

第3章 控制系统的时域分析

内 容 提 要

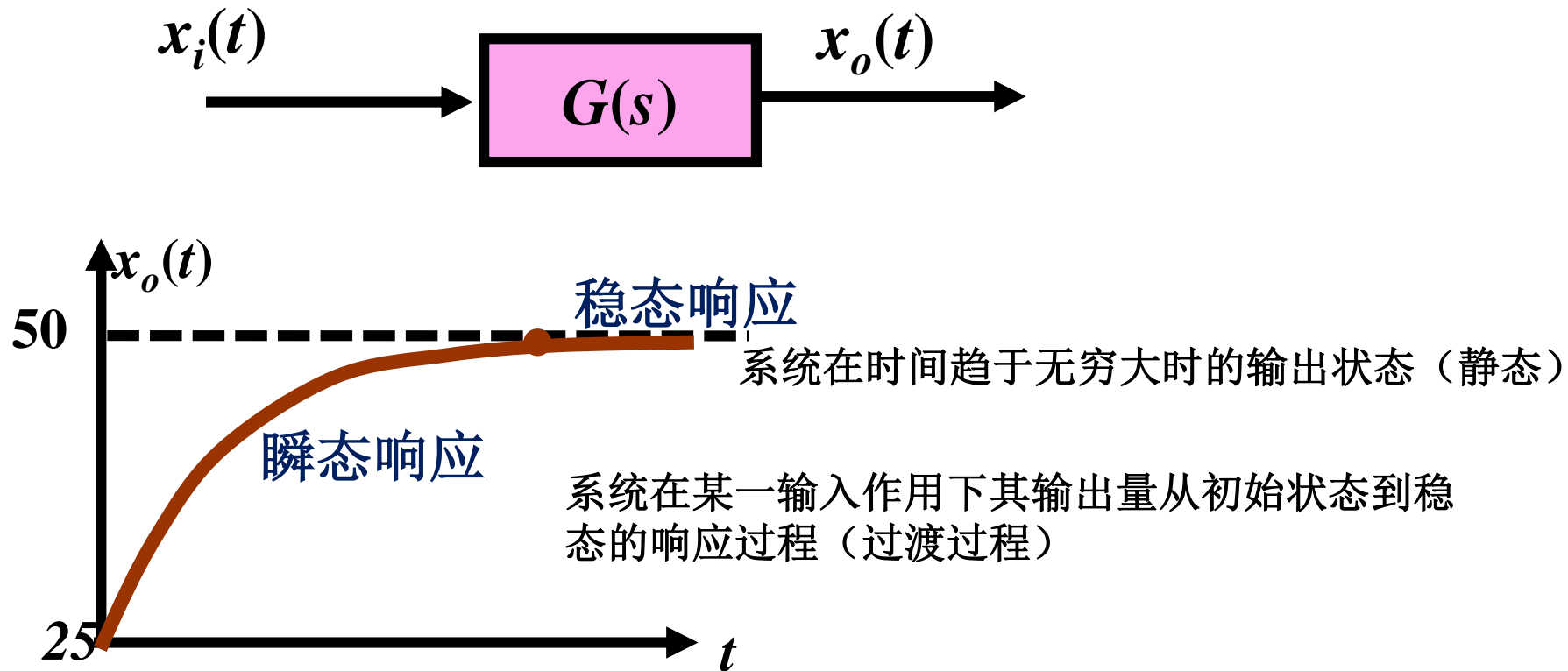
- 控制系统对输入信号的时域响应过程的瞬态/稳态性能等表征系统特性的优劣。
- 系统稳定性是其正常工作的条件；系统稳态误差作为系统稳态特性则标志着控制精度；系统的瞬态特性则标志着控制的快速性。
- 系统时域响应可定性/定量分析系统的动态性能。利用MATLAB和SIMULINK也可进行时间域响应分析。

知 识 要 点/Main Points

- 线性定常一阶、二阶系统的时域响应计算及动态性能的计算关系式；
- 系统稳定的充要条件的Routh/Hurwitz判据；
- 误差与稳态误差的定义，静态误差系数及系统的型号；动态误差与动态误差系数；
- 高阶系统的主导极点定义，偶极子及高阶系统的降阶模型近似。

§ 3.1 线性定常系统的时域响应

系统的时域响应：系统在输入作用下，输出随时间的变化过程。



温控箱的时域响应

系统的时域分析是指对系统在给定输入下的时域输出响应的分析。

- (1) 对给定输入，怎样获得系统的时域输出？这是求解系统数学模型的问题。
- (2) 对系统的时域输出，怎样分析系统性能的优劣？这需要确定系统性能优劣的标准和分析方法

本章目录/Contents of Chapter 3

§ 3.1 线性定常系统的时域响应

§ 3.2 控制系统时域响应的性能指标

§ 3.3 线性定常系统的稳定性

§ 3.4 系统的稳态误差

§ 3.5 一阶系统的时域响应

§ 3.6 二阶系统的时域响应

§ 3.7 高阶系统的瞬态响应

§ 3.8 用MATLAB和SIMULINK进行瞬态响应分析

§ 3.1 线性定常系统的时域响应

3.1.1 一般线性定常系统微分方程的形式

单输入单输出 n 阶线性定常系统，可用如下常系数线性微分方程来描述。

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ &= b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

3.1.2 线性定常系统时域响应的定义与一般形式

系统在输入信号 $r(t)$ 作用下，输出 $c(t)$ 随时间变化的规律即式 (3-1) 微分方程的解，称为该系统的对 $r(t)$ 的时域响应。

由线性微分方程理论，其解由两部分，即

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t) \quad (3-2)$$

这里

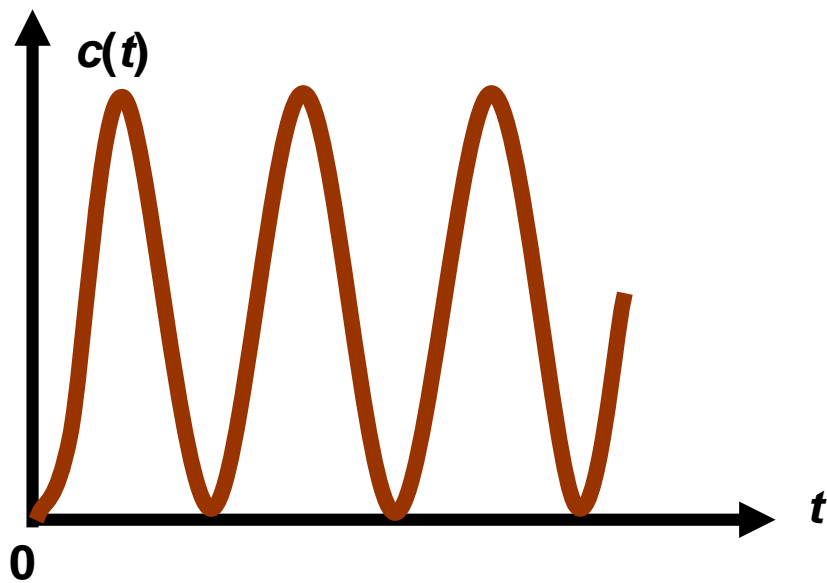
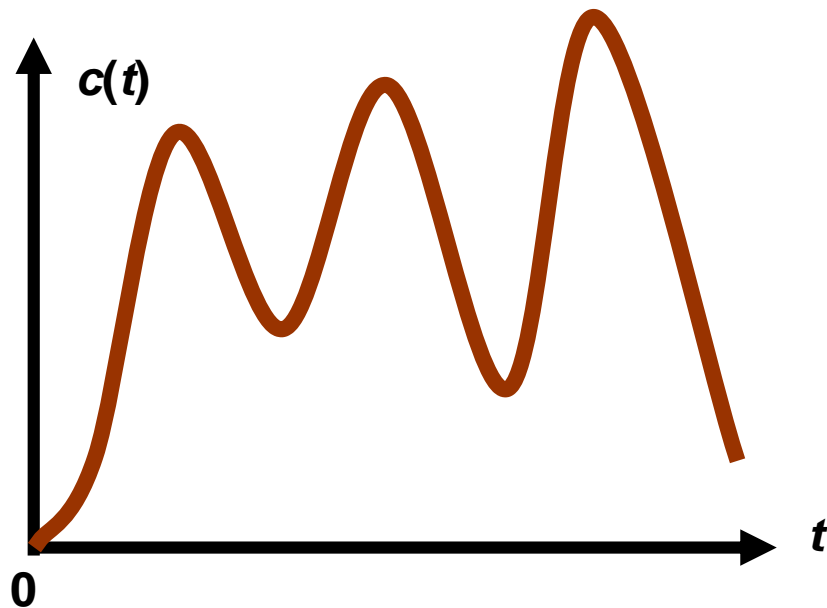
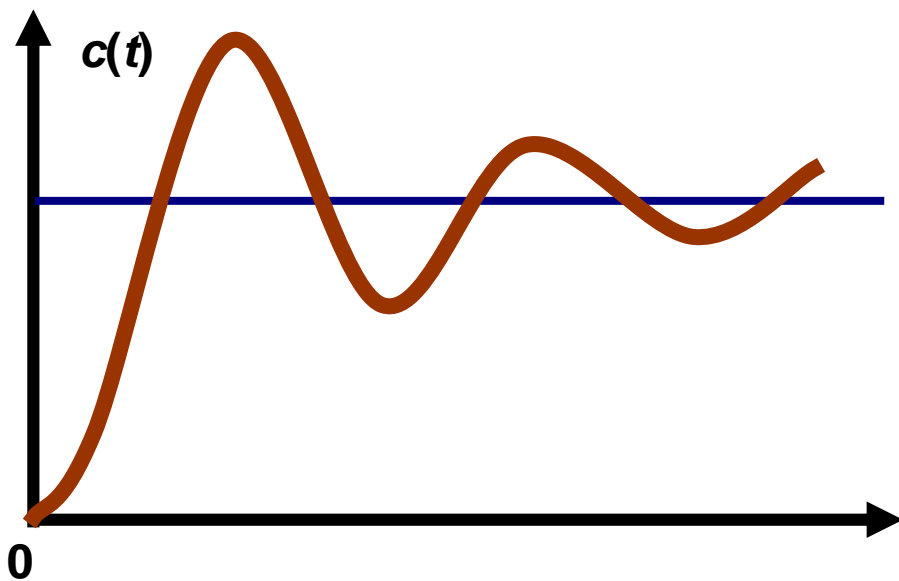
$c_1(t)$ —— 对应齐次微分方程的通解/零输入解

$c_2(t)$ —— 非齐次微分方程的特解/零状态解

3.1.3 线性定常系统稳态/暂态的定义与意义

由公式(3-2)，线性定常系统的时间响应包括：
由初始状态引发的响应部分和由输入信号引发的响应部分；前者往往随时间的变化而减弱，后者则形成系统在时间 $t \rightarrow \infty$ 时的输出。

- 系统的稳态响应特性是指其在时间 $t \rightarrow \infty$ 时的时间响应特点，稳态误差可用来做性能指标。
- 系统的暂态特性是指从 $t=0$ 开始到进入稳态之前的这一段过程的响应特性，可采用动态性能指标(瞬态响应指标)等来衡量。



§ 3.2 控制系统时域响应的性能指标

对线性系统，时域分析法的要点是：

(1) 建立数模（微分方程式，传递函数）

(2) 选择合适的输入函数（典型信号）。取决于系统常见工作状态，同时，在所有的可能的输入信号中，选取最不利的信号作为系统的典型输入信号。

(3) 求出系统输出随时间变化的关系

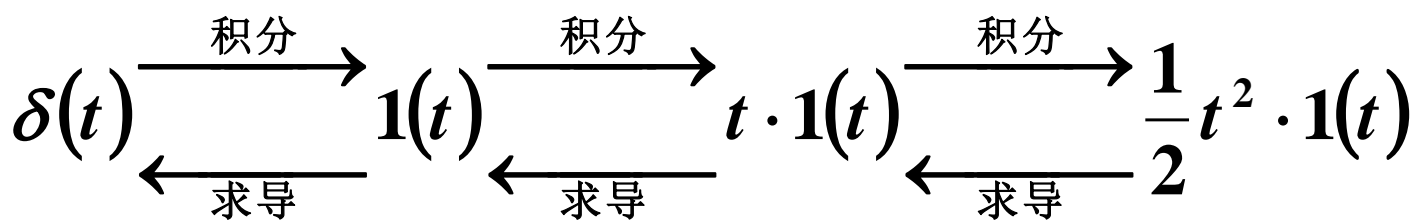
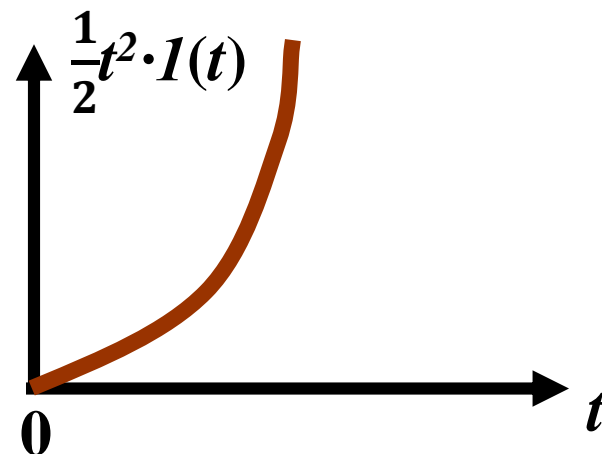
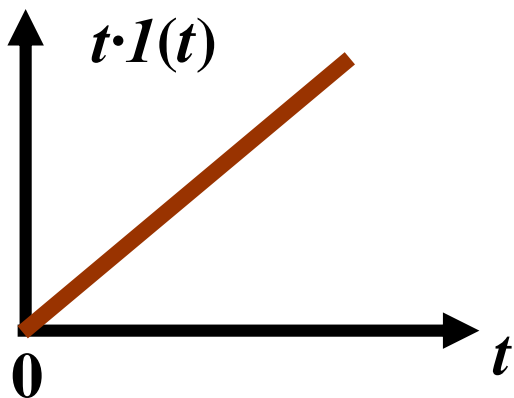
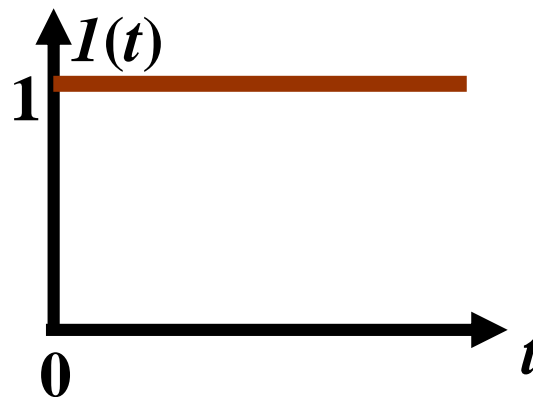
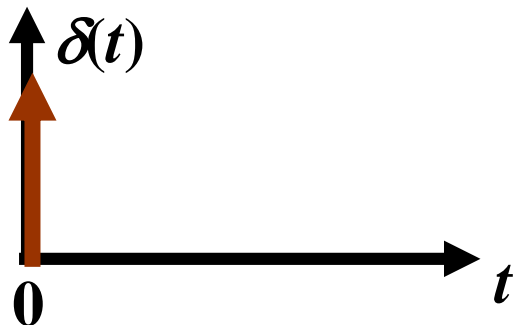
$$C(s) = G(s) R(s) \quad c(t) = L^{-1}[C(s)]$$

(4) 根据时间响应确定系统的性能，包括稳定性快速性和准确性等方面指标，看这些指标是否符合生产工艺的要求。

3.2.1 典型输入信号

控制系统的典型输入信号是从工程实际控制中抽象出来的一类标准信号，常见的信号及表示形式有：

典型信号名称	时域表示	复域表示	相互关系
单位脉冲信号	$\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & 0 \leq t \leq \varepsilon, \varepsilon \rightarrow 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$	$L[\delta(t)] = \delta(s) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1(t)$
单位阶跃信号	$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$L[1(t)] = 1(s) = \frac{1}{s}$	$\int_0^t 1(t) dt = v(t)$
单位斜坡信号	$v(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$L[v(t)] = v(s) = \frac{1}{s^2}$	$\int_0^t v(t) dt = a(t)$
单位加速度信号	$a(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$L[a(t)] = a(s) = \frac{1}{s^3}$	

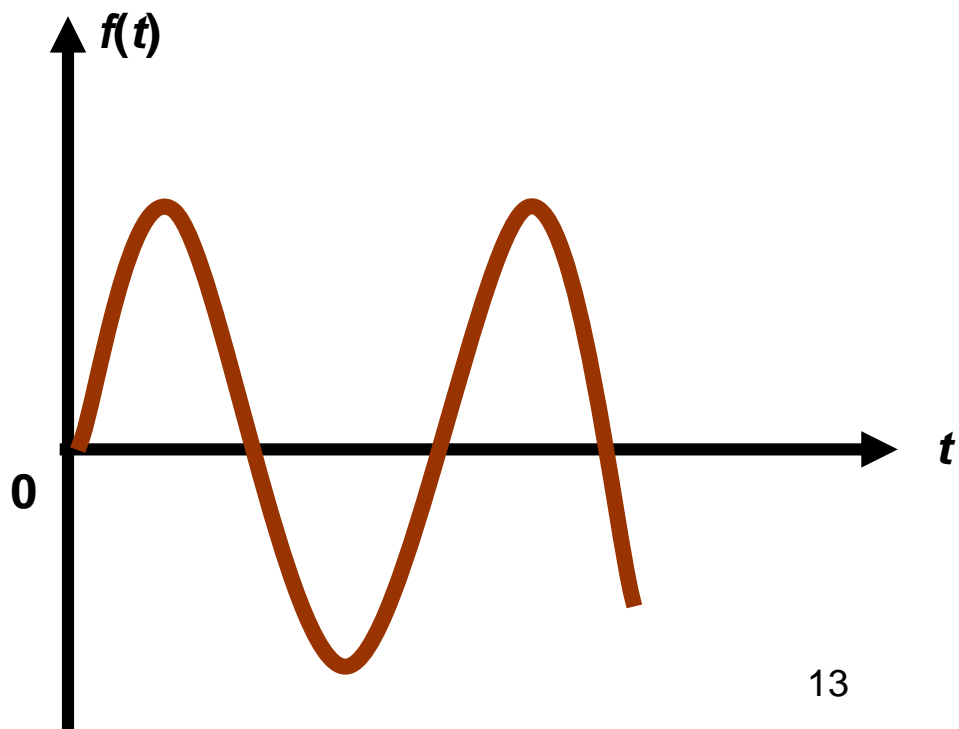


正弦函数

$$r(t) = A \sin \omega t$$

$$R(s) = L[A \sin \omega t] = \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2}$$

