

第5章 控制系统的频域分析

内 容 提 要

频率特性可间接反映系统的动态和稳态性能；频域响应可通过实验直接求得；频率特性分析可以得出控制系统特性的定性和定量的结论；频域特性可利用曲线、图表及公式，MATLAB等工具表达。

知 识 要 点/Major Points

- 频率特性是控制系统数学模型的一种。
- 频率特性可表达为：幅相频率特性曲线（极坐标或Nyquist曲线），对数频率特性曲线（Bode图），对数幅相频率特性曲线（Nichols曲线）等。
- 最小相位系统幅频和相频是一一对应关系。
- Nyquist稳定判据由开环频率特性判别闭环稳定性，相角/幅值裕量反映系统的稳定鲁棒性。
- 等M圆和等N圆由开环频率特性确定闭环频率特性，进而定性或定量得到系统时域响应。

目 录

§ 5.1 频率特性

§ 5.2 典型环节的频率特性

§ 5.3 系统的开环频率特性

§ 5.4 乃奎斯特稳定判据

§ 5.5 控制系统的相对稳定性

§ 5.6 闭环频率特性

§ 5.7 用频率特性分析系统品质

§ 5.8 MATLAB频域特性分析

§ 5.9 小结

§ 5.1 频率响应特性

5.1.1 频率特性概述

1. 时域分析法的优缺点

时域法是分析和设计控制系统的直接方法，它的主要优点是：

- 1) **直观、容易理解**。借助于MATLAB仿真，可以直接得到系统的时域响应曲线，以及各种时域指标。
- 2) 典型二阶系统的参数与系统性能指标的**关系明确**。当系统的闭环零、极点满足二阶近似条件时，可用主导极点对应的典型二阶系统的指标来近似估计高阶系统的技术指标。

但是时域法存在着一些不足之处。

1) 时域分析是在典型信号的激励下进行的，而实际信号不可能是理想的典型信号，往往包含着一些不希望的成分，比如高频干扰信号。时域分析没有描述系统对高频干扰信号的抑制能力。

2) 系统的时域设计是通过增加开环零、极点来重新配置系统的闭环主导极点，这对于串联校正是方便的，但对于其他校正方法就不那么方便，比如反馈校正（第六章将会看到）。

3) 时域分析和设计需要精确的根轨迹图，在没有MATLAB之前，精确的根轨迹绘制并不是一件容易的事，而概略图只能用于定性分析，而不能用于定量分析。因此，精确根轨迹的绘制困难大大影响了系统的设计效率。

4) 时域法中稳定裕量用距虚轴最近的闭环极点离虚轴的距离来表示，这种表示只能说明稳定性，不包含系统动态特性的任何信息。

5) 延迟系统的开环传递函数包含延迟环节，其闭环特征方程是超越方程，不能用劳斯判据判断稳定性，也不能用MATLAB 绘制根轨迹，系统分析很困难。

6) 对于高阶系统，如果不能用二阶近似分析，则没有任何参数可以反映系统的动态性能，在这种情况下，设计高阶系统没有依据，只能反复试探、调整。

频域法是一种工程上广为采用的分析和综合系统的间接方法。频域分析法是一种图解分析法。它依据系统的又一种数学模型——频率特性，对系统的性能，如稳定性、快速性和准确性进行分析。

频域法很好地弥补了时域法的不足，并且因其使用方便、适用范围广且数学模型容易获得而得到了广泛的应用。

2. 频域分析法研究的意义

频域分析法是二十世纪三十年代发展起来的研究自动控制系统的一种**经典工程实用**方法。是一种利用**频率特性**进行控制系统分析的**图解方法**，可方便地用于控制工程中的**系统分析与设计**。

频域性能指标与时域性能指标之间有着内在的联系，通过这种内在联系，可以由系统的频域性能指标求出时域性能指标或反之。因此，**频域分析法与时域分析法和根轨迹法是统一的**。

频域分析法的优点

(1) 不必求解系统的特征根，采用较为简单的图解法就可研究系统的稳定性。由于频率响应法主要通过开环频率特性的图形对系统进行分析，因而形象直观且计算量少。

(2) 系统的频率特性可用实验方法测出。频率特性有明确的物理意义，它可以用实验方法来测定，这对于难以列写微分方程式的元件或系统来说，具有重要的实际意义。

(3) 频域分析法不仅适用于线性定常系统的分析研究，还可以推广应用于某些非线性控制系统。

(4) 便于系统分析和校正。根据系统的频率性能间接地揭示系统的动态特性和稳态特性，可以简单迅速地判断某些环节或参数对系统性能的影响，便于分析和校正。

§ 5.1 频率响应特性

5.1.1 频率特性概述

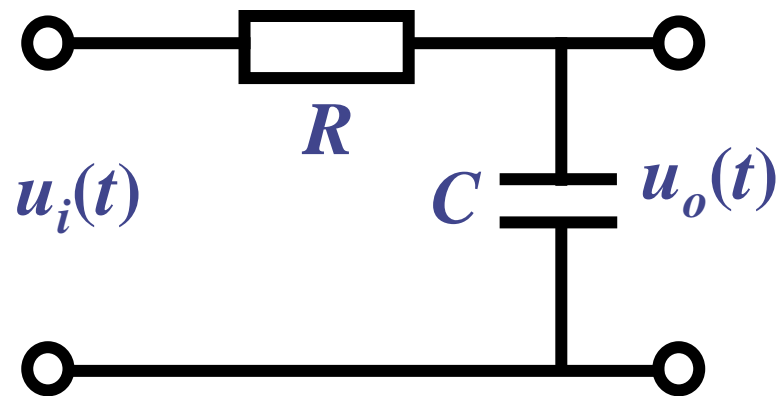
例： RC 线性电路，当输入为正弦电压 $r(t)=A\sin\omega t$ 时， $c(t)$ 的稳态输出为多少？

解： RC 电路的微分方程为

$$T \frac{dc(t)}{dt} + u_o(t) = u_i(t)$$

式中， $T=RC$ 。网络的传函为：

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$



如果输入为正弦电压 $r(t)=A\sin\omega t$, $c(t)$ 的稳态输出:

$$U_o(s) = \frac{1}{Ts + 1} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$= \frac{\frac{A\omega T}{1 + (\omega T)^2}}{s + 1/T} + \frac{-\frac{A\omega T}{1 + (\omega T)^2}s + \frac{A\omega}{1 + (\omega T)^2}}{s^2 + \omega^2}$$

$$u_o(t) = \frac{A\omega T}{1 + (\omega T)^2} e^{-\frac{t}{T}} - \frac{A\omega T}{1 + (\omega T)^2} \cos \omega t + \frac{A}{1 + (\omega T)^2} \sin \omega t$$

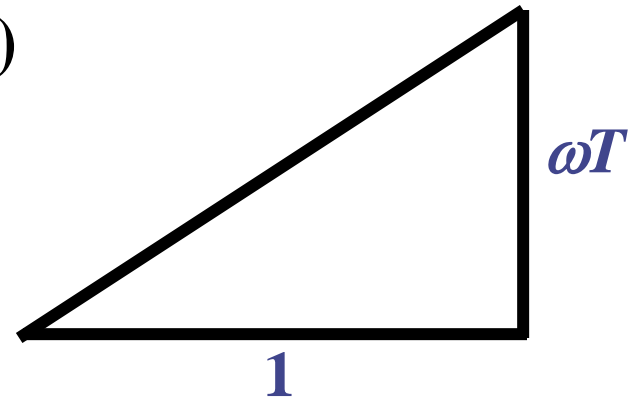
$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_o(t) = u_{oss}(t) = -\frac{A\omega T}{1 + (\omega T)^2} \cos \omega t + \frac{A}{1 + (\omega T)^2} \sin \omega t$$

$$= \frac{A}{1 + (\omega T)^2} [-\omega T \cos \omega t + \sin \omega t]$$

$$u_{oss}(t) = \frac{A}{1 + (\omega T)^2} [-\omega T \cos \omega t + \sin \omega t]$$

$$= \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \left[-\frac{\omega T}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \cos \omega t + \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \sin \omega t \right]$$

$$= \frac{A}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

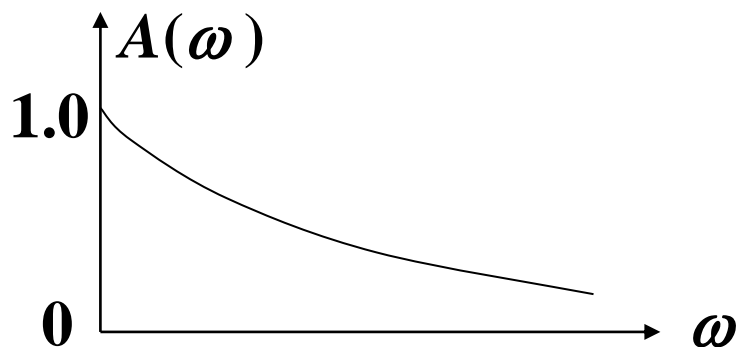




输出仍为正弦信号，**频率**与输入信号**相同**，**幅值**较输入信号有一定**衰减**，**相位**存在一定**延迟**。

$$A(\omega) = \frac{U_o}{U_i} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \quad \text{---幅频特性}$$

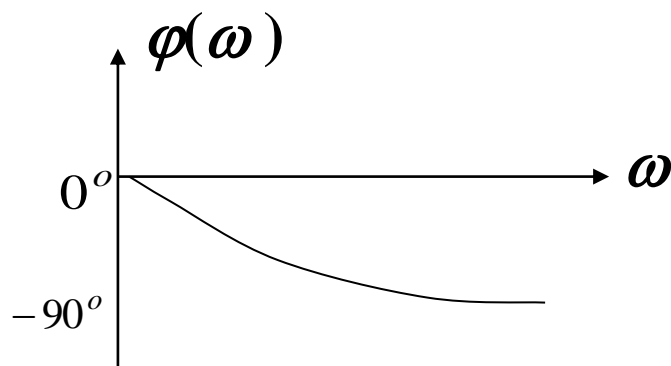
幅频特性： 稳态输出与输入的振幅之比。



幅频特性曲线

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T \quad \text{---相频特性}$$

相频特性： 稳态输出与输入正弦信号的相位差。



相频特性曲线

由此可见：

① 网络的稳态输出电压仍然是正弦电压，其频率和输入电压频率相同。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_o(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_o(t) = \frac{A}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cdot \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

② 稳态输出电压幅值是输入电压幅值 $1 / \sqrt{1 + (\omega T)^2}$ ，是频率 ω 的函数，称为 *RC* 网络的幅频特性。

③ 稳态输出电压相角比输入电压相角迟后了 $\arctan(\omega T)$ ，是频率 ω 的函数，称为 *RC* 网络的相频特性。

$$\textcircled{4} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{-j \arctan \omega T} = \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| e^{j \angle \frac{1}{1 + j\omega T}} = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

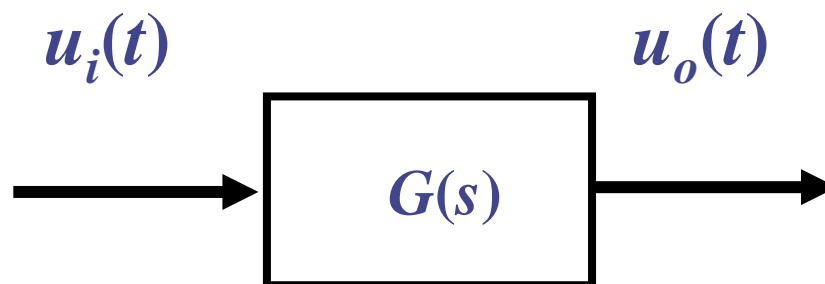
上式完全地描述了网络在正弦输入电压作用下，稳态输出电压幅值和相角随正弦输入电压频率变化的规律，称为网络的频率特性。

$$\left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| \text{—— 幅频特性} \qquad \angle \frac{1}{1 + j\omega T} \text{—— 相频特性}$$

⑤ 把传函中的 s 用 $j\omega$ 代替就可得到频率特性。

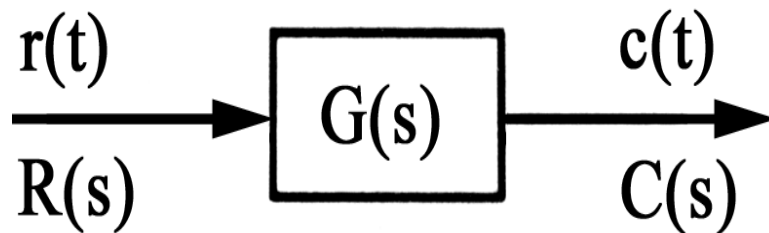
$$\frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + sT} \Big|_{s=j\omega}$$

$$u_{oss}(t) = A \cdot |G(j\omega)| \cdot \sin[\omega t + \angle G(j\omega)]$$



下面证明对图所示的线性定常系统，传递函数与频率特性的关系， $G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$ 。

设线性定常稳定系统输入为 $r(t)$ ，输出为 $c(t)$ ，如下图所示。图中 $G(s)$ 为系统传递函数



$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (5-1)$$

设传递函数 $G(s)$ 已经表示成下式的极点形式

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \\ &= \frac{M(s)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \end{aligned} \quad (5-2)$$

这里， $-p_1$ 、 $-p_2 \dots -p_n$ 为 $G(s)$ 的极点，其可以为实数，也可为复数，并且均在左半复平面，因为系统是稳定的。

若在此系统输入端作用正弦信号，即

$$r(t) = A \sin(\omega t), \quad t \geq 0$$

对应的拉氏变换是

$$R(s) = \frac{A \omega}{s^2 + \omega^2} \quad (5-3)$$

对应该输入的系统输出 $C(s)$ 就是

$$C(s) = G(s)R(s) \quad (5-4)$$

由式 (5-2) 及 (5-4) 得输出为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{M(S)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s + p_i} \end{aligned} \quad (5-5)$$

式中 $a_1, a_2, c_1, c_2, \dots, c_n$ 为待定系数, 由留数定理可求得如下计算关系式。

$$a_1 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega)G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = -\frac{A}{2j}G(-j\omega)$$

$$a_2 = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{A}{2j}G(j\omega)$$

$$c_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s + p_i)G(s) \cdot \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

对 $c(s)$ 式进行拉氏逆变换得输出响应

$$c(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n c_i e^{-p_i t}, \quad t \geq 0$$

$$\frac{a_1}{s + j\omega} + \frac{a_2}{s - j\omega} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s + p_i}$$

$$c(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n c_i e^{-p_i t}, \quad t \geq 0$$

对于稳定系统，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $e^{-p_i t}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 均随时间衰减至零。因此系统的稳态响应为：

$$c_{ss}(t) = a_1 e^{-j\omega t} + a_2 e^{j\omega t} \quad (5-6)$$

注意到 a_1 和 a_2 为共轭复数，且可表示为

$$a_1 = -\frac{A}{2j} G(-j\omega) = -\frac{A}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)}$$

$$a_2 = \frac{A}{2j} G(j\omega) = \frac{A}{2j} |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

这样，系统对正弦信号的稳态响应为

$$\begin{aligned}c_{ss}(t) &= \frac{-A}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\angle G(j\omega)} \cdot e^{-j\omega t} + \frac{A}{2j} |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)} \cdot e^{j\omega t} \\&= A |G(j\omega)| \frac{e^{j[\omega t + \angle G(j\omega)]} - e^{-j[\omega t + \angle G(j\omega)]}}{2j} \\&= A |G(j\omega)| \sin[\omega t + \angle G(j\omega)] \\&= C(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))\end{aligned}\tag{5-7}$$

这里

$$C(\omega) = A |G(j\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

由式（5-7），稳定的线性定常系统在正弦信号作用下，其稳态输出是与输入同频的正弦信号，但幅值和初相位不同且均是频率 ω 的函数。

定义5-1 稳定的线性定常系统在正弦信号作用下，稳态输出正弦相量与输入正弦信号的相量之比称为系统的频率特性，记为 $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\vec{c}(t)}{\vec{r}(t)} = \frac{C(j\omega)}{R(j\omega)} \quad (5-8)$$

其中

$$\vec{c}(t) = A |G(j\omega)| e^{j[\omega t + \angle G(j\omega)]}$$

$$\vec{r}(t) = A e^{j\omega t}$$

其中, 稳态输出与输入的幅值之比称为**系统幅频特性**, 记为 $A(\omega)$, 即

$$A(\omega) = \frac{C(\omega)}{A} = |G(j\omega)| \quad (5-9)$$

稳态输出与输入的相位差称为**系统相频特性**

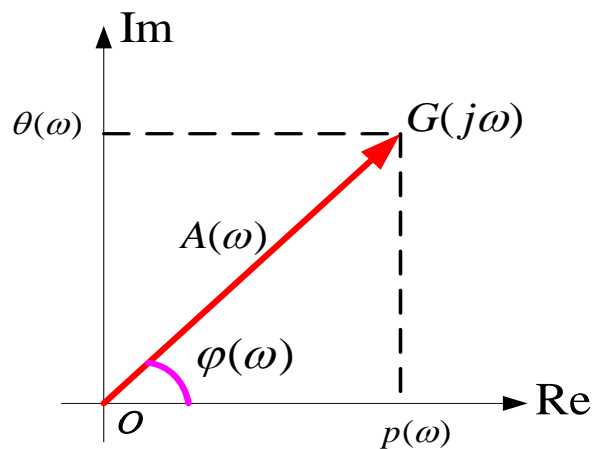
$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) \quad (5-10)$$

系统的频率特性还可表示为

$$G(j\omega) = p(\omega) + j\theta(\omega)$$

式中 $p(\omega)$ — 为 $G(j\omega)$ 的实部, 称为**实频特性**;
 $\theta(\omega)$ — 为 $G(j\omega)$ 的虚部, 称为**虚频特性**。

将 $G(j\omega)$ 写成复数形式: $G(j\omega) = p(\omega) + j\theta(\omega)$



$$p(\omega) = \text{Re}[G(j\omega)] \quad \text{---实频特性}$$

$$\theta(\omega) = \text{Im}[G(j\omega)] \quad \text{---虚频特性}$$

幅频特性、相频特性和实频特性、虚频特性之间的关系:

$$p(\omega) = A(\omega) \cdot \cos[\varphi(\omega)]$$

$$A(\omega) = \sqrt{p^2(\omega) + \theta^2(\omega)}$$

$$\theta(\omega) = A(\omega) \cdot \sin[\varphi(\omega)]$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\theta(\omega)}{p(\omega)}$$

当输入为一般周期信号时，利用傅立叶级数展开成各次正弦波的无穷级数和，相应稳态输出为对应各次正弦波的响应和。

当输入信号为非周期信号时，输入信号可看作周期 $T=\infty$ 的周期信号，可通过傅里叶变换描述信号的频率特性。此时，系统频率特性也可定义为输出的傅氏变换函数与输入的傅氏变换函数之比。

5.1.2 频率特性的求取

想要频域法分析综合系统，首先要求出系统的频率特性。频率特性函数可以用以下方法求取：

(1) 如果已知系统的微分方程，可将输入变量以正弦函数代入，求系统输出变量的稳态解，输出变量的稳态解与输入正弦函数的复数比即为系统的频率特性函数。

(2) 如果已知系统的传递函数，可以将系统传递函数中的 s 代之以 $j\omega$ ，即得到系统的频率特性函数。

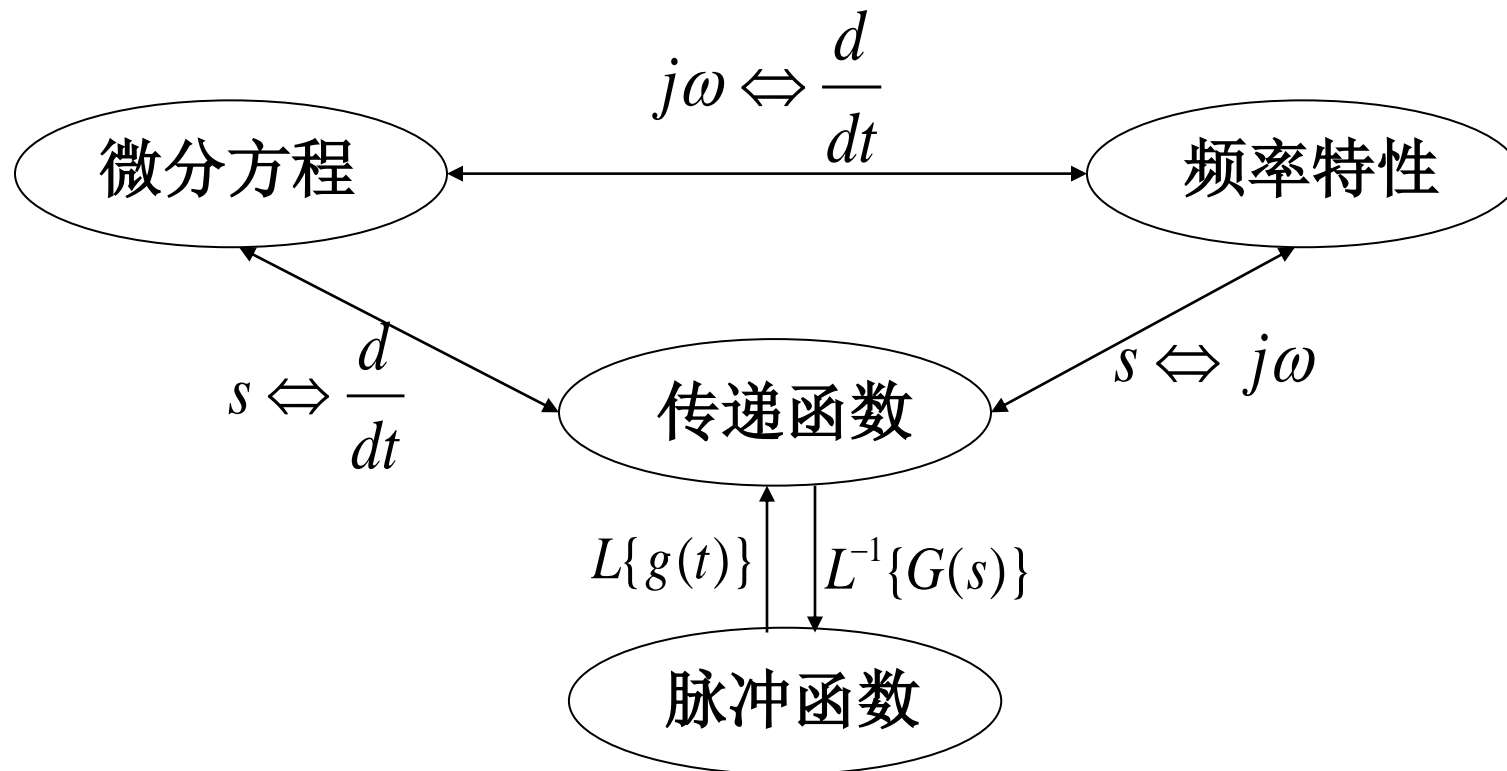
$$\mathbf{G}(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega}$$

(3) 通过实验手段求出。

频率响应法与时域法的不同点：

- 1) 输入是正弦函数；
- 2) 只研究系统稳态分量(而非过渡过程)中，幅值、相角随 ω 变化的规律。

频率特性与其它数学模型的关系



例5-1 已知系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

试确定其频率特性及其有关性质。

解：令 $s=j\omega$ 得系统的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{-j \arctg(\omega T)}$$

或写成复数形式

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{K \omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

由此可确定频率特性有关性质如下

- 1 **频率特性**: 指线性系统或环节在正弦函数作用下稳态输出与输入复数符号之比对频率的关系特性, 用 $G(j\omega)$ 表示。

物理意义: 反映了系统对正弦信号的三大传递能力
同频, 变幅, 相移。

- 2 **幅频特性**: 稳态输出与输入振幅之比, 用 $A(\omega)$ 表示。

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

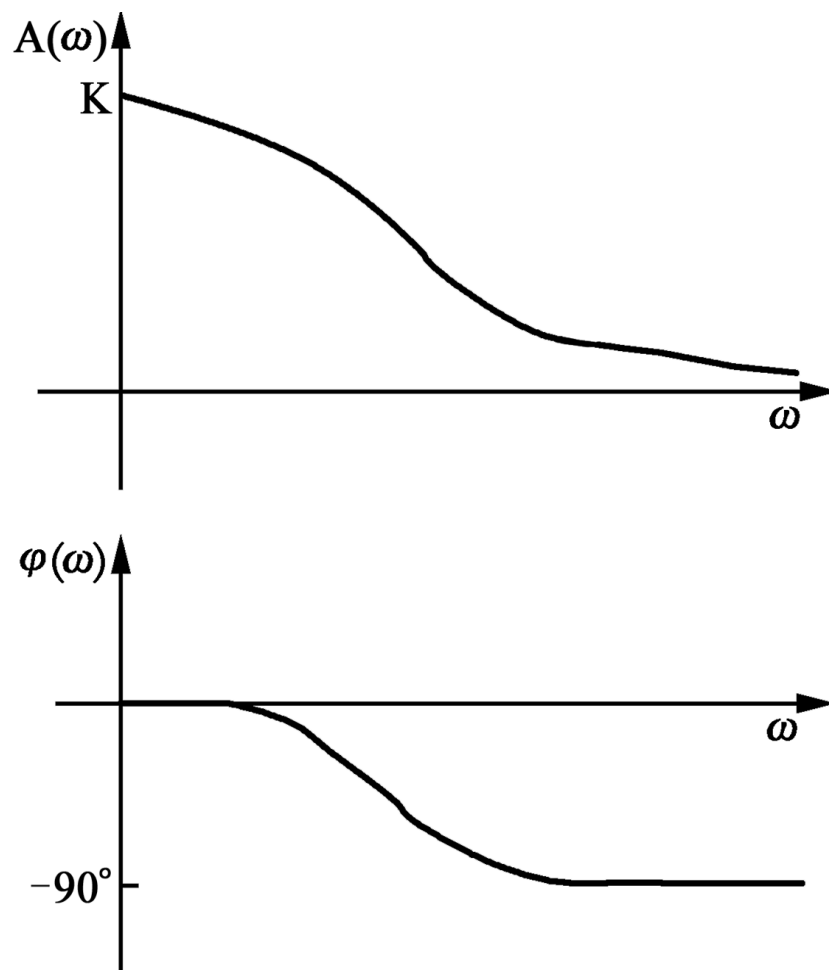
- 3 **相频特性**: 稳态输出与输入相位差, 用 $\phi(\omega)$ 表示。

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = -\arctg(\omega T)$$

- 4 **实频特性**: $G(j\omega)$ 的实部。 $p(\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2 T^2}$

- 5 **虚频特性**: $G(j\omega)$ 的虚部。 $\theta(\omega) = -\frac{KT\omega}{1 + \omega^2 T^2}$

幅频特性和相频特性随 ω 变化的曲线如图所示。



例5-2 设单位反馈控制系统的开环函数为 $G(s) = \frac{1}{s+1}$ ，若输入信号为： $r(t) = 2\sin(2t + 30^\circ)$ ，试求：(1) 稳态输出 $c_{ss}(t)$ ；
(2) 稳态误差 $e_{ss}(t)$?

$$\text{解: (1) } \Phi(s) = \frac{G}{1+G} = \frac{1}{s+2} \quad \therefore \Phi(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega} = \frac{2-j\omega}{4+\omega^2}$$

$$\therefore A(\omega) = |\Phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{2}$$

$$\because \omega = 2 \quad \therefore A(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.35 \quad \varphi(\omega) = -45^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{稳态输出: } c_{ss}(t) &= R_m A(\omega) \sin[(\omega t + \psi) + \varphi(\omega)] \\ &= 0.7 \sin(2t - 15^\circ) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \Phi_e(s) = \frac{1}{1+G} = \frac{s+1}{s+2} \quad \Phi_e(j\omega) = \frac{1+j\omega}{2+j\omega} = \frac{2+\omega^2}{4+\omega^2} + j \frac{\omega}{4+\omega^2}$$

$$\therefore A(\omega) = |\Phi_e(j\omega)| = \sqrt{\frac{1+\omega^2}{4+\omega^2}} \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega}{2+\omega^2}$$

$$\because \omega = 2 \quad \therefore A(\omega) = \sqrt{\frac{5}{8}} = 0.79 \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{2}{6} = 18.4^\circ$$

