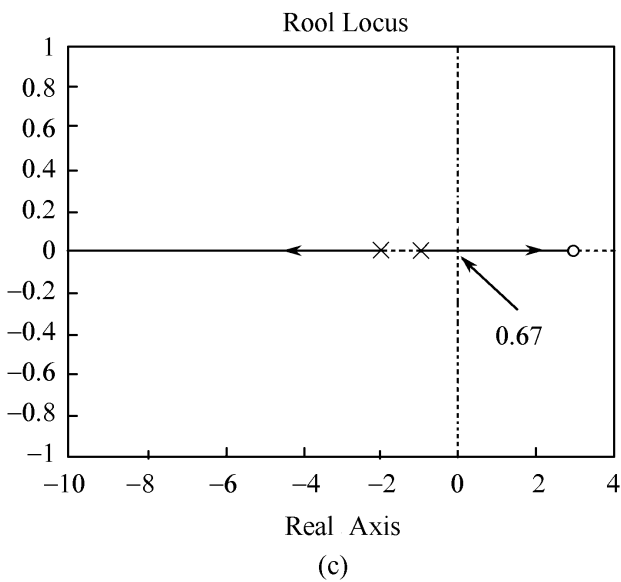


图 c, d, e, f 开环零、极点对系统的影响

图4-13 (a) – (d) 所对应的系统开环传递函数分别为:

$$\text{图}a: \quad G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{图}b: \quad G(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{图}c: \quad G(s)H(s) = \frac{K(s-3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$\text{图}d: \quad G(s)H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

我们以图（a）所示系统为参照，在它基础上增加开环零、极点，研究它们对系统的影响。当 $K>0$ 时，图（a），（b）代表的系统始终是稳定的，但图（b）代表的系统可以选择到一对比图（a）离虚轴更远的闭环极点，这说明增加合适的位于虚轴左侧的开环零点，既可以增加稳定裕度又可以提高快速性。

图（c）增加的是位于虚轴右侧的零点，显然，这时系统只有在 $K<0.67$ 时才是稳定的，这说明增加位于虚轴右侧的开环零点，一般使稳定性下降。如果系统具有位于虚轴右侧的零点（不管是固有的还是加入的），就称之为非最小相角系统。

图（d）增加的是位于虚轴左侧的极点，显然，这时系统只有在 $K < 60$ 时才是稳定的，与图（a）相比说明：给开环系统增加位于虚轴左侧的极点，一般也会使稳定性下降。

图（e）是在图（d）基础上再增加一个位于虚轴左侧的零点，闭环系统的稳定性又大大提高了。

图（f）是在图（a）基础上增加位于虚轴右侧的极点，这时从该极点出发的一支根轨迹全部位于虚轴的右边，这意味着不管 K 取何值，闭环系统都不可能稳定，所以增加位于虚轴右侧的极点是不可取的。但是如果再增加一个合适的位于虚轴左侧的零点，该系统会变成条件稳定。

4.5.3 闭环零极点与时间响应

系统的动态性能最终体现在时间响应，影响时间响应的因素有两个：闭环传递函数和输入函数。在第三章中已经分析：时间响应的暂态分量主要取决于闭环零、极点，时间响应的稳态分量主要取决于输入函数。

如前所说，闭环系统的稳定性完全取决于闭环极点，实际上时间响应的暂态分量也主要取决于闭环极点。每一个闭环极点 s_i 对应时间响应中的一个因子 $\exp(s_i t)$ ——称为系统的一个模态（Mode）， s_i 在 S 平面上的位置决定了它对应的暂态分量的运动形式。

图4-15表示了 s_i 分布于 S 平面上不同位置所对应的暂态分量，其规律可以总结为：

1) **左右分布决定终值**。具体讲就是： s_i 位于虚轴左边时暂态分量最终衰减到零， s_i 位于虚轴右边时暂态分量一定发散， s_i 正好位于虚轴（除原点）时暂态分量为等幅振荡。

2) 虚实分布决定振型。具体讲就是：
 s_i 位于实轴上时暂态分量为非周期运动，
 s_i 位于虚轴上时暂态分量为周期运动。

3) 远近分布决定快慢。具体讲就是：
 s_i 位于虚轴左边时离虚轴愈远过渡过程衰减得愈快。所以离虚轴最近的闭环极点
‘主宰’ 系统响应的时间最长，被称为
主导极点。