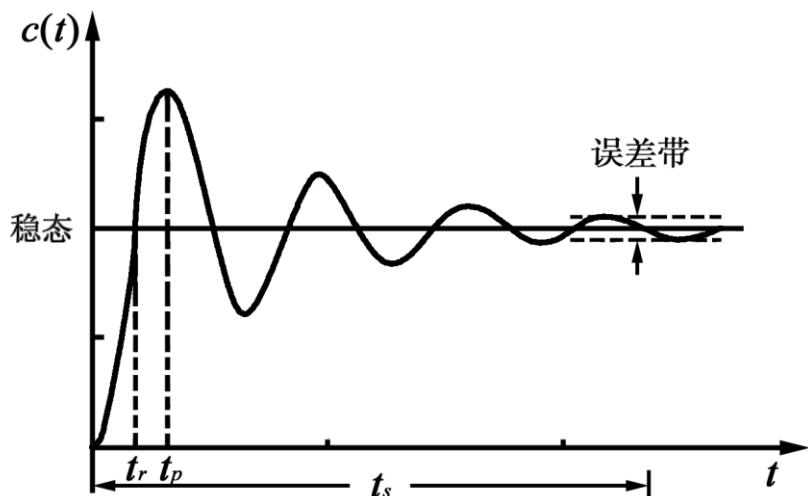
正弦信号主要用于分析
系统的频率响应特性



3.2.2 稳态响应的性能指标

稳态误差 e_{ss} 定义：当时间 t 趋于无穷时，系统输出响应的期望值与实际值之差，即

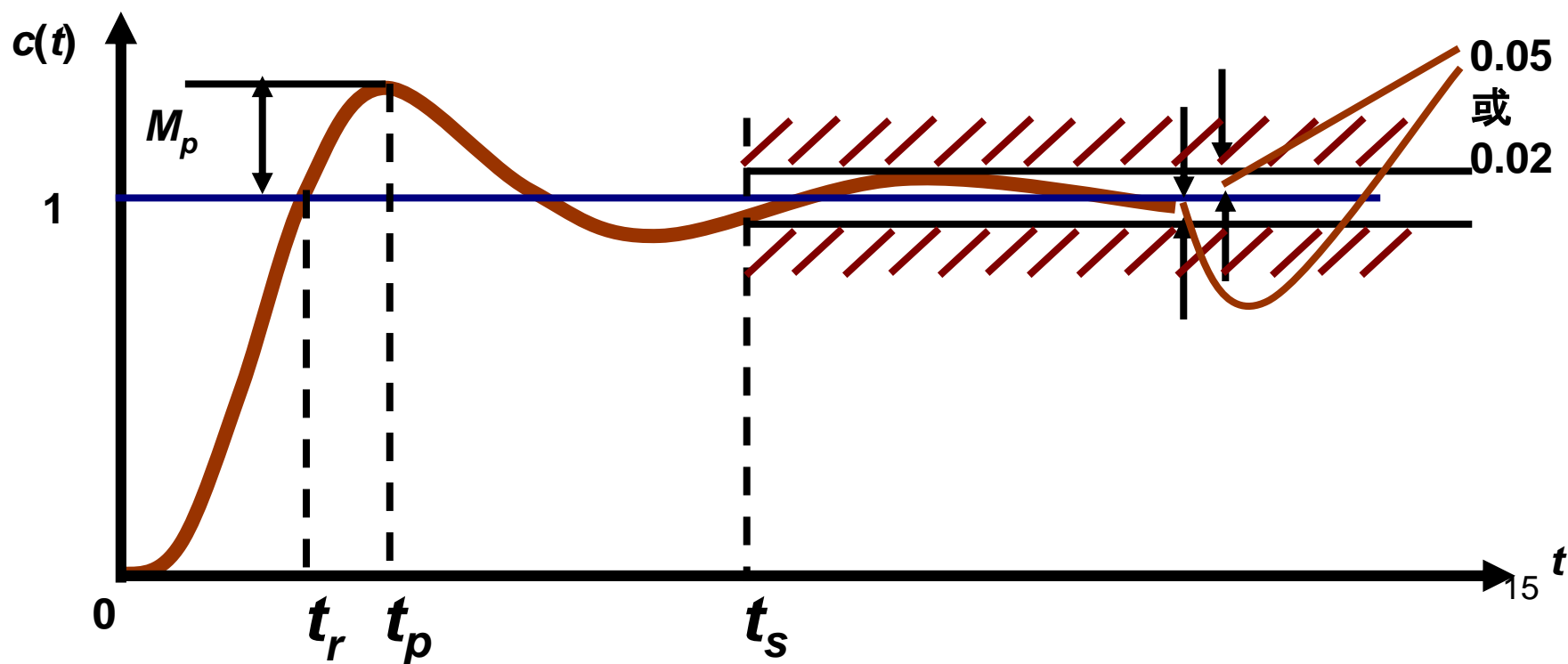
$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - c(t)]$$



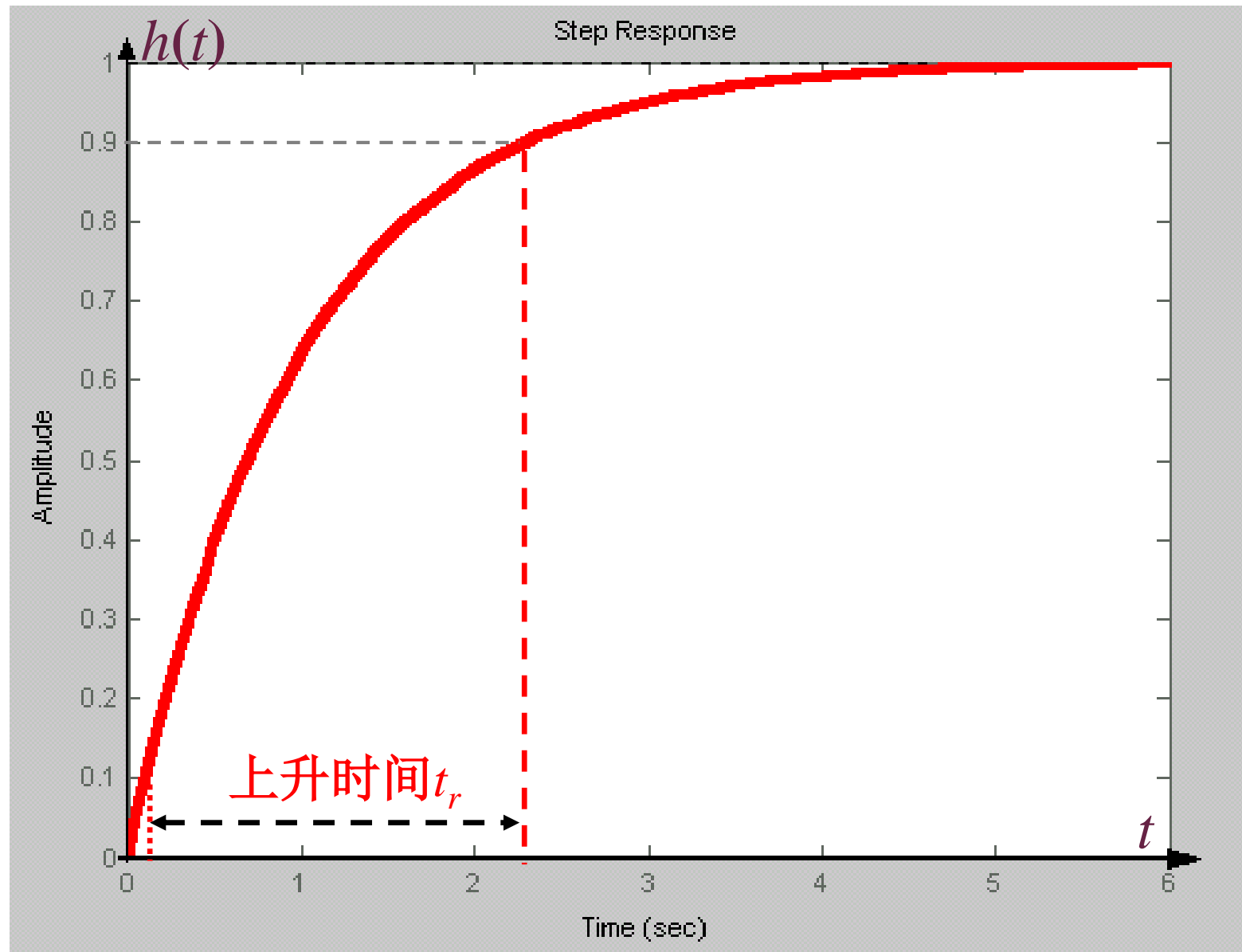
反映系统复现或跟踪输入信号的能力或抗干扰的能力

3.2.3 暂态响应的性能指标

上升时间 t_r : 在系统的动态响应过程中，系统输出量首次变化到稳态值的时间



上升时间 t_r ：无超调时，从稳态值10%到90%所需要的时间。



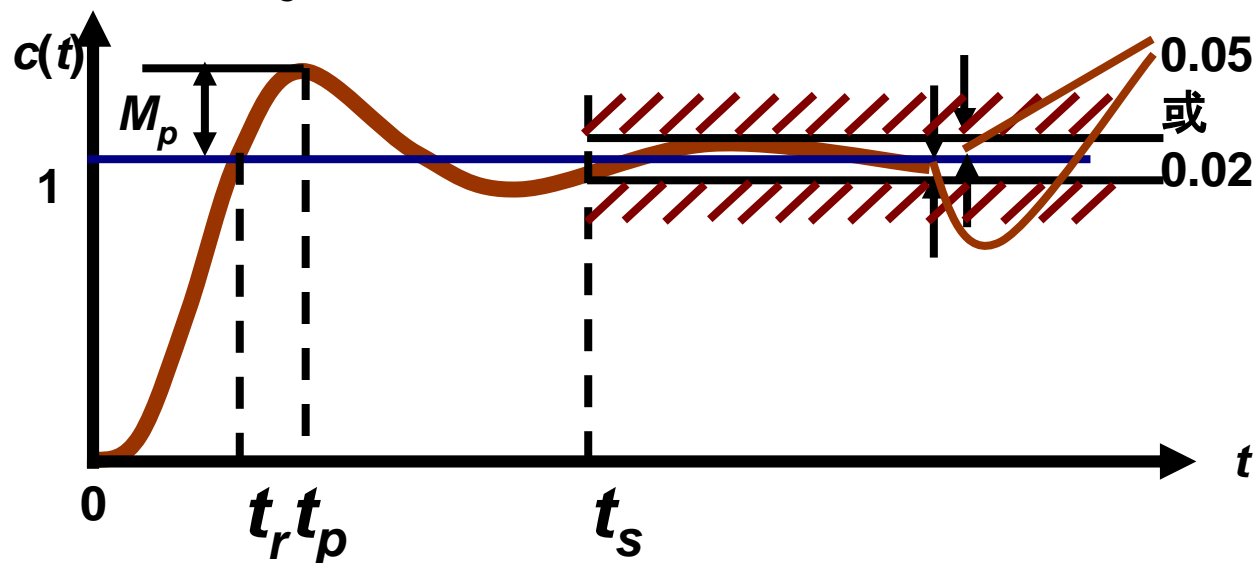
峰值时间 t_p : 在系统的动态响应过程中, 系统输出量第一次达到峰值的时间

调整时间 t_s : 在系统输出量开始进入允许偏差范围内, 并不再超出这个范围的时间

超调量 M_p : 在系统的动态响应过程中, 系统输出量最大值相对于稳态值的偏移量, 即

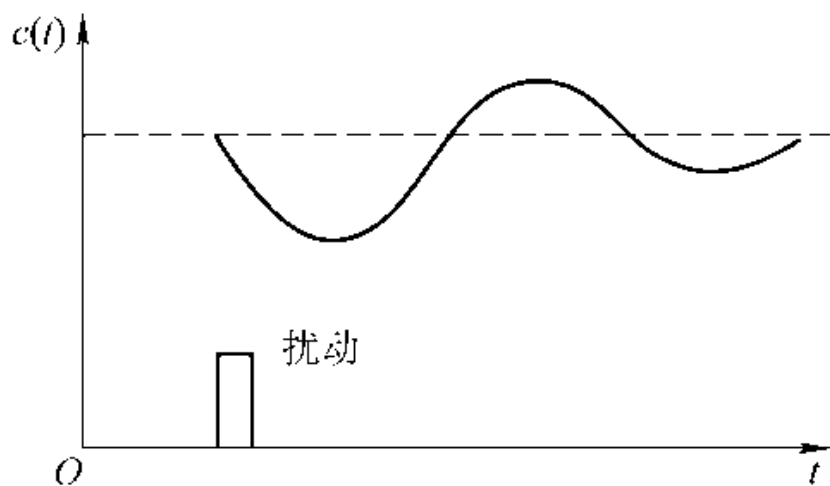
$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\%$$

振荡次数: 在调整时间 t_s 内阶跃响应曲线在稳态值上下的振荡次数

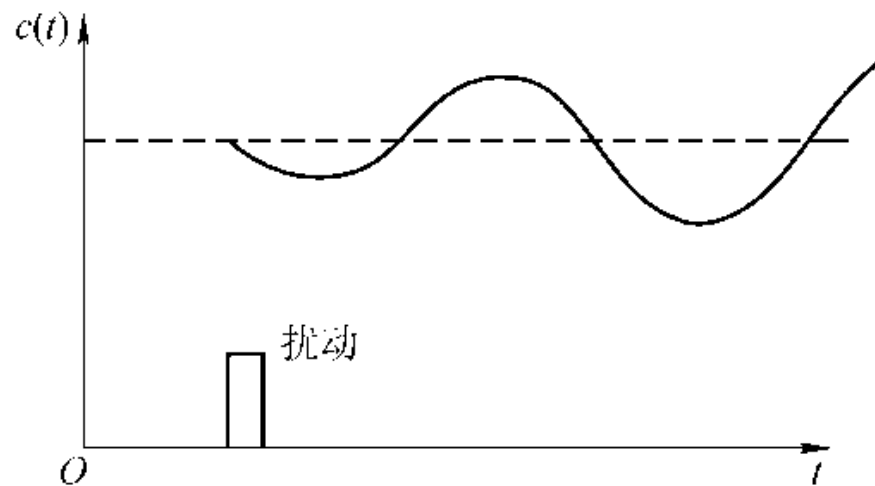


• 3.3 线性定常系统的稳定性

设一线性定常系统原处于某一平衡状态，若它在瞬间受到某一扰动而偏离了原有的平衡状态。当此扰动撤消后，系统借助于自身的调节作用，如能使偏差不断的减小，最后仍能回到原来的平衡状态，则称此系统是稳定的，反之，则称为不稳定。如图所示。



a)



b)

稳定与不稳定系统的响应曲线

3.3.1 稳定性定义

若控制系统在足够小的初始偏差的作用下，其过渡过程随时间的推移，逐渐衰减并趋于零，即具有恢复原平衡状态的能力，则称这个系统是稳定的。否则，称这个系统是不稳定的。

3.3.2 线性定常系统稳定的充分必要条件

线性系统的稳定性只取决于系统自身固有特性，而与输入信号无关。

根据定义输入扰动 $\delta(t)$ ，设扰动响应为 $C_n(t)$ 。如果当 $t \rightarrow \infty$ 时， $C_n(t)$ 收敛到原来的平衡点，即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_n(t) = 0$$

那么，线性系统是稳定的。

3.3.2 线性定常系统稳定的充分必要条件

设 n 阶线性定常系统的微分方程为

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ & = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned} \quad (3-7)$$

在初始条件

$$\begin{cases} c(t_0), & c'(t_0), & \cdots, & c^{(n-1)}(t_0) \\ r(t_0), & r'(t_0), & \cdots, & r^{(m-1)}(t_0) \end{cases}$$

均为已知时，对式(3-7)作拉氏变换，得到

$$\begin{aligned}
& L \left\{ a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \right\} \\
&= L \left\{ b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \right\}
\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned}
& a_0 L \left\{ \frac{d^n c(t)}{dt^n} \right\} + a_1 L \left\{ \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} \right\} + \cdots + a_{n-1} L \left\{ \frac{dc(t)}{dt} \right\} + a_n L \{ c(t) \} \\
&= b_0 L \left\{ \frac{d^m r(t)}{dt^m} \right\} + b_1 L \left\{ \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} \right\} + \cdots + b_{m-1} L \left\{ \frac{dr(t)}{dt} \right\} + b_m L \{ r(t) \}
\end{aligned}$$

利用拉氏变换的微分公式，有

$$L\left\{\frac{d^r x(t)}{dt^r}\right\} = s^r X(s) - s^{r-1}x^{(r-1)}(t_0) - s^{r-2}x^{(r-2)}(t_0) - \cdots - x(t_0)$$

这里， $X(s) = L\{x(t)\}$ 。于是上式展开后有

$$\begin{aligned} & a_0 s^n C(s) + n_0(s) + a_1 s^{n-1} C(s) + n_1(s) + \cdots + a_n C(s) \\ & = b_0 s^m R(s) + m_0(s) + b_1 s^{m-1} R(s) + m_1(s) + \cdots + b_m R(s) \end{aligned}$$

其中

$$C(s) = L\{c(t)\}, \quad R(s) = L\{r(t)\}$$

整理上式, 可得

$$C(s) = \underbrace{\frac{M(s)}{D(s)} R(s)}_{\text{零状态响应部分}} + \underbrace{\frac{N(s)}{D(s)}}_{\text{零输入响应部分}} \quad (3-8)$$

其中

$$\begin{cases} D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n \\ M(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m \\ N(s) = \sum_{k=0}^{m-1} m_k(s) - \sum_{l=0}^{n-1} n_l(s) \end{cases}$$

当考虑稳定性时，在式(3-8)中令 $R(s)=0$ ，得到只在初始状态影响下系统的时间响应(即零输入响应)为

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

结合稳定性的定义，上式表明，可以通过零输入响应的随时间的衰减性的有无来判断系统是否稳定。

一般地，我们可以将 $\mathbf{C}(s)$ 做分母多项式的因式分解表达为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{N(s)}{\prod_i (s - p_i)^{r_i} \prod_k (s^2 + 2\xi_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)} \\ &= \sum_i \frac{A_i^{(1)} s^{r_i-1} + \dots + A_i^{(r_i-1)}}{(s - p_i)^{r_i}} + \sum_k \frac{B_k s + F_k}{s^2 + 2\xi_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2} \end{aligned}$$

这里， A_i, B_k, F_k 是部分分式分解时的待定常数。

于是，下面可依照 $D(s)=0$ 的特征值分布状况来给出零输入响应的计算表达式。

- 若 p_i 为特征方程 $D(s)=0$ 的单根且 p_i 各不相同，有

$$c(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

若系统所有特征根 p_i 的实部均为负值，即 $Re [p_i] < 0$ ，则上式表明零输入响应将衰减到零，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

于是，这样的系统就是稳定的。

• 若特征方程 $D(s)=0$ 只有共轭复根且各不相同，
有 $c(t) = L^{-1}[C(s)] = \sum_k B_k e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \cos(\omega_{nk} \sqrt{1-\xi_k^2} t)$

$$+ \sum_k \frac{F_k - B_k \xi_k \omega_{nk}}{\omega_{nk} \sqrt{1-\xi_k^2}} e^{-\xi_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1-\xi_k^2} t)$$

若所有特征根 $-\xi_k \omega_{nk} \pm j \omega_{nk} \sqrt{1-\xi_k^2}$

的实部均为负值，则零输入响应将衰减到零，即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$$

于是，这样的系统也是稳定的。

反之，若特征根中有一个或多个根具有正实部，则暂态响应将随时间的推移而发散，即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \infty$$

这样的系统就是不稳定的。

总之，线性定常系统稳定的充分必要条件是：
系统所有特征根的实部均小于零，或特征根均在根平面的左半开平面（不包括虚轴的左半平面）。

3.3.3 线性定常系统稳定性的劳斯判据

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots$$

$$+ a_{n-1} s + a_n = a_0 \prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0 \quad (a_0 \neq 0)$$

式中, p_i ($i=1,2,\dots,n$) 是系统的 n 个闭环极点。根据代数方程的基本理论 (韦达定理), 下列关系式成立:

$$\sum_{i=1}^n p_i = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^n p_i p_j = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\prod_{i=1}^n p_i = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

从上式可以导出，系统特征根都具有负实部的必要条件为：

特征方程中各项系数为正数

如果特征方程不满足上式的条件，系统必然非渐近稳定。但满足上式，还不能确定一定是稳定的，因为上式仅是必要条件。下面给出现系统稳定的充分必要条件。

劳斯判据

系统稳定的充要条件：特征方程式的全部系数为正，且由该方程式作出的劳斯表中第一列全部元素都为正。

若不满足，则不稳定

劳斯表中第一列元素符号改变的次数，等于相应特征方程式位于右半 s 平面上根的个数。

令系统特征方程为 $a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots a_{n-1} s + a_n = 0, a_0 > 0$

排劳斯表:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\cdots
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\cdots
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\cdots
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	\cdots	
\vdots					
s^2	d_1	d_2	d_3		
s^1	e_1	e_2			
s^0	f_1				

表中 $b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \dots$ $b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{-a_1}, b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{-a_1}, b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{-a_1}, \dots$

$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \dots$ $c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1}, c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}, c_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{-b_1}, \dots$