稳态误差: $e_{ss}(t) = R_m A(\omega) \sin[(\omega t + \psi) + \varphi(\omega)]$

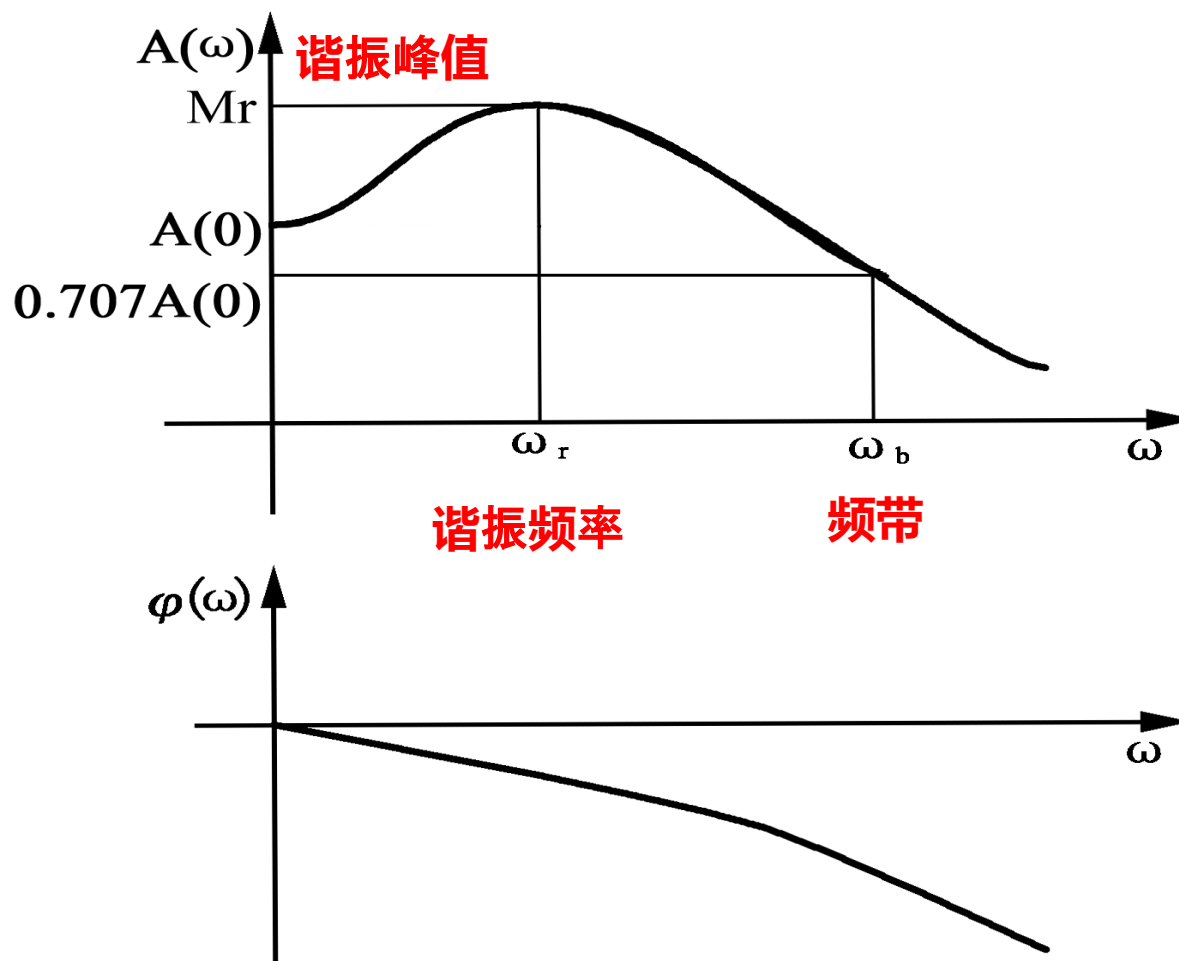
$$= 1.58 \sin(2t + 48.4^\circ)$$

5.1.3 定义于频率特性的系统性能指标

与时域响应中衡量系统性能的时域性能指标类似，频率特性在数值上和曲线形状上的特点也常用做性能指标来衡量系统特性。

- 频域特性在很大程度上能够间接表明系统在时间域的动/静态特性；
- 主要的频域性能指标定义如下：

设某系统的频率特性曲线如图所示。



1. **谐振频率** ω_r : 幅频特性 $A(\omega)$ 出现最大值时所对应的频率;
2. **谐振峰值** M_r : 幅频特性的最大值。 M_r 值越大, 系统对谐振频率正弦信号反应越强烈, 即系统平稳性差, 阶跃响应的超调量越大;
3. **频带** ω_b : 幅频特性 $A(\omega)$ 的幅值衰减到零频率幅值的0.707倍所对应的频率。 ω_b 大, 系统复现快速变化信号的能力强、失真小。即系统的快速性好, 阶跃响应的上升时间短, 调节时间短;
4. **$A(0)$** 是系统单位阶跃响应的终值绝对值 (由终值定理), $A(0)$ 与1相差的大小, 反映了系统的稳态精度, $A(0)$ 越接近于1, 精度越高。

§ 5.2 频率特性的图解表达

5.2.1 频率特性图解表达的基本形式

系统的频率特性可以用图解方式表示。作为频率特性图示的基本表示形式，包括：

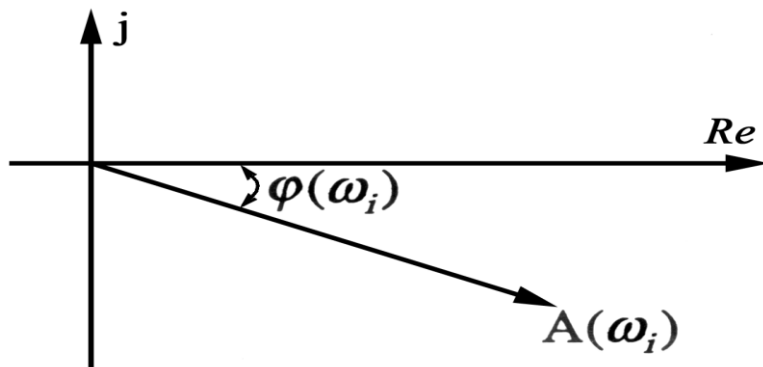
- (1) 极坐标图
- (2) 对数坐标图
- (3) 对数幅相图

1. 极坐标图 (乃奎斯特图或Nyquist曲线)

系统频率特性表示为

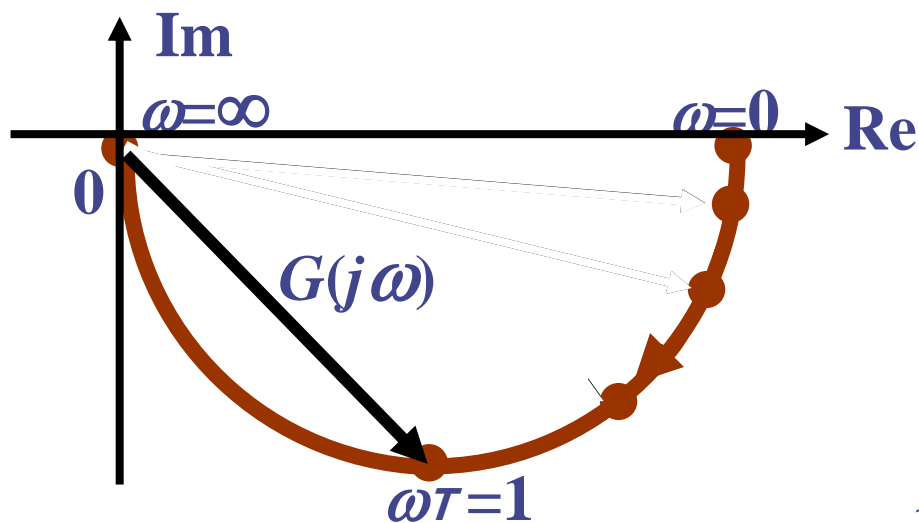
$$\mathbf{G}(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

若在极坐标系中，用向量表示某一频率 $\omega = \omega_i$ 下的 $G(j\omega_i)$ 向量的长度 $A(\omega_i)$ ，向量极坐标角取为 $\varphi(\omega_i)$ ，且 $\varphi(\omega_i)$ 的正方向取为逆时针方向。如下图所示。



这样，当频率取遍 $\omega \in [0, \infty)$ 时的各向量顶端的轨迹就构成了系统频率特性的极坐标图。

显然，极坐标图在 $\omega = \omega_i$ 时，在实轴上的投影为实频特性 $p(\omega_i)$ ，在虚轴上的投影为虚频特性 $\theta(\omega_i)$ 。



RC 电路的极坐标图

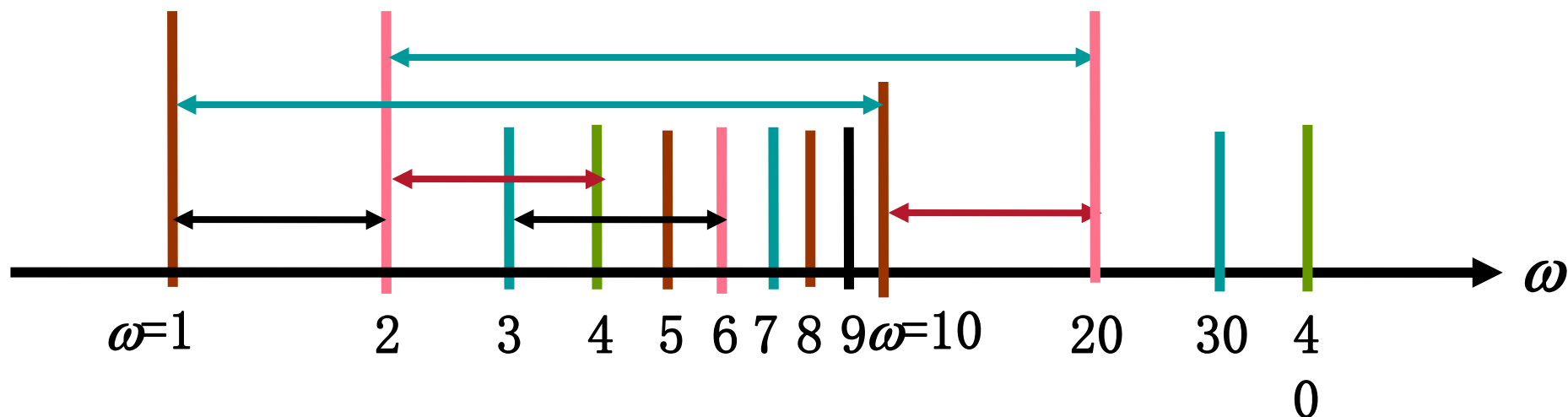
特点：把频率 ω 看成参变量，当 ω 从 $0 \rightarrow \infty$ 时，将幅频特性和相频特性表示在同一个复数平面上。极坐标图也叫做幅相频率特性曲线。

$$\frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + sT} \Big|_{s=j\omega}$$

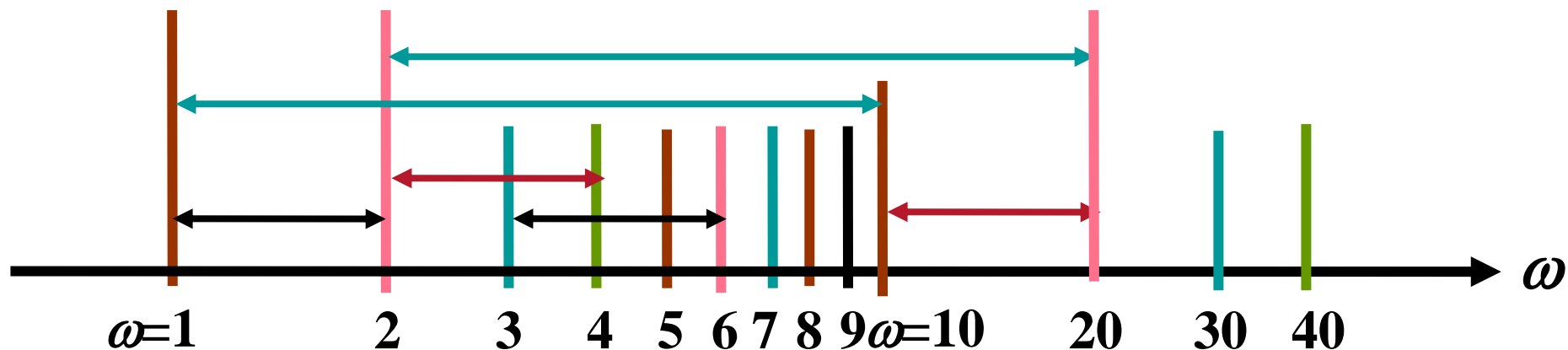
2. 对数频率特性曲线（Bode图）

包括对数幅频特性曲线和对数相频特性曲线。横坐标表示频率 ω ，按对数分度，单位是rad/s。

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg \omega$	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1



◆横轴按频率的对数 $\lg \omega$ 标尺刻度，但标出的是频率 ω 本身的数值。因此，横轴的刻度是不均匀的。



◆横轴压缩了高频段，扩展了低频段。

◆在 ω 轴上，对应于频率每一倍变化，称为一倍频程，例如 ω 从1到2，2到4，3到6，10到20等的范围都是一倍频程；

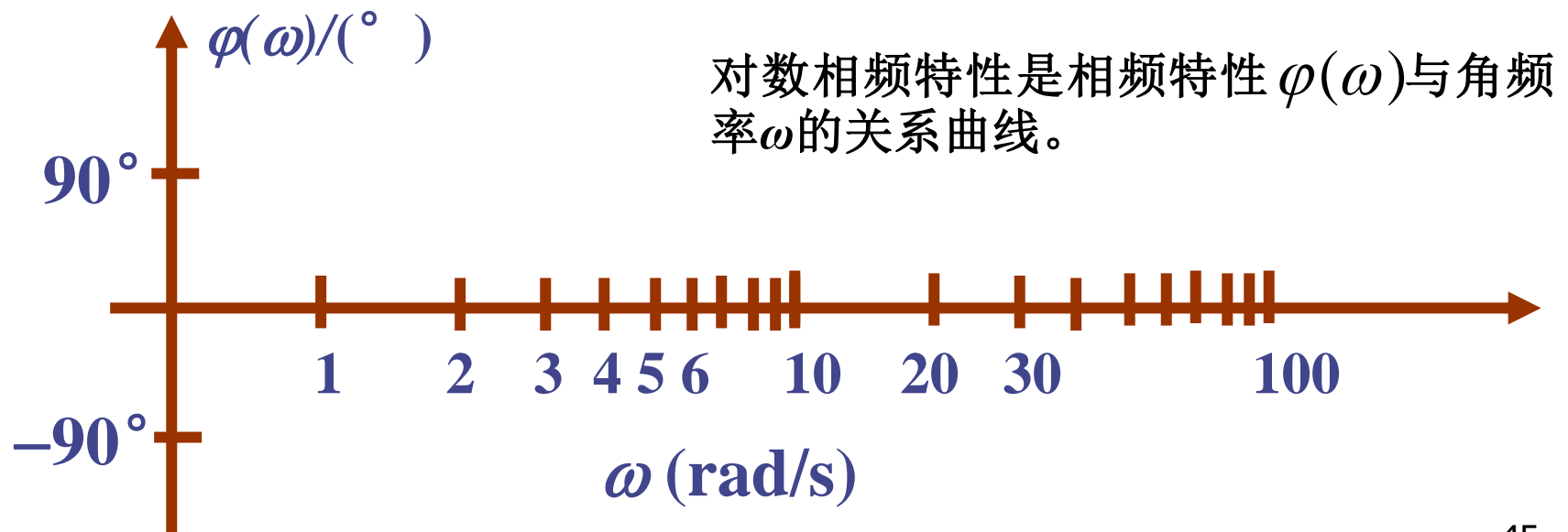
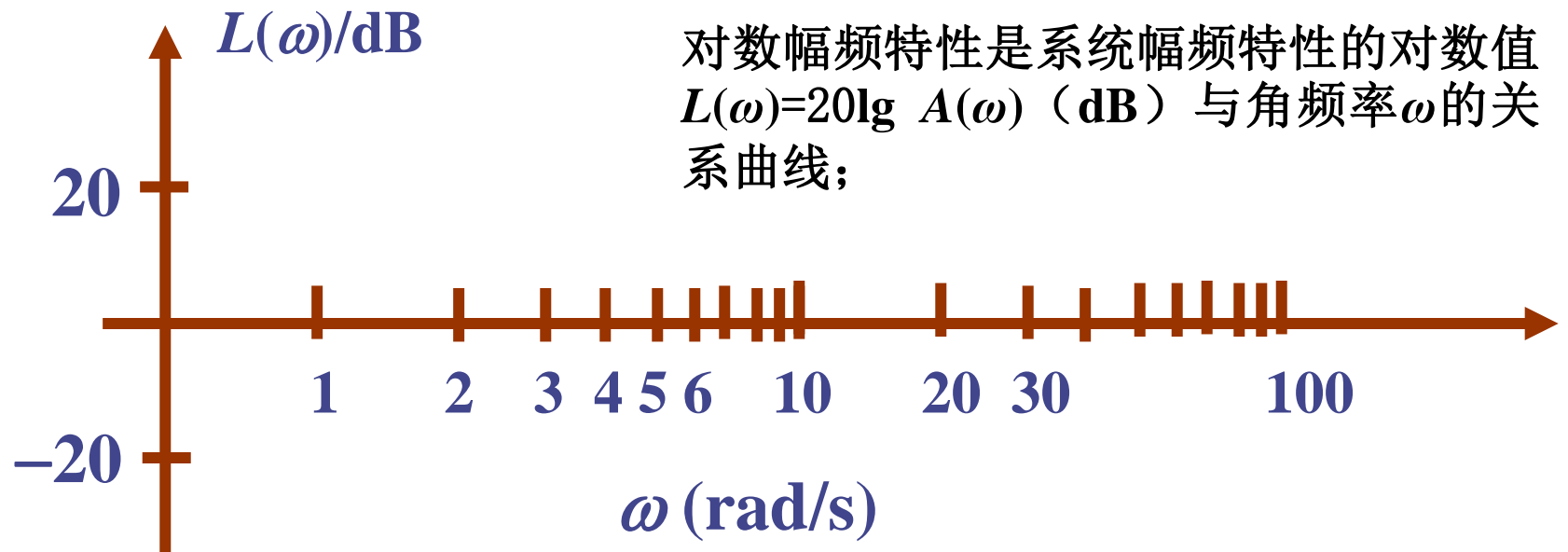
每变化十倍，称为十倍频程（dec），例如 ω 从1到10，2到20，10到100等的范围都是十倍频程；所有的十倍频程在 ω 轴上对应的长度都相等。

对数幅频特性曲线的纵坐标表示对数幅频特性的函数值，均匀分度，单位是dB(分贝)。

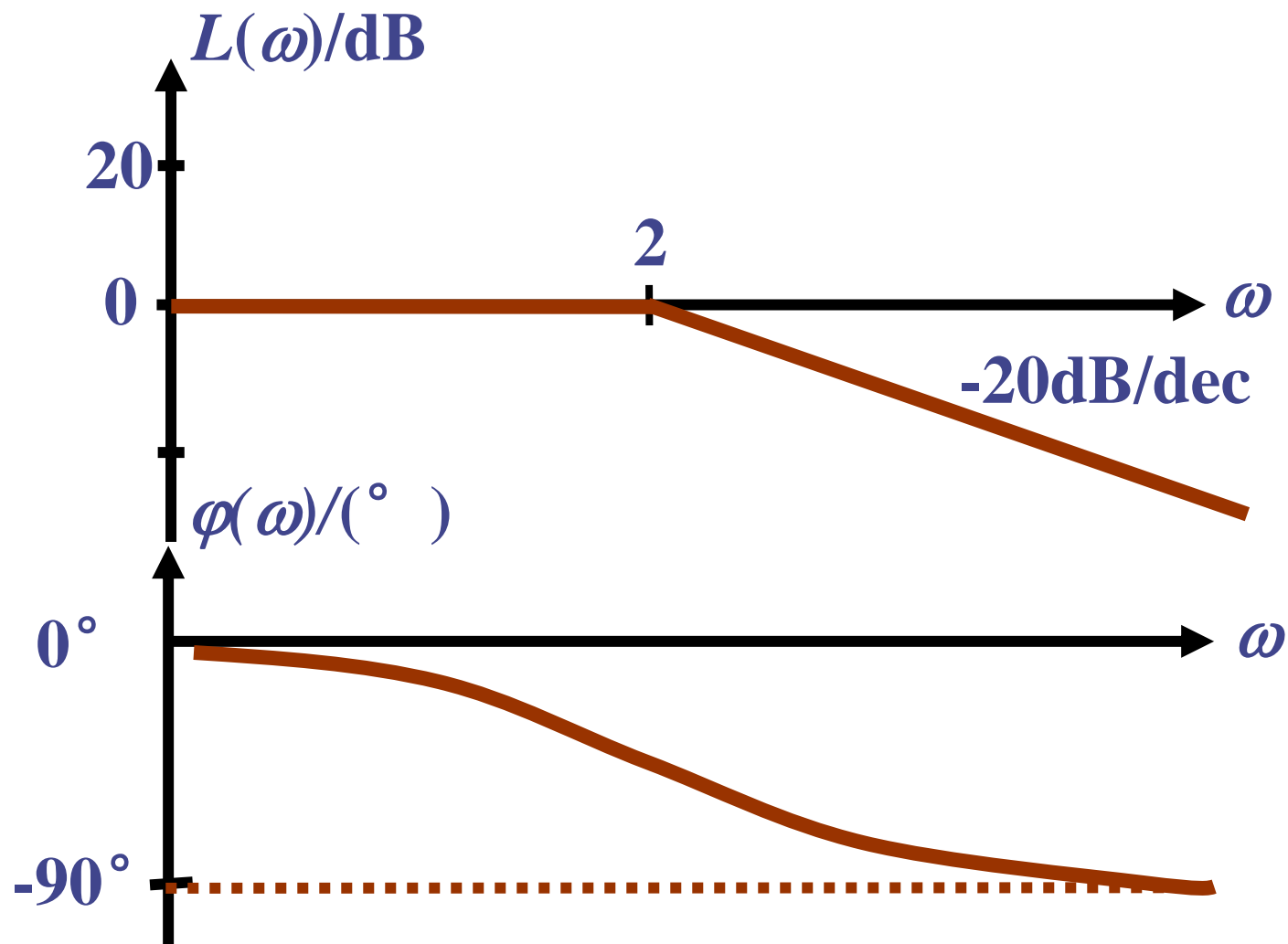
$$L(\omega) = 20\lg A(\omega)$$

相频曲线的纵坐标表示相频特性的函数值，均匀分度，单位是度。

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$$



下图是 RC 网络 $G(j\omega) = 1/(1 + jT\omega)$, $T = 0.5$ 时对应的伯德图。



对数坐标图的特点：

- ① 对数坐标图包括两张子图：对数幅频特性曲线图和对数相频特性曲线图；
- ② 对数幅频特性的纵轴为 $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$ 采用线性分度，这样， $A(\omega)$ 每增加10倍， $L(\omega)$ 增加20dB；横坐标采用对数分度，即横轴上的 ω 取对数后标注；
- ③ 对数相频特性横轴也采用对数分度，纵轴为线性分度，单位通常标为度。
- ④ 串联环节的对数坐标图的加性特点。

n 个环节串联的频率特性为

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega)$$

$$= A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} \cdots A_n(\omega)e^{j\varphi_n(\omega)}$$

$$= A_1(\omega) A_2(\omega) \cdots A_n(\omega) e^{j[\varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_n(\omega)]}$$

于是, 对应的对数幅频特性 $L(\omega)$ 为

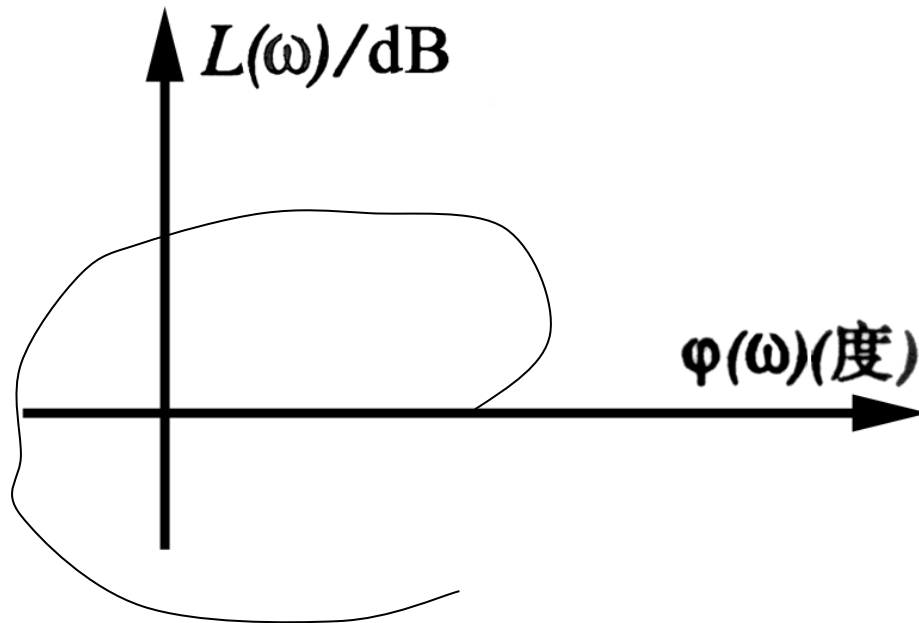
$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg A_1(\omega) A_2(\omega) \cdots A_n(\omega) \\ &= 20 \lg A_1(\omega) + 20 \lg A_2(\omega) + \cdots + 20 \lg A_n(\omega) \\ &= L_1(\omega) + L_2(\omega) + \cdots + L_n(\omega) \end{aligned}$$

对应的对数相频特性 $\phi(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \angle G(j\omega) \\ &= \phi_1(\omega) + \phi_2(\omega) + \cdots + \phi_n(\omega) \end{aligned}$$