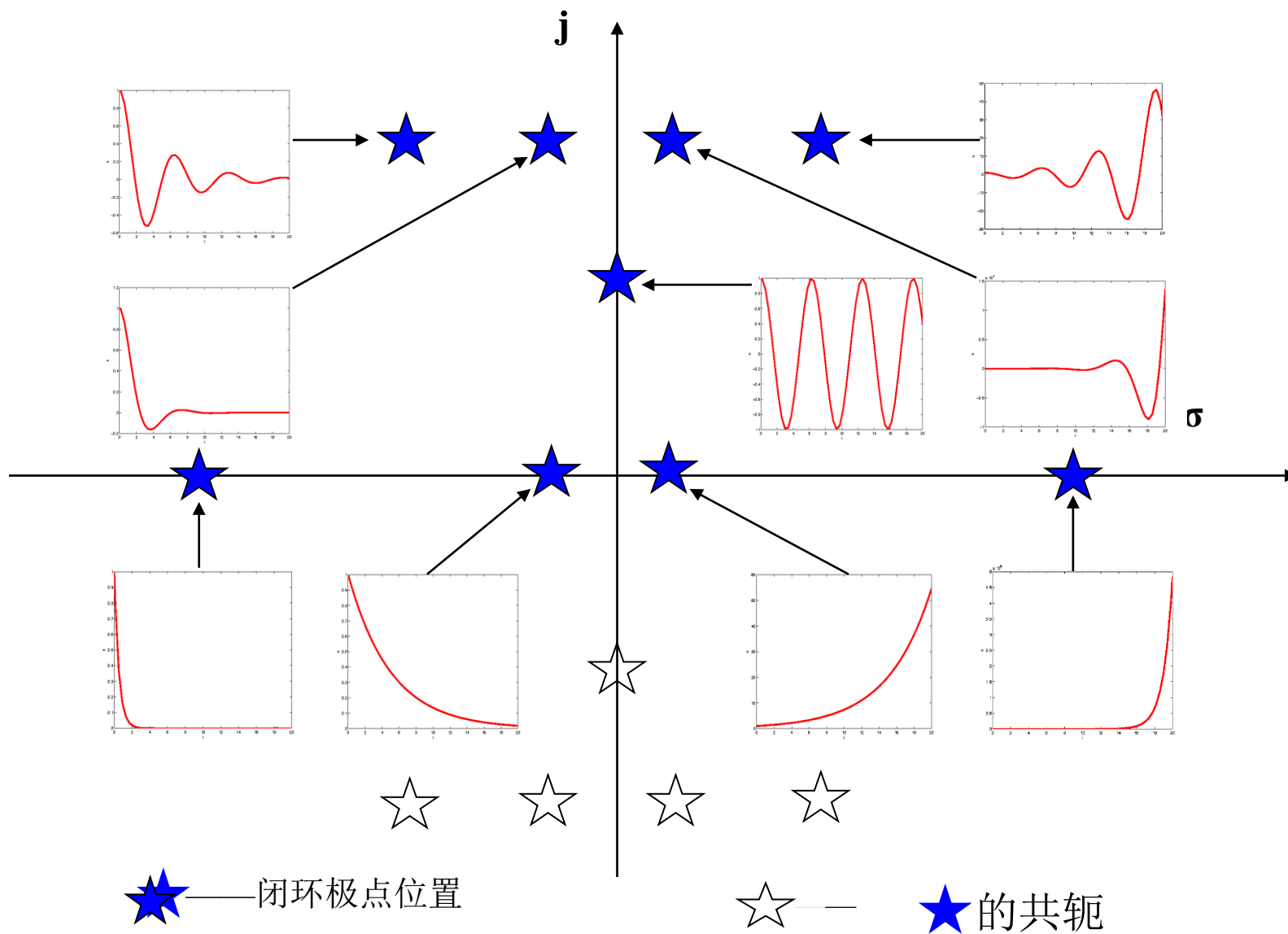


图 闭环极点分布与暂态分量的运动形式

设计系统时合理配置闭环极点是十分重要的，根据上述规律，一般首先配置主导极点，然后配置非主导极点，非主导极点与虚轴的距离应当是主导极点与虚轴距离的2~5倍，这样系统的时间响应就主要取决于一对主导极点。