表中: 1) 最左一列元素按 s 的幂次排列, 由高到低, 只起标识作用, 不参与计算。

2) 第一, 二行元素, 直接用特征方程式的元素填入。

3) 从第三行起各元素, 是根据前二行的元素计算得到。

劳斯判据的应用

(1) 判断系统的稳定性

例3-1 已知三阶系统特征方程为

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

劳斯阵列为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & a_0 & a_2 & 0 \\ s^2 & a_1 & a_3 & 0 \\ s^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & 0 & \\ s^0 & a_3 & 0 & \end{array}$$

故得出三阶系统稳定的充要条件为各系数大于零，
且 $a_1 a_2 > a_0 a_3$ 。

□

例 3-2 已知系统特征方程如下

$$s^4 + 6s^3 + 12s^2 + 11s + 6 = 0$$

方程无缺项，且系数大于零。列劳斯表：

$$\begin{array}{rcccc}
 s^4 & & 1 & & 12 & 6 \\
 s^3 & & 6 & & 11 & \\
 s^2 & & \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{61}{6} & & 6 & \\
 s^1 & & \frac{455}{61} & & & \\
 s^0 & & 6 & & &
 \end{array}$$

劳斯表中第一列元素大于零，所以系统是稳定的，即其所有特征根均在 s 平面的左半平面。

□

例 3-3 系统特征方程为

$$s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 5s + 6 = 0$$

各项系数均大于零。列劳斯表如下：

s^5	1	2	5
s^4	3	1	6
s^3	$\frac{5}{3}$	3	
s^2	$-\frac{22}{5}$	6	
s^1	$-\frac{174}{11}$	15	
s^0	15		

同乘以 $\frac{5}{2} > 0$

表中第一列各元素符号不完全一致，系统不稳定。
第一列符号改变两次，系统有两个右半平面根。□

例 3-4 系统特征方程

$$s^3 - 4s^2 + 6 = 0$$

该特征方程有一个系数为负的，由劳斯判据可知系统不稳定。但究竟有几个位于右半平面的根，仍需列如下劳斯表：

s^3	1	1
s^2	-4	6
s^1	2.5	
s^0	6	

劳斯表中第一列元素符号改变两次，所以系统有2个右半平面的根。



关于劳斯判据，有两种特殊情况：

1. 劳斯表某一行的第一个元素为零，该行其它元素并不为零。此时，在计算下一行的元素时，有关元素将趋于无穷大，使劳斯表计算无法进行。
2. 劳斯表中某一行元素全为零。全零行的出现表示在 s 平面内存在一些大小相等符号相反的实根或共轭虚根，因此，系统是不稳定的。特别地，虚根可通过构造辅助多项式确定。

例3-5 系统的特征方程为

$$D(s) = s^3 - 3s + 2 = 0$$

试用劳斯判据确定正实数根的个数

解：系统的劳斯表为

s^3	1	-3
s^2	0	2
s^1	∞	
s^0		

第一种特殊情况： 劳斯表中某行的第一列元素为零，而其余各项不为零，或不全为零。

- ① 用一个很小的正数 ε 来代替第一列为零的项，从而使劳斯表继续下去。
- ② 可用因子 $(s+a)$ 乘以原特征方程，其中 a 可为任意正数，再对新的特征方程应用劳斯判据。

s^3	1	-3	∵ $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 时, $b_1 < 0$, 劳斯表中第一列元素符号改变了两次
s^2	$0(\varepsilon)$	2	
s^1	$b_1 = \frac{2+3\varepsilon}{-\varepsilon}$		∴ 系统有两个正根, 不稳定。
s^0	2		

用 $(s+3)$ 乘以原特征方程, 得新的特征方程为:

$$D_1(s) = D(s)(s + 3) = s^4 + 3s^3 - 3s^2 - 7s + 6 = 0$$

s^4	1	-3	6	会得到相同的判断结果
s^3	3	-7		
s^2	-2/3	6		
s^1	20			
s^0	6			

例3-6 设某线性系统的闭环特征方程为

$$D(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4 = 0$$

试用劳斯判据判断系统稳定性。

解： 该系统的劳斯表如下

s^6	1	-2	-7	-4
s^5	1	-3	-4	
s^4	1	-3	-4	
s^3	0	0	0	
s^2				

第二种特殊情况： 劳斯表中某行元素全为零。此时，特征方程中存在关于原点对称的根（实根，共轭虚根或共轭复数根）。对此情况，可作如下处理：

用全零行的上一行的系数构成一个辅助方程，对辅助方程求导，用所得方程的系数代替全零行，继续劳斯表。

s^6	1	-2	-7	-4	
s^5	1	-3	-4		
s^4	1	-3	-4	$\rightarrow F(s) = s^4 - 3s^2 - 4 = 0$	
s^3	4	-6	0	$\leftarrow F'(s) = 4s^3 - 6s$	
s^2	-1.5	-4			
s^1	-16.7	0			
s^0	-4				

由于劳斯表中第一列元素的符号改变了一次， \therefore 系统有一个正根，系统不稳定。通过解辅助方程可求出关于原点对称的根：
 $s_1 = \pm 2$ 和 $s_2 = \pm j$ 。

3.3.4 线性定常系统稳定性的赫尔维茨判据

设系统的特征方程式为

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

以特征方程式的各项系数组成如下行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & a_n \end{vmatrix}$$

赫尔维茨判据：

线性定常系统稳定的充分必要条件是在 $a_0 > 0$ 时，
上述行列式各阶顺序主子式均大于零，即

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

\vdots

$$\Delta_n = \Delta > 0$$

例3-7 系统的特征方程为

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \quad (a_0 > 0)$$

列出行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{vmatrix}$$

由赫尔维茨判据可知，该系统稳定的充分必要条件是：

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$\Delta_3 = \Delta = a_3 \Delta_2 > 0$$

或写成系统稳定的充分必要条件为

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0$$

和

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$



例3-8 二阶系统的特征方程为

$$a_0 s^2 + a_1 s + a_2 = 0$$

列出行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}$$

由Hurwitz判据，系统稳定的充分必要条件为

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_1 a_2 > 0$$

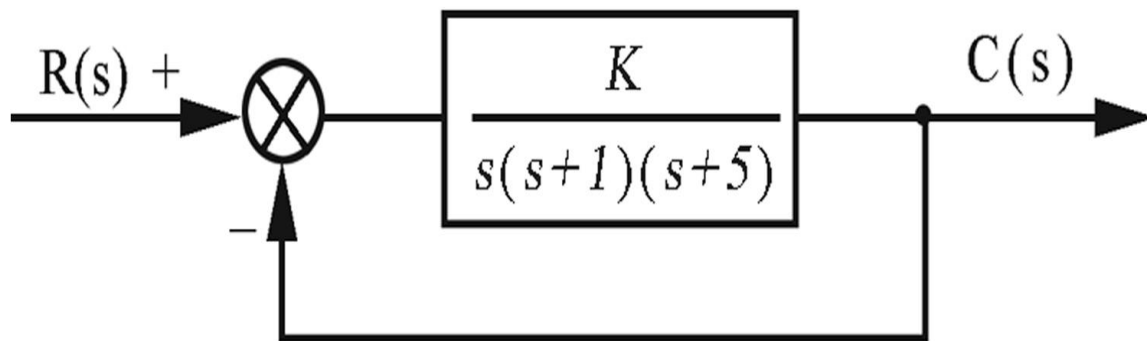
即二阶系统稳定的充分必要条件是其特征方程式的所有系数均大于零。



3.3.5 系统参数对稳定性的影响

应用代数判据不仅可以判断系统的稳定性，还可以用来分析系统参数变量对系统稳定性的影响。

例3-9 系统结构图如下图所示，试确定系统稳定时 K 的取值范围。



解：系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 5s + K}$$

其特征方程式为

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 5s + K = 0$$

列出该特征方程对应的劳斯阵列，有

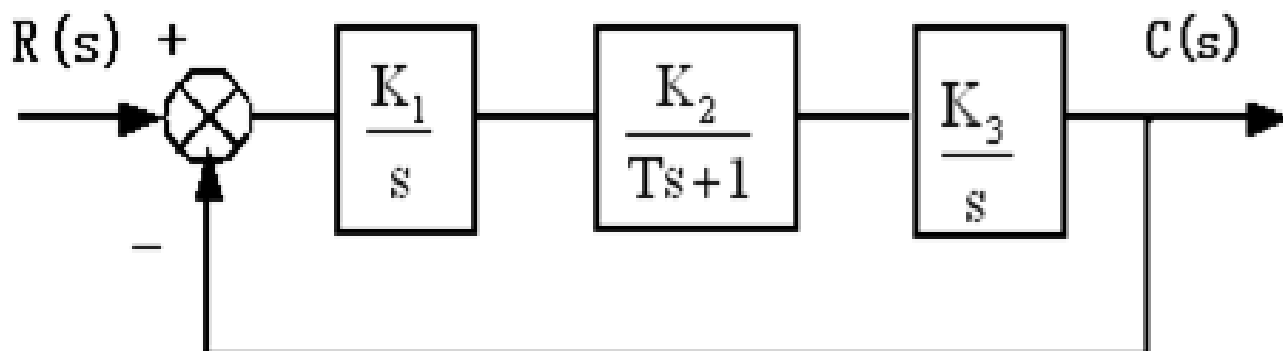
s^3	1	5
s^2	6	K
s^1	$\frac{30 - K}{6}$	0
s^0	K	

按劳斯判据，要使系统稳定的充分必要条件是，
 $K > 0$ 且 $30 - K > 0$ ，故使系统稳定的 K 的取值范围为

$$0 < K < 30$$



例3-10 系统结构图如下图所示，试分析参数 K_1 , K_2 , K_3 和 T 对系统稳定性的影响。



解：系统的闭环传递函数是

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3}{Ts^3 + s^2 + K_1 K_2 K_3}$$

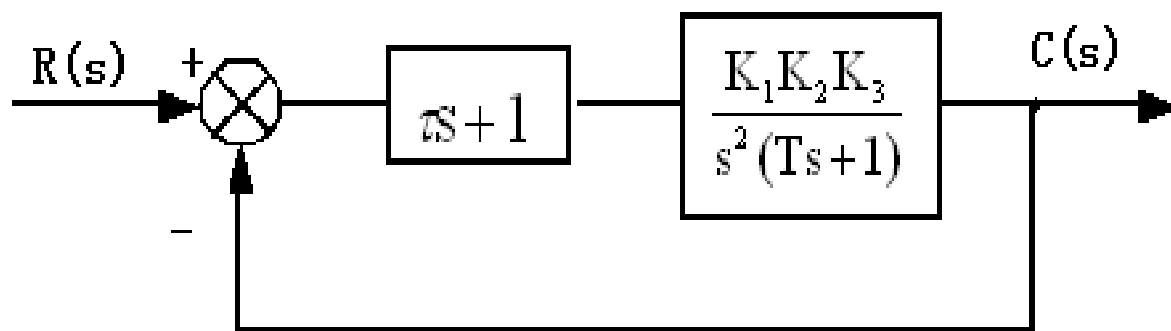
所以闭环系统的特征方程为

$$D(s) = Ts^3 + s^2 + K_1K_2K_3 = 0$$

由于特征方程缺项导致如下劳斯阵列。由劳斯判据知，不论 K_1 ， K_2 ， K_3 和 T 取何值系统总是不稳定的，故称该系统为结构不稳定的。

s^3	T	$K_1K_2K_3$
s^2	1	0
s^1	$-K_1K_2K_3$	0
s^0	0	

欲使闭环系统稳定，须改变系统的结构。比如在原系统的前向通道中引入一比例微分环节，如下图所示。



变结构后系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_1 K_2 K_3 (\tau s + 1)}{s^2 (Ts + 1) + K_1 K_2 K_3 (\tau s + 1)}$$

特征方程为

$$D(s) = Ts^3 + s^2 + K_1 K_2 K_3 \tau s + K_1 K_2 K_3 = 0$$

列其劳斯阵列：

$$\begin{array}{rcl} s^3 & T & K_1 K_2 K_3 \tau \\ s^2 & 1 & K_1 K_2 K_3 \\ s^1 & K_1 K_2 K_3 (\tau - T) & 0 \\ s^0 & K_1 K_2 K_3 & \end{array}$$

系统稳定的充分必要条件为

$$T > 0, \tau > 0, K_1 K_2 K_3 > 0, \tau > T$$

即对于结构不稳定系统，改变系统结构后，通过适当选配参数还是有可能使系统稳定。 \square

3.3.6 稳定性相对性和稳定裕量

稳定性相对性是指系统特征根均在 s 平面的左半平面时，特征值与虚轴的距离会反映出该系统的稳定性的强弱，因此需要用稳定裕量来反映这种稳定性的强弱。

为了能在应用各稳定判据求取稳定裕量，可将 s 平面的虚轴左移 δ ，得到新复平面 s_1 ，即令 $s_1 = s + \delta$ 或 $s = s_1 - \delta$ 得到以 s_1 为变量的新特征方程式 $D(s_1) = 0$ ，再利用代数判据判别新特征方程式的稳定性。若新特征方程式的所有根均在 s_1 平面的左半平面，则说明原系统不但稳定，而且所有特征根均位于 $-\delta$ 线的左侧，这样， δ 就称为系统的稳定裕量。不难理解，这样定义的稳定裕量越大越好，或说鲁棒性强。

例3-11 检验多项式

$$2s^3 + 10s^2 + 13s + 4 = 0$$

是否有根在 s 右半平面，并检验有几个根在垂直线 $s = -1$ 的右边？

解： 1)

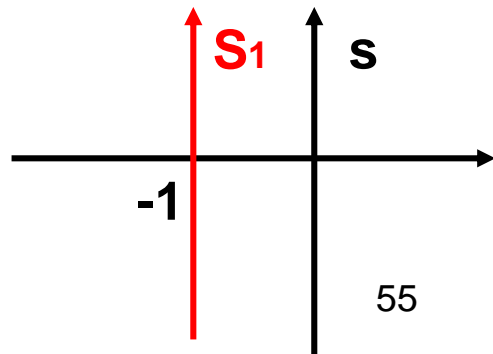
s^3	2	13
s^2	10	4
s^1	12.2	
s^0	4	

劳斯表中第一列元素均为正

\therefore 系统在 s 右半平面没有根，系统是稳定的。

2) 令 $s = s_1 - 1$ 坐标平移，
得新特征方程为

$$2s_1^3 + 4s_1^2 - s_1 - 1 = 0$$



$$\begin{array}{c|cc}
 s_1^3 & 2 & -1 \\
 s_1^2 & 4 & -1 \\
 s_1^1 & -0.5 & \\
 s_1^0 & -1 &
 \end{array}$$

劳斯表中第一列元素不全为正，且第一列元素符号改变了一次，故系统在 s_1 右半平面有一个根。因此，系统在垂直线 $s = -1$ 的右边有一个根。

§ 3.4 系统的稳态误差

3.4.1 误差及稳态误差的定义与分类

控制系统的误差 $e(t)$ ，一般定义为被控量的希望值与实际值之差。即

$$e(t) = \text{被控量的希望值} - \text{被控量的实际值}$$

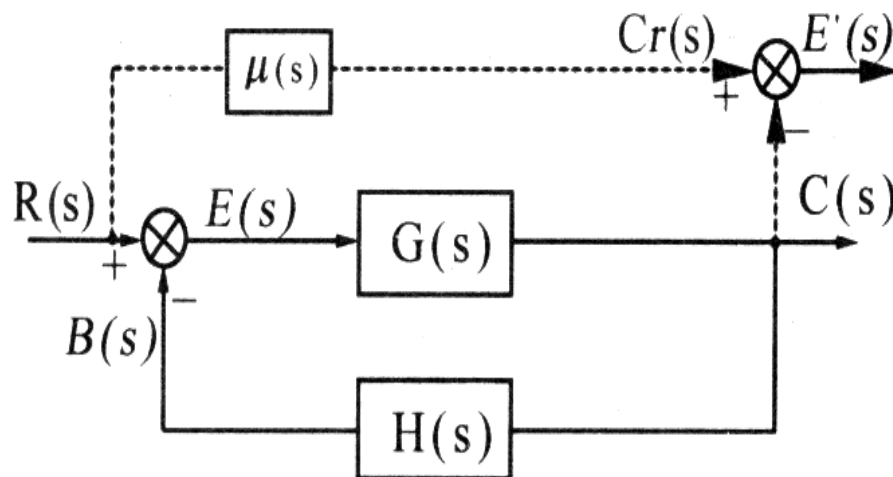
对于下图反馈控制系统，常用误差定义有：

1. 输入端定义

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

2. 输出端定义

$$e'(t) = c_r(t) - c(t)$$



当上图中前馈与反馈为单位传递关系时，即 $H(s)=1, \mu(s)=1$ 时，上述两种定义统一为

$$e(t) = e'(t) = r(t) - b(t)$$

稳态误差的性质与计算关系式:

- (1) 线性系统的误差响应 $e(t)$ 与系统输出响应 $c(t)$ 一样, 也包含暂态分量和稳态分量两部分。
- (2) 对于稳定的线性系统, 暂态分量随着时间的推移逐渐消失, 而我们主要关心的是控制系统进入稳态后的误差, 即系统误差响应的稳态分量——稳态误差记为 e_{ss} 。
- (3) 稳态误差定义为稳定系统的误差响应 $e(t)$ 的终值。当时间 t 趋于无穷时, $e(t)$ 的极限存在, 则稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

3.4.2 线性定常系统的稳态误差分析

根据误差和稳态误差定义，系统误差 $e(t)$ 的拉氏变换函数

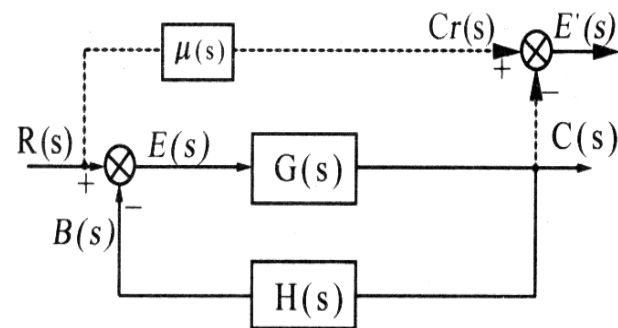
$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - G(s)H(s)E(s)$$

由此，我们有

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

为系统对输入信号的误差传递函数。

$$\Phi_{er}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$



由拉普拉斯变换的终值定理计算稳态误差，则代入 $E(s)$ 表达式得

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

结合前面定义的误差传递函数，有

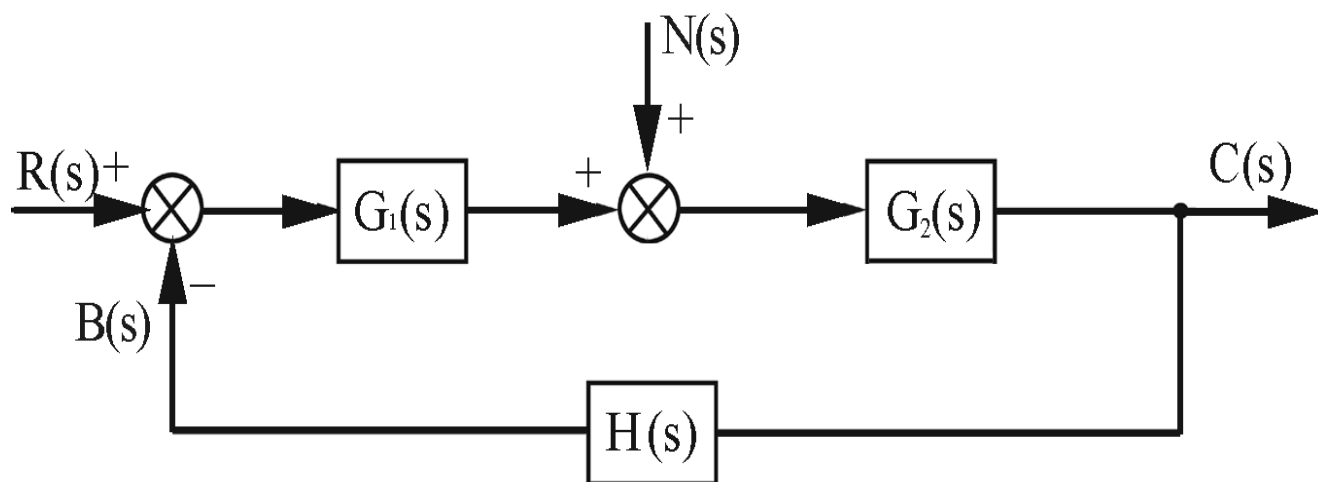
$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