3. 对数幅相图（Nichols图）

对数幅相图是将对数幅频特性和对数相频特性的两条曲线，在以角频率为参变量的意义下合成为一张图，如下图所示。



5.2.2 典型环节的频率特性

控制系统中常见的典型环节有

1) 比例环节: K

2) 积分环节: $1 / s$

3) 惯性环节: $1 / (Ts + 1)$

4) 微分环节: s

比例微分环节 $1 + \tau s$

二阶微分环节 $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$

5) 二阶振荡环节: $1 / (T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)$

6) 滞后环节: $e^{-\tau s}$

1. 比例环节

传递函数为 $G(s) = K$

频率特性为 $G(j\omega) = K$

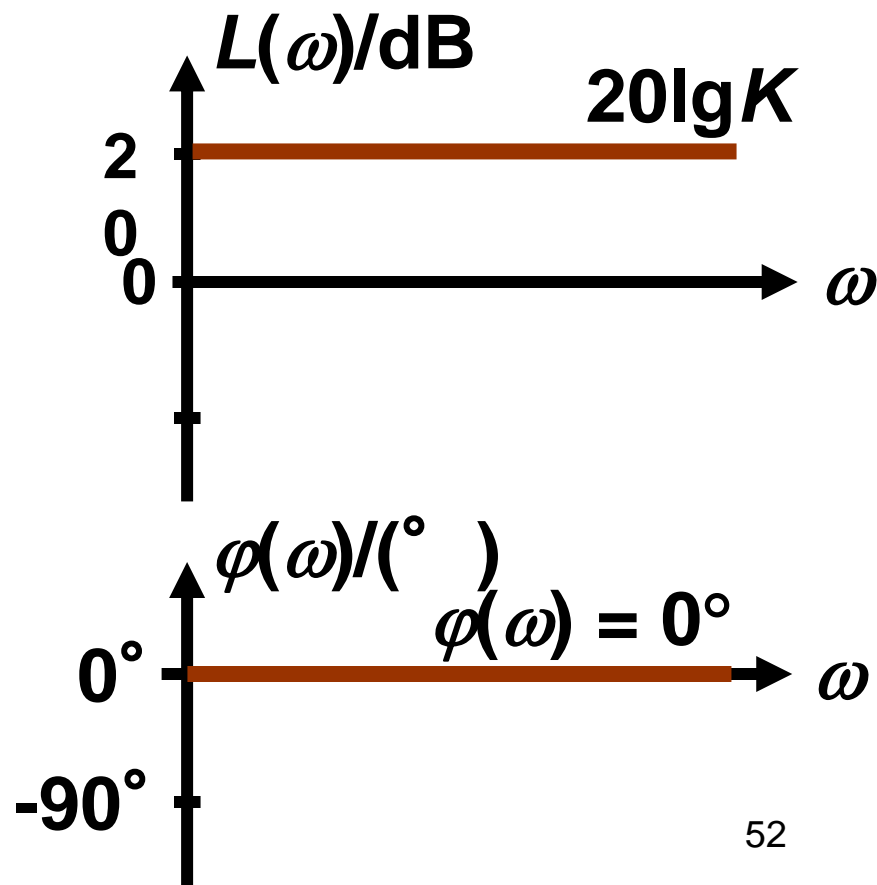
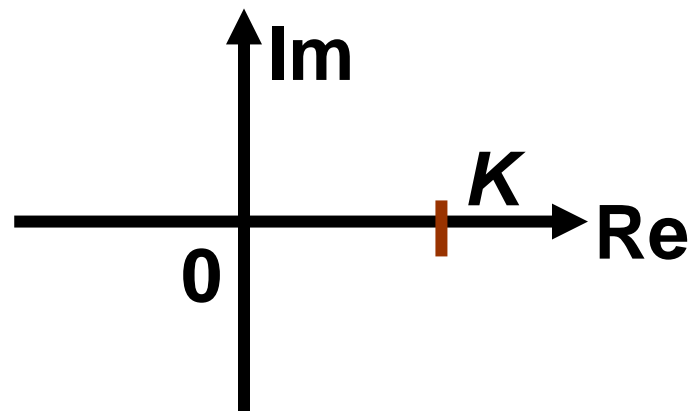
(1) 极坐标图

$$A(\omega) = K \quad \varphi(\omega) = 0^\circ$$

(2) 伯德图

$$L(\omega) = 20\lg K$$

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$



2. 积分环节

频率特性

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

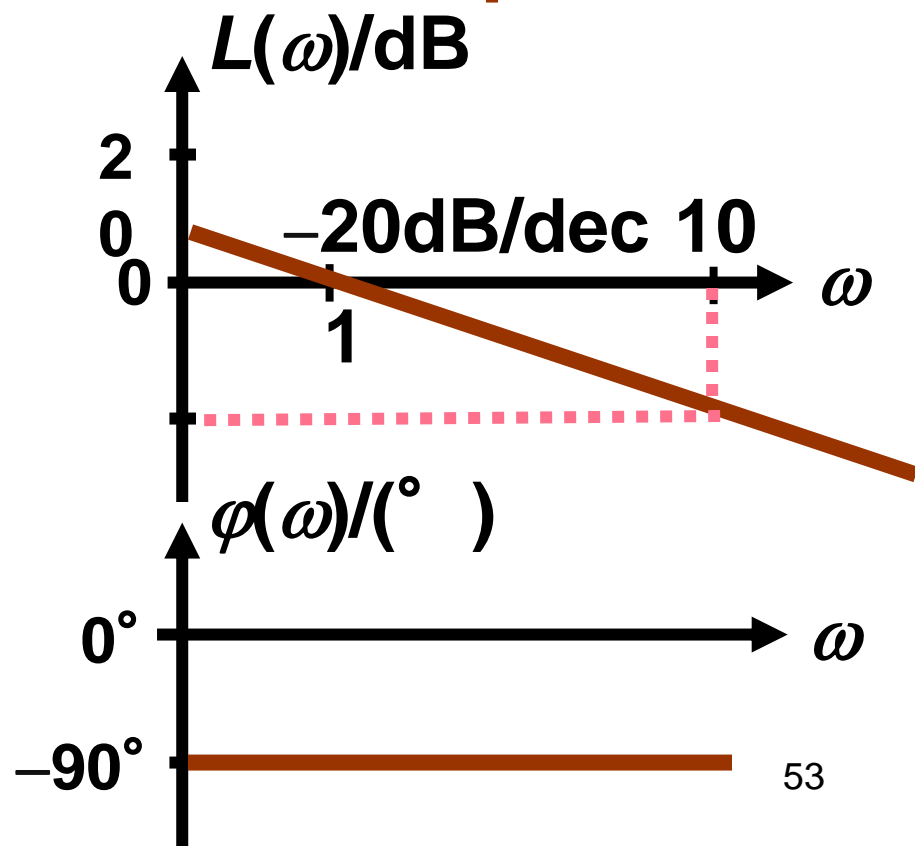
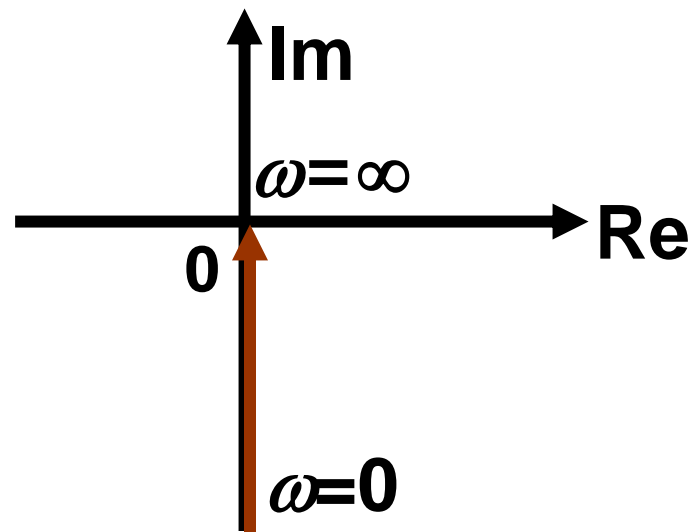
(1) 极坐标图

$$A(\omega) = \frac{1}{\omega} \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

(2) 伯德图

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = -20\lg \omega$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ$$



3. 惯性环节

频率特性为 $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

(1) 极坐标图

实部与虚部表达式为: $G(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - j \frac{\omega T}{1+\omega^2 T^2}$

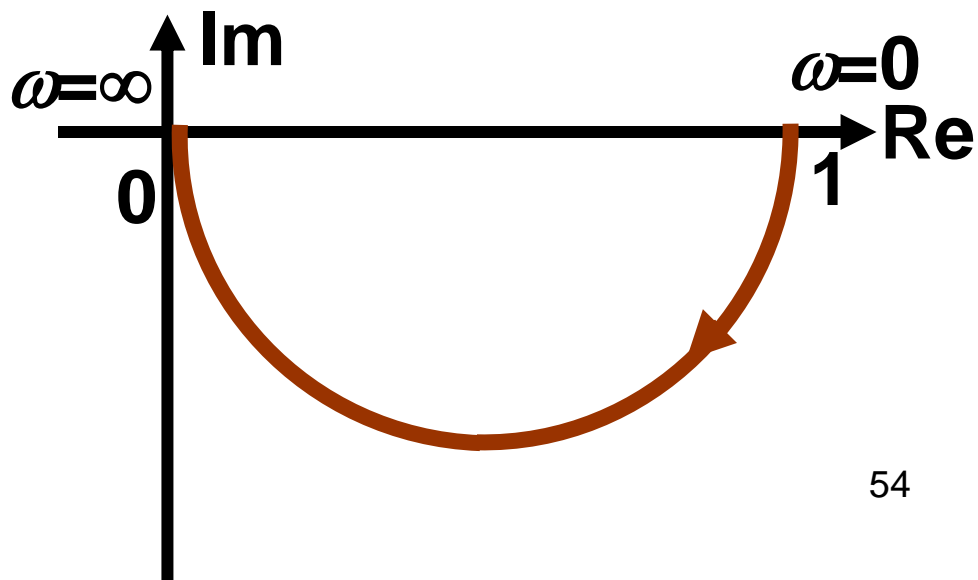
其模角表达式为: $G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\arctan \omega T$

$$\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)} = -\omega T \quad \frac{\text{Im}^2(\omega)}{\text{Re}^2(\omega)} = (\omega T)^2$$

$$\text{Re}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{\text{Im}^2(\omega)}{\text{Re}^2(\omega)}}$$

$$\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega) = \text{Re}(\omega)$$

$$\left(\text{Re}(\omega) - \frac{1}{2}\right)^2 + \text{Im}^2(\omega) = \frac{1}{2^2}$$



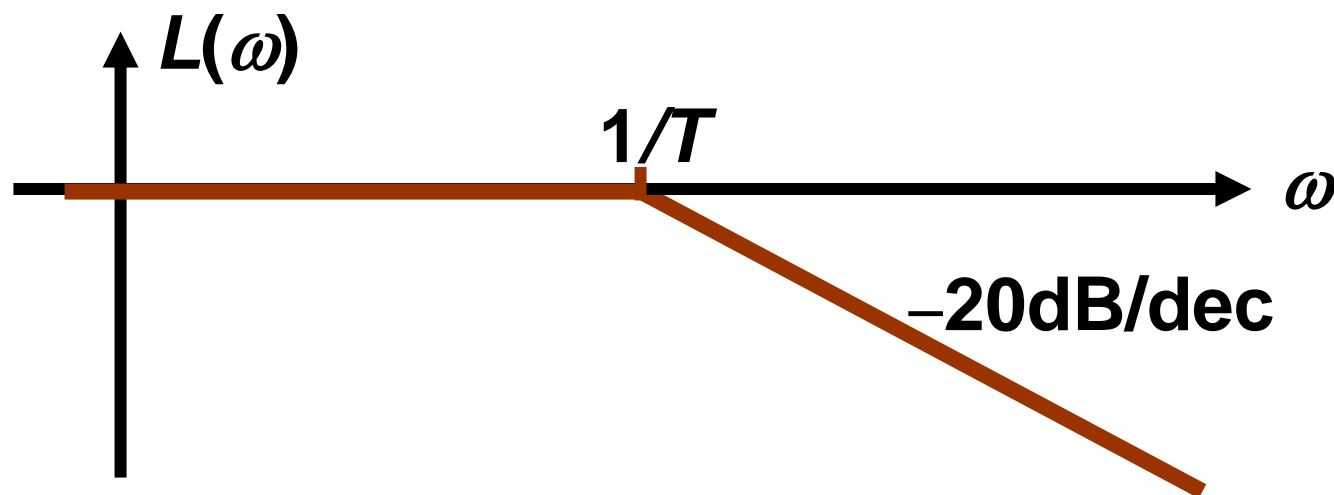
(2) 伯德图

对数幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

(1) 当 $\omega \ll 1/T$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg 1 = 0$

(2) 当 $\omega \gg 1/T$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg \omega T$



因此, 惯性环节的对数幅频特性曲线可用两条直线近似表示, 这两条直线称为渐近线。两条直线交于 $\omega T = 1$ 或 $\omega = 1/T$ 。频率 $1/T$ 称为惯性环节的交接频率或转折频率。

用渐近线近似表示 $L(\omega)$ ，必然存在误差 $\Delta L(\omega)$ ， $\Delta L(\omega)$ 可按以下公式计算：

$$\Delta L(\omega) = L(\omega) - L_a(\omega)$$

式中， $L(\omega)$ 表示准确值， $L_a(\omega)$ 表示近似值，有

$$\Delta L(\omega) = \begin{cases} -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} & \omega \ll 1/T \\ -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} + 20 \lg \omega T & \omega \gg 1/T \end{cases}$$

用渐近线代替对数幅频特性曲线时，最大误差发生在转折频率处，即 $\omega = 1/T$ 处。具体地

$$\Delta L(\omega) = L(\omega) - L_a(\omega) \Big|_{\omega=1/T} = -3.03 \text{ dB}$$

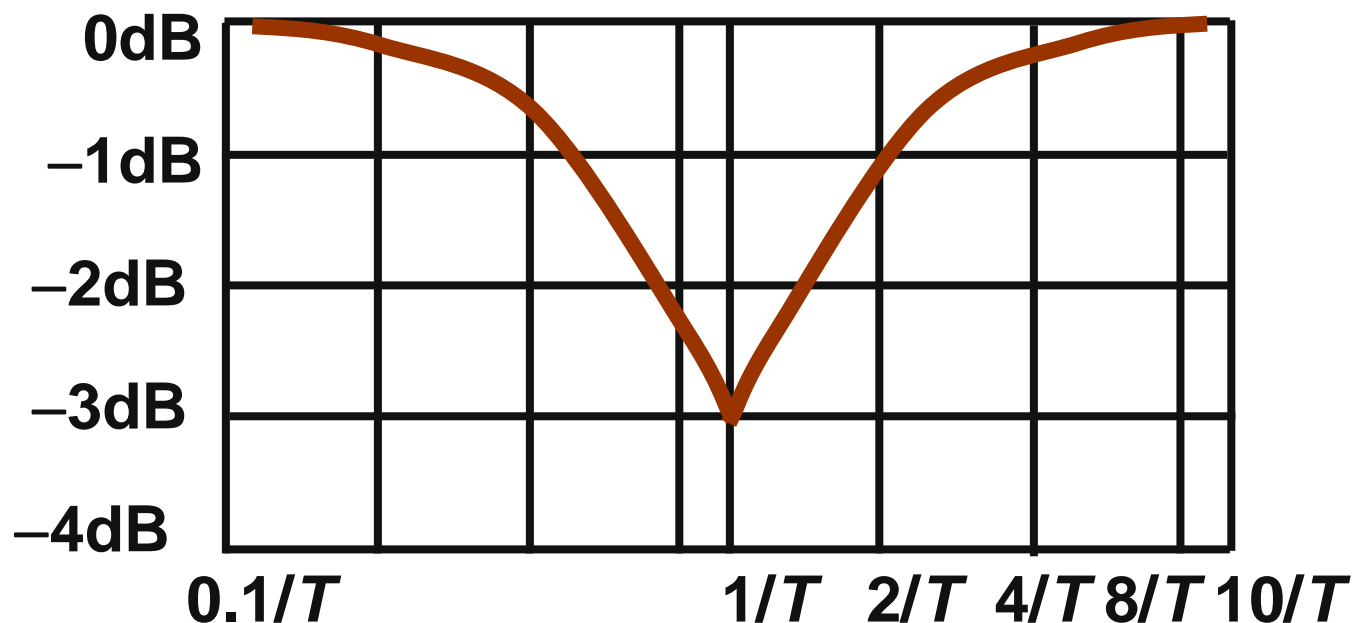
在高于转折频率一个倍频处，即 $\omega = 2 / T$ 的误差

$$\begin{aligned}\Delta L(\omega) &= L(\omega) - L_a(\omega) \\ &= -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} + 20 \lg \omega T = -0.97 \text{ dB}\end{aligned}$$

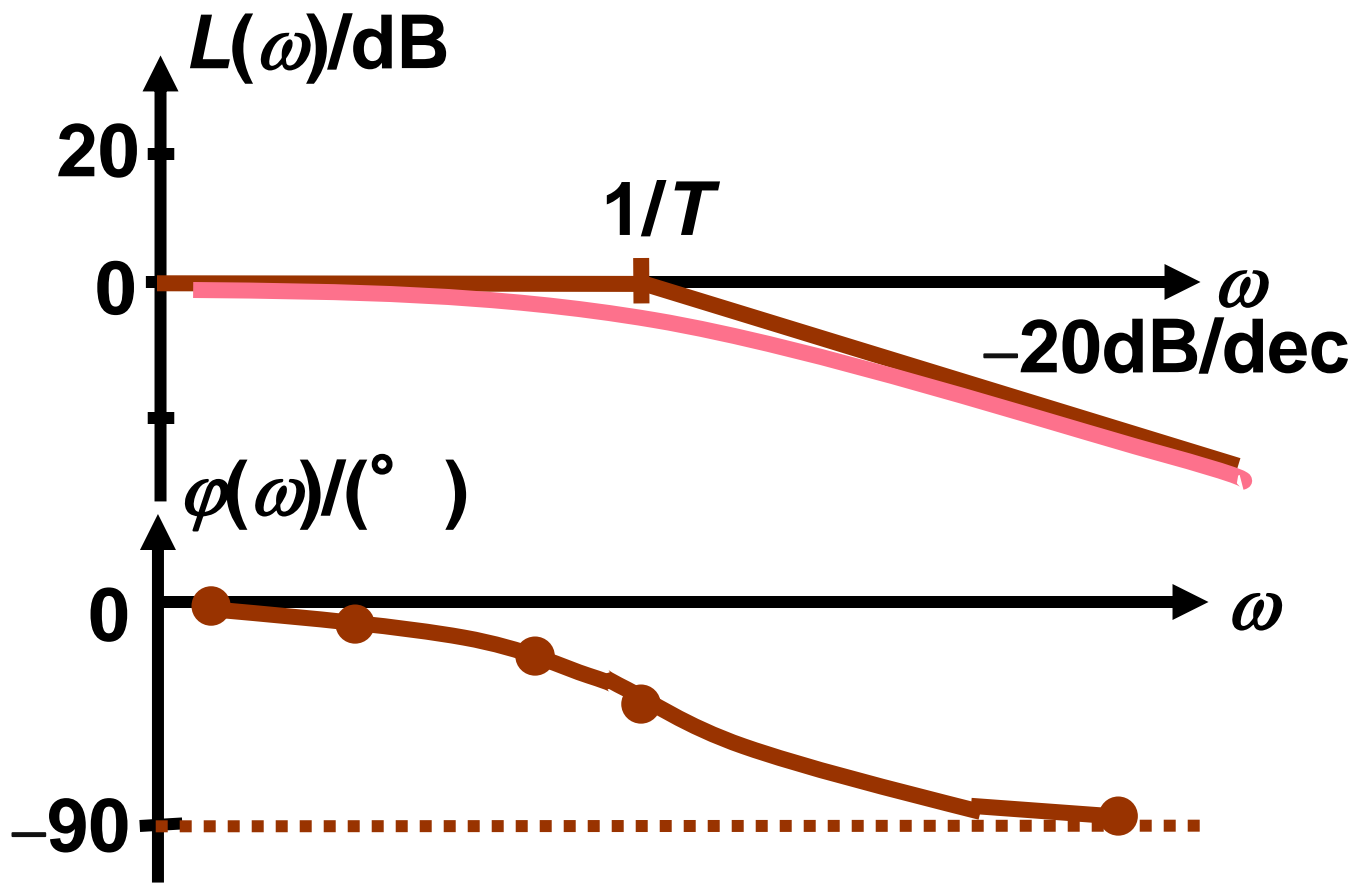
在低于转折频率一个倍频处，即 $\omega = 1 / (2T)$ 的误差

$$\begin{aligned}\Delta L(\omega) &= L(\omega) - L_a(\omega) \\ &= -20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} - 0 = -0.97 \text{ dB}\end{aligned}$$

上述惯性环节在转折频率左右的详细误差曲线可如下图所示：



如图可见，交接频率的地方误差最大，约-3dB。



相频特性为: $\phi(\omega) = -\arctan \omega T$

$$\omega T = 0 \quad \phi(\omega) = 0^{\circ}$$

$$\omega T = 0.3 \quad \phi(\omega) = -16.7^{\circ}$$

$$\omega T = 0.8 \quad \phi(\omega) = -38.7^{\circ}$$

$$\omega T = 1 \quad \phi(\omega) = -45^{\circ}$$

$$\omega T \rightarrow \infty \quad \phi(\omega) = -90^{\circ}$$

4. 微分环节

频率特性 $G(j\omega) = j\omega$

(1) 极坐标图

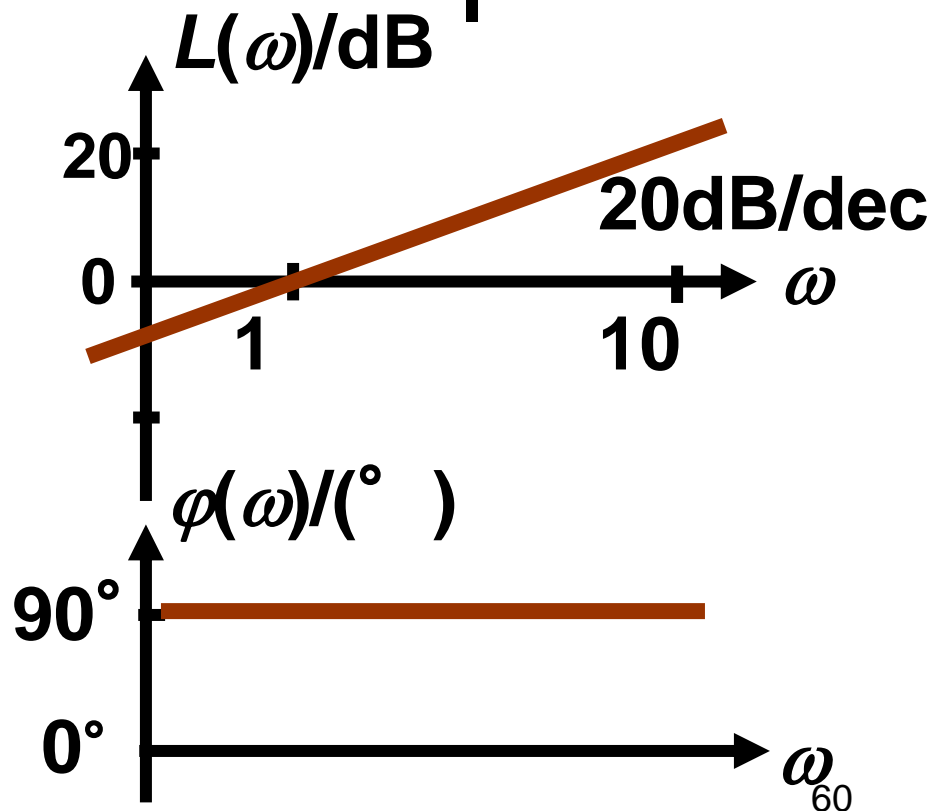
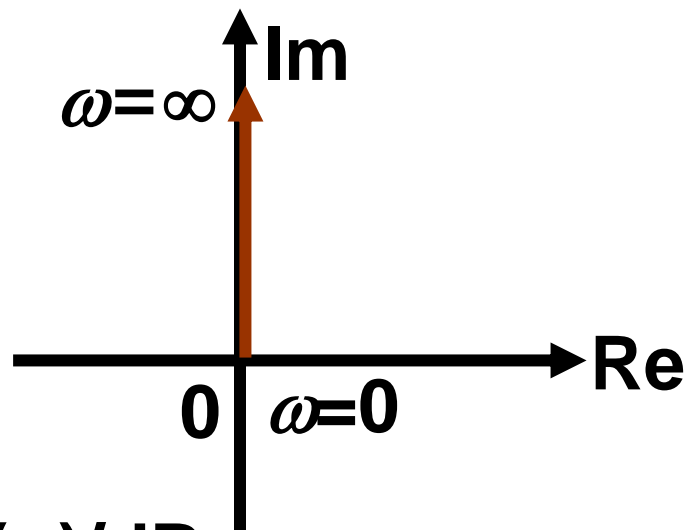
$$A(\omega) = \omega \quad \varphi(\omega) = +90^\circ$$

(2) 伯德图

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg \omega$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ$$

由于微分环节与积分环节的传递函数互为倒数, $L(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 仅相差一个符号。因此, 伯德图是对称于 ω 轴的。



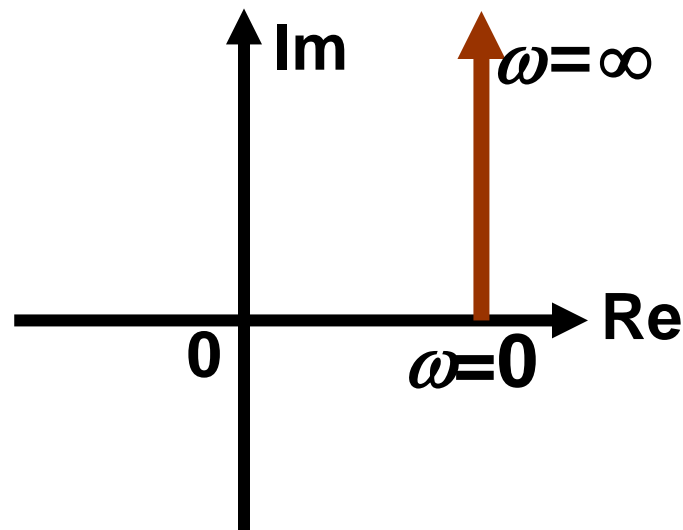
一阶微分环节

频率特性 $G(j\omega) = 1 + j\omega T$

(1) 极坐标图

幅频特性为 $A(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$

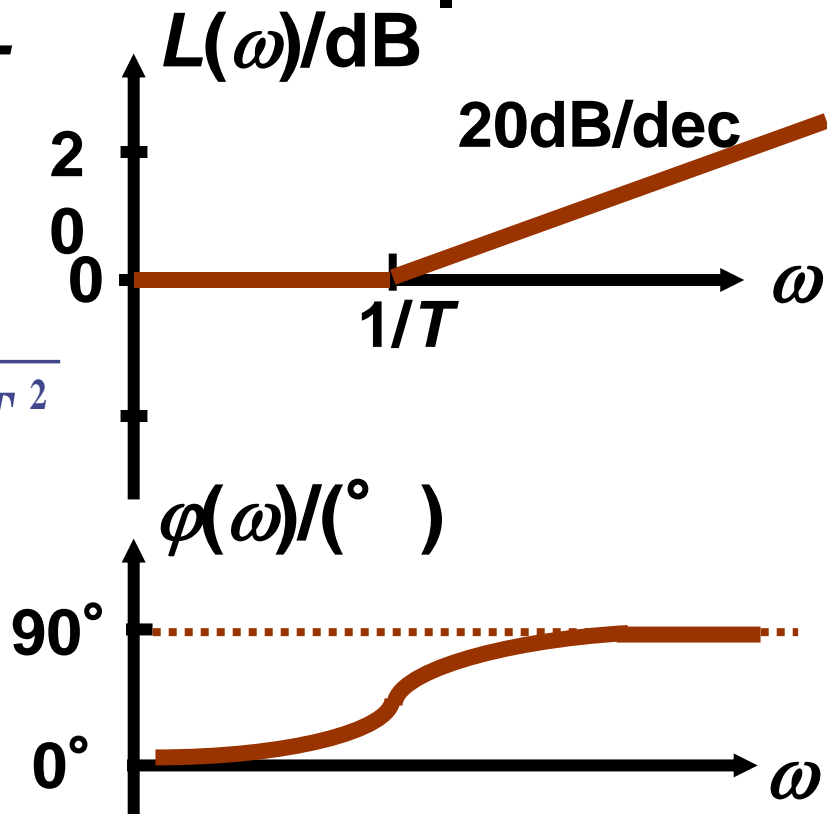
相频特性为 $\varphi(\omega) = \arctan \omega T$



(2) 伯德图

幅频特性 $L(\omega) = 20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$

相频特性 $\varphi(\omega) = \arctan \omega T$



5. 二阶振荡环节

频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T)^2 + j2\zeta T\omega + 1}$$
$$= \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

(1) 极坐标图

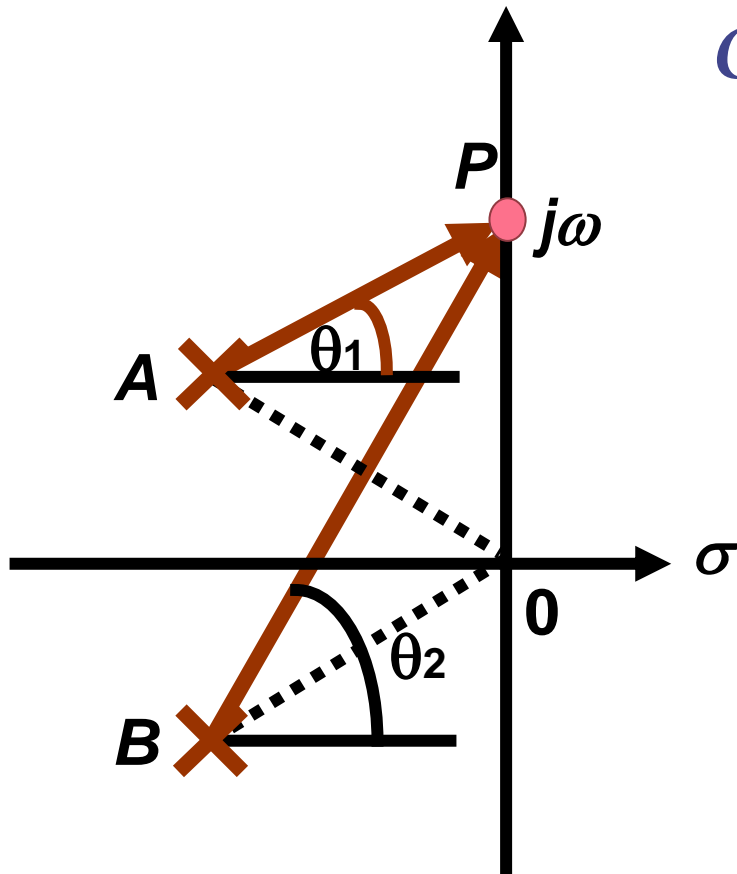
幅频特性为

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}}$$

相频特性为

$$\phi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

根据零-极点分布图——绘制极坐标图



$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\omega_n^2}{(s+A)(s+B)} \Big|_{s=j\omega}$$