主导极点一般安排为一对共轭复数极点，位于虚轴左边 60° 扇形区内，且离虚轴有一定的距离，其理由在于：

1) 闭环主导极点为共轭复数，使闭环系统的动态性能与一个二阶欠阻尼系统相似，二阶系统的动态性能是分析得最透彻的，欠阻尼系统则具有较快的反应速度。

2) 阻尼系数太大太小都不合适, 60° 扇形区意味着阻尼系数不小于 $\cos 60^\circ = 0.5$, 一般认为最佳阻尼系数是0.707。

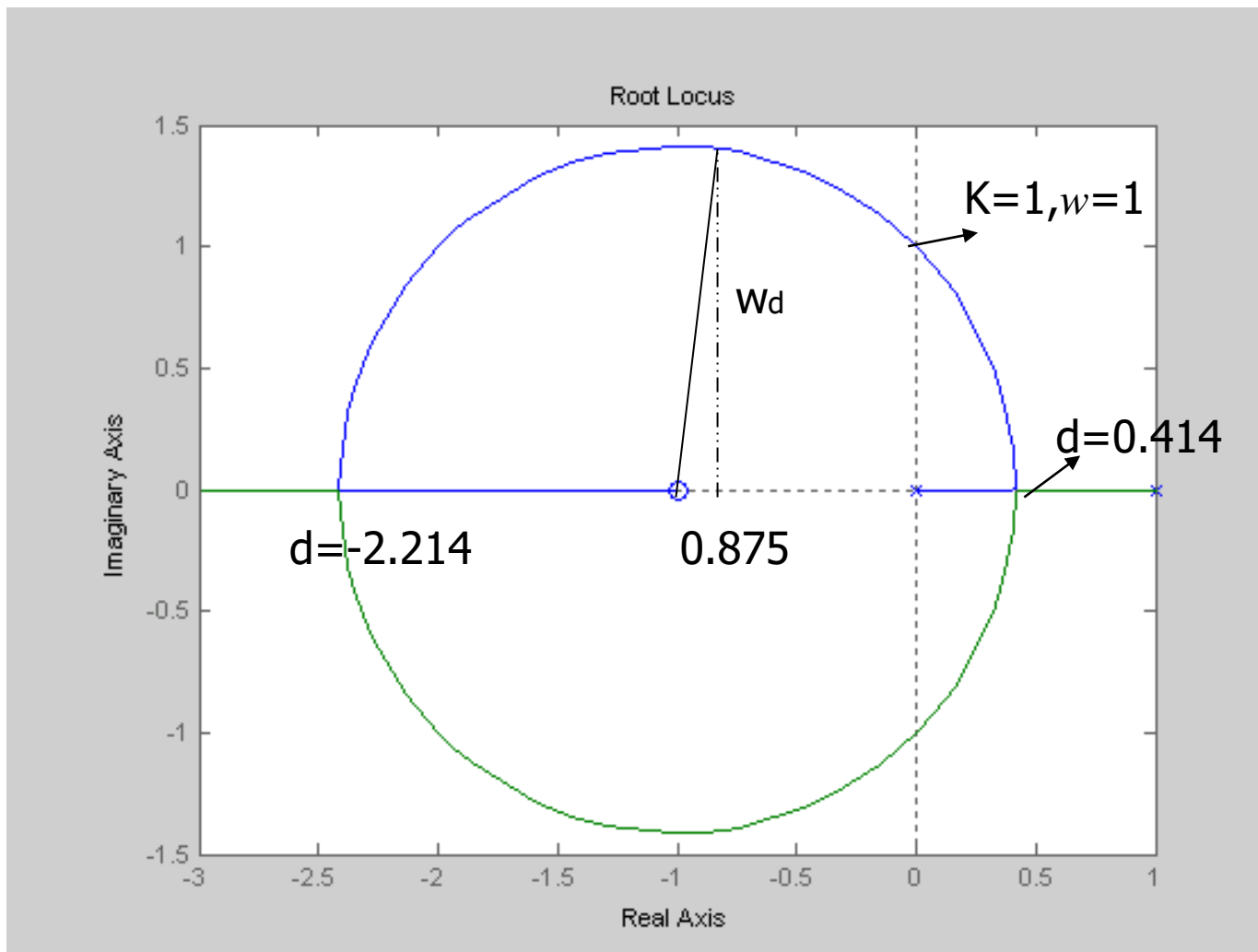
3) 离虚轴一定的距离保证了足够的稳定裕度。稳定裕度太小, 在实际应用时可能系统不稳定, 因为数学模型的参数不会绝对准确——也就是说实际的主导极点位置与理论分析的位置有偏差。但也不是越远越好, 因为系统总存在建模误差, 离虚轴很远的极点对应很小的时间常数, 如果主导极点与建模时忽略的小时间常数相当, 那么主导极点就不‘主导’, 设计的根基就动摇了。