从上面诸式得出两点结论：

1. 稳态误差与系统输入信号 $r(t)$ 有关；
2. 稳态误差与系统结构及参数有关。

3.4.3 稳态误差的计算

线性系统响应满足叠加性，不同输入信号作用于系统产生的误差等于每个输入信号单独作用时产生的误差的加。利用这一点，对于下图所示系统，控制信号 $r(t)$ 和扰动信号 $n(t)$ 同时作用所产生的误差可由两者分别产生的误差和计算。

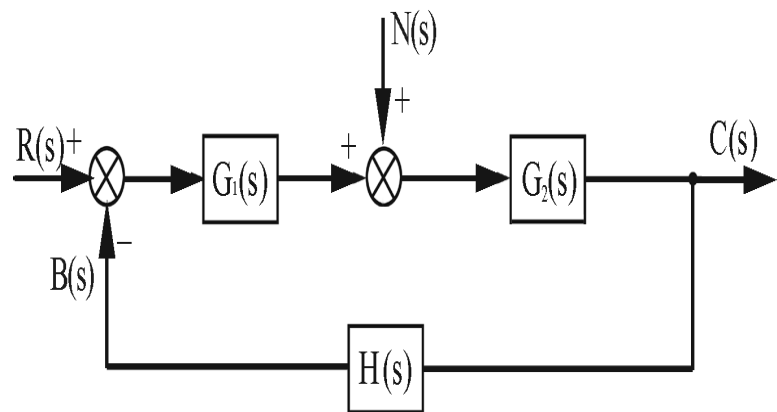


1. 控制信号 $r(t)$ 单独作用下的误差为

$$E_r(s) = R(s) - B(s)$$

$$= R(s) - G_1(s)G_2(s)H(s)E_r(s)$$

$$E_r(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$



由拉普拉斯终值定理，稳态误差 e_{ssr} 为

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

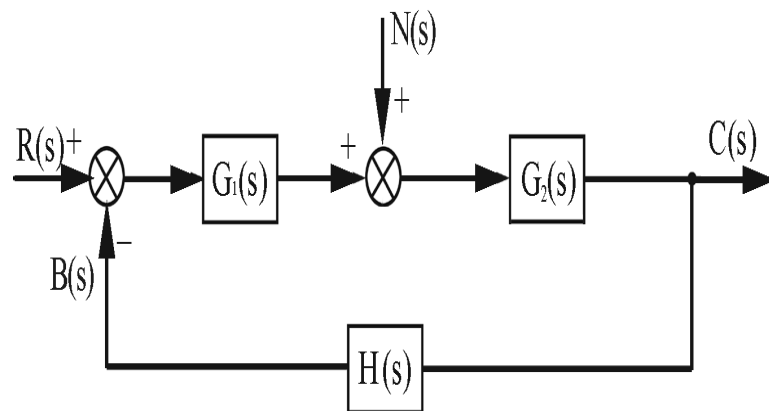
2. 扰动信号单独作用下误差为

$$E_n(s) = -B(s)$$

$$= -H(s)C(s)$$

$$= -H(s) \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

$$= -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$



类似地，基于上式定义

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E_n(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

为系统对扰动的误差传递函数。

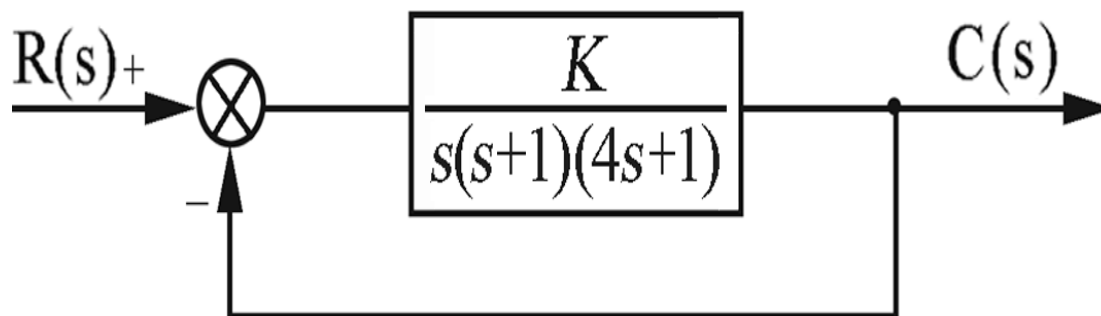
同样由拉普拉斯终值定理，得稳态误差为

$$e_{ssn}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sE_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

综上所述，控制系统在给定信号 $r(t)$ 和扰动信号 $n(t)$ 同时作用下的稳态误差 e_{ss} 就是

$$\begin{aligned} e_{ss} &= e_{ssr} + e_{ssn} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sE_r(s) + \lim_{s \rightarrow 0} sE_n(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s[\Phi_{er}(s)R(s) + \Phi_{en}(s)N(s)] \end{aligned}$$

例3-12 系统结构如下图所示，当输入信号为 $r(t) = 4 \cdot t$ 时，求系统的稳态误差 e_{ss} 。



解 系统只有在稳定的条件下计算稳态误差才有意义，所以应先判别闭环系统的稳定性。为此构造系统的特征方程为

$$D(s) = 4s^3 + 5s^2 + s + K = 0$$

列对应劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 4 & 1 \\ s^2 & 5 & K \\ s^1 & \frac{5-4K}{5} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

由劳斯判据知，该系统稳定条件为

$$0 < K < \frac{5}{4}$$

系统的稳态误差函数为

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \\ &= \frac{s(s+1)(4s+1)}{4s^3 + 5s^2 + s + K} \cdot \frac{4}{s^2} \end{aligned}$$

由终值定理求得稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(s+1)(4s+1)}{4s^3 + 5s^2 + s + K} \cdot \frac{4}{s^2} = \frac{4}{K}$$

计算表明，稳定误差的大小与系统的放大倍数 K 有关。即 K 越大，稳定误差 e_{ss} 越小。

综合上述讨论，我们知道，在例题系统中要减小稳态误差则应增大倍数 K ；但稳定性分析却得出，使系统稳定的 K 只应在0与 $5/4$ 之间。这表明在系统的稳态精度和稳定性对放大倍数 K 的要求为避免矛盾，就必须进行折衷处理 □

3.4.4 利用各类静态误差系数计算给定信号作用下的稳态误差

1. 系统的类型

将系统的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 表示为

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}$$

系统常按**开环传递函数**中所含有的积分环节个数分类。我们把 $v=0, 1, 2, \cdots$ 的系统，分别称为0型，1型，2型， \cdots 系统。

2. 静态位置误差系数 K_p

当系统的输入为单位阶跃信号 $r(t)=1(t)$ 时,

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

于是由误差传递函数公式, 有

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + K_p}$$

其中

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s)$$

定义为系统静态位置误差系数。

特别地，对于不同类型的系统计算其静态位置误差系数，我们有：

对于 $v=0$ 型的系统

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = K$$
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + K}$$

对于 $v=1$ 型或高于1型以上系统

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

3. 静态速度误差系数 K_v

当系统的输入为单位斜坡信号 $r(t) = t \cdot 1(t)$ 时，
则

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

由稳态误差公式，有

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)} = \frac{1}{K_v}$$

其中

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s)$$

被定义为系统静态速度误差系数。

对于0型系统，成立

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty$$

对于1型系统，成立

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K}$$

依定义，对于2型或2型以上系统，成立

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$

4. 静态加速度误差系数 K_a

当系统输入为单位加速度信号 $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot 1(t)$ 时，即

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

则系统稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{s^3} \\ &= \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)} = \frac{1}{K_a} \end{aligned}$$

其中

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$$

被定义为系统静态加速度误差系数。

对于0型系统，成立

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

对于1型系统，成立

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = 0$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \infty$$

对于2型系统，成立

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^2 (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{K}$$

依定义，对于2型以上系统，成立

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^v (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \cdots (T_n s + 1)} = \infty$$

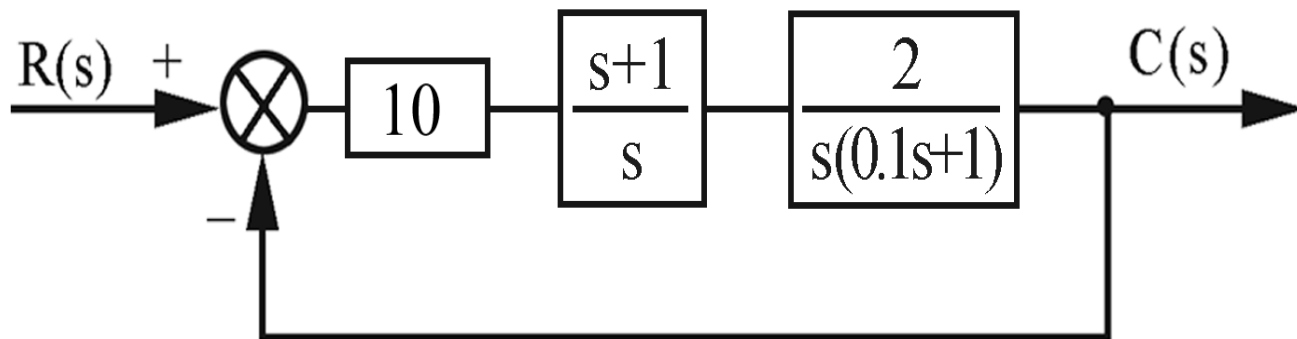
$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} = 0$$

这里， $v > 2$ 的正整数。

表3-1 各种输入下各型系统的稳态误差

输入信号	稳态误差					
	0型系统		1型系统		2型系统	
单位阶跃	$\frac{1}{1 + K_p}$		0		0	
单位斜坡	∞		$1 / K_v$		0	
单位加速度	∞		∞		$1 / K_a$	

例3-13 系统结构如下图所示，求当输入信号 $r(t)=2t+t^2$ 时，系统的稳态误差 e_{ss} 。



解：首先判别闭环系统的稳定性。由开环传递函数知，闭环特征方程为

$$D(s) = 0.1s^3 + s^2 + 20s + 20 = 0$$

根据劳斯判据知闭环系统稳定。

其次求稳态误差 e_{ss} ，因为开环系统为2型系统，有

$$r_1(t) = 2 \times t, \quad K_v = \infty, \quad e_{ss1} = \frac{2}{K_v} = 0$$

$$r_2(t) = 2 \times \frac{1}{2} t^2, \quad K_a = 20, \quad e_{ss2} = \frac{2}{K_a} = 0.1$$

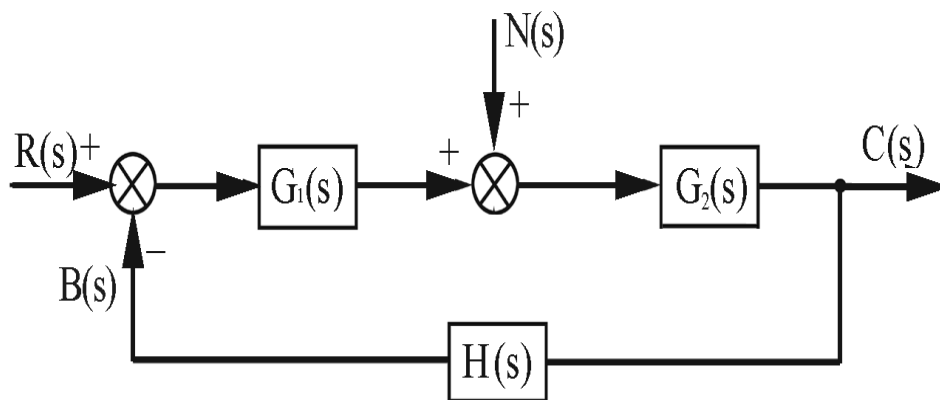
最后根据线性系统的齐次性和叠加性，故系统当输入信号为 $r(t) = 2t + t^2$ 时的稳态误差是

$$e_{ss} = e_{ss1} + e_{ss2} = 0 + 0.1 = 0.1$$

□

3.4.5 干扰信号作用下的稳态误差与系统结构的关系

扰动信号 $n(t)$ 作用下的系统结构如下图所示



扰动信号 $n(t)$ 作用下的误差函数为

$$E_n(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

于是，稳态误差

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_n(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

若 $\lim_{s \rightarrow 0} G_1(s)G_2(s)H(s) \gg 1$ ，则上式可近似为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) \approx \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-1}{G_1(s)} N(s)$$

由上可得，干扰信号作用下产生的稳态误差 e_{ssn} 除了与干扰信号的形式有关外，还与干扰作用点之前(干扰点与误差点间)的传递函数的结构及参数有关，但与干扰作用点之后的传递函数无关。

3.4.6 改善系统稳态精度的途径

从稳态误差分析可知，以下途径可以改善系统的稳态精度：

- * 1. 提高系统的型号或增大系统开环增益，可以保证系统对信号的跟踪能力。但同时会带来系统稳定性变差，甚至导致不稳定。
- * 2. 增大误差信号与扰动作用点之间前向通道的开环增益或积分环节个数，可以降低扰动信号引起的稳态误差。但同样也有稳定性问题。
- * 3. 采用复合控制，即将反馈控制与扰动信号的前馈或与给定信号的顺馈相结合。

3.4.7 系统的动态误差系数

设某个系统的误差传递函数 $\Phi_{er}(s)$ 给定，我们想要了解参考输入的各动态成分将如何影响误差函数的动态特性。为此，将误差传递函数在 $s=0$ 的邻域内如下展开为泰勒级数：

$$\Phi_{er}(s) = \Phi_{er}(0) + \frac{1}{1!} \dot{\Phi}_{er}(0)s + \frac{1}{2!} \ddot{\Phi}_{er}(0)s^2 + \dots$$

于是，误差函数与参考输入间成立

$$E(s) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^i \Phi_{er}(s)}{ds^i} \right|_{s=0} \cdot s^i \right) R(s)$$

对上式进行逆拉氏变换，误差信号与参考输入信号间的如下时间关系成立

$$\begin{aligned} e(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \left. \frac{d^i \Phi_{er}(s)}{ds^i} \right|_{s=0} \cdot r^{(i)}(t) \\ &= \frac{1}{K_0} r(t) + \frac{1}{K_v} \dot{r}(t) + \frac{1}{K_a} \ddot{r}(t) + \dots \end{aligned}$$

由上式，如果将 $r(t)$ ， $\dot{r}(t)$ ， $\ddot{r}(t)$ 分别视为广义的位置信号，速度信号，加速度信号的话，参数 K_0 ， K_v ， K_a 就分别反映了这些信号成分在误差信号中的作用。为此，称 K_0 ， K_v ， K_a 分别为动态位置误差系数，动态速度误差系数和动态加速度误差系数。

例3-15 设单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(2s + 1)}$$

试求：

- (1) 输入信号为 $r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ 时的系统动态误差；
- (2) 输入信号为 $r(t) = \sin 2t$ 时的动态误差。

解：系统的误差传递函数为

$$\begin{aligned}\Phi_{er}(s) &= \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s + 2s^2}{10 + s + 2s^2} \\ &= 0.1s + 0.19s^2 - 0.039s^3 + \dots \\ &= \frac{1}{\infty} + \frac{1}{10}s + \frac{1}{5.26}s^2 + \frac{1}{-25.64}s^3 + \dots\end{aligned}$$

系统的各动态误差系数为

$$K_0 = \infty, \quad K_1 = 10, \quad K_2 = 5.26, \quad K_3 = -25.64, \quad \dots$$

(1) 输入信号 $r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ 时的系统动态误差为

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{\infty} r(t) + \frac{1}{10} \dot{r}(t) + \frac{1}{5.26} \ddot{r}(t) + \frac{1}{-25.64} \dddot{r}(t) + \dots \\ &= 0.1(a_1 + 2a_2 t) + 0.38a_2 + 0 \end{aligned}$$

(2) 输入信号 $r(t) = \sin 2t$ 时的动态误差为

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{\infty} r(t) + \frac{1}{10} \dot{r}(t) + \frac{1}{5.26} \ddot{r}(t) + \frac{1}{-25.64} \dddot{r}(t) + \dots \\ &= 0.2 \cos(2t) - 0.76 \sin(2t) + \dots \\ &\doteq 0.786 \sin(2t - 14.74^\circ) \end{aligned}$$

□

§ 3.5 一阶线性定常系统的时域响应

3.5.1 一阶线性定常系统的数学模型

一阶常微分方程描述的系统为一阶系统，其传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

其中, T 称为该一阶系统的时间常数, K 称为系统增益。

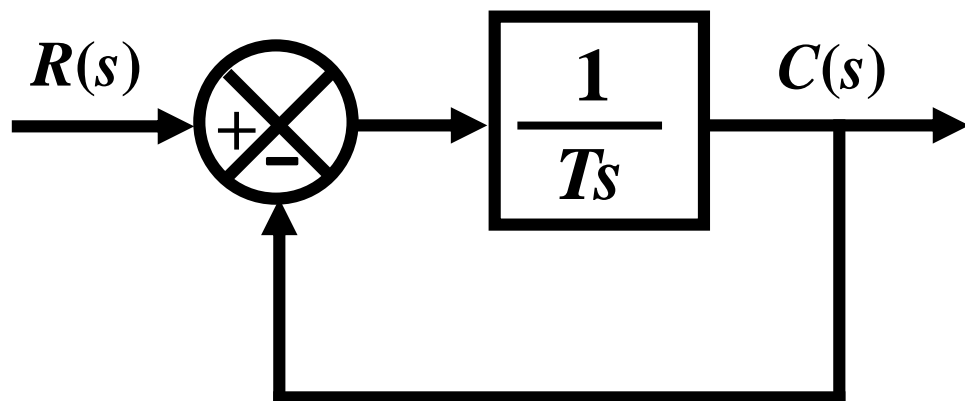
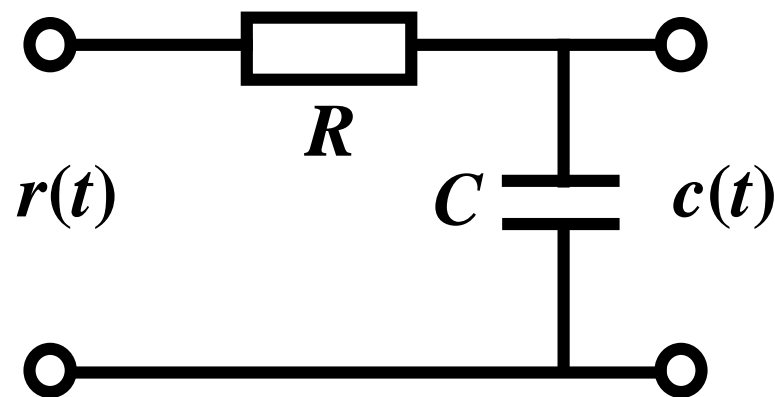
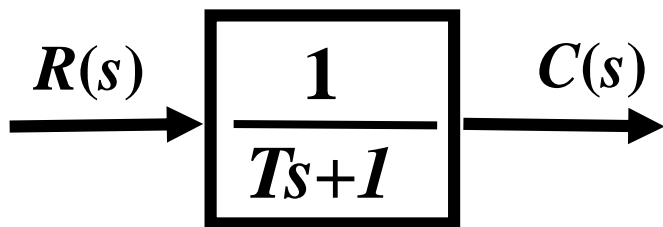
RC网络