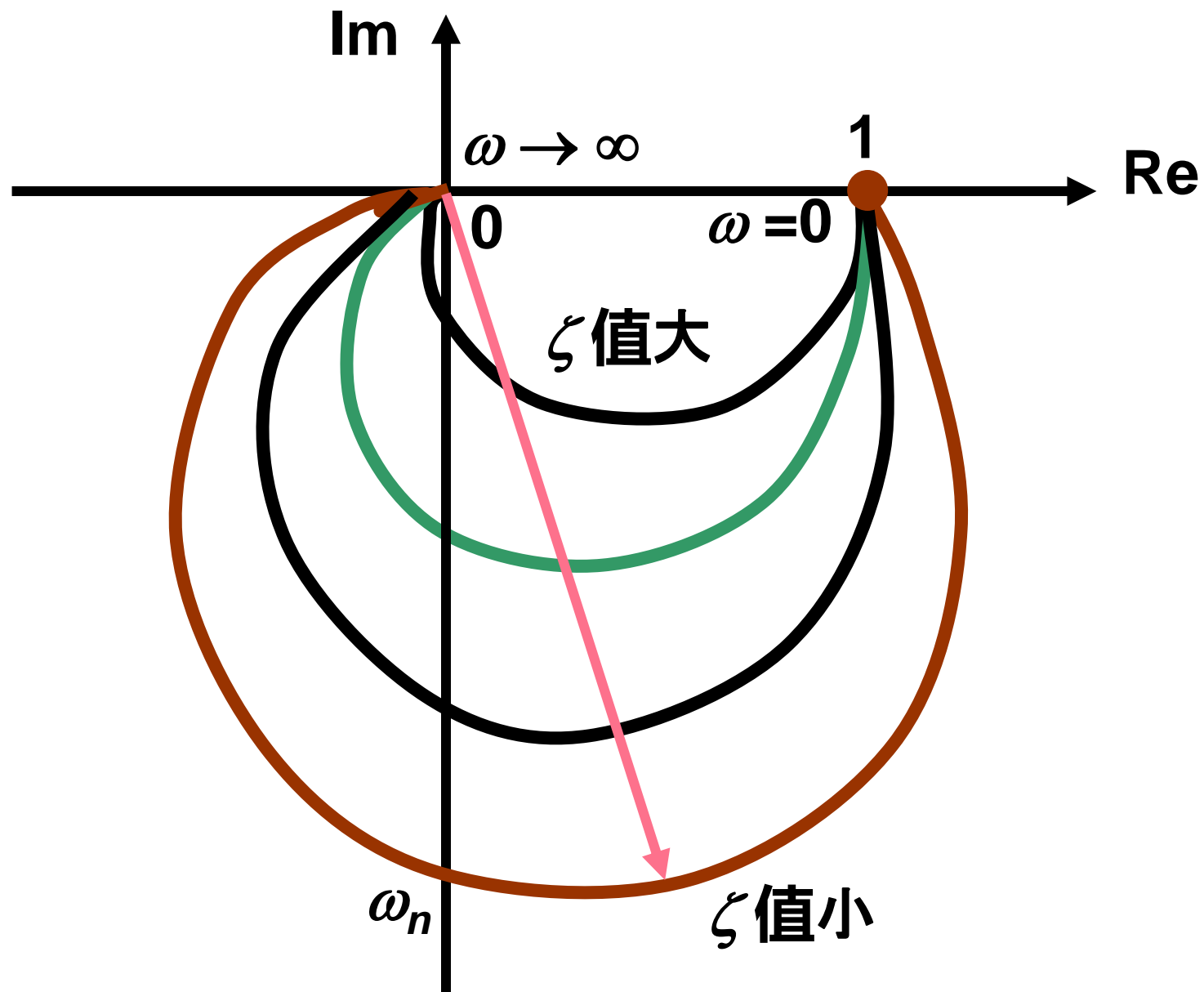
$$A(\omega) = \frac{\omega_n^2}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BP}|}$$

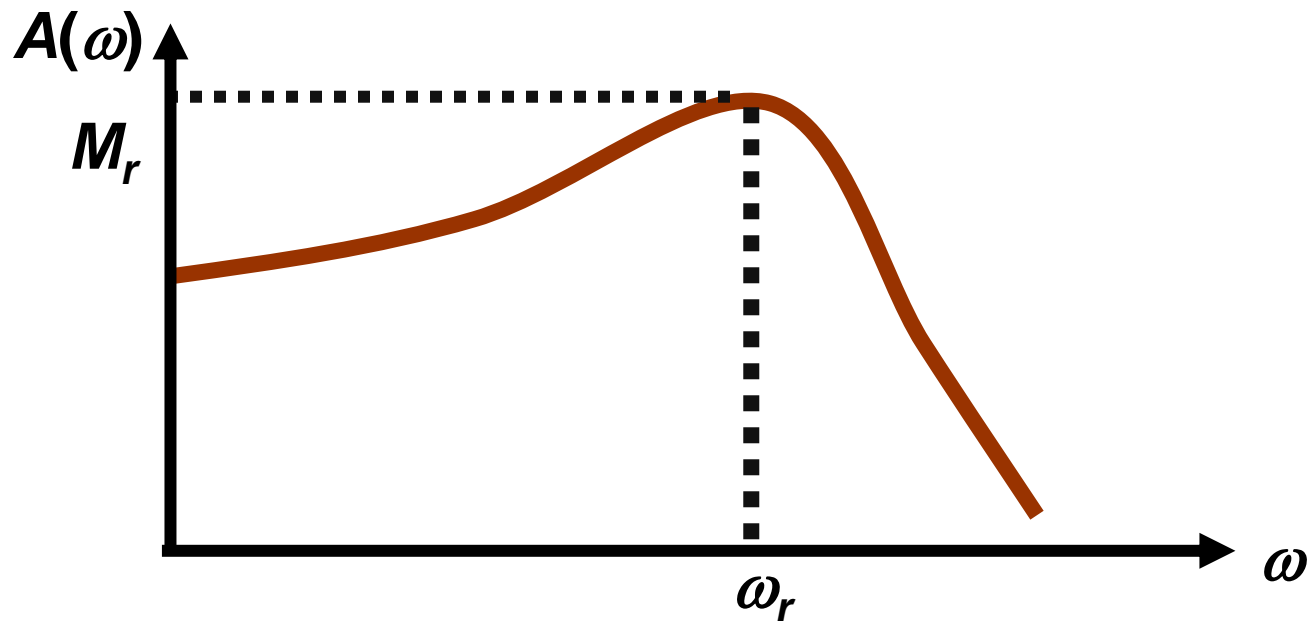
$$\varphi(\omega) = -\theta_1 - \theta_2$$

$$G(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$G(j\omega_n) = 1/(2\zeta) \angle -90^\circ$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$$





由图可见，幅频特性的最大值随 ζ 减小而增大其值可能大于1。可以求得在系统参数所对应的条件下，在某一频率 $\omega = \omega_r$ （谐振频率）处振荡环节会产生谐振峰值 M_r 。在产生谐振峰值处，必有

$$\left. \frac{d}{d\omega} A(\omega) = 0 \right|_{\omega=\omega_r} \quad \omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

$$M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad M_r = A(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

可以看出：

- 1) $\zeta > 0.707$ ，没有峰值， $A(\omega)$ 单调衰减；
 - 2) $\zeta = 0.707$ ， $M_r = 1$ ， $\omega_r = 0$ ，这正是幅频特性曲线的初始点；
 - 3) $\zeta < 0.707$ ， $M_r > 1$ ， $\omega_r > 0$ ，幅频 $A(\omega)$ 出现峰值。而且 ζ 越小，峰值 M_r 及谐振频率 ω_r 越高；
 - 4) $\zeta = 0$ ，峰值 M_r 趋于无穷，谐振频率 ω_r 趋于 ω_n 。
- 这表明外加正弦信号的频率和自然振荡频率相同，引起环节的共振。环节处于临界稳定的状态。

峰值过高，意味着动态响应的超调大，过程不平稳。对振荡环节或二阶系统来说，相当于阻尼比 ζ 小，这和时域分析法一章所得结论是一致的。

(2) 伯德图

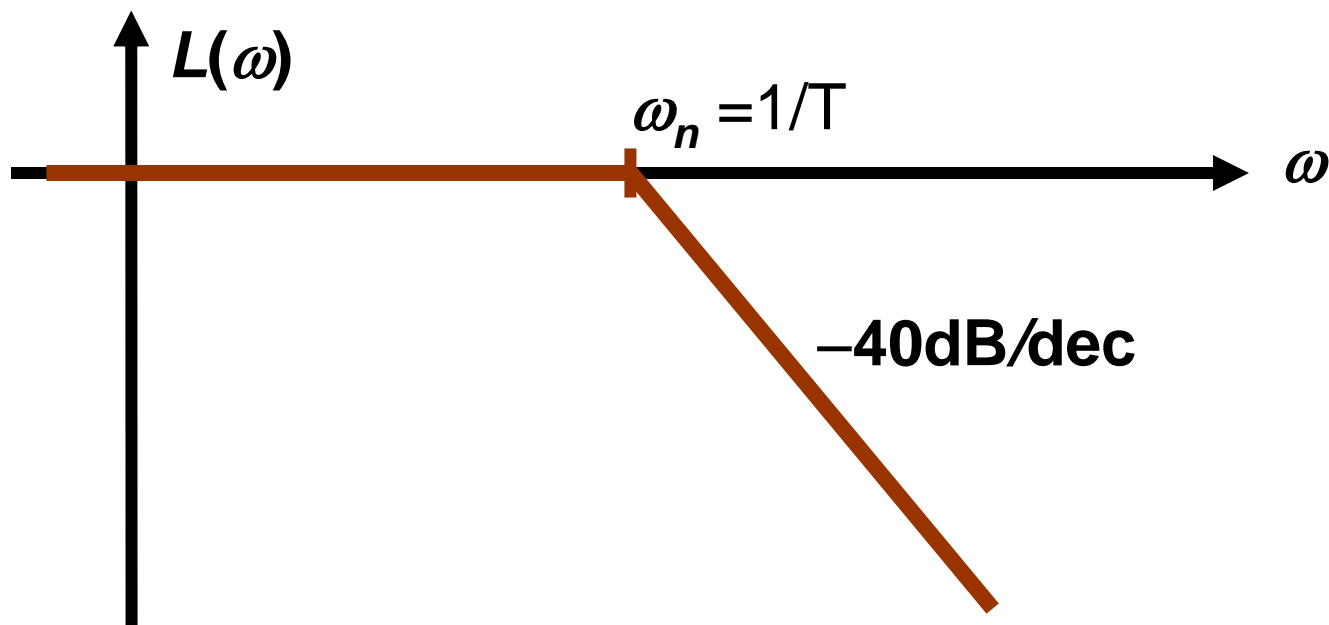
幅频特性

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\zeta^2 \omega^2 T^2}}$$

根据上式可以作出两条渐近线。

当 $\omega \ll \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx 0$;

当 $\omega \gg \omega_n$ 时, $L(\omega) \approx -20 \lg \omega^2 T^2 = -40 \lg \omega T$ 。

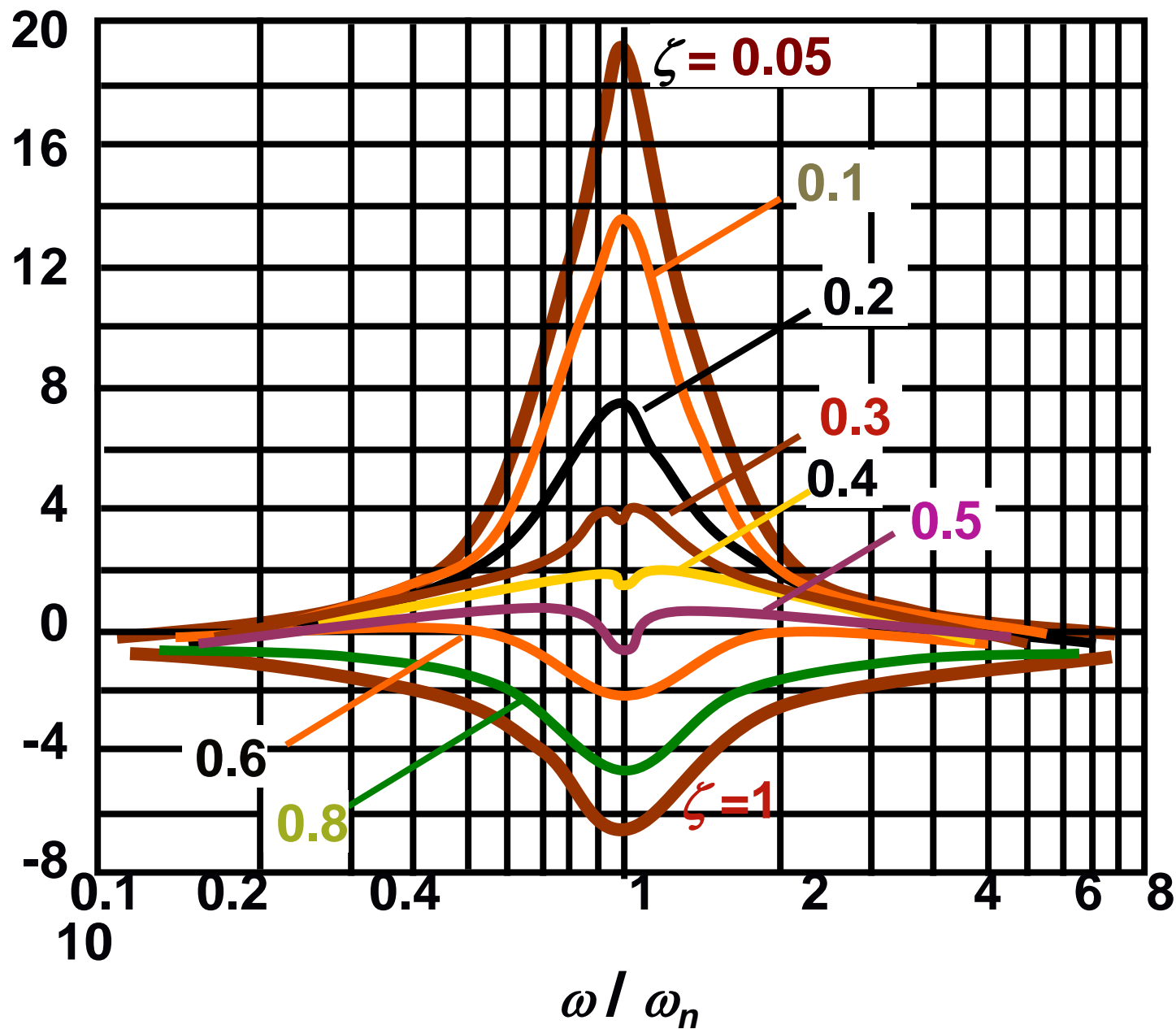


这是一条斜率为 -40dB/dec 直线，和零分贝线交于 $\omega = \omega_n$ 的地方。故振荡环节的交接频率为 ω_n 。

误差计算公式是：

$$\Delta L(\omega, \xi) = \begin{cases} -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2\xi\omega / \omega_n)^2} \\ -20 \lg \sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2\xi\omega / \omega_n)^2} + 20 \lg \omega^2 / \omega_n^2 \end{cases}$$

下图为 $\Delta L(\omega, \zeta)$ 的曲线



相频特性

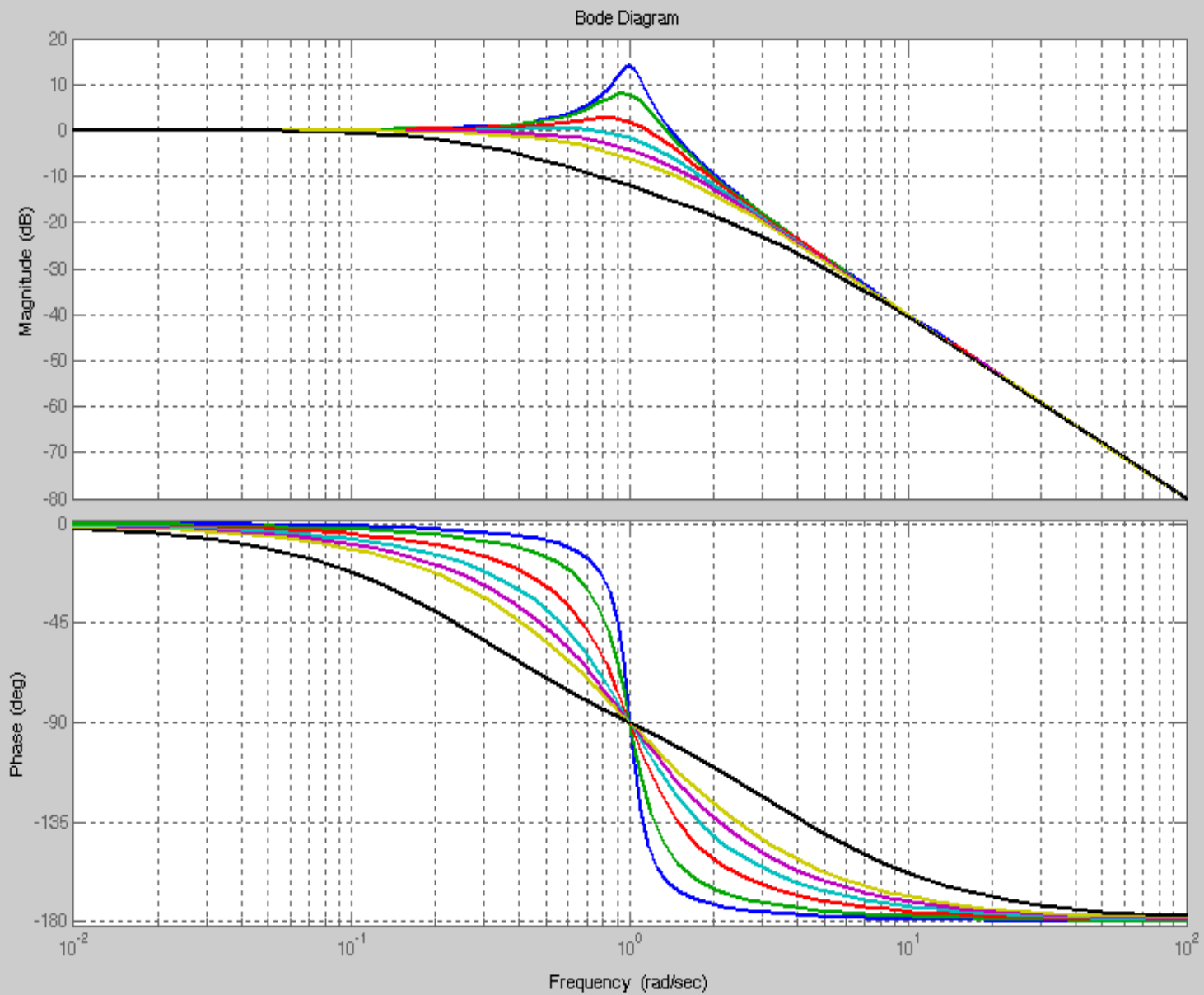
$$\varphi(\omega) = -\arctan \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

$$\omega = 0 \quad \varphi(0) = 0^\circ$$

$$\omega = \omega_n \quad \varphi(\omega_n) = -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \varphi(\infty) = -180^\circ$$

由于系统阻尼比取值不同， $\varphi(\omega)$ 在 $\omega = \omega_n$ 邻域的角度变化率也不同，阻尼比越小，变化率越大。



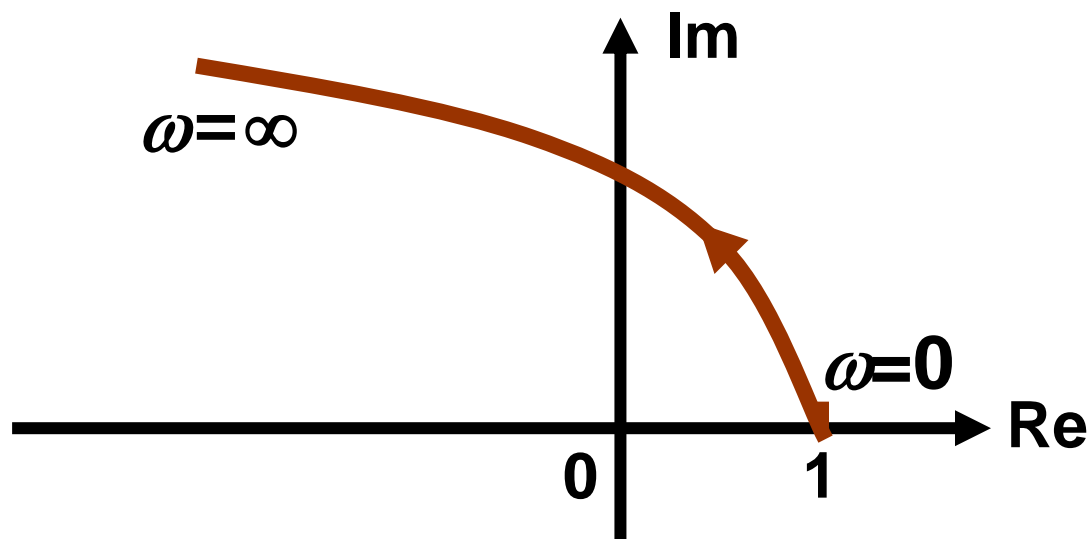
0.1,0.2,0.4,0.6,0.8,1,2

二阶微分环节

频率特性为

$$G(j\omega) = \tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 \Big|_{s=j\omega} = (1 - \tau^2\omega^2) + j2\zeta\tau\omega$$

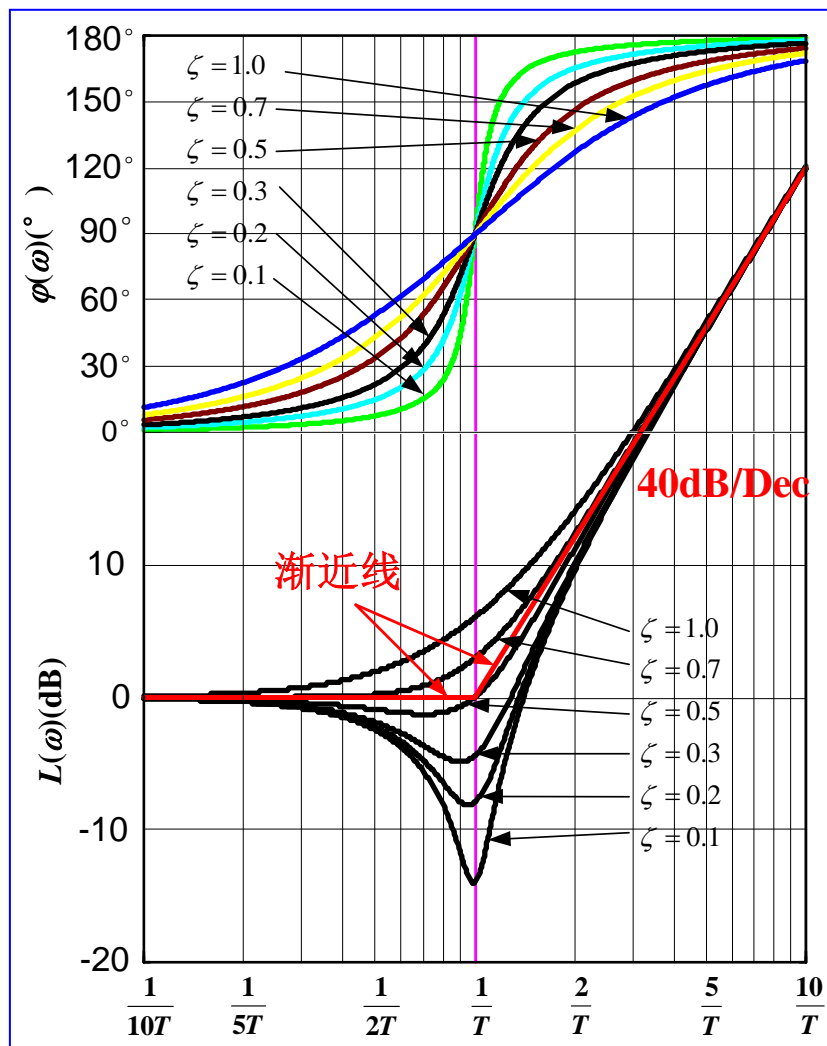
极坐标图为：



由于二阶微分环节与振荡环节的传递函数互为倒数，因此，其伯德图可以参照振荡环节的伯德图翻转画出。

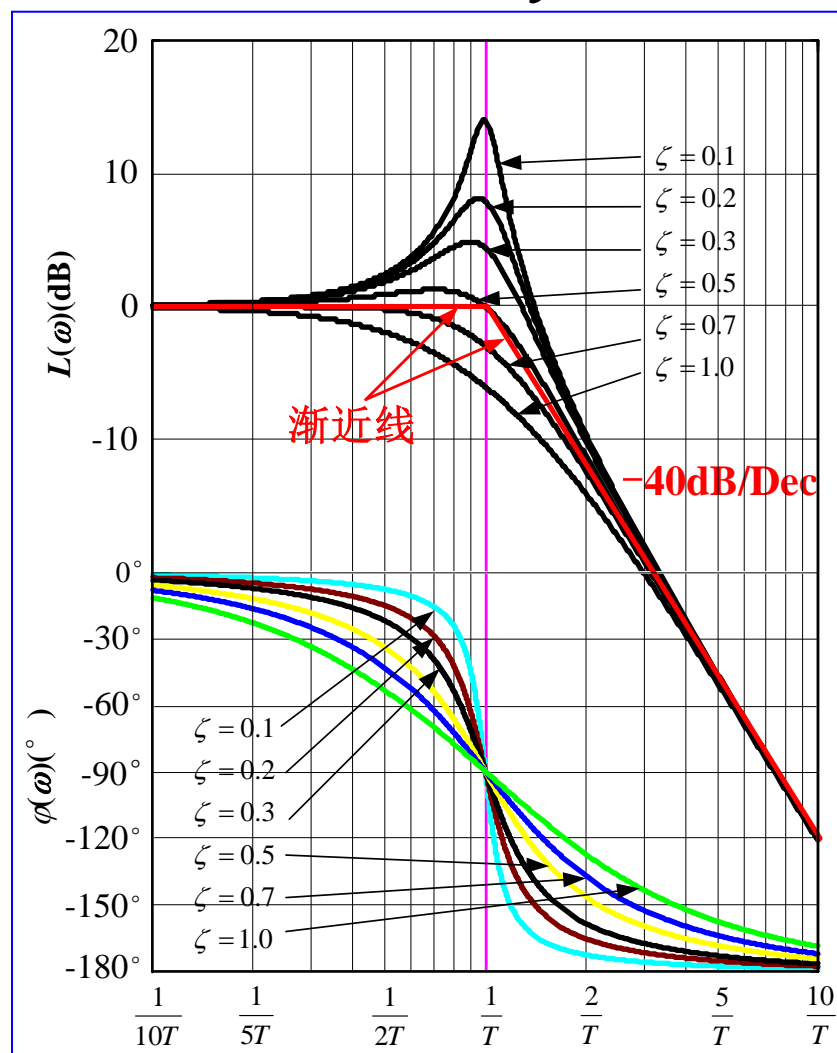
二阶微分

$$G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$$



振荡环节

$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$



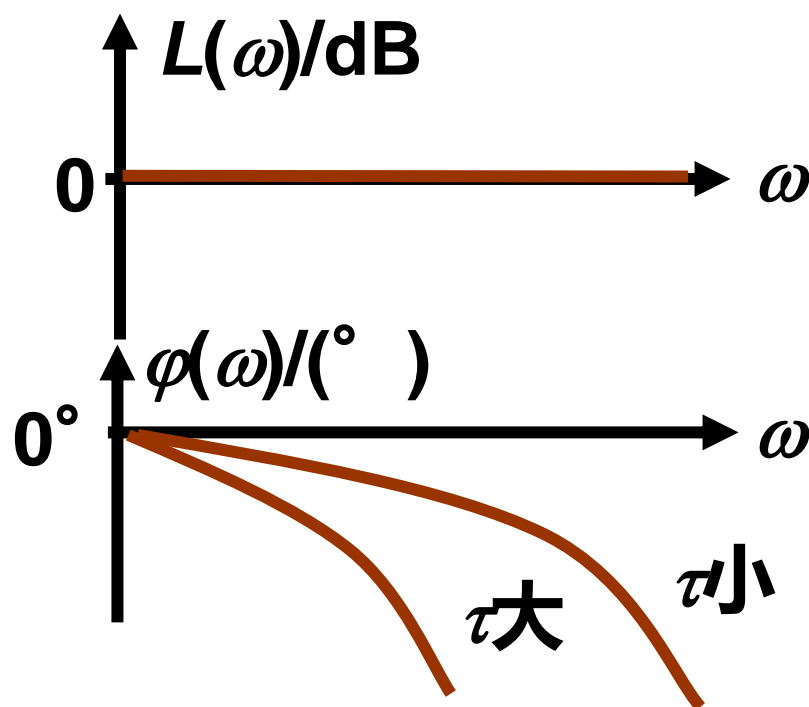
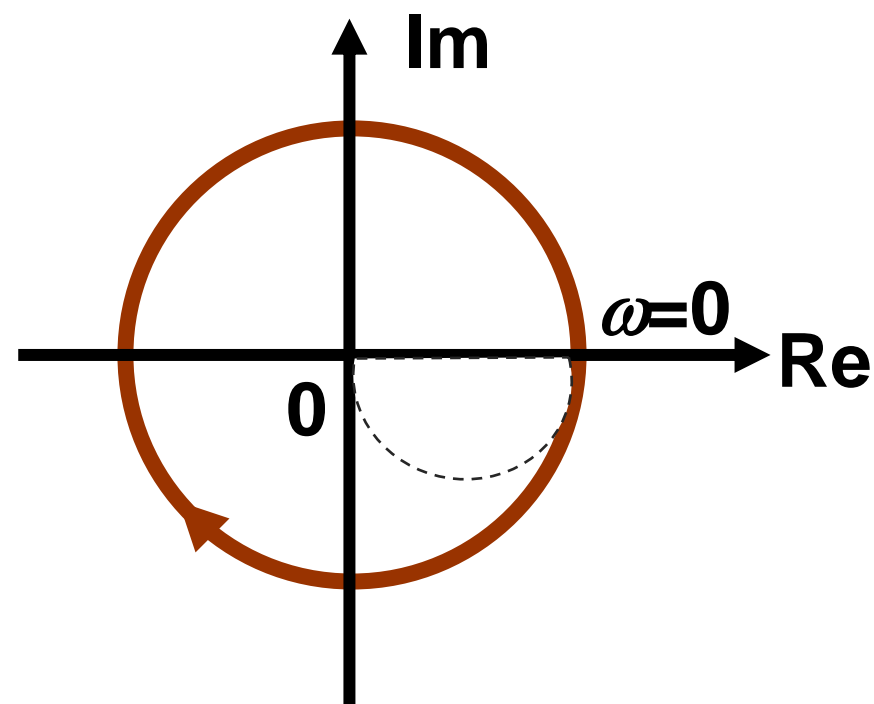
延迟环节