例：设单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

- (1) 画出系统 K 变化的根轨迹；
- (2) 系统稳定 K 的取值范围，并求引起持续振荡时 K 值及振荡频率；
- (3) 由根轨迹图求使系统具有调节时间为4时的 K 值及对应的特征根。

解：绘制根轨迹图(以 $(-1, j0)$ 为圆心， 0.707 为半径的圆



系统稳定 $K>1$ ，临界稳定 $K=1$ 相应振荡频率 $\omega=1$ ；

由调节时间 $t_s=4$ 时，

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 4$$

$$\zeta\omega_n = 0.875$$

$$\omega_d^2 = (\sqrt{2})^2 - (1 - 0.875)^2 = 1.984, \omega_d = 1.41$$

故 $t_s = 4$ 对应的闭环极点为

$$s_{1,2} = -0.875 \pm j1.41$$

由模值条件，求对应的 K

$$K = 2.75$$

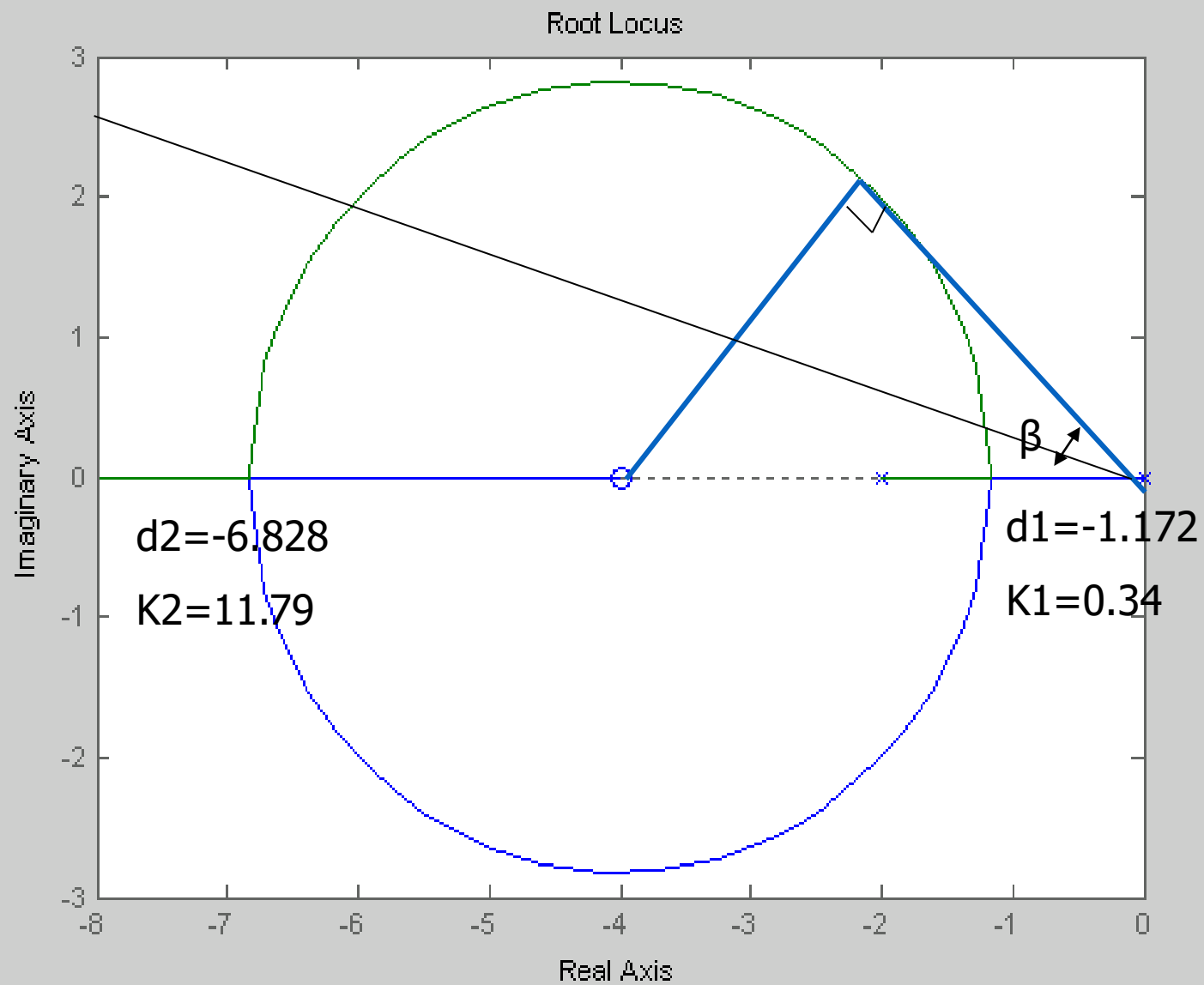


例：已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K(s + 4)}{s(s + 2)}$$