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

$T=RC$, 时间常数。

其典型传递函数及结构图为：

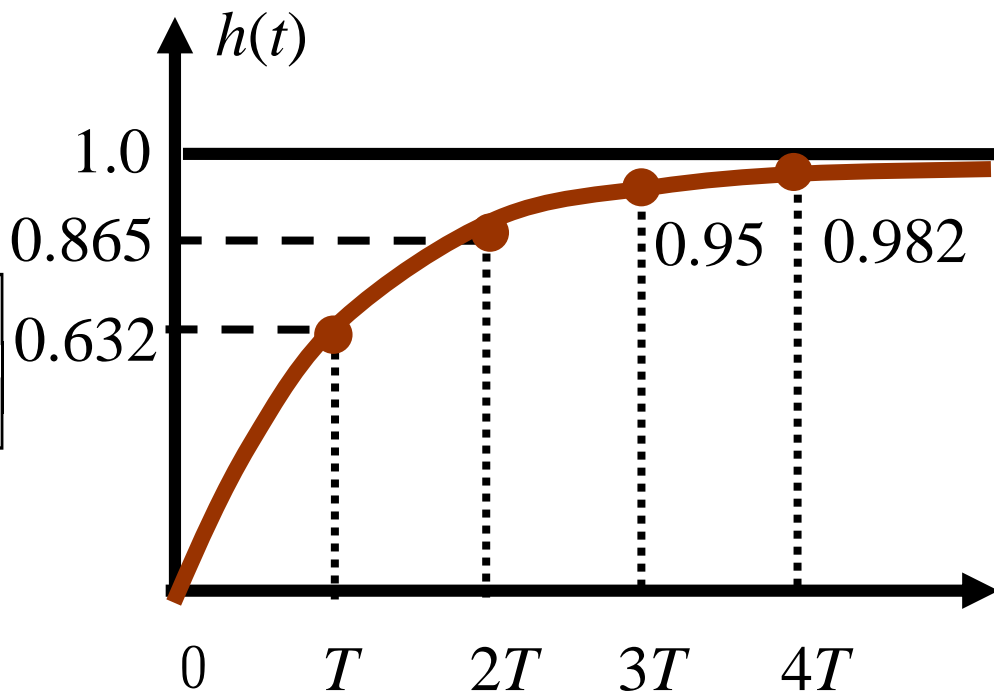
$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$



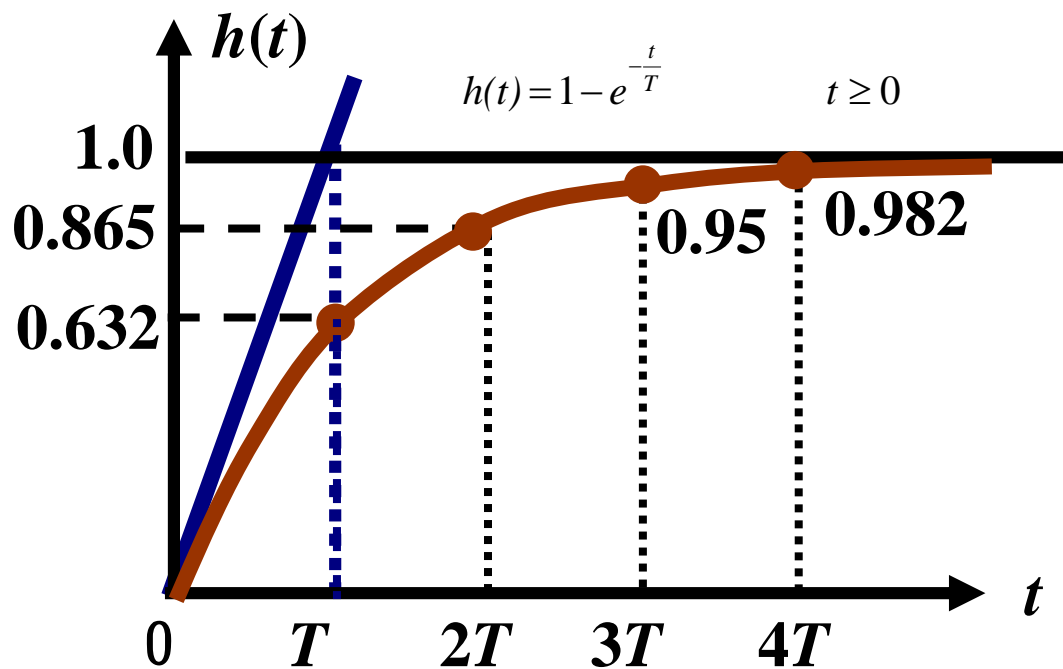
3.5.2 一阶系统的单位阶跃时间响应

当 $r(t)=1(t)$ 时，一阶LTI系统的输出 $c(t)$ 称为单位阶跃响应，记作 $h(t)$ 。

$$\begin{aligned} h(t) &= L^{-1}[C(s)] = L^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1}R(s)\right] \\ &= L^{-1}\left[\frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}\right] = L^{-1}\left[\frac{K}{s} - \frac{KT}{Ts+1}\right] \\ &= K - Ke^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$



单位阶跃响应曲线



一阶系统响应具备两个重要的特点：

- ①可以用时间常数 T 去度量系统输出量的数值。
- ②响应曲线的初始斜率等于 $1/T$ 。

T 反映了系统的惯性。

T 越小，惯性越小，响应快，

T 越大，惯性越大，响应慢。

3.5.3 一阶系统的阶跃响应的时域性能指标

1. **调整时间 t_s** 经过时间 $3T \sim 4T$ ，响应曲线已达稳态值的95%~98%，可以认为其调整过程已完成，故一般取 $t_s = (3 \sim 4)T$ 。
2. **稳态误差 e_{ss}** 系统的实际输出 $h(t)$ 在时间 t 趋于无穷大时，接近于输入值，即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} [c(t) - r(t)] = 0$$

3. **超调量 M_p** 一阶系统的单位阶跃响应为非周期响应，故系统无振荡、无超调， $M_p = 0$ 。

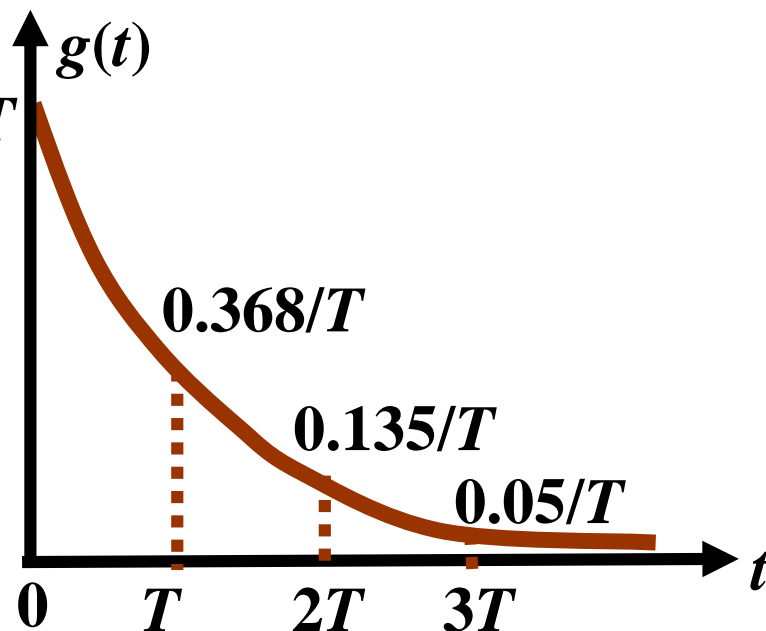
3.5.4 一阶系统的单位脉冲响应

当输入信号 $r(t) = \delta(t)$ 时，系统的输出称为单位脉冲响应，记为 $g(t)$ 。当 $r(t) = \delta(t)$ ，即 $R(s) = 1$ 时，有

$$L\{g(t)\} = G(s) \cdot R(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad 1/T$$

故

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}\left[\frac{K}{Ts + 1}\right] \\ &= \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}, \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

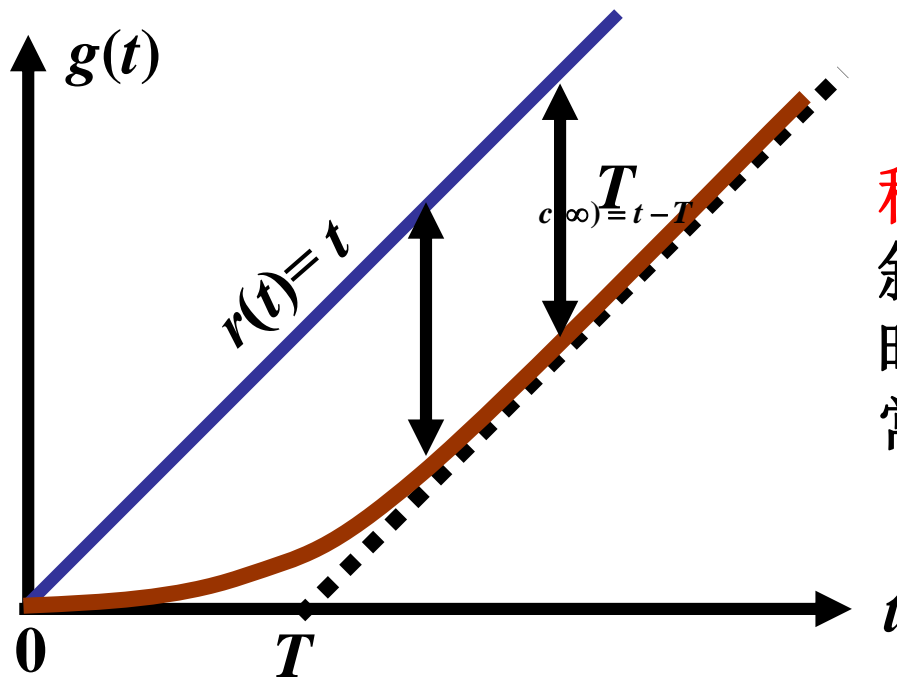


3.5.5 一阶系统的单位斜坡响应

$$r(t) = t$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + 1/T}$$

$$g(t) = t - T + Te^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$



稳态响应是一个与输入斜坡函数斜率相同但在时间上迟后了一个时间常数 T 的斜坡函数。

§ 3.6 二阶系统的时域响应

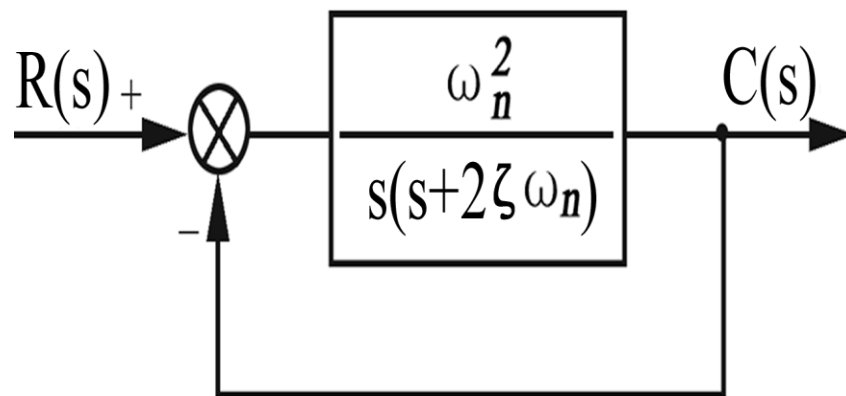
3.6.1 二阶系统的数学模型

典型二阶系统的结构图如右图所示，其闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

或

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$



其中

ξ ——系统的阻尼比;

ω_n ——系统的无阻尼自然振荡角频率;

$T = \frac{1}{\omega_n}$ ——系统振荡周期;

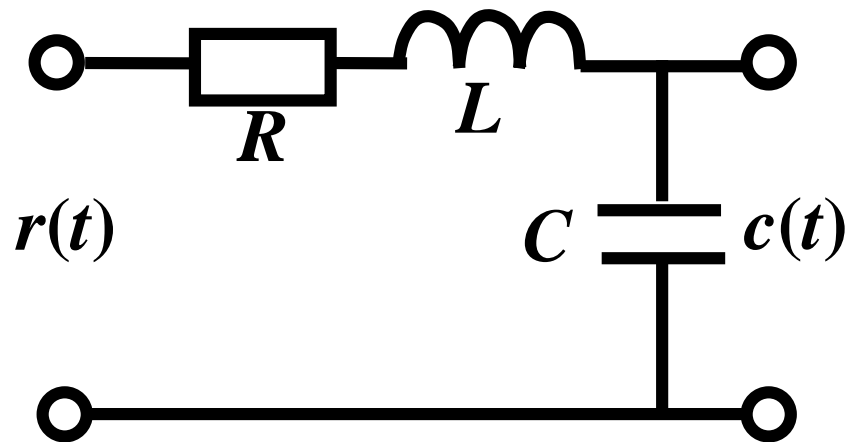
系统的闭环特征多项式方程为

$$D(s) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

特征根为

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

例: RLC 电路



微分方程式为:

$$LC \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + RC \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} \Big|_{\text{零初条件}} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$T = \sqrt{LC} \quad \omega_n = 1/T \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

对于不同的二阶系统，阻尼比和无阻尼振荡频率的含义是不同的。

二阶系统的闭环极点

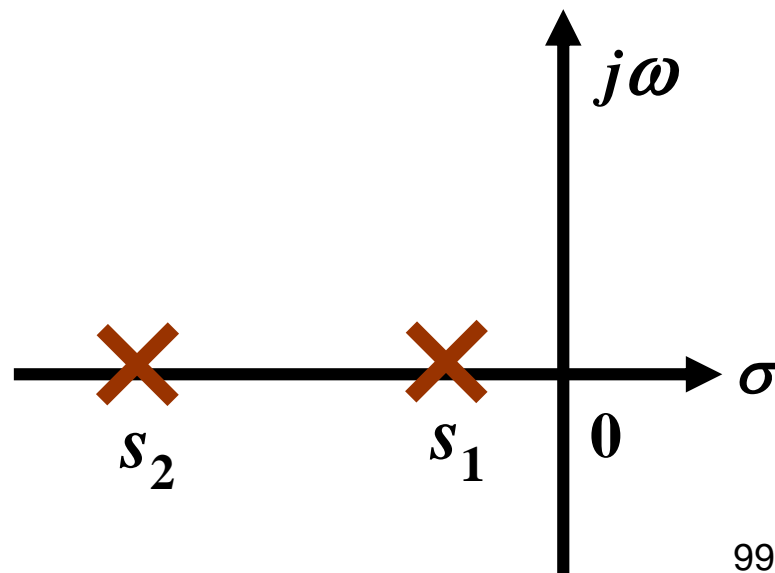
二阶系统的闭环特征方程，即

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

其两个特征根为： $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$

上述二阶系统的特征根表达式中，随着阻尼比 ξ 的不同取值，特征根有不同类型的值，或者说在 s 平面上有不同的分布规律。

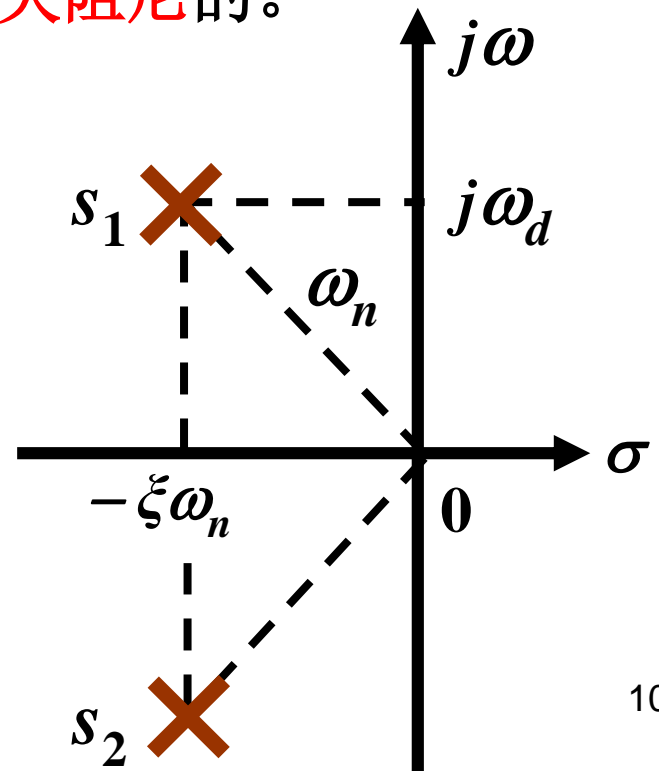
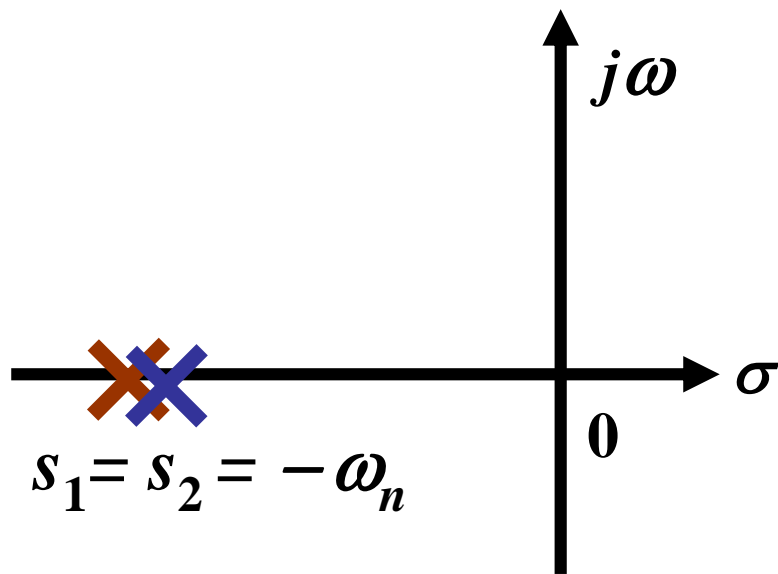
(1) $\xi > 1$ 时，特征根为一对不等值的**负实根**，位于 s 平面的负实轴上，使得系统的响应表现为**过阻尼**的。



$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

(2) $\xi=1$ 时，特征根为一对等值的负实根，位于s平面的负实轴上，使得系统的响应表现为**临界阻尼**的。

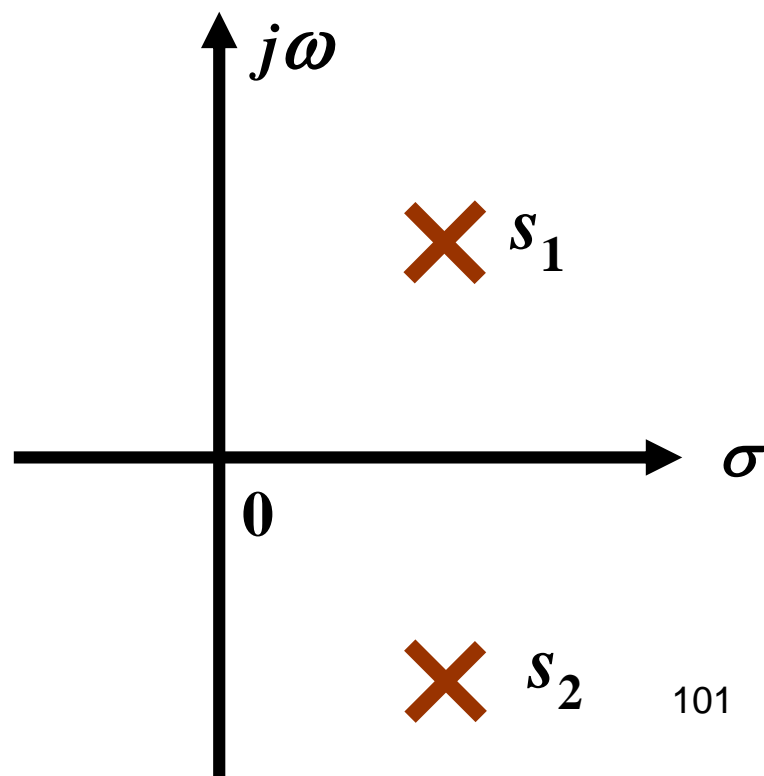
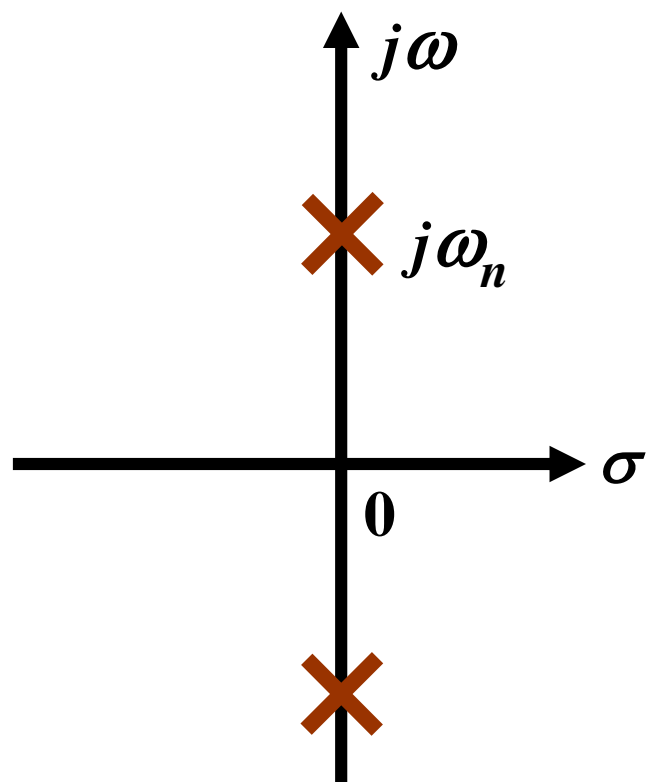
(3) $0 < \xi < 1$ 时，特征根为一对具有负实部的共轭复根，位于s平面的左半平面上，使得系统的响应表现为**欠阻尼**的。