频率特性为： $G(j\omega) = e^{-j\omega T}$

幅值为： $A(\omega) = |e^{-j\omega T}| = 1$

相角为： $\varphi(\omega) = -\omega\tau \text{ (rad)} = -57.3\omega\tau(^{\circ})$

由于幅值总是1，相角随频率而变化，其极坐标图为一单位圆。



由于 $\varphi(\omega)$ 随频率的增长而线性滞后，将严重影响系统的稳定性 ⁷⁴

§ 5. 3 系统连接时的频率特性与应用

5.3.1 串联系统的对数频率特性

对 n 个环节串联的系统，其传递函数为

$$G(s) = G_1(s)G_2(s) \cdots G_n(s)$$

其频率特性：

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= G_1(j\omega)G_2(j\omega) \cdots G_n(j\omega) \\ &= A_1(\omega)e^{j\varphi_1(\omega)} A_2(\omega)e^{j\varphi_2(\omega)} \cdots A_n(\omega)e^{j\varphi_n(\omega)} \\ &= \prod_{i=1}^n A_i(\omega)e^{j\sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega)} \end{aligned} \quad (5-18)$$

因此，串联系统的对数幅频特性满足：

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left[\prod_{i=1}^n A_i(\omega) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n 20 \lg A_i(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega) \end{aligned} \quad (5-19)$$

相频特性：

$$\varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) \quad (5-20)$$

由此看出，串联系统的对数幅频特性 $L(\omega)$ 等于各个串联环节的对数幅频特性和；串联系统的相频特性 $\varphi(\omega)$ 等于各个环节相频特性和。

开环伯德图

$L(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 分别都是各典型环节的叠加。

例5-3 已知一单位反馈系统，其开环传函为

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s + 1)}$$

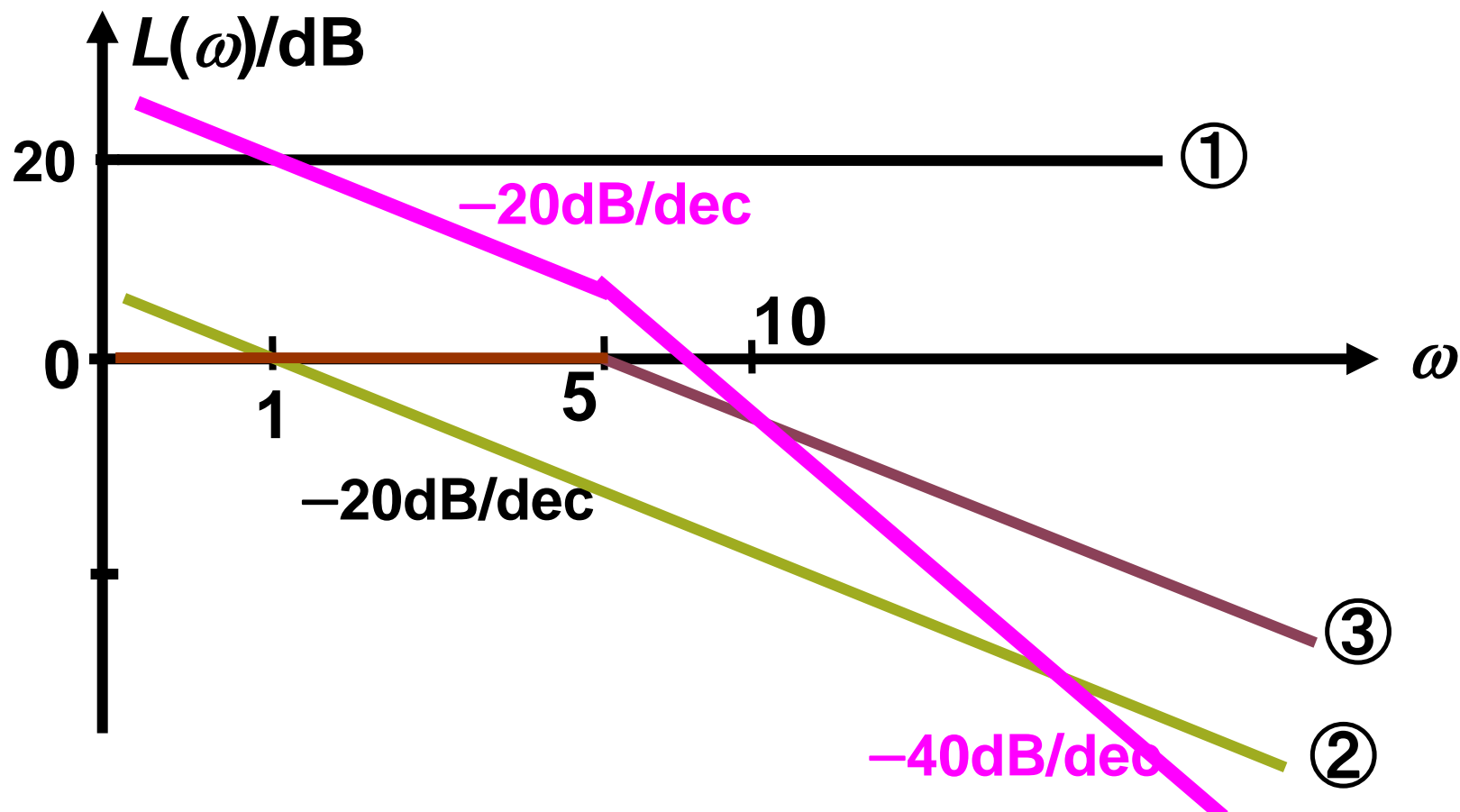
要求绘制伯德图。

解：开环传函由以下三个典型环节组成：

- ① 比例环节 10
- ② 积分环节 $1/s$
- ③ 惯性环节 $1/(0.2s + 1)$

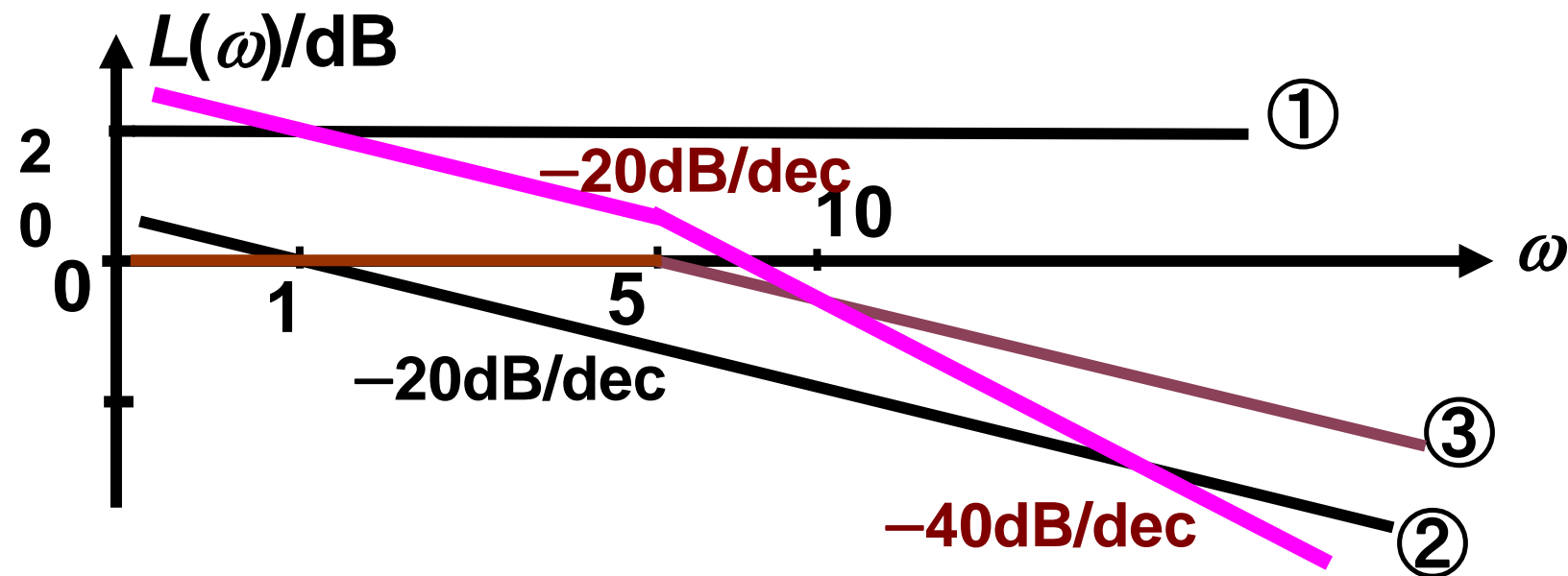
- ① 比例环节 10
- ② 积分环节 $1/j\omega$
- ③ 惯性环节 $1/(0.2j\omega + 1)$

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s + 1)}$$



分析开环对数幅频曲线，有下列特点：

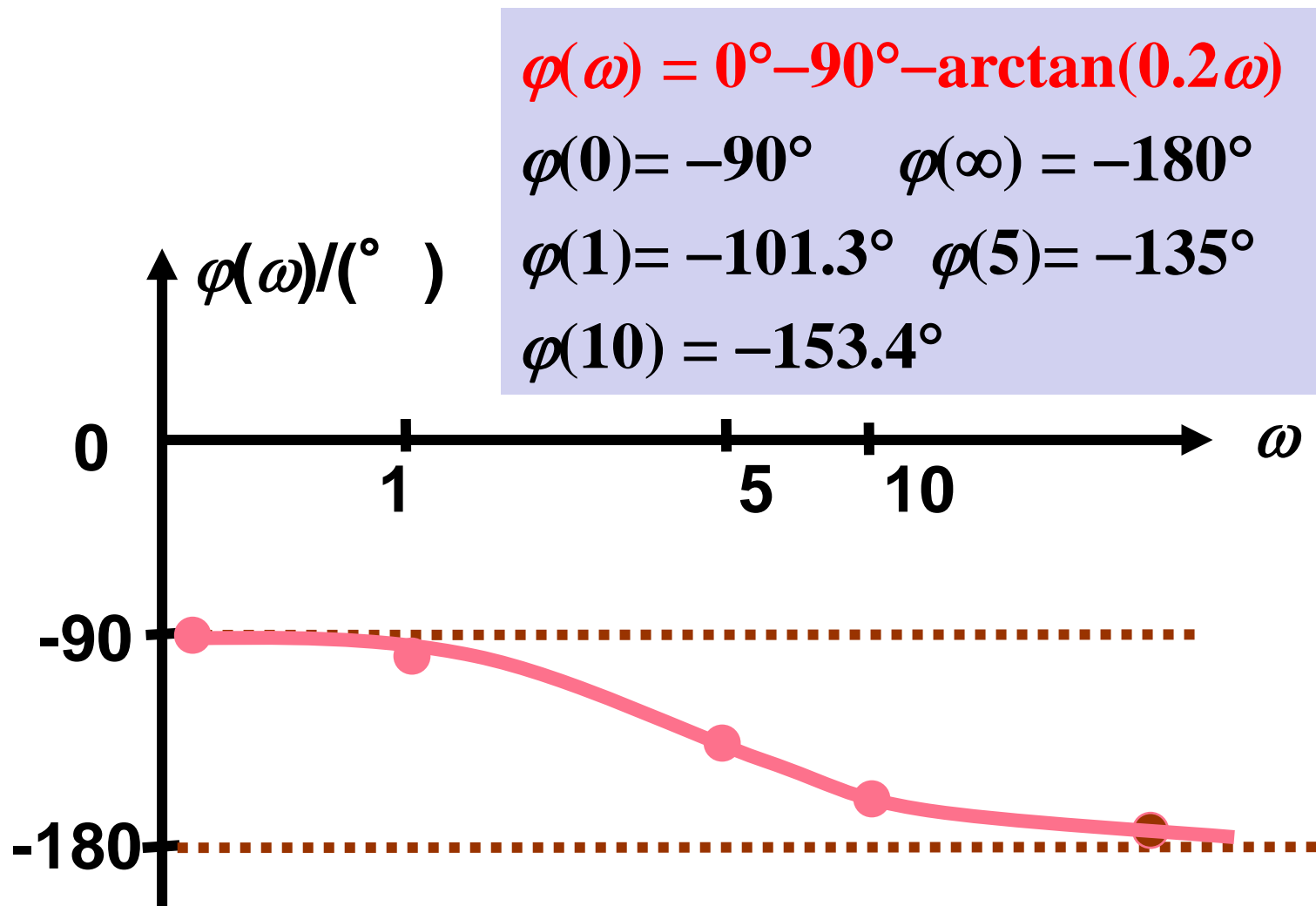
- (1) 最左端直线的斜率为 -20 dB/dec ，这一斜率完全由 $G(s)$ 的积分环节数决定；
- (2) $\omega = 1$ 时，曲线的分贝值等于 $20\lg k$ ；
- (3) 在惯性环节交接频率 5 (rad/s) 处，斜率从 -20dB/dec 变为 -40 dB/dec 。



一般的近似对数幅频曲线特点：

- (1) 最左端直线的斜率为 -20ν dB/dec, ν 是积分环节个数；
- (2) 在 $\omega = 1$ 时，最左端直线或其延长线的分贝值等于 $20 \lg k$
- (3) 在交接频率处，曲线的斜率发生改变，改变多少取决于典型环节种类。例如，在惯性环节后，斜率减少20dB/dec；而在振荡环节后，斜率减少40 dB/dec。

对数相频特性作图时，首先确定低频段的相位角，其次确定高频段的相位角，再在中间选出一些插值点，计算出相应的相位角，将上述特征点连线即得到对数相频特性的草图。



绘制串联系统的对数坐标图的步骤如下：

Step 1. 将串联系统传递函数改写为时间常数形式，即

$$G(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)}$$

Step 2. 将各环节转折频率标在 ω 轴上。

Step 3. 过 $\omega=1$, $L(\omega)=20\lg K$ 点作一条斜率为 $-20 \times v$ dB/dec 的直线，直到第一个转折频率，以上直线作为对数幅频特性的低频段。

Step 4. $L(\omega)$ 由低频向高频延伸，每过一个转折频率，按环节性质改变一次渐近线的斜率。

Step 5. 在各转折频率附近利用误差曲线进行修正，得到更精确的曲线。

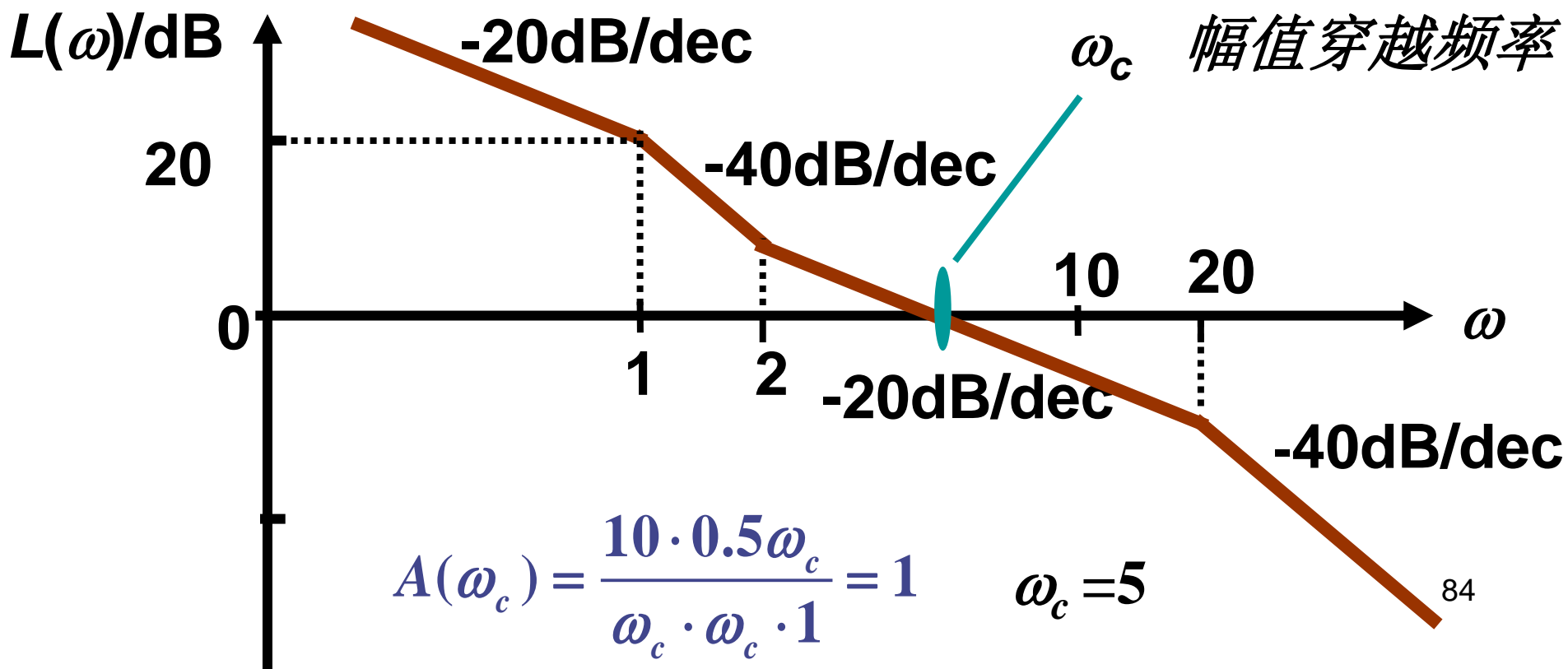
Step 6. 系统的对数相频特性可以由各环节相频特性叠加的方法绘制。

例5-4 绘制单位反馈系统的开环传函为

$$G_k(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+1)(s+20)} = \frac{10(0.5s+1)}{s(s+1)(0.05s+1)}$$

试绘制系统的对数幅频曲线。

解：将传函化简成标准形式



例5-5 设系统传递函数为

$$G(s) = \frac{10(0.01s + 1)}{s(0.1s + 1)(0.2s + 1)}$$

试绘制系统的对数坐标图。

解：系统的频率特性是

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + j0.01\omega)}{j\omega(1 + j0.1\omega)(1 + j0.2\omega)}$$

系统由5个典型环节组成：

惯性环节1：转折频率 $\omega_1 = 1 / 0.2 = 5$, -20dB/dec

惯性环节2：转折频率 $\omega_2 = 1 / 0.1 = 10$, -20dB/dec

比例微分环节：转折频率 $\omega_3 = 1 / 0.01 = 100$, $+20\text{dB/dec}$

积分环节：在 $\omega = 1$ 处穿越 0dB 线, -20dB/dec

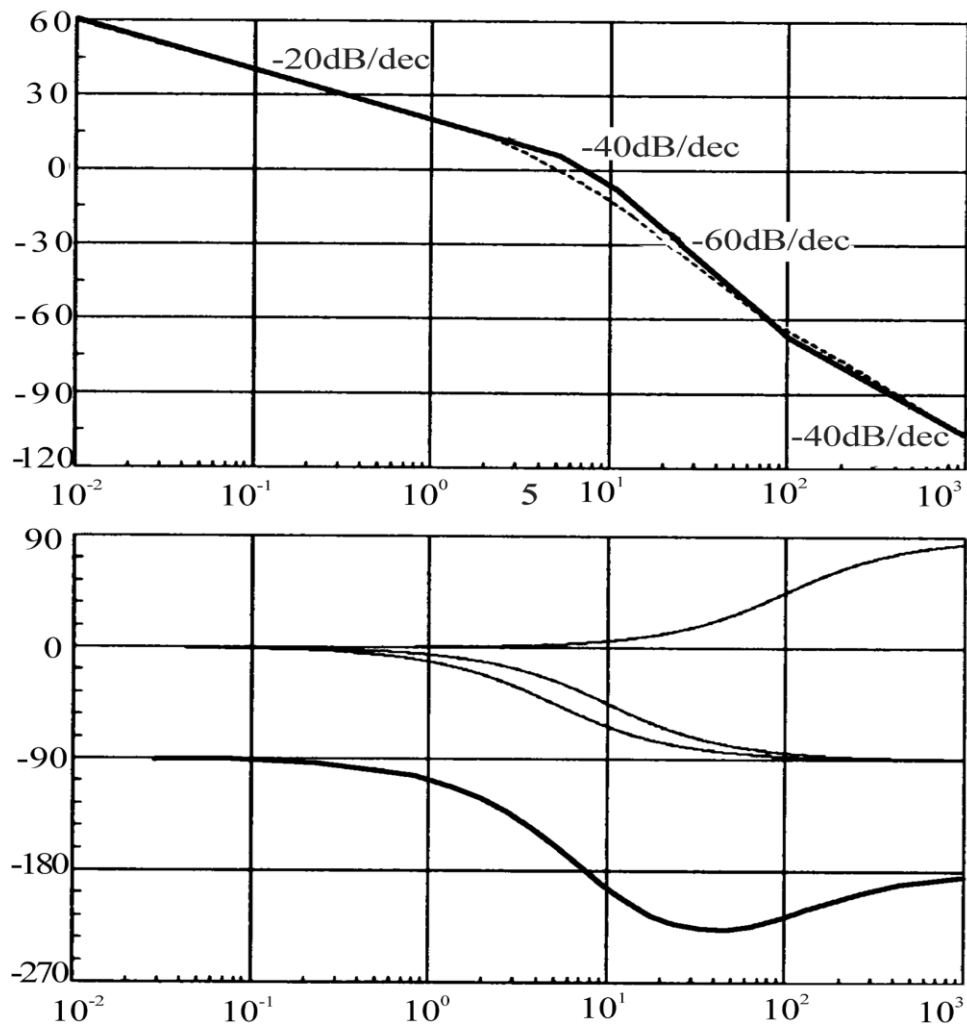
比例环节：为 $20\lg 10 = 20\text{dB}$ 处的水平直线

对象系统的对数频率特性可如下近似绘制：

- 1) $\omega \ll 1$ 时，绘制 $L(\omega)=0$ 直线作为对数幅频特性渐近线；
- 2) $\omega = 1$ 处，绘制 $L(\omega)=20\lg K=20\text{dB}$ ；
- 3) 过 $\omega=1$ 后，在转折频率 $\omega=5$ ， $\omega=10$ 出分别按环节性质变化，用相应斜率的对数幅频特性渐近线来近似；
- 4) 在各转折频率附近按误差曲线加以修正，得对数幅频特性的精确曲线。

$$G(j\omega) = \frac{10(1 + j0.01\omega)}{j\omega(1 + j0.1\omega)(1 + j0.2\omega)}$$

对象系统的对数坐标图



5.3.2 系统开环极坐标图（乃氏图）

1. 用幅频特性和相频特性计算做图

设开环频率特性为：

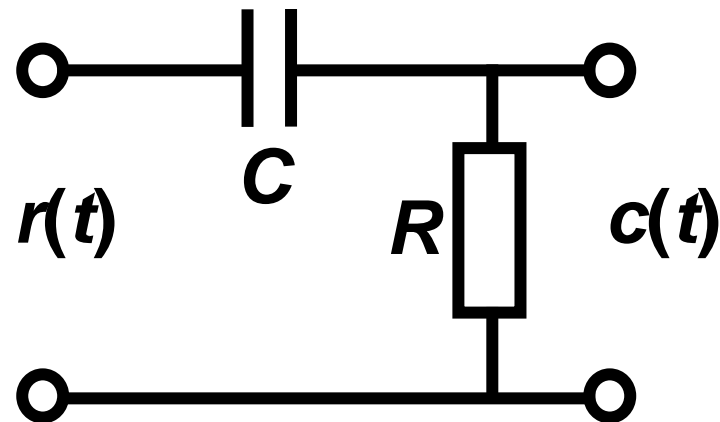
$$G(j\omega) = G_1(j\omega)G_2(j\omega)\cdots G_n(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

式中
$$A(\omega) = A_1(\omega)A_2(\omega)\cdots A_n(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega)$$

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\omega)$$

分别计算出各环节的幅值和相角后，按上式便可计算出开环幅值和相角，从而就可绘制出开环极坐标图。

例5-6 如图所示 RC 超前网络, 要求绘制它的幅相曲线。



解： RC 超前网络的传函为

$$G(s) = \frac{Ts}{Ts + 1}$$

式中 $T=RC$ 。其频率特性为

$$G(j\omega) = \frac{j\omega T}{j\omega T + 1} = j\omega T \cdot \frac{1}{j\omega T + 1}$$

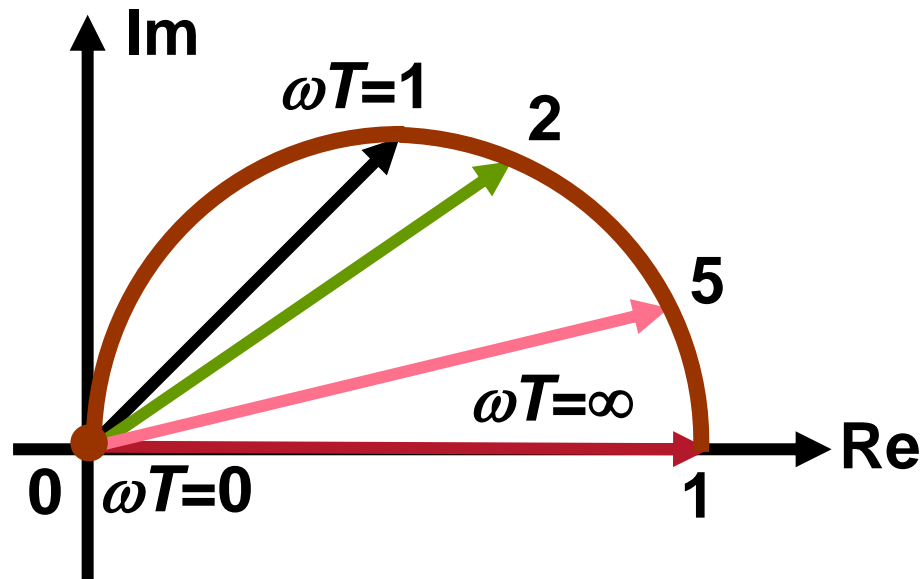
$$A(\omega) = \omega T \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = 90^\circ - \arctan \omega T$$

$$A(\omega) = \omega T \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad \phi(\omega) = 90^\circ - \arctan \omega T$$

ωT	0	0.1	0.3	1.0	2.0	5.0	∞
$A(\omega)$	0	0.0995	0.288	0.707	0.895	0.982	1
$\phi(\omega)(^\circ)$	90	84.3	73.3	45	30	11.3	0

幅相曲线如图



2. 按实频特性和虚频特性计算作图

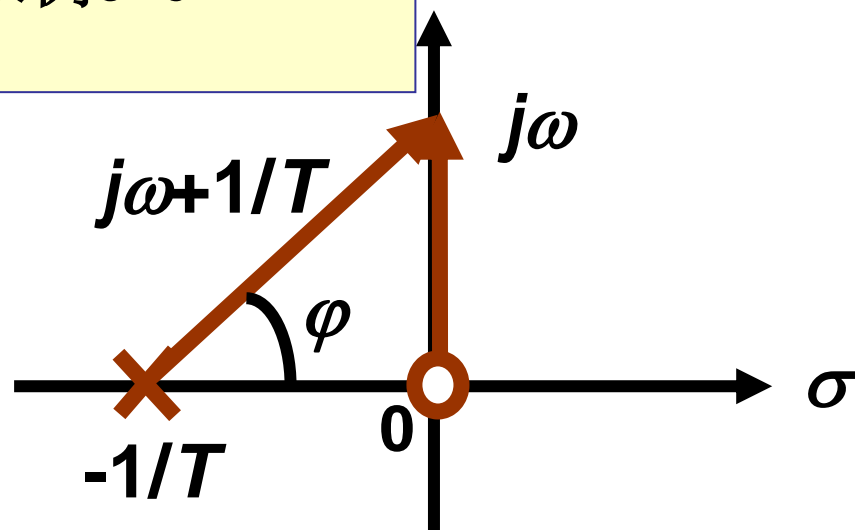
把开环频率特性按实部和虚部分开，然后再用一系列 ω 值代入，计算相应的实频和虚频值，绘制出开环幅相曲线。

3. 由极点—零点分布图绘制

由开环传递函数零极点形式先标出每一零点和极点，当 $s=j\omega$ 时，可作出相应零点或极点对应的矢量(频率特性)，根据所对应的 ω 值，计算出有关矢量的长度和角度，就能求得频率特性。