- 1) 试画出系统的根轨迹；
- 2) 求系统具有最小阻尼比时的闭环极点，对应的**K**值及性能指标；
- 3) 若要求系统的阻尼比为**0.866**时，求闭环极点；
- 4) 若求**K=1**时的闭环极点。





过原点作圆的切线，得最小阻尼比线，等腰直角三角形，

$$\beta = 45^\circ, \zeta = \cos\beta = 0.707$$

对应的闭环极点 $-2 \pm j2$

$$K = \left| \frac{s(s+2)}{s+4} \right|_{s=-2+j2} = 2$$

$$M\% = \exp(-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}) = 4.4\%$$

$$t_s = \frac{3\sim 4}{\zeta\omega_n} = \frac{3\sim 4}{2} = 1.5\sim 2$$

根据阻尼比的要求，做出等阻尼比线交点对应的闭环极点

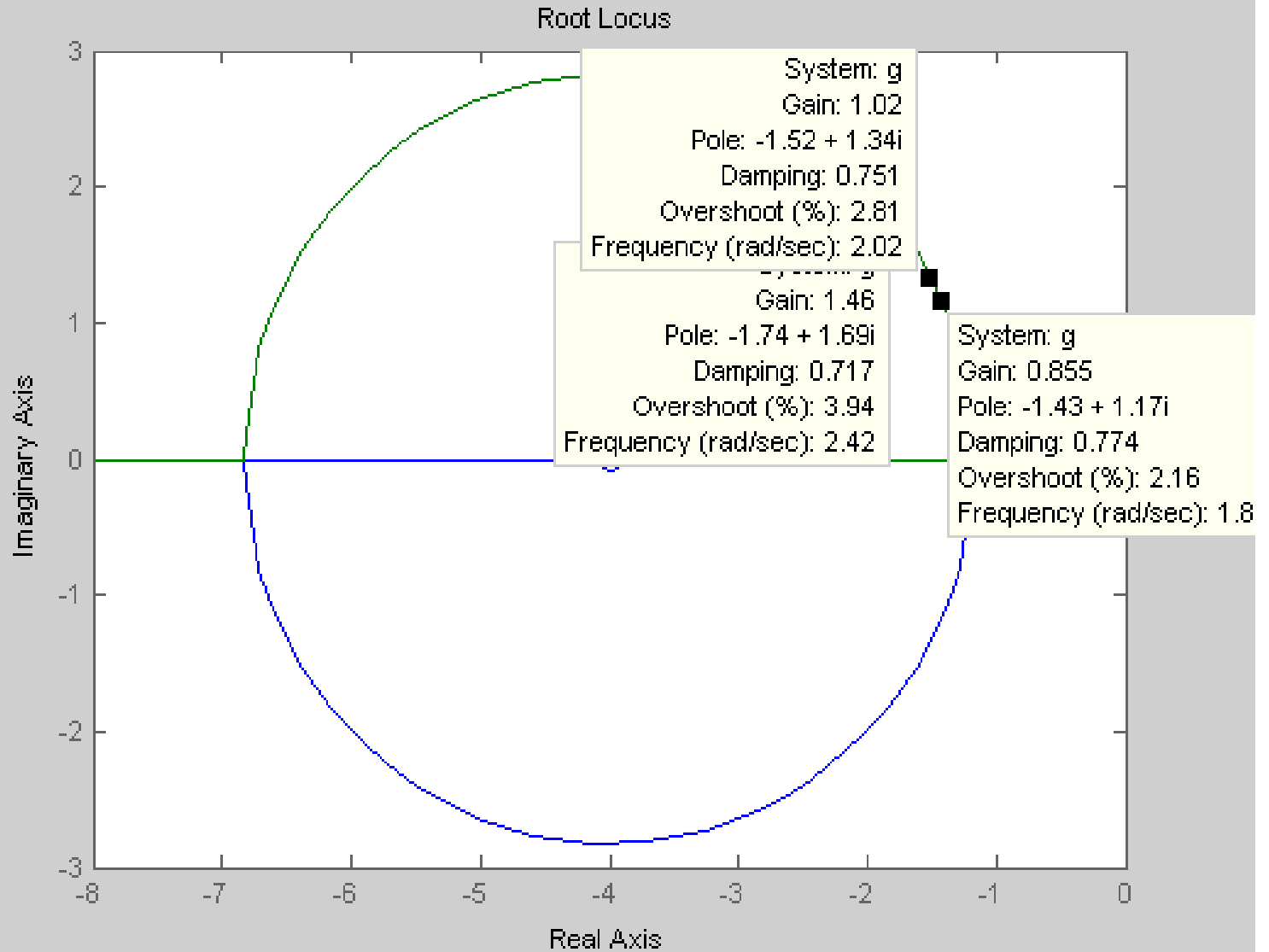
$$s_1 = -1.32 + j0.658, \quad K_1 = \left| \frac{s(s+2)}{s+4} \right|_{s=s_1} = 0.5$$