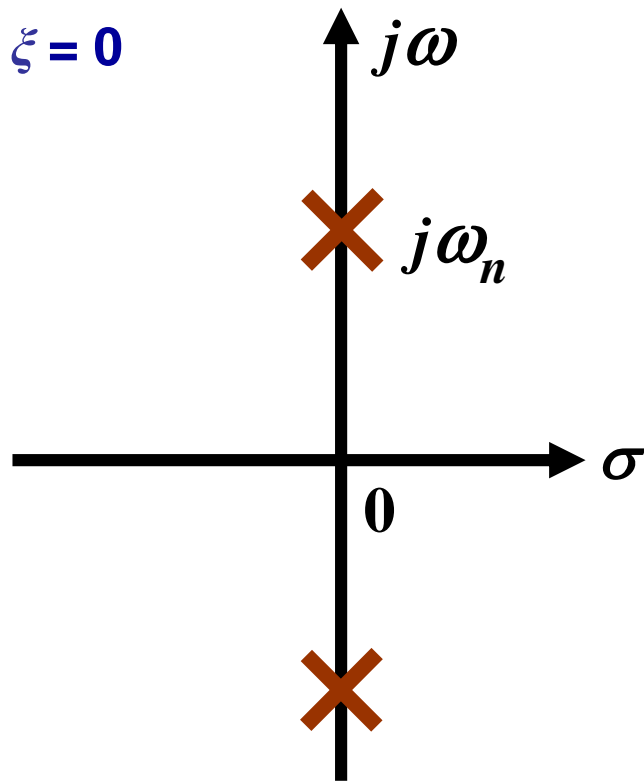
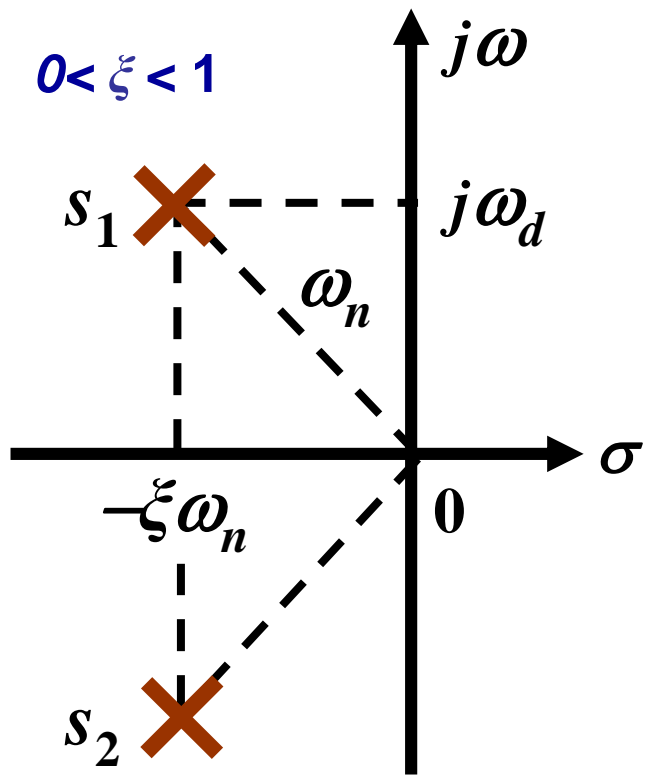
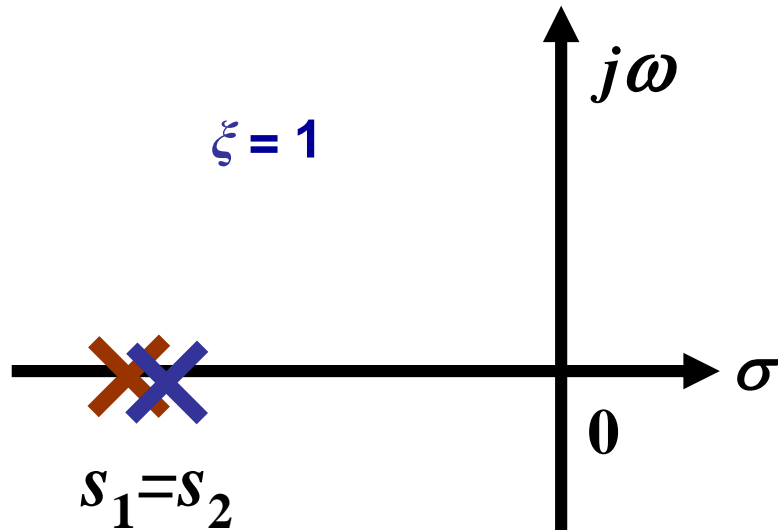
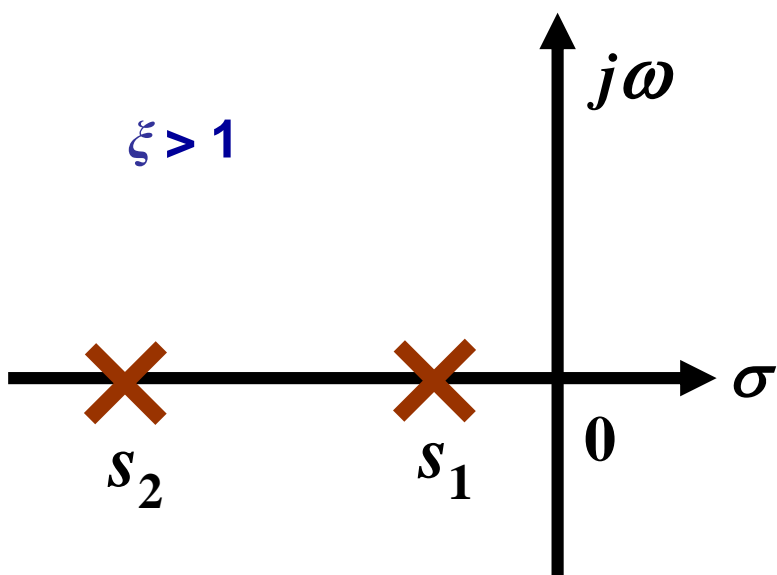
$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

(4) $\xi=0$ 时, 特征根为一对幅值相等的虚根, 位于 s 平面的虚轴上, 使得系统的响应表现为**无阻尼的等幅振荡**过程。

(5) $\xi < 0$ 时, 特征根位于 s 平面的右半平面, 使得系统的响应表现为幅值随时间增加而**发散**。



阻尼比取不同值时，二阶系统根分布



3.6.2 二阶系统的单位阶跃响应

1. 当 $\xi > 1$ 时，称其为**过阻尼状态**，系统有两个不相等的负实根，两个不相等的负实根为

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

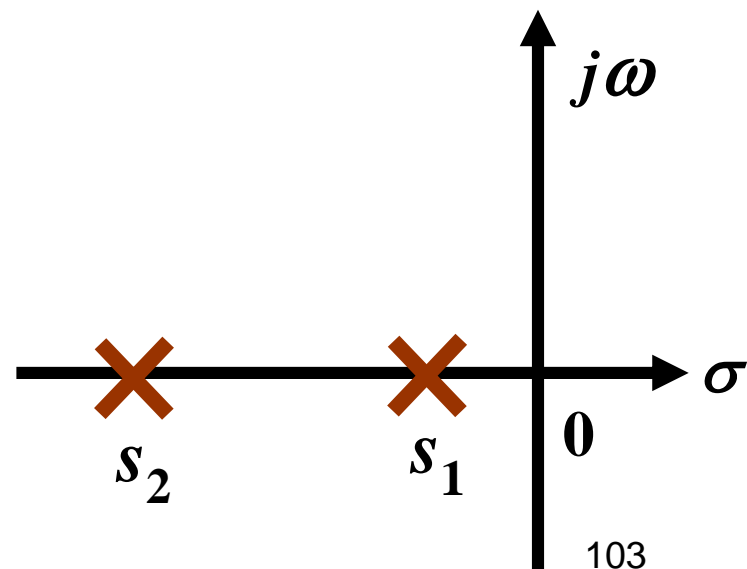
$$C(s) = \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)} = \frac{w_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{(s-s_1)} + \frac{A_2}{(s-s_2)}$$

其中，

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = 1$$

$$A_1 = \lim_{s \rightarrow s_1} (s - s_1)C(s) = \frac{-1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

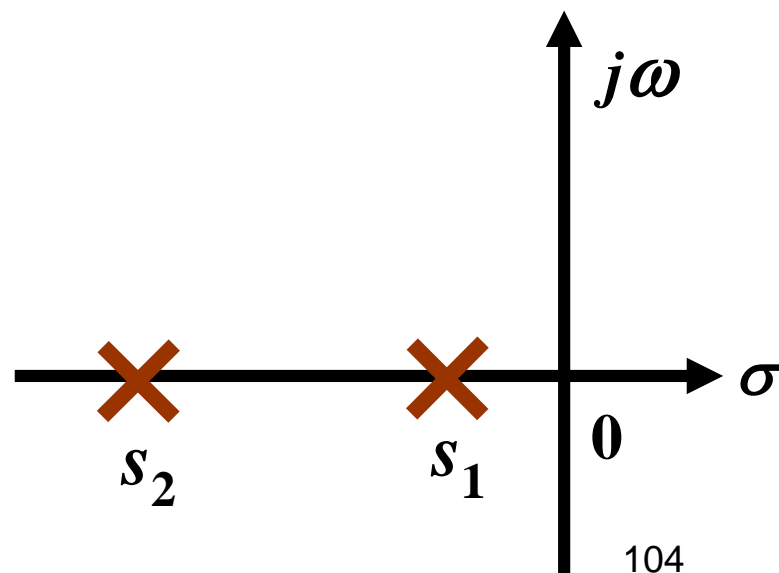
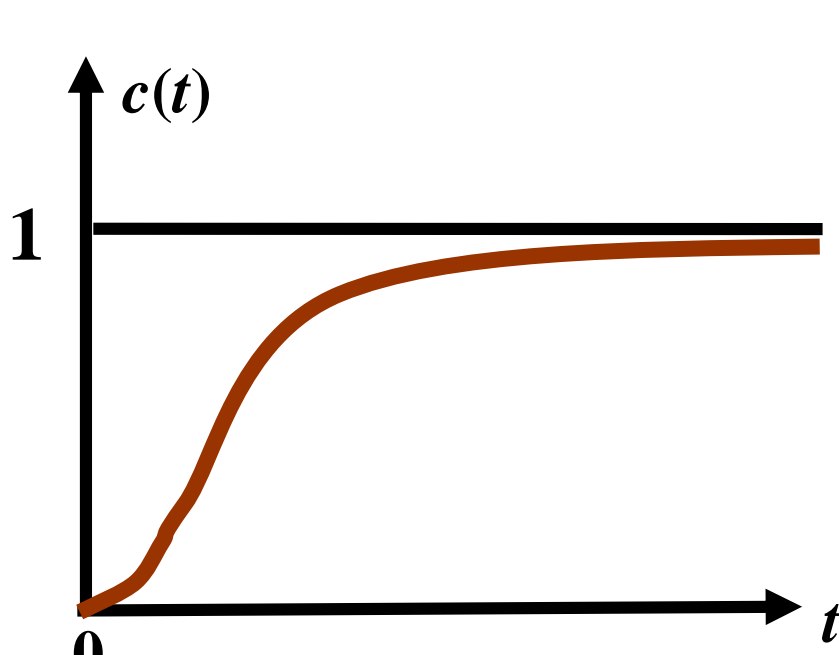
$$A_2 = \lim_{s \rightarrow s_2} (s - s_2)C(s) = \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}$$



于是，单位阶跃响应为

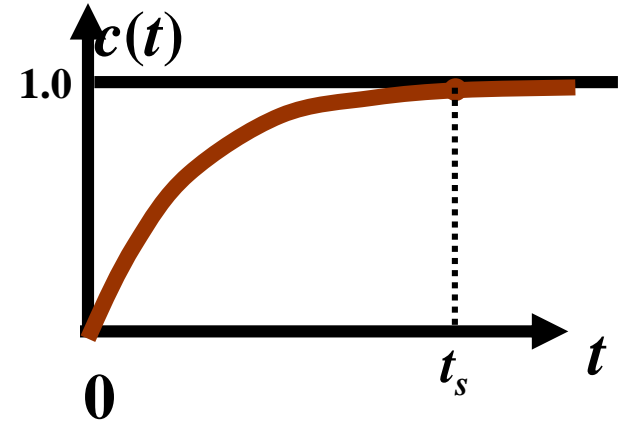
$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{1}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} e^{s_1 t} - \frac{1}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} e^{s_2 t} \right]$$

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$



特别是，当 $\xi \gg 1$ 时，

$$\begin{aligned} c(t) &\approx 1 - e^{s_1 t} \\ &= 1 - e^{(-\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})t} \end{aligned}$$



过阻尼时的单位阶跃响应曲线

当 $\xi > 1.25$ 时，系统的过渡过程时间可近似为

$$t_s = (3 \sim 4) \frac{1}{s_1}$$

而系统的超调量为

$$M_p = 0$$

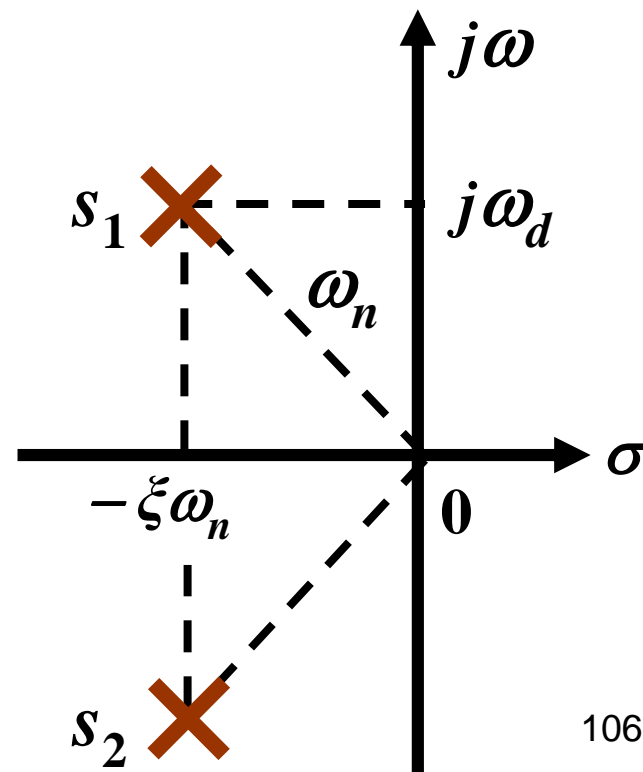
2. 当 $0 < \xi < 1$ 时，称其为欠阻尼状态系统有一对实部为负的共轭复根，即

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -\xi\omega_n \pm j\omega_d \end{aligned}$$

其中，

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

称为阻尼振荡角频率。



当 $0 < \xi < 1$ 时，系统的单位阶跃响应

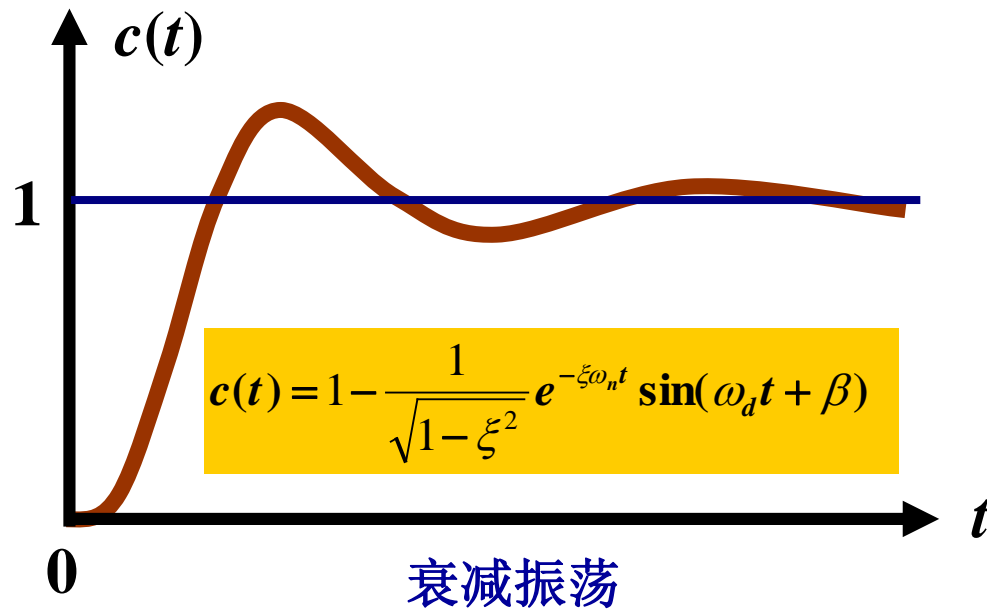
$$C(s) = \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s + \xi w_n}{(s + \xi w_n)^2 + w_d^2} - \frac{\xi w_n}{(s + \xi w_n)^2 + w_d^2}$$

$$c(t) = 1 - e^{-\xi \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \omega_d t \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \quad (t \geq 0)$$

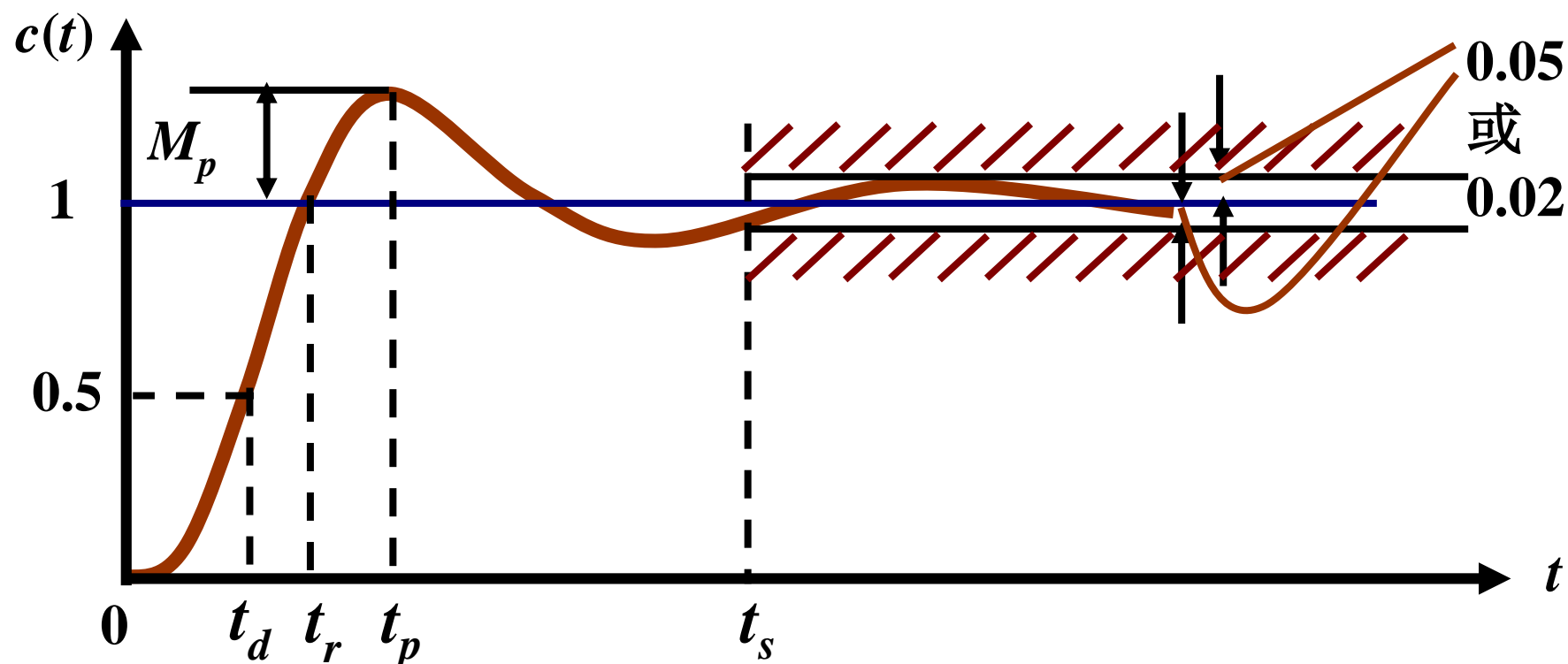
式中

$$\beta = \arctan \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$



欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应由两部分组成：**稳态分量**为1，表明系统在 $1(t)$ 作用下不存在稳态位置误差；**瞬态响应**是阻尼正弦项，其振荡频率为**阻尼振荡频率** ω_d ，而其幅值则按指数曲线衰减，两者均由参数 ξ 和 ω_n 决定。