例5-7 由极点—零点分布图求例5-6中的频率特性。

$$G(j\omega) = \frac{s}{s + 1/T} \bigg|_{s=j\omega}$$



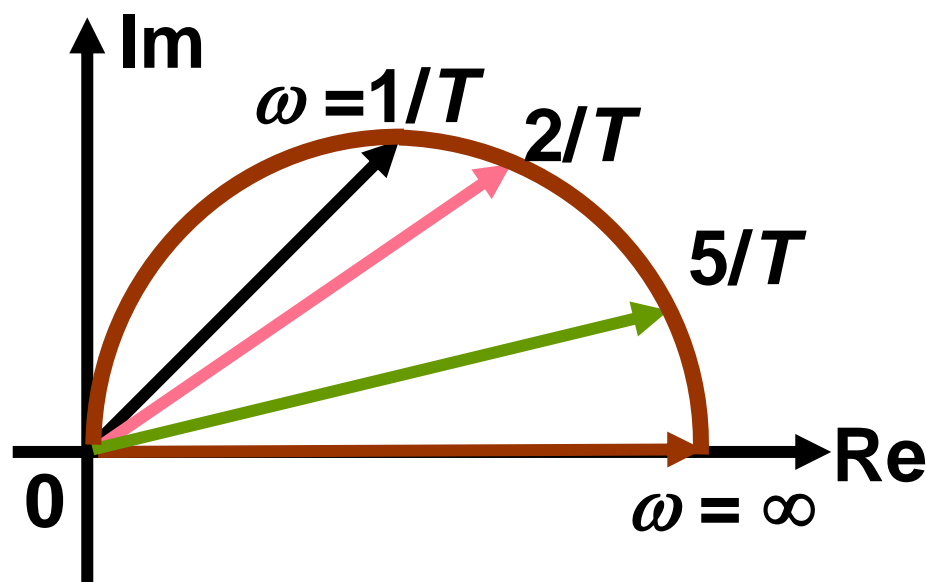
$$G(j0) = 0 \angle 90^\circ$$

$$G(j1/T) = 0.707 \angle 45^\circ$$

$$G(j2/T) = 0.895 \angle 30^\circ$$

$$G(j5/T) = 0.982 \angle 11.3^\circ$$

$$G(j\infty) = 1 \angle 0^\circ$$



4.开环极坐标图的近似绘制

Step 1. 写出 $A(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 的表达式；

Step 2. 分别求出 $\omega = 0$ 和 $\omega = +\infty$ 时的 $G(j\omega)$;

Step 3. 求Nyquist图与实轴的交点，可利用
 $\text{Im}[G(j\omega)]=0$ 或 $\varphi(\omega) = n \cdot 180^\circ$ ，(n为整数)求出；

Step 4. 求Nyquist图与虚轴的交点，可利用
 $\text{Re}[G(j\omega)]=0$ 或 $\varphi(\omega) = n \cdot 90^\circ$ ，(n为整数)求出；

Step 5. 必要时画出Nyquist图中间几点；

Step 6. 勾画出大致曲线。

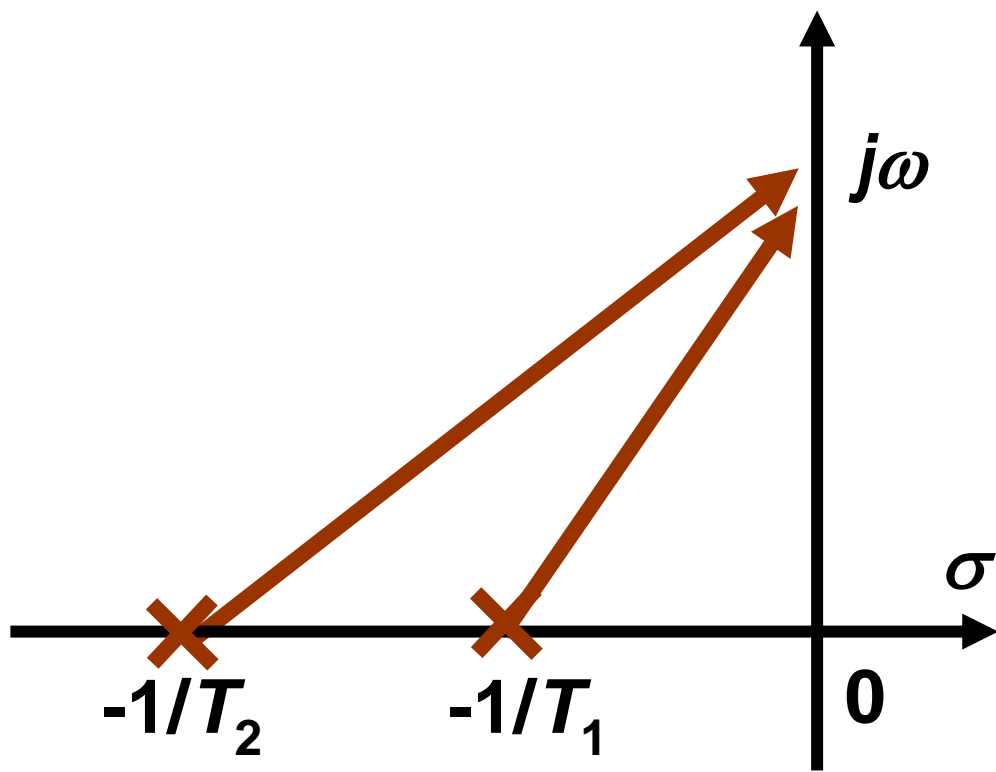
例5-8 已知系统开环传函为

$$G_k(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

试绘制系统的开环幅相曲线。

解：系统开环频率特性

$$G(j\omega) = \frac{k}{T_1T_2(j\omega + \frac{1}{T_1})(j\omega + \frac{1}{T_2})}$$



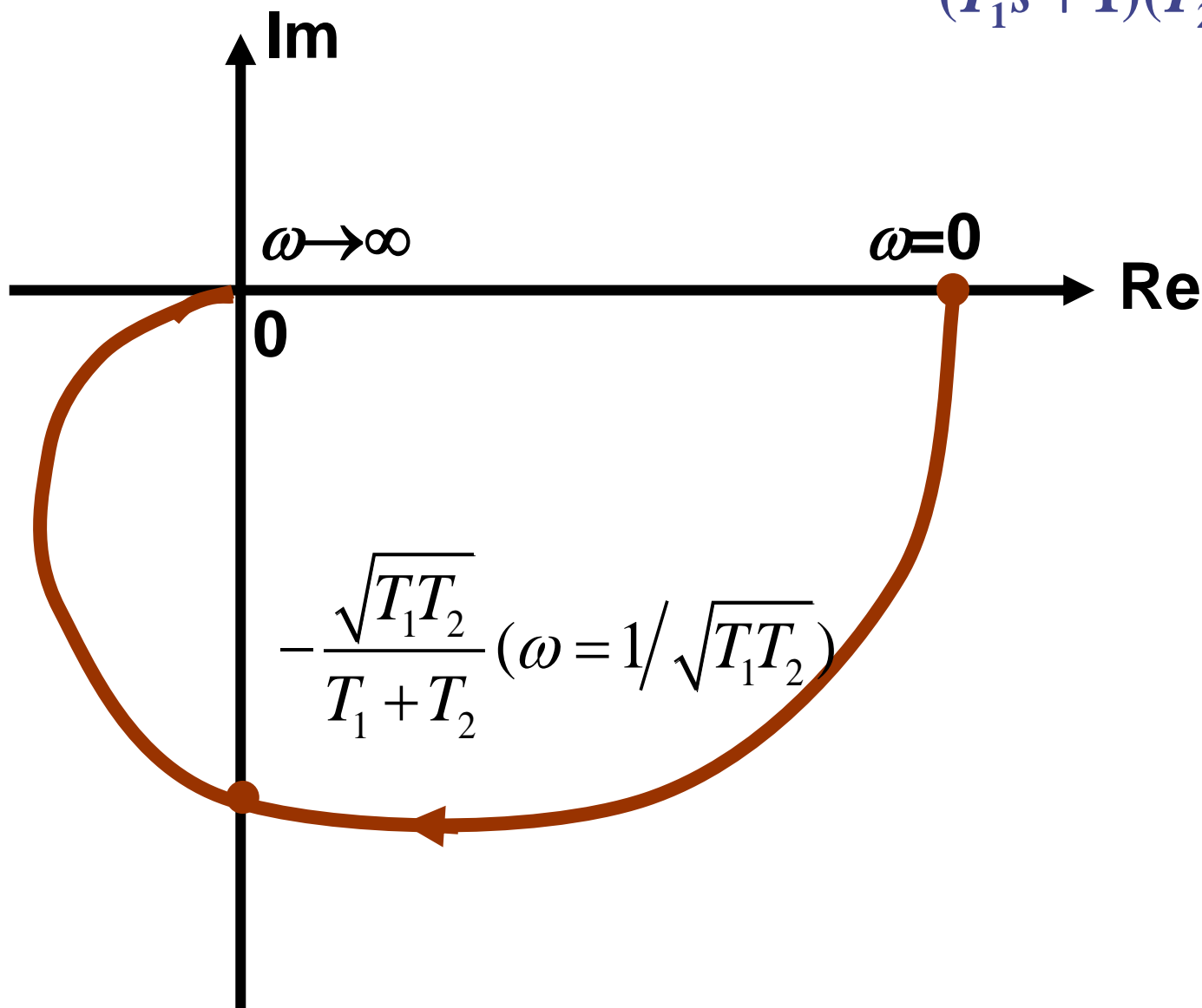
(1) $G_k(j0) = k \angle 0^\circ$

(2) $G_k(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$

(3) 当 ω 增加时, $\varphi(\omega)$ 是单调减的, 从 0° 变化到 -180° 。

幅相曲线大致形状如图：

$$G_k(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$



例5-9 已知系统开环传函为

$$G_k(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

试绘制系统的开环幅相曲线。

解：系统开环频率特性

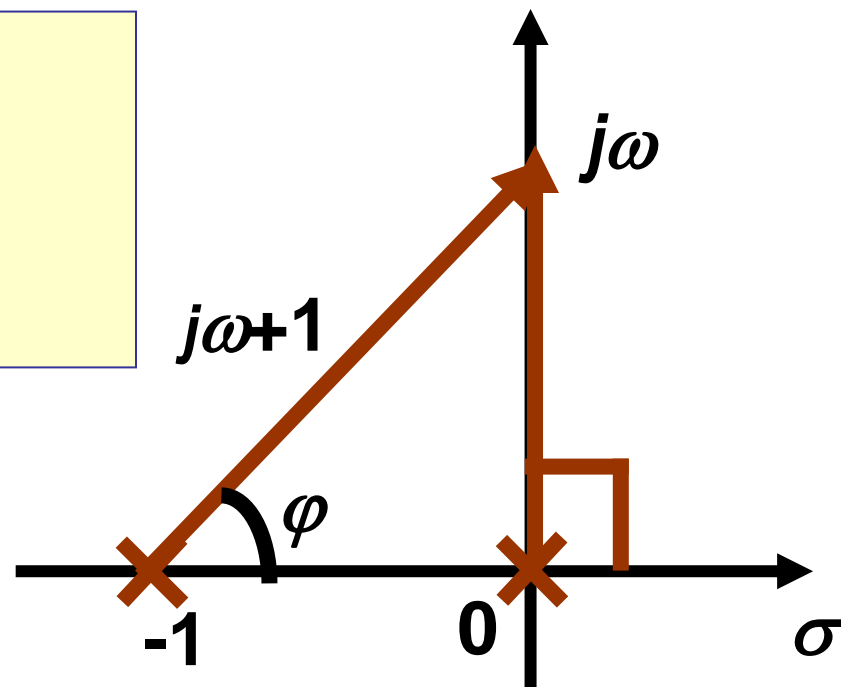
(1) $G_k(j0) = \infty \angle -90^\circ$

(2) $G_k(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$

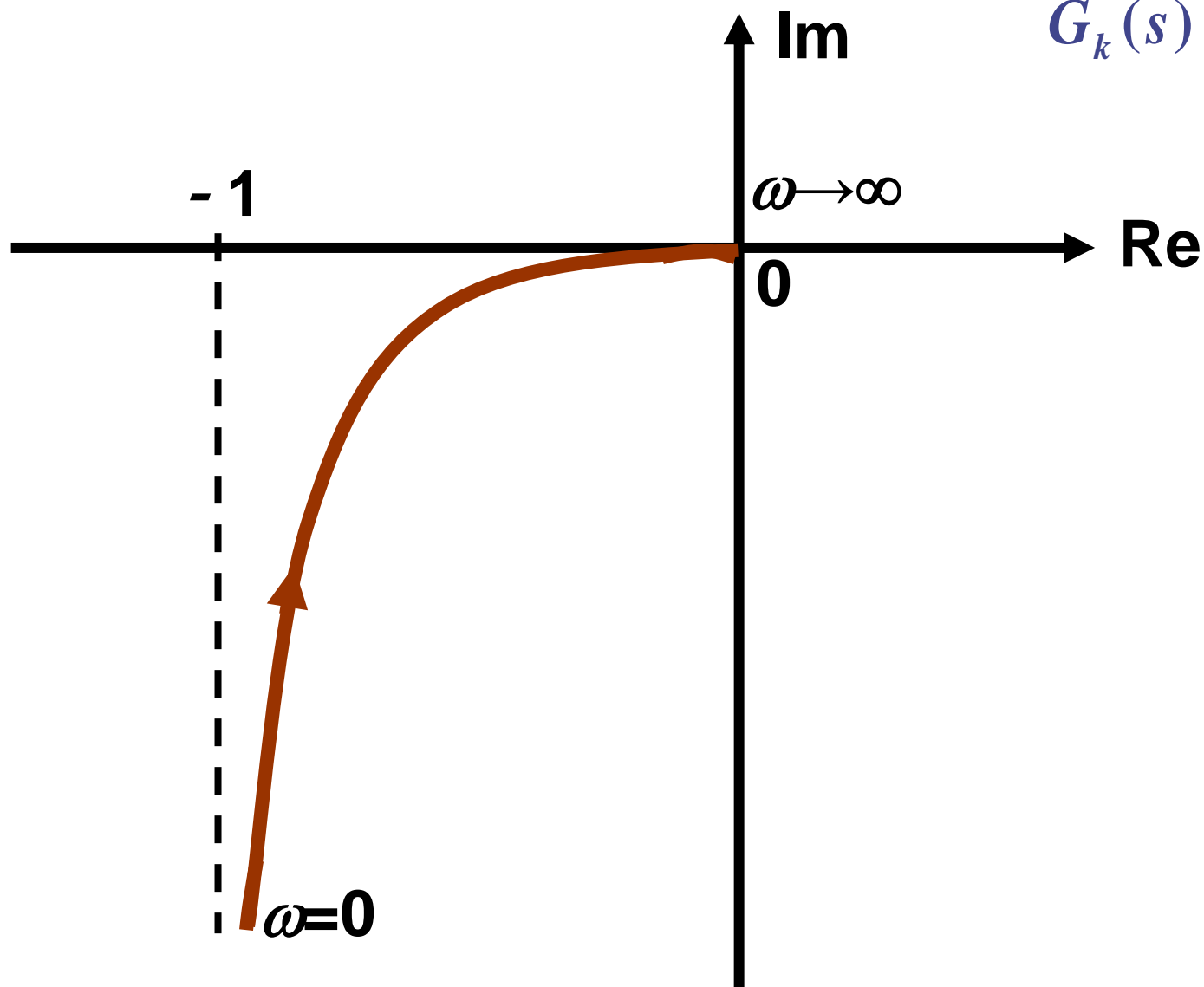
(3) 与实轴的交点：

$$G_k(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = -\frac{1}{1+\omega^2} - j\frac{1}{\omega(1+\omega^2)}$$

当 $\omega = 0$ 时，实部函数有渐近线为 -1 ，可以先作出渐近线。通过分析实部和虚部函数，可知与坐标轴无交点。



开环概略极坐标图如下所示:



$$G_k(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

例5-10 已知系统开环传函为

$$G_k(s) = \frac{k(1+2s)}{s^2(1+0.5s)(1+s)}$$

试绘制系统的开环幅相曲线。

解：根据零-极点分布图

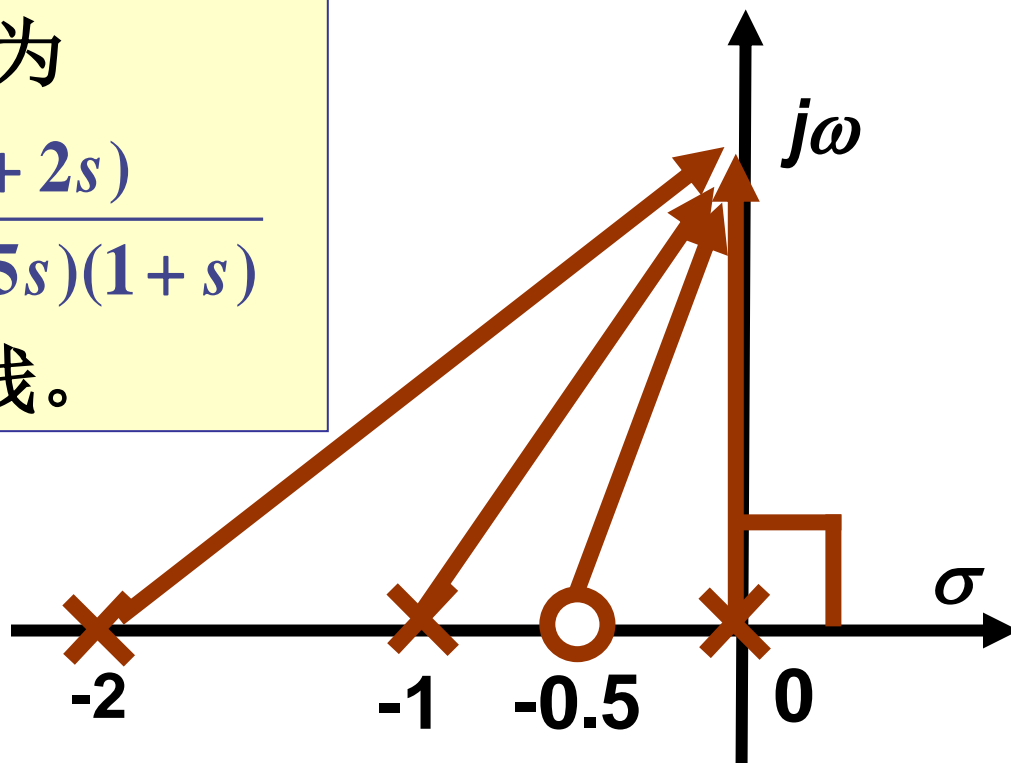
1) $G_k(j0) = \infty \angle -180^\circ$

2) $G_k(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$

3) 与实轴的交点：

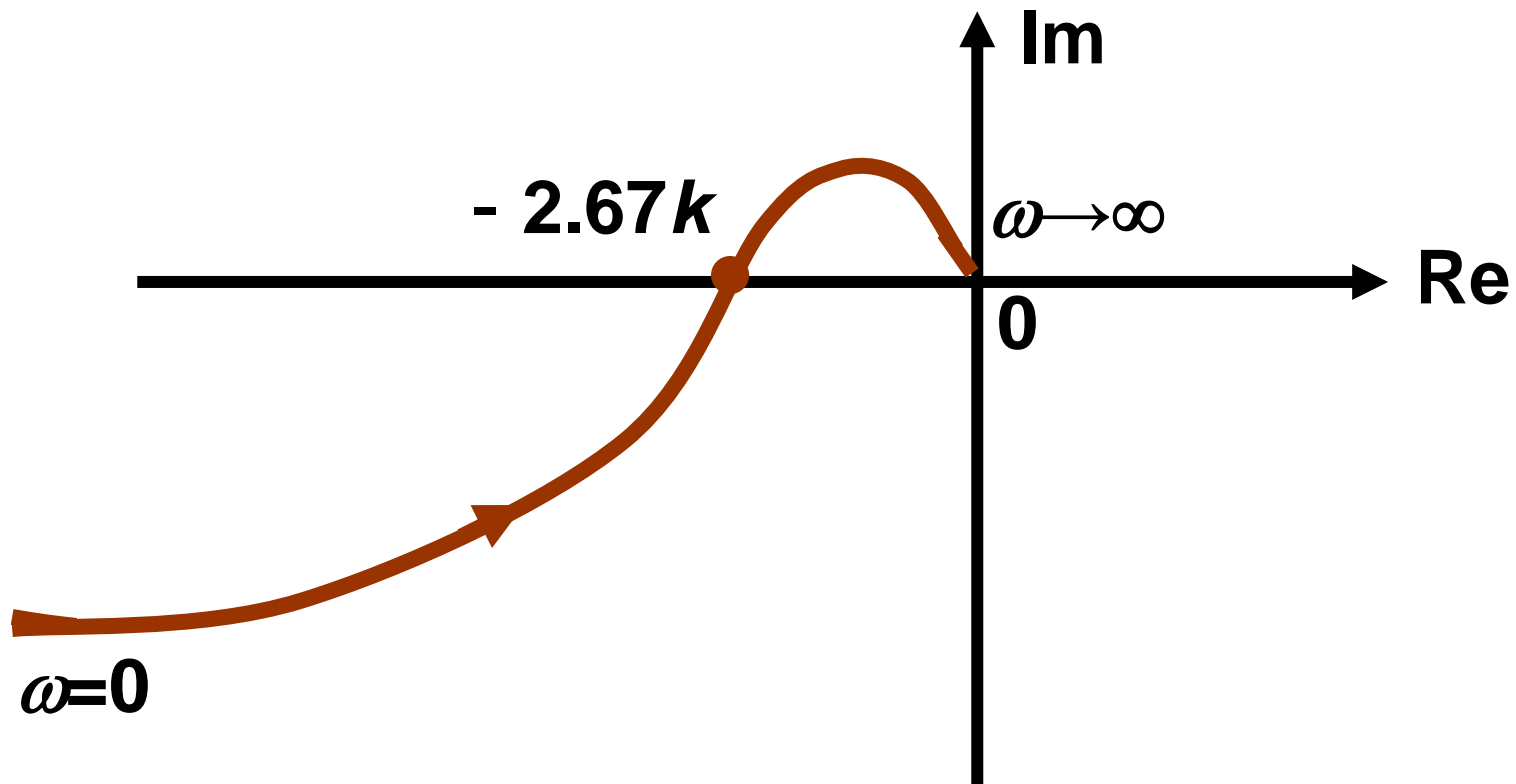
$$G_k(j\omega) = \frac{k[-(1+2.5\omega^2) - j\omega(0.5-\omega^2)]}{\omega^2(1+0.25\omega^2)(1+\omega^2)}$$

令 $\text{Im}(\omega) = 0$ $\omega_x = 0.707$ $\text{Re}(\omega_x) = -2.67k$



$$G_k(s) = \frac{k(1+2s)}{s^2(1+0.5s)(1+s)}$$

开环概略极坐标图如下所示：



例5-11 已知系统的开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10}{(1+s)(0.1s+1)}$$

绘制系统开环的极坐标图。

解： 系统开环频率特性

$$\begin{aligned} G(j\omega)H(j\omega) &= \frac{10}{(1+j\omega)(1+j0.1\omega)} \\ &= \frac{10(1-0.1\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+0.1^2\omega^2)} - j \frac{10 \times 0.1\omega}{(1+\omega^2)(1+0.1^2\omega^2)} \end{aligned}$$

ω 由 $0 \rightarrow \infty$ 变化时, 找几个特殊点:

$$\omega = 0 : G(j\omega) = 10 - j0$$

Nyquist 轨迹的起始点

$$\omega = \infty : G(j\omega) = -0 - j0$$

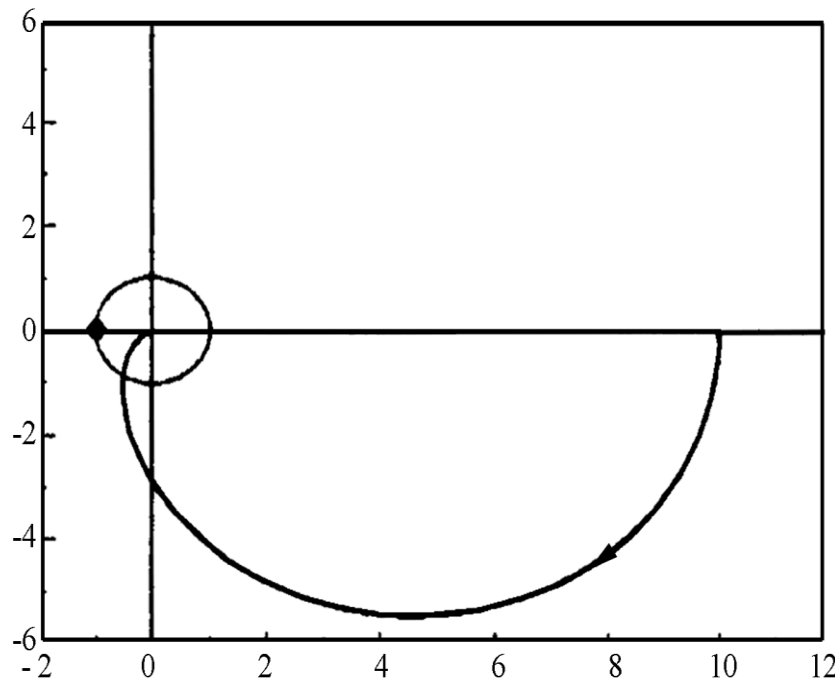
Nyquist 轨迹的终止点

$$\omega = \sqrt{10} : G(j\omega) = 0 - j2.87$$

Nyquist 轨迹与虚轴交

点

相应的极坐标图如下图所示。



例5-12 系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1} e^{-\tau s}$$

试绘制其系统开环极坐标图。

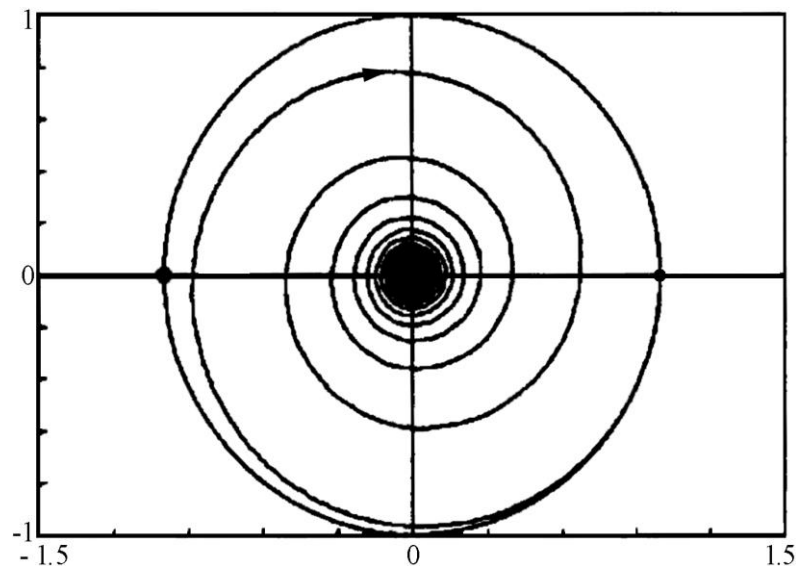
解：系统开环频率特性

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\omega T} e^{-j\omega\tau} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{-j(\omega\tau + \arctg \cdot \omega T)} \end{aligned}$$

幅频特性:
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

相频特性:
$$\varphi(\omega) = -\omega \tau - \arctg \omega T$$

所以, $G(j\omega)$ 的幅值随 ω 增大而单调减小, $\omega=0$ 时, $A(\omega)=1$ 为最大值, $\omega=\infty$ 时 $A(\omega)=0$; 而其相角 $\varphi(\omega)$ 随 ω 增大而向负无限大方向增加。极坐标图为一螺旋线。



5.3.3 最小相位和非最小相位系统

定义： 开环零点与开环极点全部位于 s 左半平面的系统为最小相位系统，否则称为非最小相位系统。

例5-13 已知两个控制系统的开环传函分别为：

$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+2s} \quad G_2(s) = \frac{1-s}{1+2s}$$