求**K=1**时的闭环极点，可采用试探法。

$$s_1 = -1.74 + j1.69, \quad K_1 = \left| \frac{s(s+2)}{s+4} \right|_{s=s_1} = 1.46$$

$$s_2 = -1.43 + j1.17, \quad K_2 = \left| \frac{s(s+2)}{s+4} \right|_{s=s_1} = 0.855$$

$$s_3 = -1.52 + j1.34, \quad K_3 = \left| \frac{s(s+2)}{s+4} \right|_{s=s_1} = 1.02$$



§ 4.5 用MATLAB绘制根轨迹图

用Matlab绘制根轨迹图十分准确、快捷。现在用一个例子来说明用法。

[例] 考虑系统的开环传递函数为

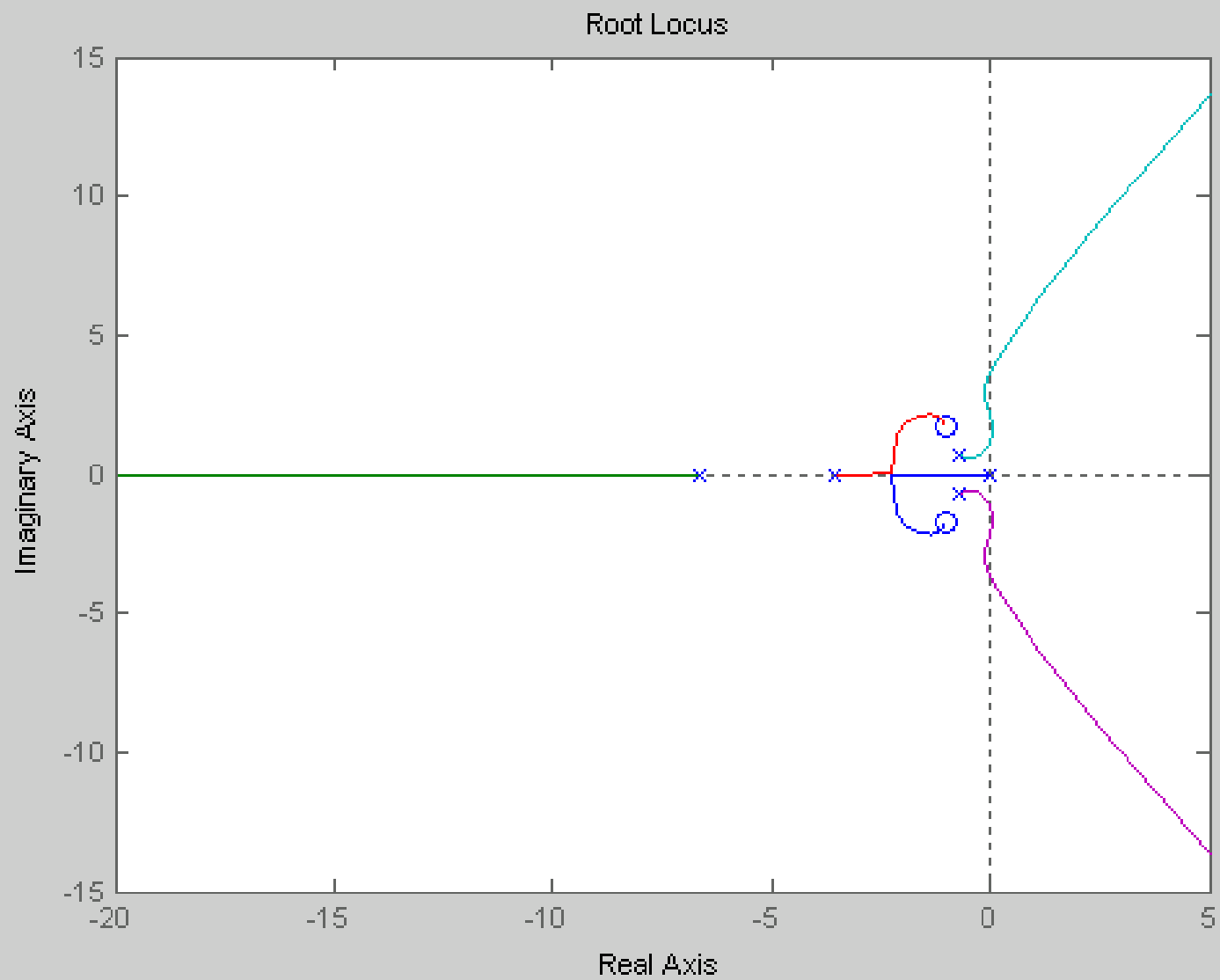
$$G(s)H(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$