系统的单位阶跃响应的暂态特性指标



用 t_r, t_p, M_p, t_s 四个性能指标来衡量瞬态响应的好坏。

(1) **上升时间 t_r** ：从零上升至**第一次**到达稳态值所需的时间，是系统响应速度的一种度量。 t_r 越小，响应越快。

$$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \Big|_{t = t_r} = 1$$

$$\sin(\omega_d t + \beta) \Big|_{t=t_r} = 0$$

$$\omega_d t_r + \beta = k\pi \quad (k = 1)$$

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

(2) **峰值时间 t_p** ：响应超过稳态值，到达第一个峰值所需的时间。

$$\frac{dc(t)}{dt} \Big|_{t=t_p} = 0$$

$$\frac{\xi \omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) - \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \beta) = 0$$

$$\frac{\omega_n e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = k\pi$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

(3) **超调量** M_p : 响应曲线偏离阶跃曲线最大值, 用百分比表示。

$$M_p = \left| \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \right| \times 100\%$$

$$= \left| -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \beta) \right| \times 100\%$$

$$\text{代入 } t_p \rightarrow M_p \% = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\pi} \times 100\%$$

M_p 只是 ξ 的函数，其大小与自然频率 ω_n 无关。 $\xi \downarrow \rightarrow M_p \uparrow$

(4) **调节时间** t_s ：响应曲线衰减到与稳态值之差不超过5%所需要的时间。

$$|h(t) - h(\infty)| \leq \Delta \times c(\infty) \quad (t \geq t_s)$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta) \right| \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

$$|\sin(\omega_d t + \beta)| \leq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \leq \Delta \quad (t \geq t_s)$$

$$t_s = \frac{-\ln \Delta - \ln \sqrt{1-\xi^2}}{\xi\omega_n}$$

工程上，当 $0.1 < \xi < 0.9$ 时，通常用下列二式近似计算调节时间。

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

$$\Delta = 5\% h(\infty)$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

$$\Delta = 2\% h(\infty)$$

(5) 振荡次数 N

$$N = \frac{t_s}{T_d} = \frac{t_s}{2\pi / \omega_d} = \frac{\omega_d t_s}{2\pi}$$

总结:

$$t_r = \frac{\pi - \arccos \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{\pi}{\omega_d}$$

$$M_p \% = e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \pi} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{3}{\xi \omega_n}$$

$$t_s = \frac{4}{\xi \omega_n}$$

(1) ω_n 一定, 使 $t_r \ t_p \downarrow \xrightarrow{\text{必须}} \xi \downarrow$

使 $t_s \downarrow \xrightarrow{\text{必须}} \xi \uparrow$ (ξ 一定范围)

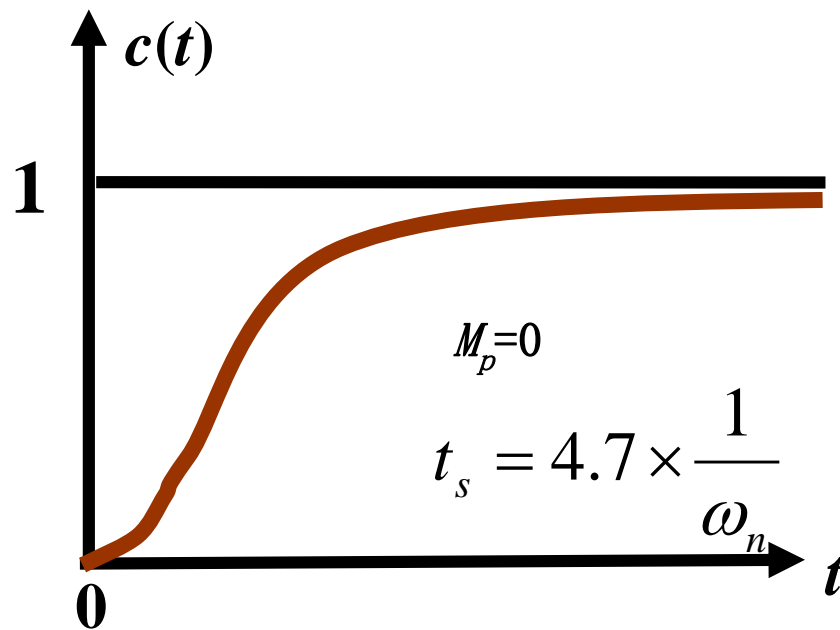
(2) ξ 一定, 使 $t_r \ t_p \ t_s \downarrow \xrightarrow{\text{必须}} \omega_n \uparrow$

(3) $\xi \downarrow \xrightarrow{\text{必有}} M_p \uparrow$ 只由 ξ 决定

各性能指标之间是有矛盾的。

3. 临界阻尼情况 $\xi=1$

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\omega_n \\ C(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \times \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n} \end{aligned}$$

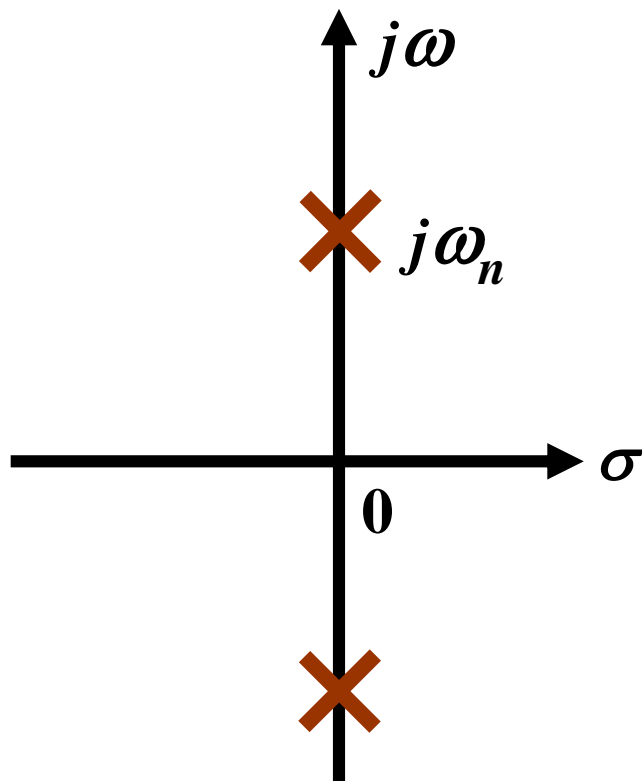


$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (t \geq 0)$$

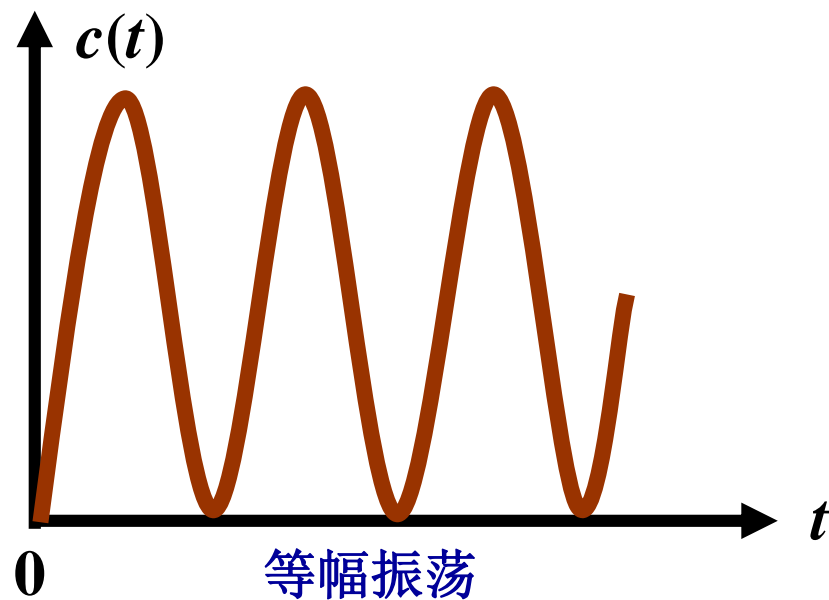
此时响应是稳态值为1 的非周期上升过程，其变化率
 $t = 0$ ，变化率为0； $t > 0$ 变化率为正， $c(t)$ 单调上升；
 $t \rightarrow \infty$ ，变化率趋于0。 整个过程不出现振荡，无超调，
稳态误差=0。

4. 无阻尼情况 $\xi=0$

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$



$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$



$$c(t) = 1 - \cos \omega_n t$$

5. 不稳定系统 $\xi < 0$

二阶系统的极点具有正实部，响应表达式的指数项变成正的指数系统不稳定

总结：

- 1) $\xi < 0$ 时，响应发散，系统不稳定；
- 2) $\xi \geq 1$ 时，响应与一阶系统相似，无超调，但调节速度慢；
- 3) $\xi = 0$ 时，无过渡过程，直接进入稳态，响应等幅振荡；
- 4) $0 < \xi < 1$ 时，响应有超调，但上升速度快，调节时间短，合理 ξ 选择可使既快又平稳，工程上把 $\xi = 0.707$ 的二阶系统称为二阶最优系统；

3. 6. 3 二阶系统的单位脉冲响应

1. 脉冲响应及脉冲响应函数

当系统输入信号为单位脉冲函数 $\delta(t)$ 时，系统的响应称为单位脉冲响应，记为 $g(t)$ 。有

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}[C(s)]_{r(t)=\delta(t)} \\ &= L^{-1}[G_B(s)R(s)] = L^{-1}[G_B(s)] \end{aligned}$$

$$G_B(s) = L[g(t)]$$

2. 脉冲响应与阶跃响应的关系

系统单位阶跃响应是该系统单位脉冲响应的积分，
或系统单位脉冲响应是对应单位阶跃响应的导数。

$$g(t) = \frac{d}{dt}[h(t)]$$

或

$$h(t) = \int_0^t g(t)dt$$

3. 二阶系统的单位脉冲响应

当 $\xi > 1$ 时

$$g(t) = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \right], t \geq 0$$

当 $0 < \xi < 1$ 时

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t), \quad t \geq 0$$

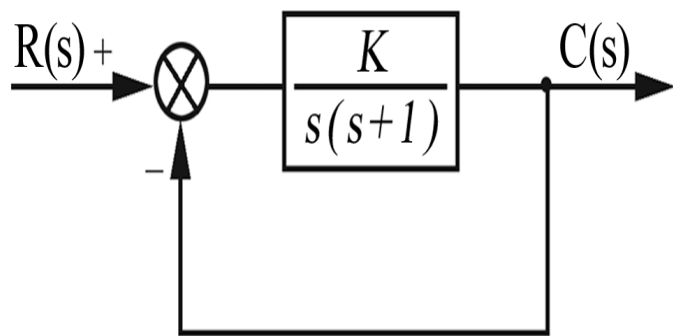
当 $\xi = 1$ 时

$$g(t) = \omega_n^2 t e^{-\xi\omega_n t}, \quad t \geq 0$$

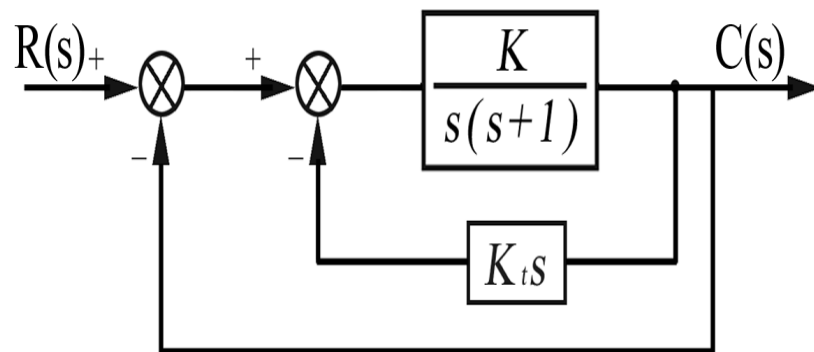
当 $\xi = 0$ 时

$$g(t) = \omega_n \sin \omega_n t, \quad t \geq 0$$

例3-16 某单位反馈控制系统如下图(a)所示，引入局部速度反馈后的闭环控制系统如下图(b)所示。已知在图(b)中，系统单位阶跃响应的超调量 $M_p\%=16.4\%$ ，峰值时间 $t_p=1.14\text{s}$ ，试确定相应状况时的参数 K 和 K_t ，并分别计算系统(a) 和(b)的单位阶跃响应 $h(t)$ 。



(a) 单位反馈系统



(b) 引入局部负反馈的系统

解：对于系统(b)，其闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_B(s) = \frac{K}{s^2 + (1 + KK_t)s + K}$$

与典型二阶系统传递函数相比较，有

$$\omega_n = \sqrt{K}, \quad 2\xi\omega_n = 1 + KK_t \quad (3-55)$$

而已知 $M_p=16.4\%$ $t_p=1.14s$ ，根据公式

$$M_p = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \times 100\% = 16.4\%$$

可求得

$$\xi = 0.5$$

又根据公式

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 1.14$$

求得

$$\omega_n = 3.16 \text{ rad/s}$$

将 $\xi = 0.5$ 和 $\omega_n = 3.16$ 代入 (3-55)，就得到

$$K = \omega_n^2 = 10$$
$$K_t = \frac{2\xi\omega_n - 1}{K} = 0.216$$

利用上述参数计算结果，可知图(b)系统的单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \beta) \\ &= 1 - 1.154 e^{-1.58t} \sin(2.74t + 60^\circ) \end{aligned}$$

同样由这些参数计算结果，图(a)所示系统的闭环传递函数为

$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + s + K} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

与典型二阶系统模型比较有

$$\omega_n = \sqrt{10} = 3.16 \text{ rad/s}$$
$$\xi = 0.158$$

系统的最大超调量

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 60\%$$

峰值时间

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} = 1.01 \text{ s}$$

其单位阶跃响应为

$$h(t) = 1 - 1.016e^{-0.5t} \sin(3.12t + 80.9^\circ)$$

□

§ 3.7 高阶系统的瞬态响应

3.7.1 高阶系统的瞬态响应

设有某 n 阶系统的闭环传递函数为

$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{K(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}\end{aligned}$$

当输入为单位阶跃函数 $r(t)=1(t)$ 时，则 $R(s) = \frac{1}{s}$

$$C(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \cdot \frac{1}{s}$$

假设所有闭环极点互不相等且均为实数，则

$$C(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(s - p_i)}$$

从而，由逆拉普拉斯变换得到

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}$$

当闭环系统的极点中还包含共轭复极点时

$$C(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s \prod_{i=1}^n (s - p_i) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

$$= \frac{A_0}{s} + \sum_{i=1}^q \frac{A_i}{s - p_i} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k (s + \zeta_k \omega_k) + C_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}$$

进行拉普拉斯反变换可得系统单位阶跃响应为

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^q A_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\xi_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} t$$

$$+ \sum_{k=1}^r C_k e^{-\xi_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} t$$

3.7.2 高阶系统的降阶

1. 主导极点

在时间响应过程中起着主要的，决定性作用的闭环极点，我们称其为主导极点。

距离虚轴最近的闭环极点为主导极点。

工程上往往只用主导极点估算系统的动态特性。这样可将高阶的实际系统近似地看成是一阶或二阶的低阶系统，便于进行分析和设计。

条件:

1 距离 s 平面虚轴较近, 且周围没有其它的闭环极点和零点; 对应的暂态分量衰减缓慢, 起主要作用。

不会构成闭环偶极子, 产生零极点相消现象。

2 其实部的绝对值比其它极点小5倍以上。

应用闭环主导极点的概念, 可以把一些高阶系统近似为一阶或二阶系统, 以实现对外阶系统动态性能的近似评估。

一般情况, 高阶系统具有振荡性, 所以**主导极点常常是一对共轭复数极点**。找到了一对共轭复数极点, 高阶系统的动态性能就可以应用二阶系统的性能指标来近似估计。

2. 偶极子/coupling zero/pole pair

将一对靠得很近的闭环零、极点称为偶极子。

闭环传递函数中，当某极点和某零点之间的距离比它们的模值小一个数量级，就可认为这对零极点为偶极子。具有负实部的零极点数值上接近，可以作为偶极子相消。

！ 注意

1. 忽略的极点或相消的零极点要保证具有负实部
2. 忽略非主导零、极点要保证系统的静态增益不变

3.7.3 零极点对阶跃响应的影响

1. 零点对阶跃响应的影响

假设系统中增加一个闭环实零点，即系统中增加了串联环节 $\frac{s - z}{|z|}$ 且该闭环零点 z 位于复平面的左半平面或右半平面，则

$$C_1(s) = C(s) \cdot \frac{s - z}{|z|} = -\frac{z}{|z|} C(s) + \frac{sC(s)}{|z|}$$

这里 $C(s)$ 是原系统的阶跃响应函数。

对上式进行拉普拉斯反变换，得

$$\begin{aligned}c_1(t) &= -\frac{z}{|z|}c(t) + \frac{1}{|z|}L^{-1}[sC(s)] \\&= -\frac{z}{|z|}c(t) + \frac{1}{|z|}\frac{d}{dt}c(t)\end{aligned}$$

可见，增加的是一个闭环左实零点，即 $z < 0$ 时，

$$c_1(t) = c(t) + \frac{1}{|z|}\frac{d}{dt}c(t)$$

阶跃响应增加了一项与 $c(t)$ 的变化率成正比，与零点离虚轴的距离成反比的项。该零点使系统响应加快，超调增大，即系统对输入作用的反应灵敏了。

反之，如果增加的闭环零点位于复平面的右半平面，即 $z = |z|$ 时，则

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -\frac{z}{|z|} c(t) + \frac{1}{|z|} L^{-1}[sC(s)] \\ &= -c(t) + \frac{1}{|z|} \frac{d}{dt} c(t) \end{aligned}$$

这将使系统响应过程变慢，超调量减小，系统对输入作用的反应变呆滞了。

2. 极点对阶跃响应的影响

假设系统增加一个闭环左实极点 $-|p|$ ，系统在单位阶跃信号作用下输出变为

$$C_1(s) = C(s) \frac{|p|}{s + |p|}$$
$$C(s) = C_1(s) \frac{s + |p|}{|p|} = C_1(s) + \frac{s C_1(s)}{|p|}$$