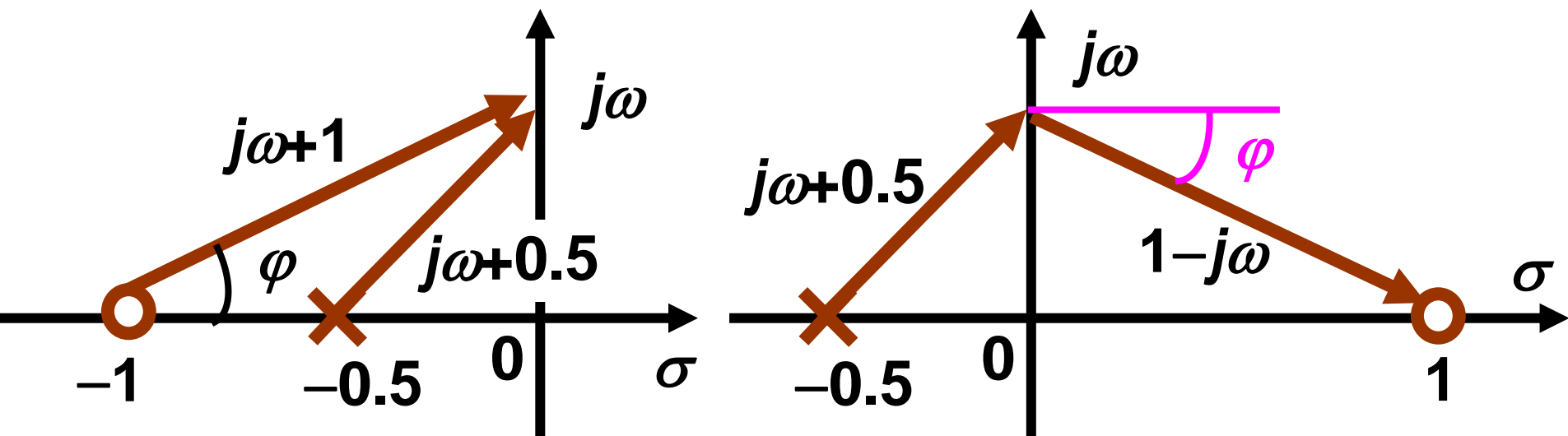
试绘制两系统的开环伯德图。

解： 由定义知 $G_1(s)$ 对应的系统为最小相位系统， $G_2(s)$ 对应的系统为非最小相位系统，频率特性分别为：

$$G_1(j\omega) = \frac{1+j\omega}{1+j2\omega} \quad G_2(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j2\omega}$$

◆其对应的零—极点分布图如下：

$$G_1(s) = \frac{1+s}{1+2s} \quad G_2(s) = \frac{1-s}{1+2s}$$

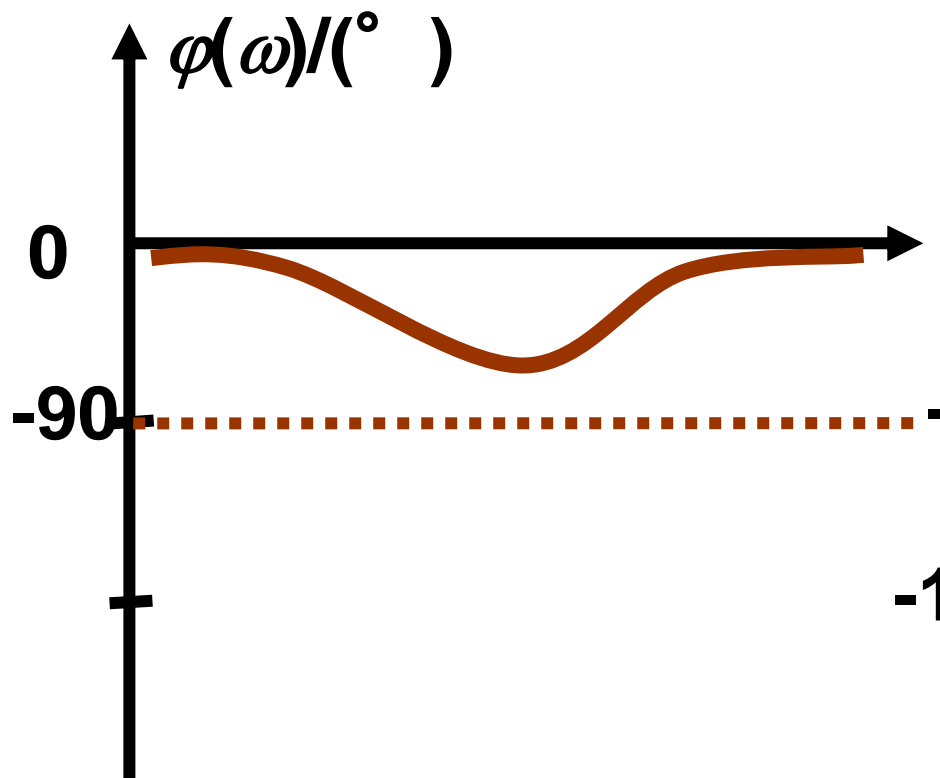
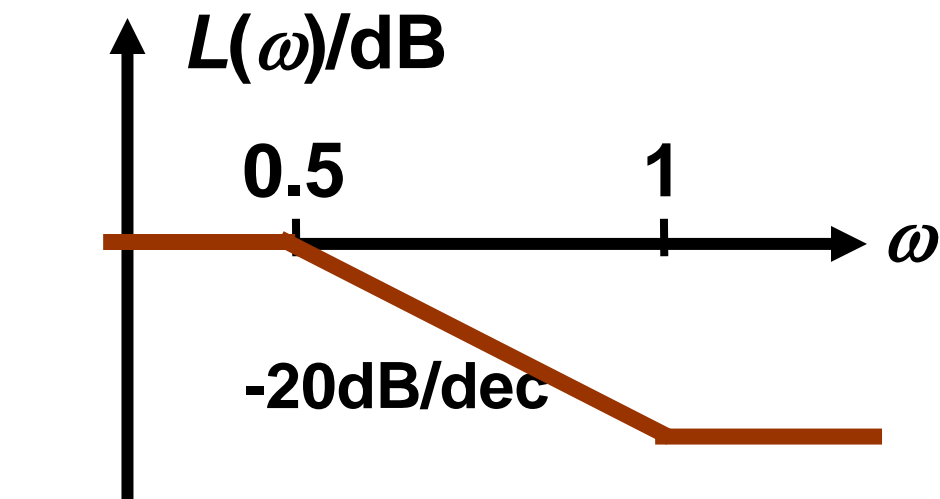


$$L_1(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1 + j\omega}{1 + j2\omega} \right| = 20 \lg \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + 4\omega^2}}$$

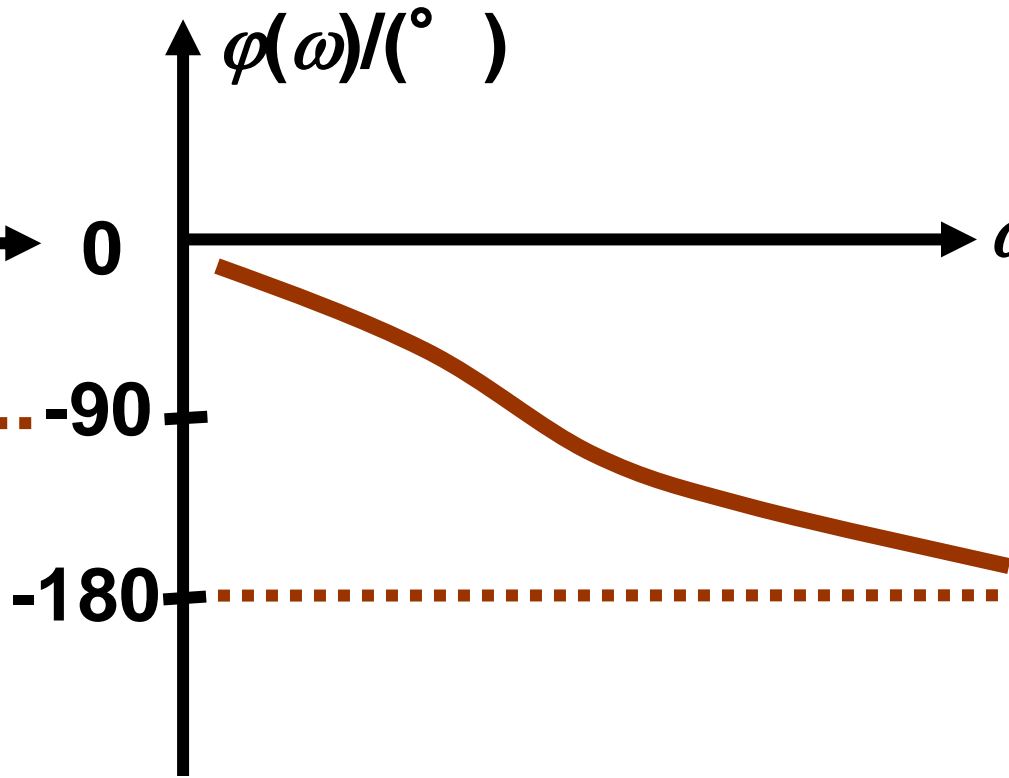
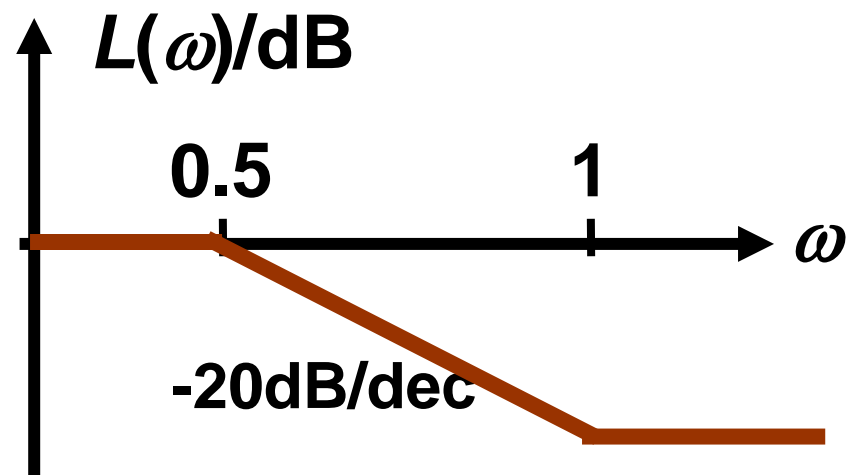
$$L_2(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1 - j\omega}{1 + j2\omega} \right| = 20 \lg \frac{\sqrt{1 + \omega^2}}{\sqrt{1 + 4\omega^2}} = L_1(\omega)$$

$$\varphi_1(\omega) = \arctan \omega - \arctan 2\omega$$

$$\varphi_2(\omega) = -\arctan \omega - \arctan 2\omega$$



$$\phi_1(\omega) = \arctan \omega - \arctan 2\omega$$



$$\phi_2(\omega) = -\arctan \omega - \arctan 2\omega$$

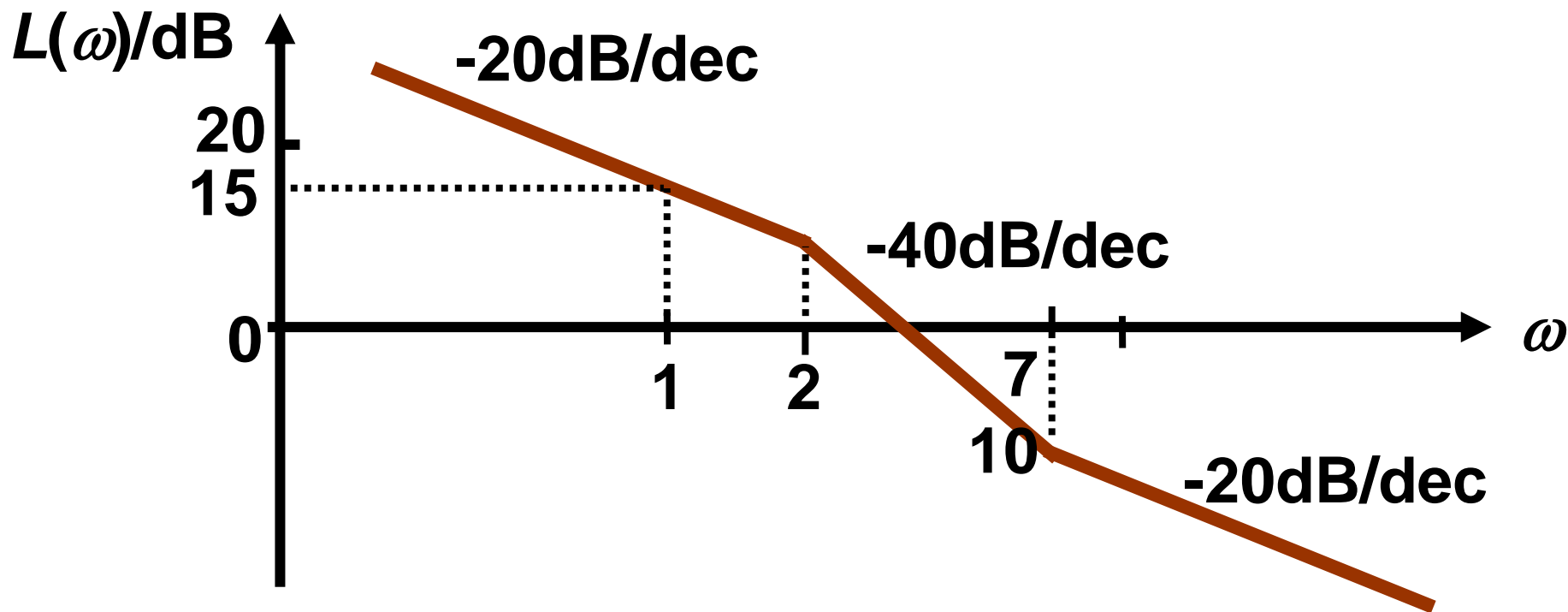
结论：

- ① 在具有相同的开环幅频特性的系统中，最小相位系统的相角变化范围最小；
- ② 最小相位系统 $L(\omega)$ 曲线变化趋势与 $\varphi(\omega)$ 一致；
- ③ 最小相位系统 $L(\omega)$ 曲线与 $\varphi(\omega)$ 两者具有一一对应关系，因此在分析时可只画出 $L(\omega)$ 。反之，在已知 $L(\omega)$ 曲线时，也可以确定出相应的开环传递函数。
- ④ 最小相位系统当 $\omega \rightarrow \infty$ 时，其相角

$$\varphi(\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} = -90^\circ \cdot (n-m)$$

n 为开环极点数， m 为开环零点数。

例5-14 某最小相位系统的开环对数幅频特性曲线如图所示，试写出该系统的开环传递函数。



解：低频段直线斜率是 -20 dB/dec ，故系统包含一个积分环节。据 $\omega = 1$ 时，低频段直线的坐标为 15 dB ，可知比例环节的 $k = 5.6$ 。交接频率为 $\omega = 2$ 和 $\omega = 7$ ，可以写出系统的开环传递函数：

$$G(s) = \frac{5.6(1 + 1/7s)}{s(1 + 1/2s)}$$

表5-1 最小相位系统幅频、相频对应关系

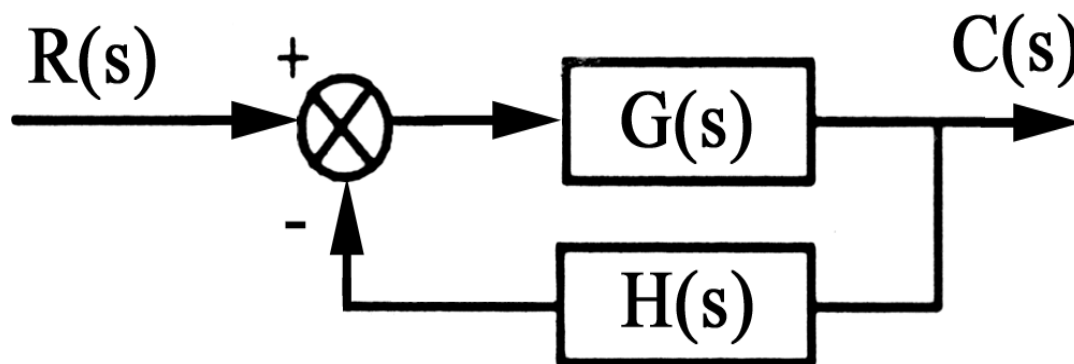
环 节	幅 频	相 频
$\frac{1}{j\omega}$	-20dB/dec→ -20dB/dec→	-90° → -90°
$\frac{1}{Tj\omega}$	0dB/dec→ -20dB/dec→	0° → -90°
$\frac{1}{T^2(j\omega)^2 + 2\zeta Tj\omega + 1}$	0dB/dec→ -40dB/dec→	0° → -180°
$\tau j\omega + 1$	0dB/dec→ 20dB/dec→	0° → 90°
.....
$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (T_i j\omega + 1)}$	0dB/dec→ n·(-20)dB/dec→	0° → n·(-90)°
$\frac{1}{\prod_{i=1}^m (\tau_i j\omega + 1)}$	0dB/dec→ m·(+20)dB/dec→	0° → m·(+90)°

§ 5.4 乃奎斯特稳定判据

- 乃奎斯特 (Nyquist) 稳定判据，是由 H. Nyquist于1932年提出的。
- Nyquist稳定判据的理论基础是复变函数理论的幅角定理也称映射定理。
- 该判据利用开环系统的极坐标图(乃氏图)和开环极点分布情况来判断闭环系统的稳定性。

5.4.1 映射定理/Argument Theorem

设某反馈系统结构图如下图所示，系统的开环传递函数为



$$G(s)H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad (5-21)$$

这里 $N(s)$ 和 $M(s)$ 分别为 n 阶和 m 阶的多项式。

显然，闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (5-22)$$

对应的闭环系统的特征多项式是

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)} \quad (5-23)$$

问题：如何依据（5-23）式来判断闭环极点分布情况从而确定闭环的稳定性？

显然，闭环特征函数和开环传函之间只相差1。考虑到物理系统中，开环传函中 $m \leq n$ ，故 $F(s)$ 的分子和分母两个多项式的最高次幂一样，均为 n ， $F(s)$ 可改写为：

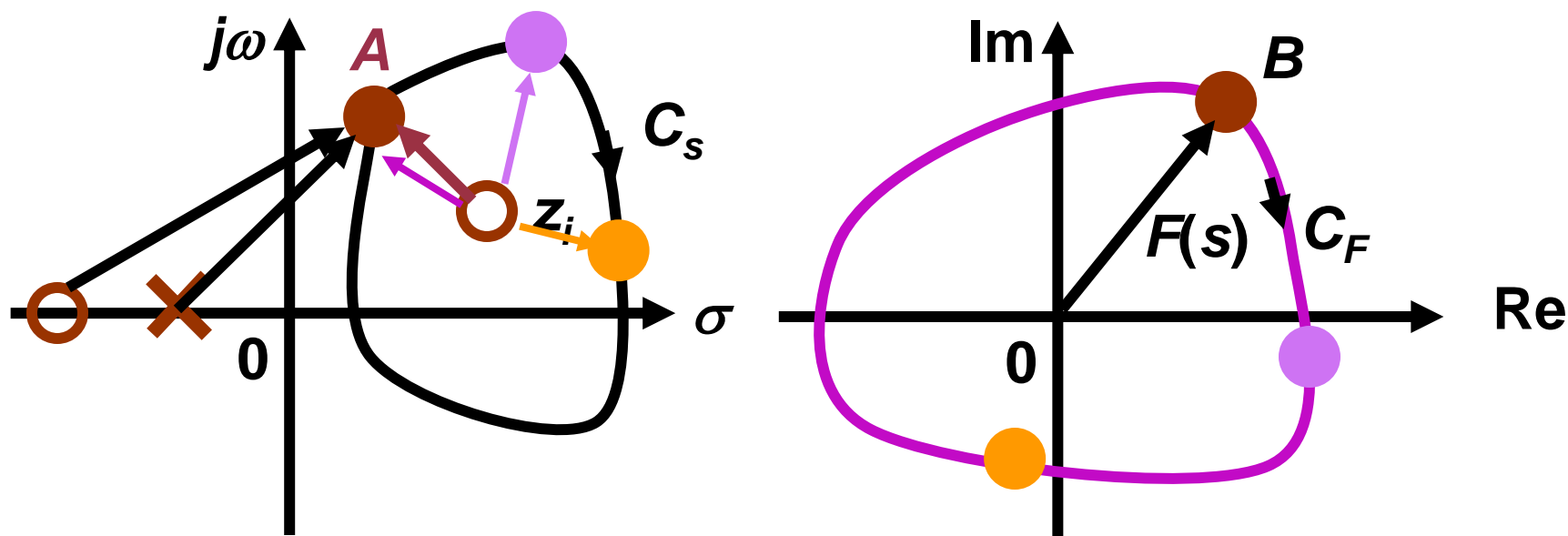
$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)} = \frac{\sum_{i=1}^n (s - z_i)}{\sum_{i=1}^n (s - p_i)}$$

式中， z_i 和 p_i 分别为 $F(s)$ 的零点和极点。

$F(s)$ 具有如下特征：

- 1) 其零点和极点分别是闭环和开环特征根；
- 2) 零点和极点个数相同；
- 3) $F(s)$ 和 $G(s)H(s)$ 只相差常数1。

在 s 平面上任选一点 A 通过映射 $\rightarrow F(s)$ 平面上 $F(A)$ 。
 设 C_s 只包围 z_i ，不包围也不通过任何极点和其他零点。
 从 A 点出发顺时针转一周回到 A



$$\Delta \angle F(s) = \Delta \sum_{i=1}^m \angle s - z_i - \Delta \sum_{j=1}^n \angle s - p_j = -2\pi$$

$F(s)$ 曲线从 B 点开始，绕原点顺时针方向转了一圈。

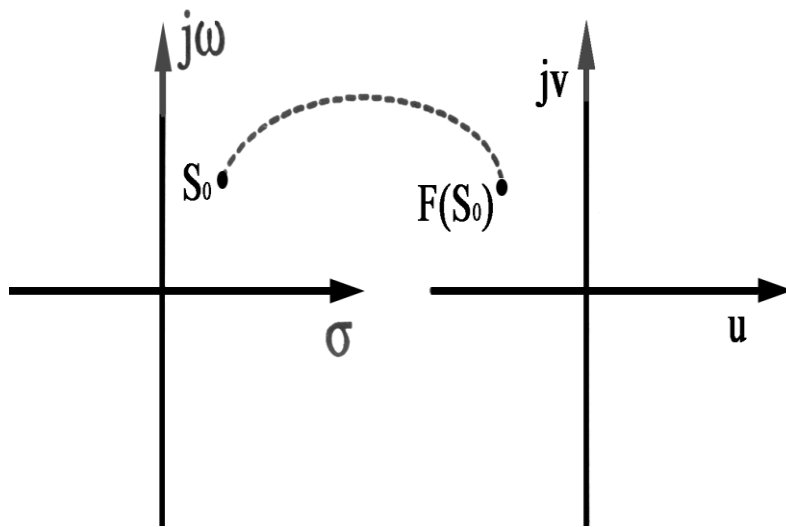
幅角原理（映射定理）：如果封闭曲线内有 Z 个 $F(s)$ 的零点， P 个 $F(s)$ 的极点，则 s 沿封闭曲线 Γ_s 顺时针方向转一圈时，在 $F(s)$ 平面上，曲线 $F(s)$ 绕其原点逆时针转过的圈数 R 为 P 和 Z 之差，即

$$R = P - Z$$

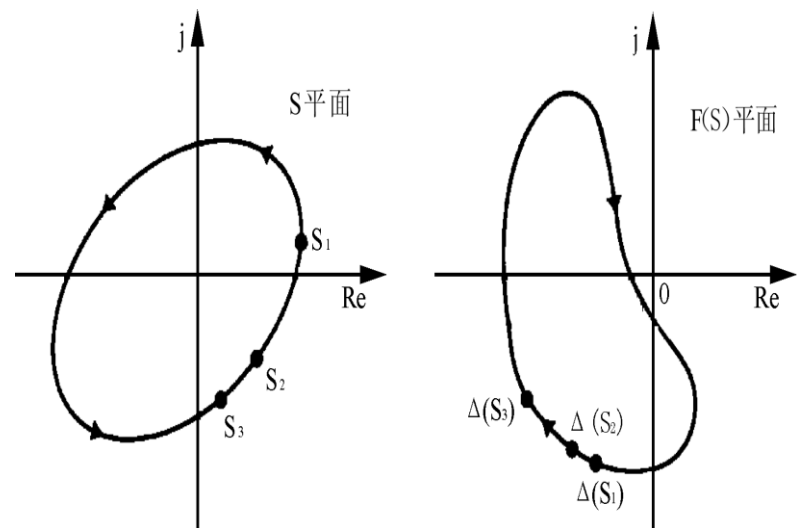
N 若为负，顺时针。

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{N(s) + M(s)}{N(s)} = \frac{\sum_{i=1}^n (s - z_i)}{\sum_{i=1}^n (s - p_i)}$$

s 为复变量， $F(s)$ 为复变函数。以 $s = \sigma + j\omega$ 表示 s 复平面上的点，以 $F(s) = u + jv$ 表示 $F(s)$ 在像复平面上的点。于是 s 与 $F(s)$ 间的点映射关系如左下图所示。 s 平面与 $F(s)$ 平面的曲线映射关系则如右下图所示。



点与像点间的映射关系



s 平面闭曲线与 $F(s)$ 平面像曲线的映射关系

如果在 s 平面上取闭曲线 C_s ，且假设该 C_s 曲线满足下列条件：

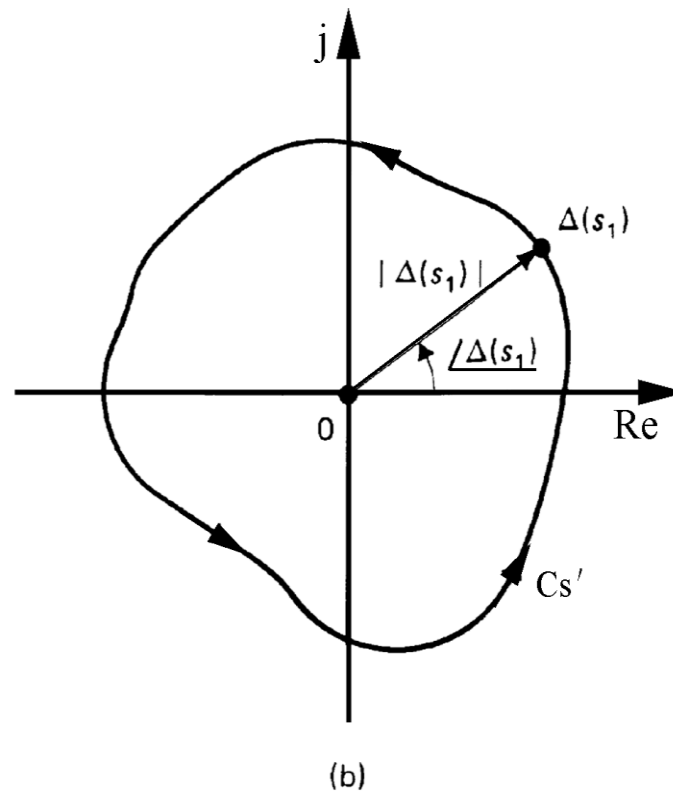
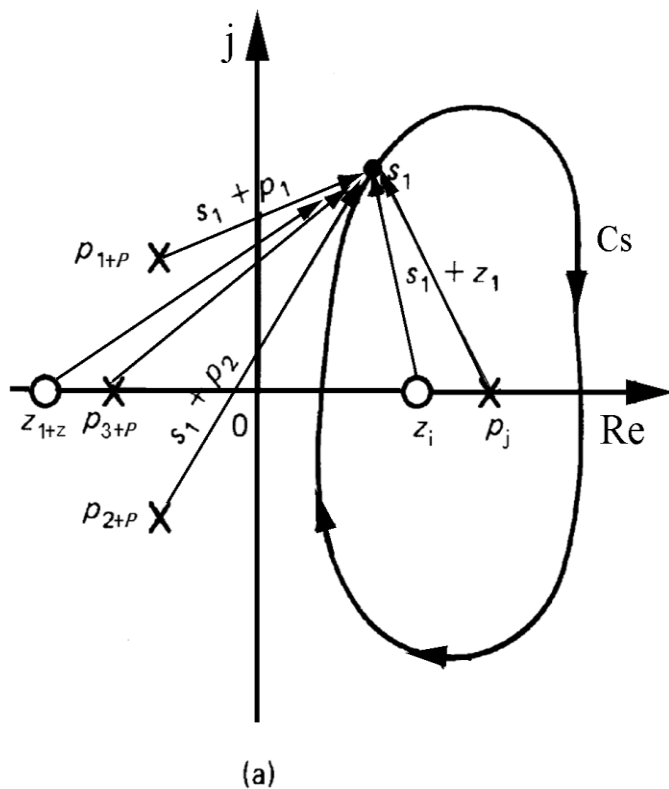
(1) 曲线 C_s 不通过 $F(s)$ 的所有奇点（即 $F(s)$ 的零点和极点）；

(2) 曲线 C_s 包围 $F(s)$ 的 Z 个零点和 P 个极点，即

$$F(s) = \frac{K \prod_{i=1}^Z (s - z_i) \prod_{i=Z+1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^P (s - p_i) \prod_{i=P+1}^n (s - p_i)} = \frac{M(s) + N(s)}{N(s)}$$

这里 z_1, \dots, z_Z 为 $F(s)$ 位于 C_s 闭曲线内部的零点，而 z_{Z+1}, \dots, z_n 为位于其外部的零点； p_1, \dots, p_P 和 p_{P+1}, \dots, p_n 可类似理解。

如果在 s 平面上取封闭曲线 C_s 如下所示：



注意到复变函数 $F(s)$ 对应 s_1 （闭曲线 C_s 上任一点）沿闭合曲线 C_s 顺时针转动一圈时，复平面上表示 $F(s)$ 的矢量的总相角增量满足

$$\begin{aligned}
 \Delta \angle F(s) &= \sum_{i=1}^n \Delta \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \Delta \angle(s - p_j) \\
 &= \sum_{i=1}^Z \Delta \angle(s - z_i) + \sum_{i=Z+1}^n \Delta \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^P \Delta \angle(s - p_j) - \sum_{j=P+1}^n \Delta \angle(s - p_j) \\
 &= Z(-2\pi) - P(-2\pi) = (P - Z)2\pi \quad (5-24)
 \end{aligned}$$