用Matlab绘制根轨迹只要知道开环传递函数分子分母的系数，并分别填入分子向量num和分母向量den中，然后调用绘制根轨迹的专用函数rlocus就行了。

对于本例，最简单的程序就是：

```
num=[ 1  2  4];  
den=[1  11.6  39  43.6  24  0];  
rlocus(num,den)
```

在Matlab的命令窗（**Command Window**）中执行这个程序，运行后就自动绘出根轨迹如图4-12，从根轨迹图可以看出：当 $0 < K < 14$ 或 $64 < K < 195$ 时闭环系统稳定。用光标敲击根轨迹上的某一点会出一个文字框，标出该点的座标、 K 值、阻尼系数、超调量、频率等。



在MATLAB窗中，进入File\Export，可将绘出的根轨迹图存为需要的图形文件，比如命名为Exam2.pcx，这个图形文件可以插入Word文档。

与绘制根轨迹有关的函数还有：

pzmap——绘制根轨迹的开环零、极点

rlocfind——计算给定点的 K 值

sgrid——在连续系统根轨迹图上绘制阻尼系数和自然频率栅格

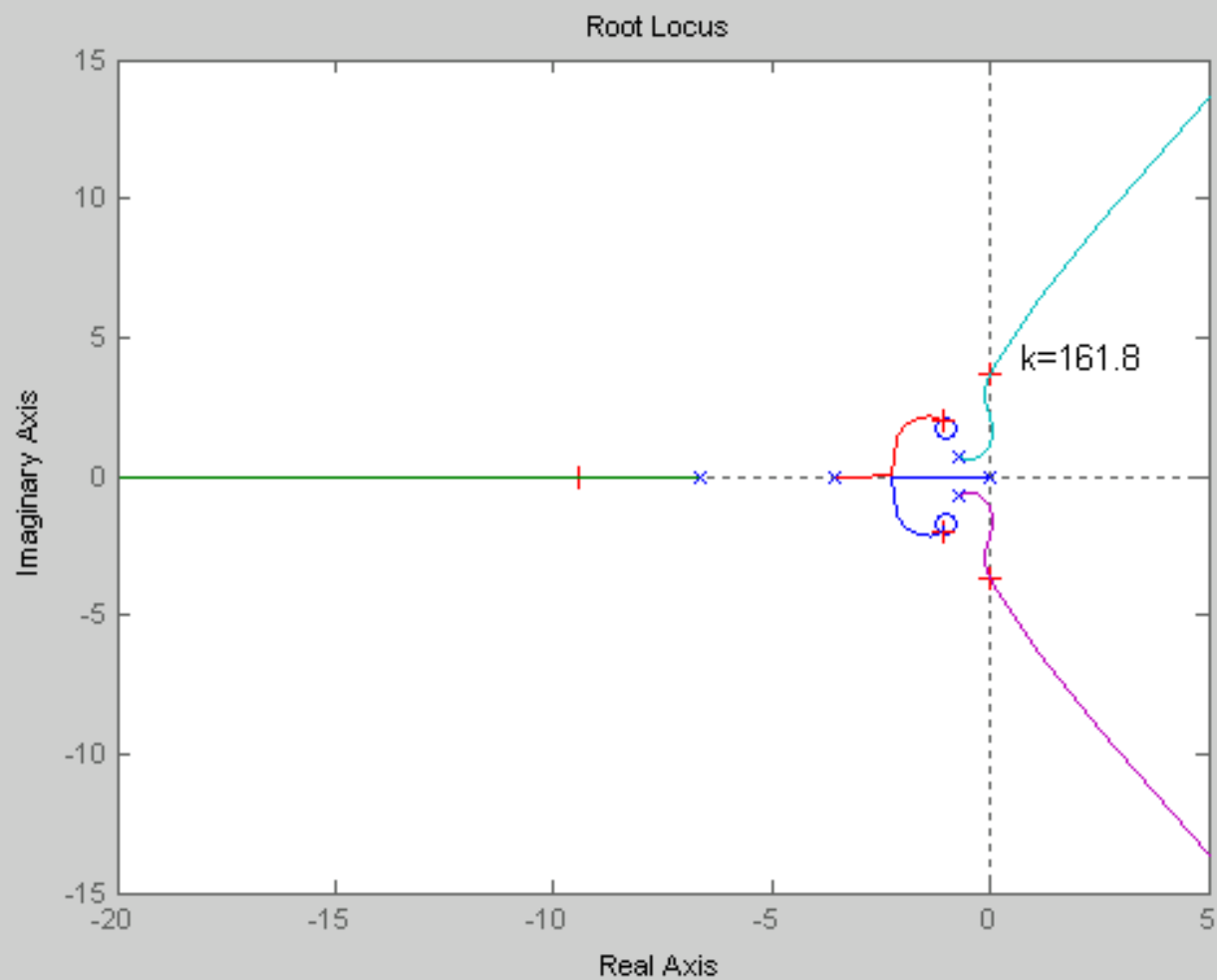
zgrid——在离散系统根轨迹图上绘制阻尼系数和自然频率栅格

例如，在上列程序之后增加语句：

[k,p]=rlocfind(num,den)

执行后用光标（十字）左单击根轨迹上的任一点，会同时在每支根轨迹上出现红十字——标出 n 个闭环极点的位置，命令窗中出现这 n 个闭环极点的坐标该点和它们对应的 K 值。

也可以在MATLAB窗中进入Files\New，打开编辑器（Editor/Debugger），在编辑器窗口编写上述程序，并创建一个M文件，比如命名为ROT2.m，然后在命令窗中运行文件名（ROT2）。