取拉普拉斯反变换，得

$$c(t) = c_1(t) + \frac{1}{|p|} \frac{d}{dt} c_1(t)$$

或等价地改写成

$$c_1(t) = c(t) - \frac{1}{|p|} \frac{d}{dt} c_1(t)$$

可以看出：系统中增加一个闭环左实极点，系统的过渡过程将变慢，超调量将减小，系统的反应变得较为滞呆。

对于闭环传递函数存在右极点的情况，系统时域响应将是发散的，系统不稳定。也就是说，这样增加闭环系统极点并无实际工程价值。

§ 3.8 用MATLAB和SIMULINK进行瞬态响应分析

3.8.1 单位脉冲响应

当输入信号为单位脉冲函数 $\delta(t)$ 时，系统 $G(s)$ 的输出为单位脉冲响应，MATLAB中求取 $G(s)$ 的脉冲响应的函数为 `impulse()`。其调用格式为

`[y, x, t] = impulse(num, den, t)`

或

`impulse(num, den)`

式中 $G(s) = \text{num}/\text{den}$ ， t 为仿真时间； y 为时间 t 的输出响应； x 为时间 t 的状态响应。

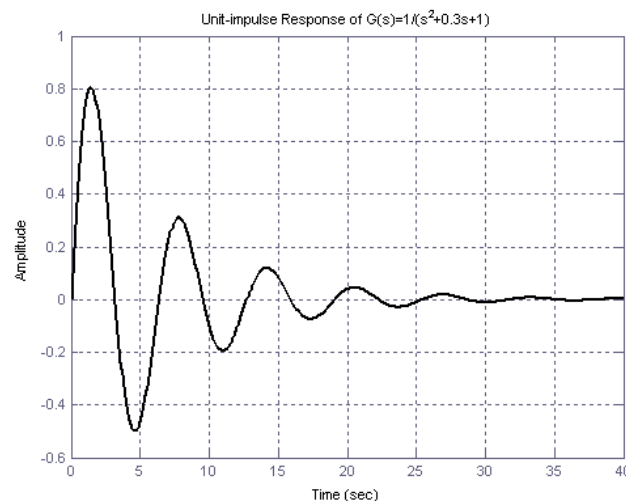
例3-16 试求如下系统的单位脉冲响应

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}$$

MATLAB命令为:

```
>>t=[0: 0.1: 40];  
>>num=[1];  
>>den=[1, 0.3, 1];  
>>impulse(num, den, t);  
>>grid;  
>>title('Unit-impulse Response of  
G(s)=1/(s^2+0.3s+1)')
```

其响应结果如上图所示。



例3-17 系统传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \quad t \in [0, 10]$$

求取其单位脉冲响应的MATLAB命令为

```
>>t=[0: 0.1: 10]; num=[1];
```

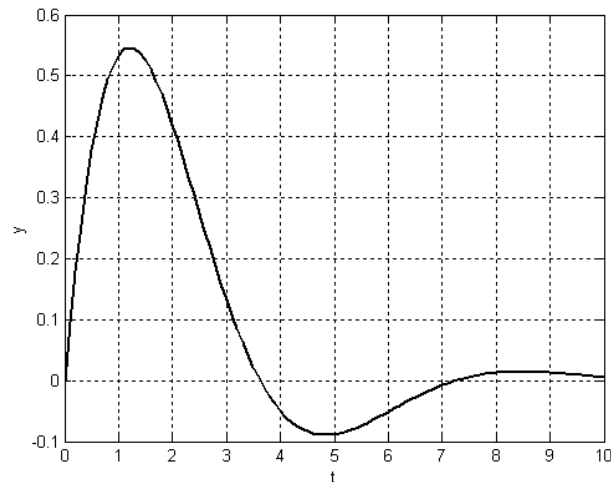
```
>>den=[1, 1, 1];
```

```
>>[y, x, t]=impulse(num, den, t)
```

```
>>plot(t, y); grid
```

```
>>xlabel('t'); ylabel('y');
```

其响应的数值结果如右图。



3.8.2 单位阶跃响应/Unit Step Responses

当输入为单位阶跃信号 $1(t)$ 时，系统 $G(s)$ 的输出为单位阶跃响应，在MATLAB中可用step()函数实现数值计算给定系统的单位阶跃响应，其调用格式为

`[y, x, t]=step(num, den, t)`

或

`step(num, den)`

式中 $G(s)=\text{num}/\text{den}$ ， t 为仿真时间； y 为时间 t 的输出响应； x 为时间 t 的状态响应。

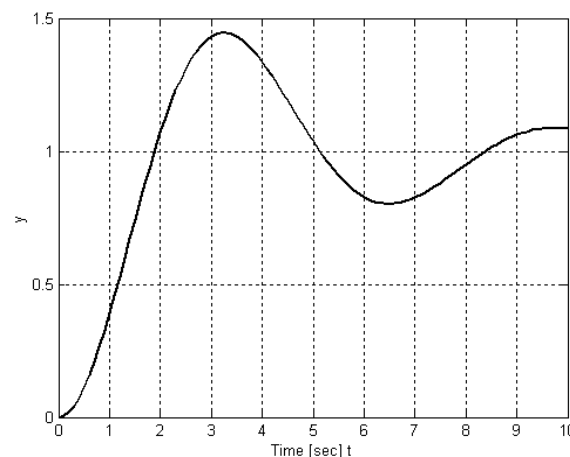
例3-18 求如下系统传递函数的单位阶跃响应。

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$

求取其单位阶跃响应的MATLAB命令为

```
>>num=[1]; den=[1, 0.5, 1];  
>>t=[0: 0.1: 10];  
>>[y, x, t]=step(num, den, t);  
>>plot(t, y); grid;  
>>xlabel( 'Time [sec] t' );  
>>ylabel( 'y' )
```

所求单位响应曲线如右图。



3.8.3 单位斜坡响应

在MATLAB中没有单位斜坡响应命令，根据单位斜坡响应输入是单位阶跃输入的积分。我们可以利用单位阶跃响应命令来求斜坡响应。

当求传递函数为的单位斜坡响应时，基本步骤：

- （1）可先用单位阶跃响应命令求得系统单位阶跃响应；
- （2）再利用阶跃响应的积分命令即可求得斜坡响应。

例3-19 已知系统传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}$$

求其对单位斜坡输入 $r(t) = t$ 的响应函数。

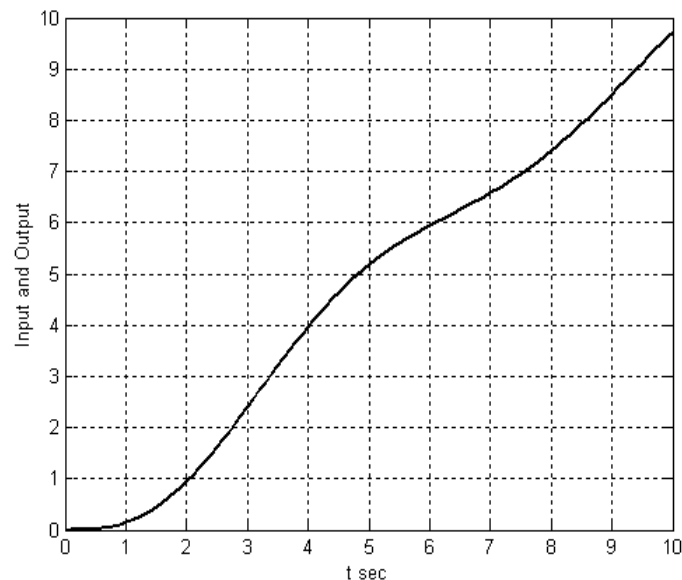
解：单位斜坡函数拉氏变换为 $R(s) = s^{-2}$
所以，给定系统的单位斜坡响应函数是

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{(s^2 + 0.3s + 1) \cdot s} \cdot \frac{1}{s}$$

对上式进行拉氏反变换就可得到单位斜坡响应。

同样的单位斜坡响应也可由如下的MATLAB命令来数值求得：

```
>> num=[1];  
>> den=[1, 0.3, 1, 0];  
>> t=[0: 0.1: 10];  
>> c=step(num, den, t);  
>> plot(t, c);  
>> grid;  
>> xlabel('t sec');  
>> ylabel('Input and Output')  
其响应结果如右图所示。
```



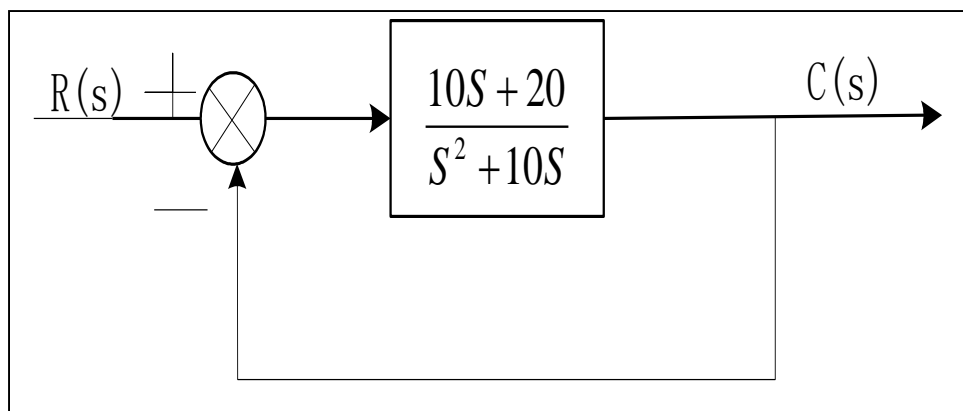
3.8.4 任意函数作用下系统的响应

用线性仿真函数lsim来实现，其调用格式为

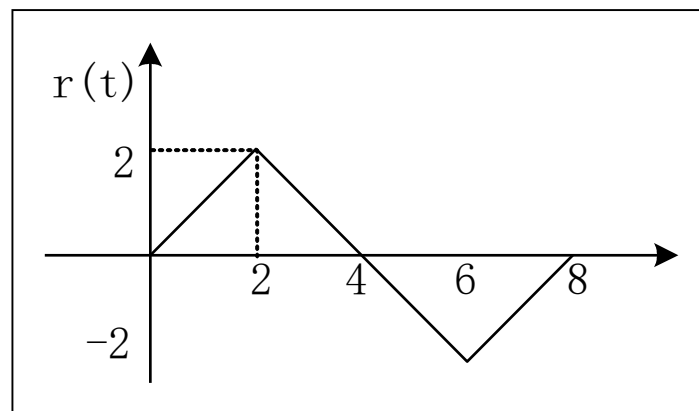
$$[y, x] = \text{lsim}(\text{num}, \text{den}, u, t)$$

式中 $G(s) = \frac{\text{num}}{\text{den}}$ ； $y(t)$ 为系统输出响应； $x(t)$ 为系统状态响应； u 为系统输入信号； t 为仿真时间。

例3-20 有反馈系统如下图(a)所示，系统输入信号为下图(b)所示的三角波函数，试求取系统输出响应。



(a) 反馈系统

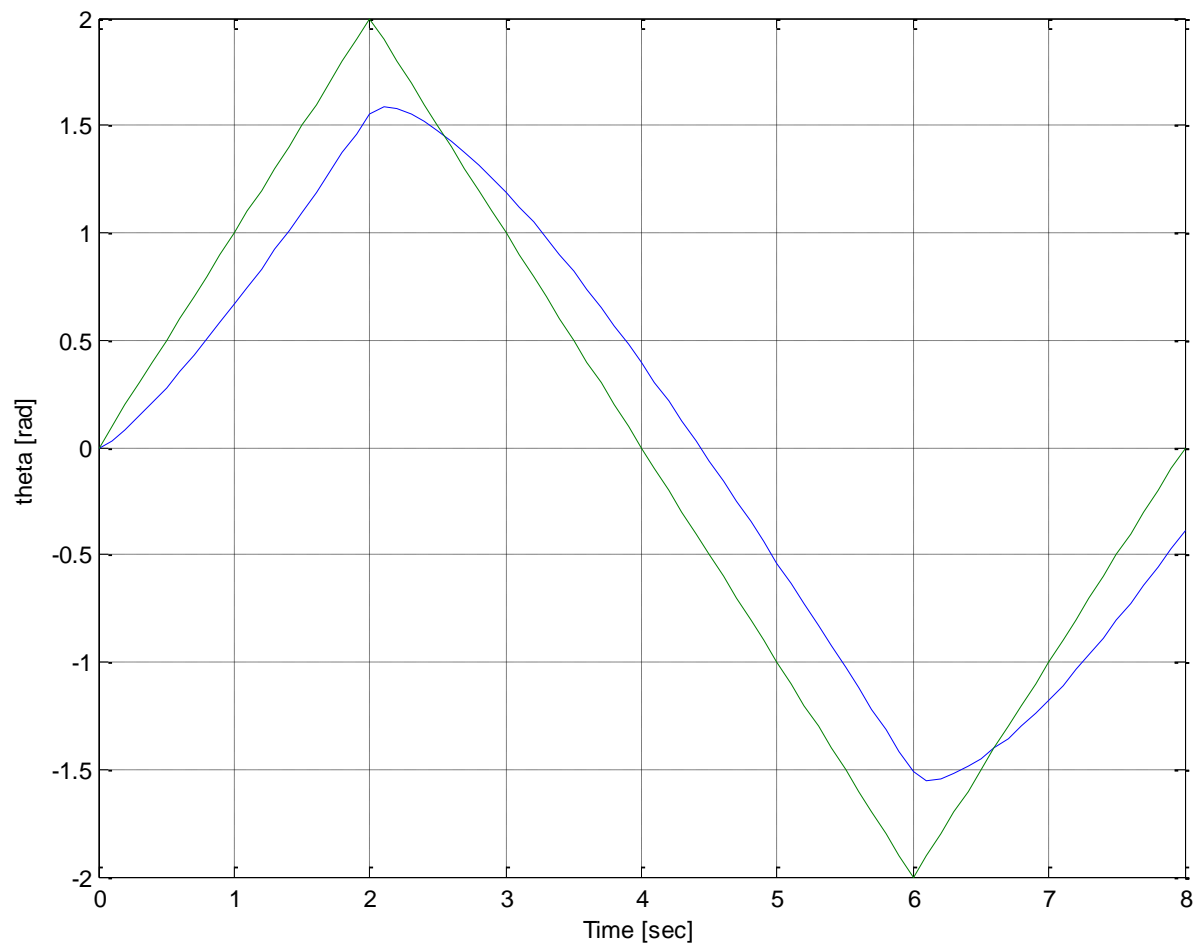


(b) 输入信号

MATLAB实现求取三角波函数响应的指令为

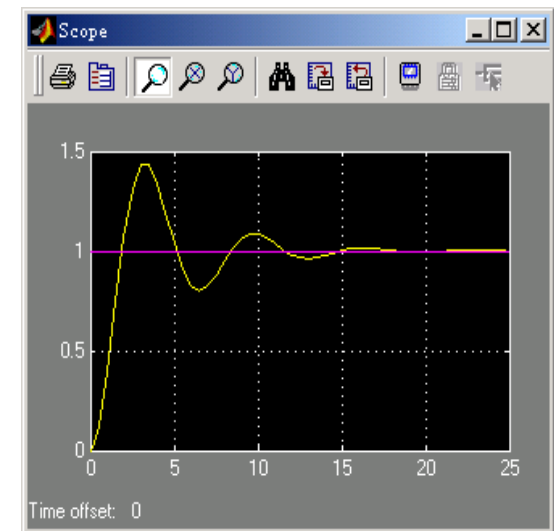
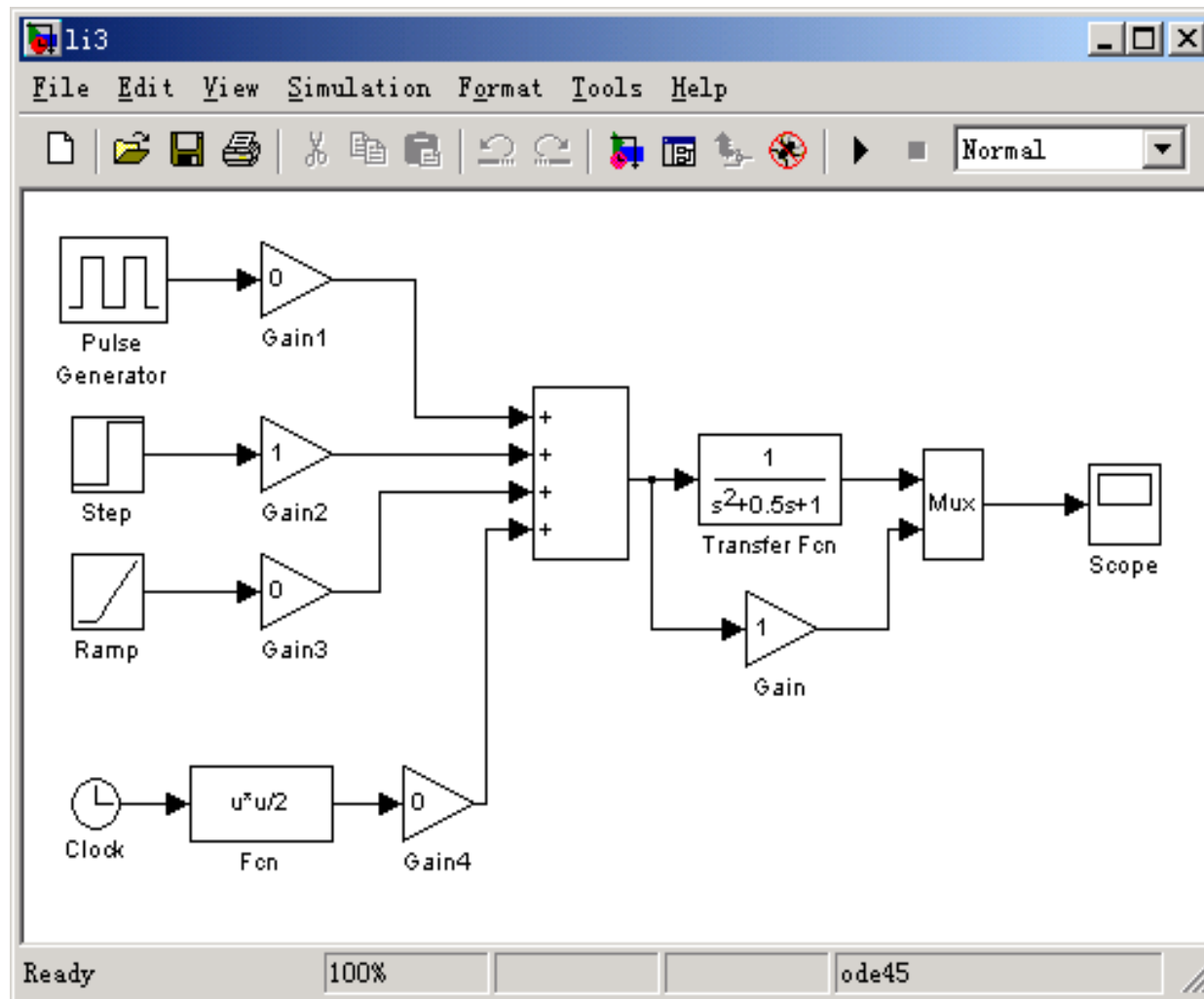
```
>>numg=[10, 20]; deng=[1, 10, 0];  
>>[num, den]=cloop(numg, deng, -1);  
>>v1=[0: 0.1: 2];  
>>v2=[1.9: -0.1: -2];  
>>v3=[-1.9: 0.1: 0];  
>>t=[0: 0.1: 8];  
>>u=[v1, v2, v3];  
>>[y, x]=lsim(num, den, u, t);  
>>plot(t, y, t, u);  
>>xlabel( 'Time [sec]' );  
>>ylabel('theta [rad]');  
>>grid
```

执行上述命令得到的响应曲线如下图所示。



3. 8. 5举例说明用SIMULINK求取时域响应

例3-21 图3-30的Simulink的仿真框图可演示给定系统对典型信号的时间响应曲线，图中给出的是阶跃响应曲线。



小 结

本章要求学生熟练掌握系统时域响应及其性能指标的计算方法。具体是：

1. 线性定常系统的时域响应
2. 控制系统时域响应的性能指标
3. 线性定常系统的稳定性
4. 系统的稳态误差
5. 一阶系统的时域响应
6. 二阶系统的时域响应
7. 高阶系统的时域响应
8. 用MATLAB和SIMULINK进行时域响应分析