小结

1.基本要求

通过本章学习，应当做到：

(1) 掌握开环根轨迹增益 K_g 变化时系统闭环根轨迹的绘制方法。理解和熟记根轨迹的绘制法则。会利用幅值方程求特定的 K 值。

(2) 了解闭环零、极点的分布和系统阶跃响应的定性关系及系统根轨迹分析的基本思路。

(3) 掌握 0° 根轨迹、参变量根轨迹绘制的基本思路和方法。

2.内容提要

本章主要介绍了根轨迹的基本概念、控制系统根轨迹的绘制方法以及根轨迹法在控制系统分析中的应用。

1) 根轨迹的基本概念

根轨迹是当系统中某参数由 $0 \sim \infty$ 变化时，系统的闭环极点在 s 平面上移动的轨迹。

2) 常规根轨迹方程

负反馈系统根轨迹方程的一般形式为

$$\frac{K_g \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = -1$$

系统根轨迹的幅值方程为

$$\frac{\prod_{i=1}^m |s - z_i|}{\prod_{j=1}^n |s - p_j|} = \frac{1}{K_g}$$

系统根轨迹的幅角方程为

$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = (2k + 1)\pi$$

3) 绘制系统轨迹的基本法则

根据系统的根轨迹方程式，按照绘制系统根轨迹的基本法则，即可由系统开环零极点的分布直接绘制出闭环系统的概略根轨迹。

4) 控制系统的根轨迹分析

控制系统的根轨迹分析即应用闭环系统的根轨迹图，分析系统的稳定性、计算系统的动态性能和稳态性能。

5) 附加开环零极点对根轨迹的影响

根轨迹是根据开环零极点的分布绘制的，系统开环零极点的分布影响着根轨迹的形状。通过附加零极点，可以改造系统根轨迹的形状，使系统具有满意的性能指标。