式中， P 和 Z 分别是被闭曲线 C_s 包围的特征方程函数 $F(s)$ 的极点数和零点个数。

上式表明，当 s 平面上点 s_1 沿闭曲线 C_s 顺时针方向绕行一圈时， $F(s)$ 平面上对应的封闭曲线将按逆时针方向包围坐标原点 ($P-Z$) 圈。

令 N 表示 $F(s)$ 平面上的闭曲线逆时针方向包围复平面原点的次数。于是上面讨论表明

$$N = P - Z \quad (5-25)$$

或等价地

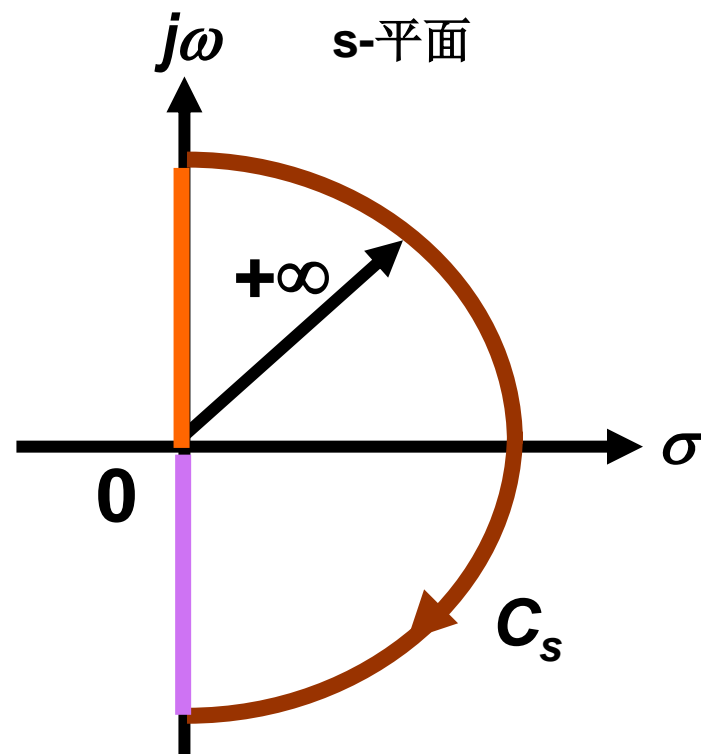
$$Z = P - N \quad (5-26)$$

成立。这一结论即为映射定理。

5.4.2 Nyquist轨迹及其映射/Nyquist Contour and Mapping Loci

为将映射定理与系统稳定性分析相联系，选择如右图所示的 s 平面的闭曲线 C_s 。它由整个虚轴和半径为 ∞ 的右半圆组成， C_s 称为Nyquist围线。

Nyquist围线在 $F(s)$ 平面上的映射也将是一条闭曲线，称为Nyquist轨迹。

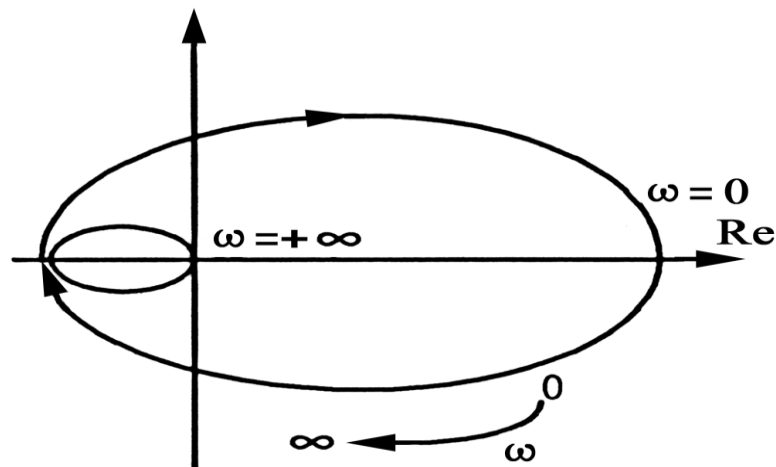
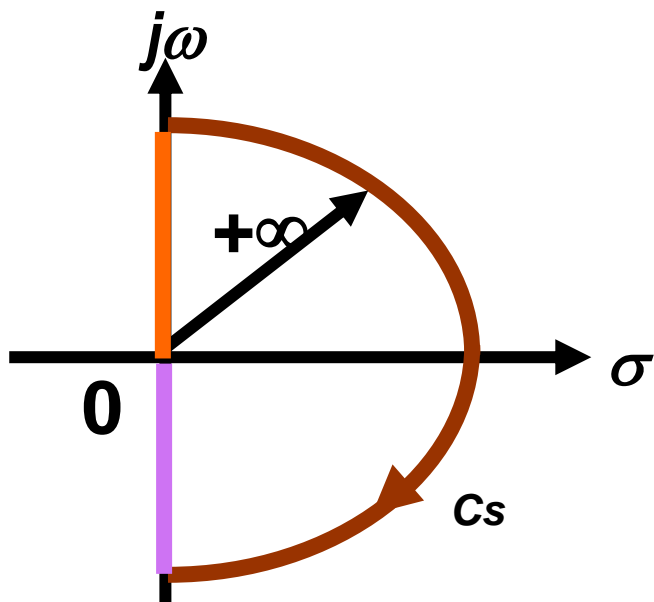


Nyquist围线的构成与Nyquist轨迹的对应关系

- 1) Nyquist围线 C_s 由两部分组成：虚轴和半径为无穷大的右半圆组成；
- 2) 当试验点 s 在虚轴上自下而上移动时，在 F 平面上的映射就是曲线 $F(j\omega)$ (ω 由 $-\infty \rightarrow +\infty$)，且

$$F(j\omega) = 1 + G(j\omega)H(j\omega) \quad (5-27)$$

且如下图所示。



3) Nyquist围线 C_s 的半径为无穷大的右半圆，映射到 $F(s)$ 平面上为

$$F(\infty)=1+G(\infty)H(\infty)$$

若开环系统是真或严格真的，则 $G(\infty)H(\infty)$ 为某一有限实数，于是 $F(\infty)=1+G(\infty)H(\infty)$ 也是某一有限实数。即此时的Nyquist轨迹为映射到 F 平面实轴上的一个点。

4) 根据映射定理可得， s 平面上的Nyquist围线到 $F(s)$ 复平面上的轨迹 $F(j\omega)$ ，(ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$)就可构成整个映射曲线。

闭环系统稳定性与幅角原理的关系

Nyquist轨迹逆时针包围原点的次数满足

$$Z=P-N \quad (5-28)$$

式中， Z ——位于右半平面 $F(s)=1+G(s)H(s)$ 的零点个数，即闭环右极点个数；

P ——位于右半平面 $F(s)=1+G(s)H(s)$ 的极点个数，即开环右极点个数；

N ——**Nyquist**曲线逆时针包围坐标原点的次数，即闭环特征多项式位于右半平面根个数。

于是，闭环系统稳定条件为闭环极点均在 s 平面的左半平面，即 $Z=0$ 或 $N=P$ 。

5.4.3 Nyquist稳定判据：情形I/Nyquist Stability Criterion: Case I

当系统开环传递函数 $G(s)H(s)$ 在 s 平面虚轴无极点时（0型系统），Nyquist稳定判据可表示为：

如果当 ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 变化时对应的Nyquist轨迹 $G(j\omega)H(j\omega)$ 逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的次数 N ，等于开环系统 $G(s)H(s)$ 位于右半 s 平面的极点数 P ，即 $N=P$ ，则闭环系统稳定；否则(即 $N \neq P$)时，闭环系统不稳定。

(1) 0型系统

Γ_s 为包围虚轴和整个右半平面。

s 平面 $\Gamma_s \rightarrow$ 映射 $\rightarrow F(s)$

正虚轴 $j\omega$ ($\omega: 0 \rightarrow \infty$)

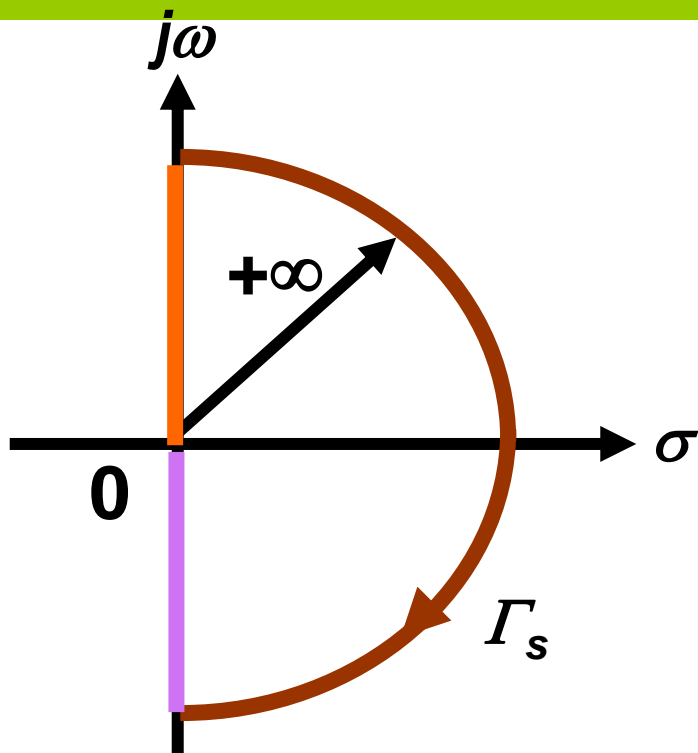
$F(j\omega)$ ($\omega: 0 \rightarrow \infty$)

负虚轴 $j\omega$ ($\omega: -\infty \rightarrow 0$)

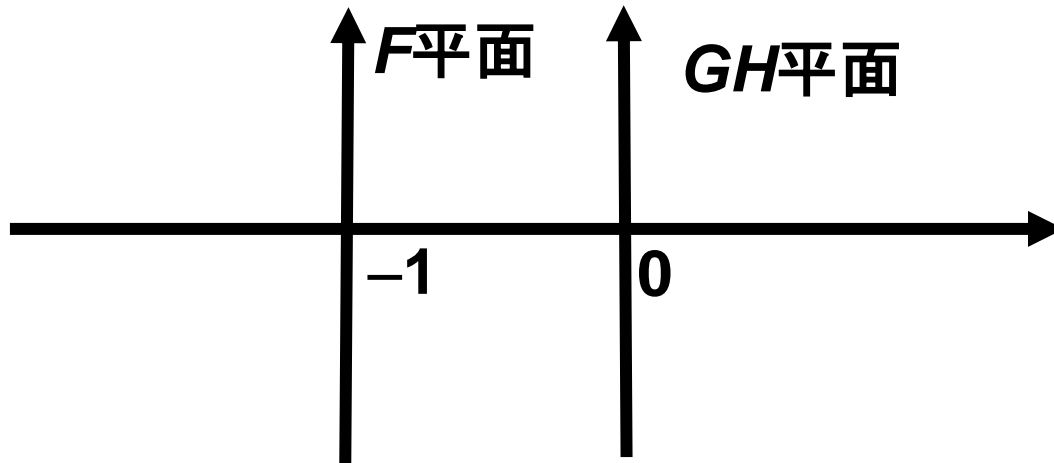
$F(j\omega)$ ($\omega: -\infty \rightarrow 0$)

半径 ∞ 的半圆

(1, $j0$)点



$F(j\omega)$ 和 $G(j\omega)H(j\omega)$ 只相差常数1。 $F(j\omega)$ 包围原点就是 $G(j\omega)H(j\omega)$ 包围(-1, j0)点。



对于 $G(j\omega)H(j\omega)$

$\omega: 0 \rightarrow \infty$, 开环极坐标图;

$\omega: -\infty \rightarrow 0$, 与开环极坐标图以 ω 轴镜像对称;

F 平面(1,j0)点就是 GH 平面的坐标原点。

Nyquist稳定判据： 已知开环系统特征方程式在 s 右半平面根的个数为 P ，开环奈氏曲线（ $\omega: -\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$ ）包围 $(-1, j0)$ 点的圈数为 N ，则闭环系统特征方程式在 s 右半平面根的个数为 Z ，且有

$$Z = P - N$$

若 $Z=0$ ，闭环系统是稳定的。若 $Z \neq 0$ ，闭环系统是不稳定的。

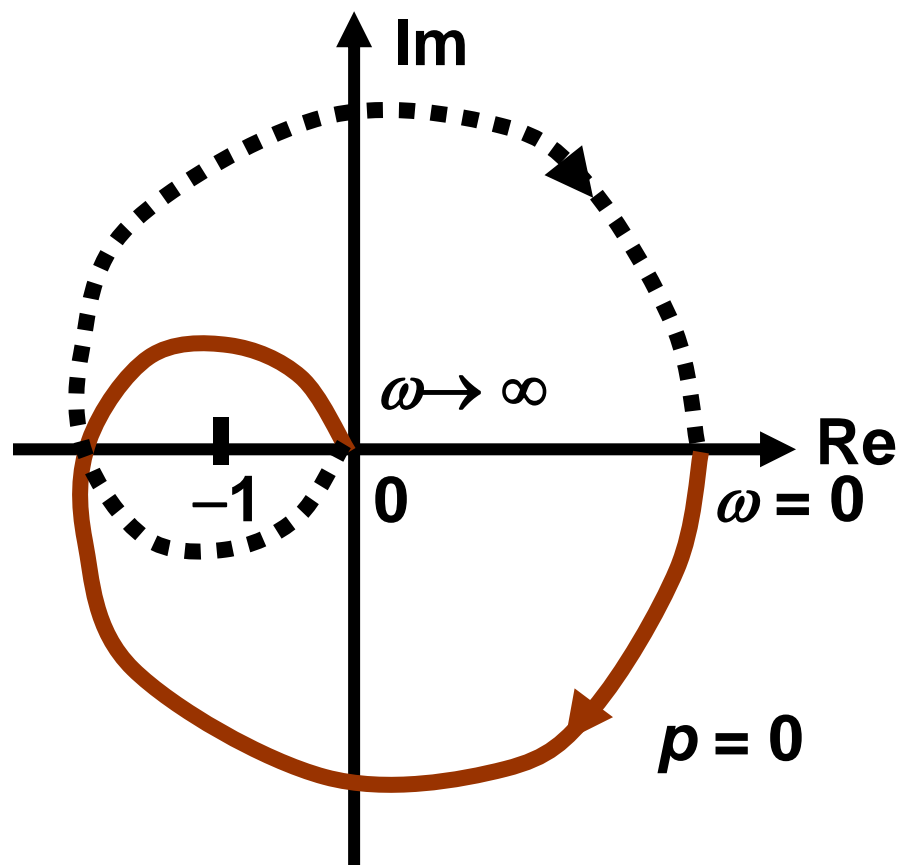
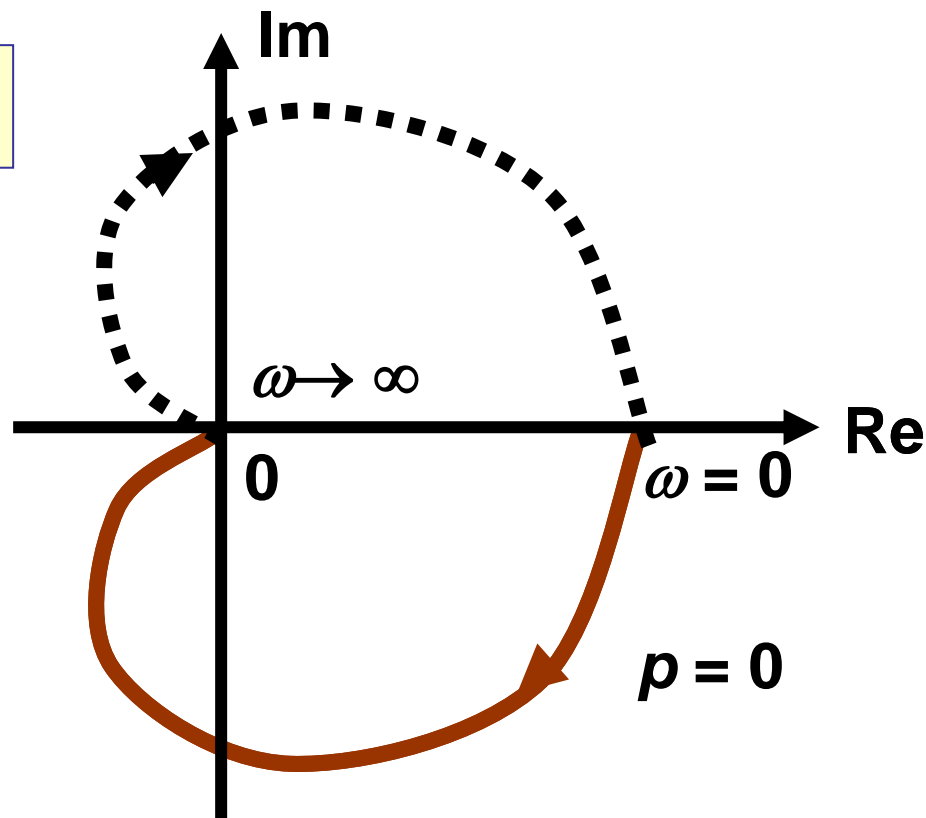
或当开环系统稳定时，开环奈氏曲线不包围 $(-1, j0)$ 点时，则闭环系统是稳定的。

当开环系统不稳定时，开环奈氏曲线包围 $(-1, j0)$ 点 P 圈时，闭环系统是稳定的。

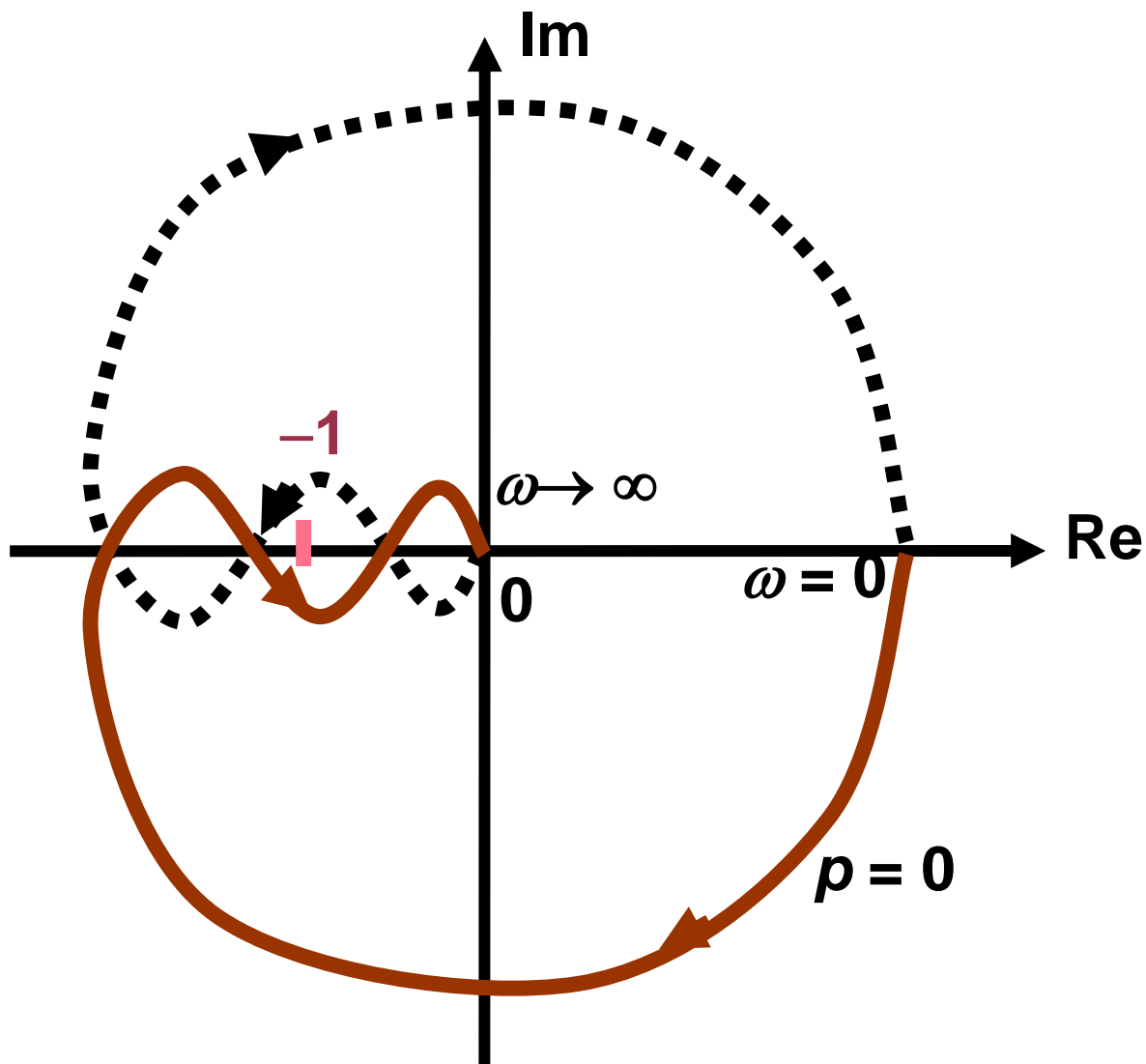
例5-14 判断系统稳定性

解：由图知

(1) $p = 0$ 且 $R = 0$
闭环系统是稳定的。



(2) $p = 0$, $R = -2$
 $z = p - R = 2 \neq 0$
闭环系统不稳定的。



(3) $p = 0$, $R = 0$

闭环系统是稳定的。

例5-15 一单位反馈系统，其开环传函

$$G_k(s) = \frac{k}{Ts - 1}$$

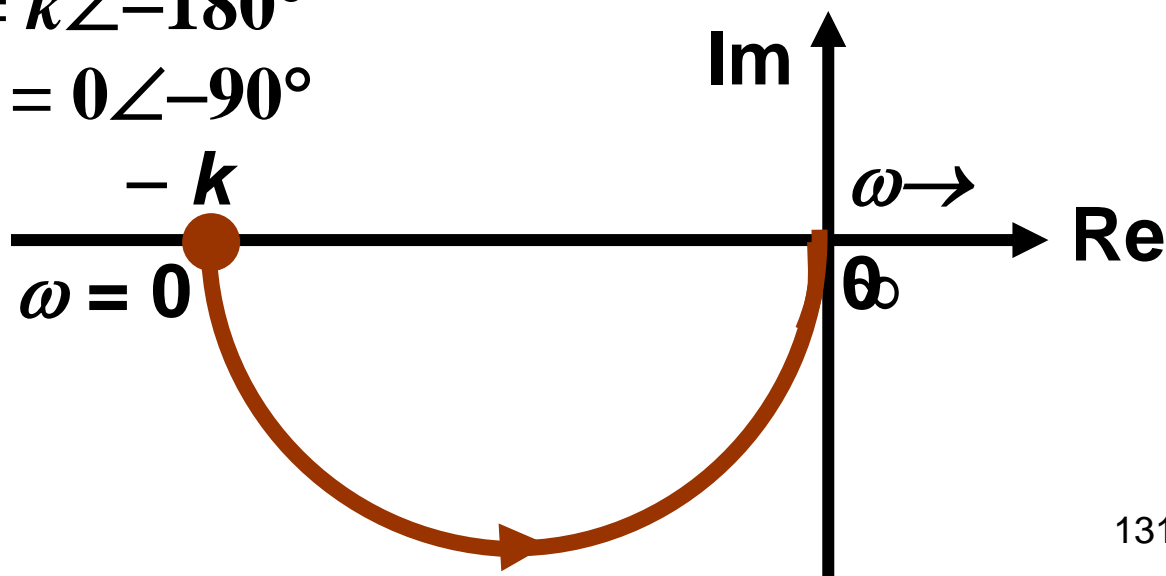
试用奈氏判据判断系统的稳定性。

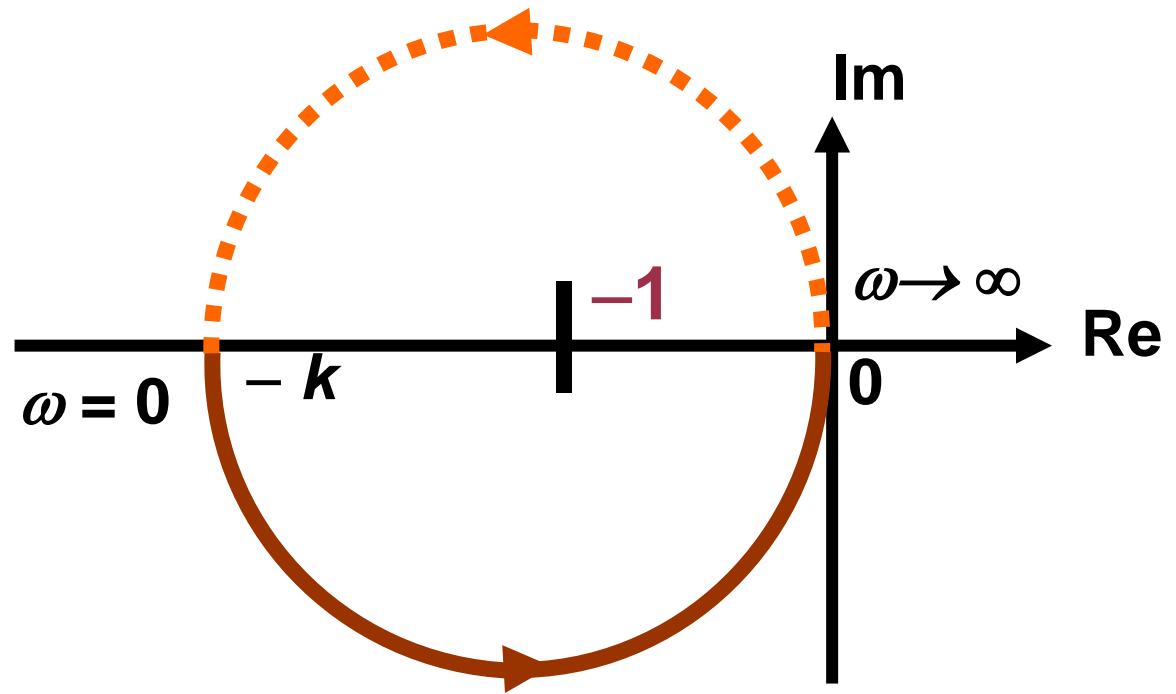
解：已知 $p = 1$

频率特性 $G_k(j\omega) = \frac{k}{j\omega T - 1} = \frac{k/T}{j\omega - 1/T}$

当 $\omega = 0$, $G_k(j0) = k \angle -180^\circ$

当 $\omega \rightarrow \infty$, $G_k(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$





当 $-k < -1$ 时, $k > 1$, $R=1$

$$z = p - R = 0$$

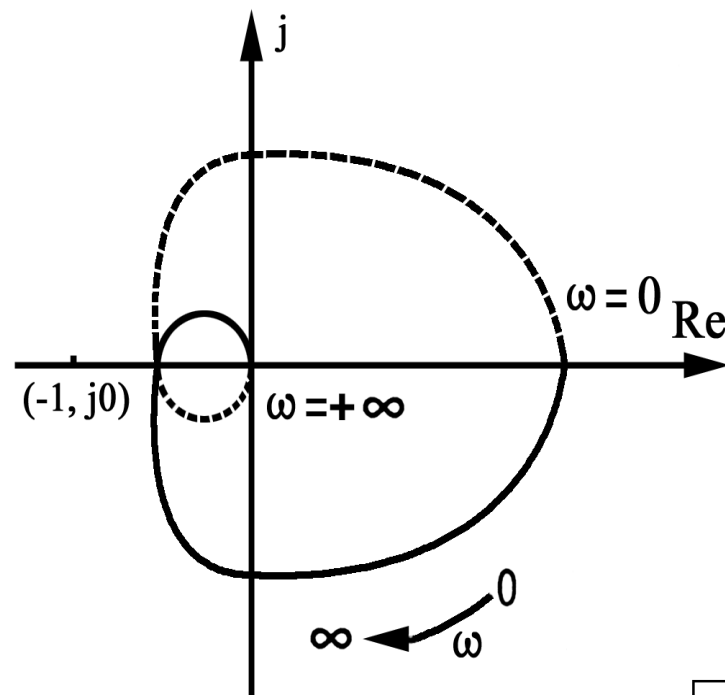
\therefore 闭环系统是稳定的。

当 $-k > -1$, $k < 1$, $N=0$, $z = p - R = 1$

闭环系统是不稳定的。

例5-16 某单位反馈系统，其开环极点均在 s 平面的左半平面，开环频率特性极坐标图如图所示，试判断闭环系统稳定性。

解：系统开环稳定，即 $P=0$ ，从图中看到 ω 由 $-\infty \rightarrow +\infty$ 变化时， $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点，即 $N=0$ ， $Z=P-N=0$ ，所以，闭环系统是稳定的。



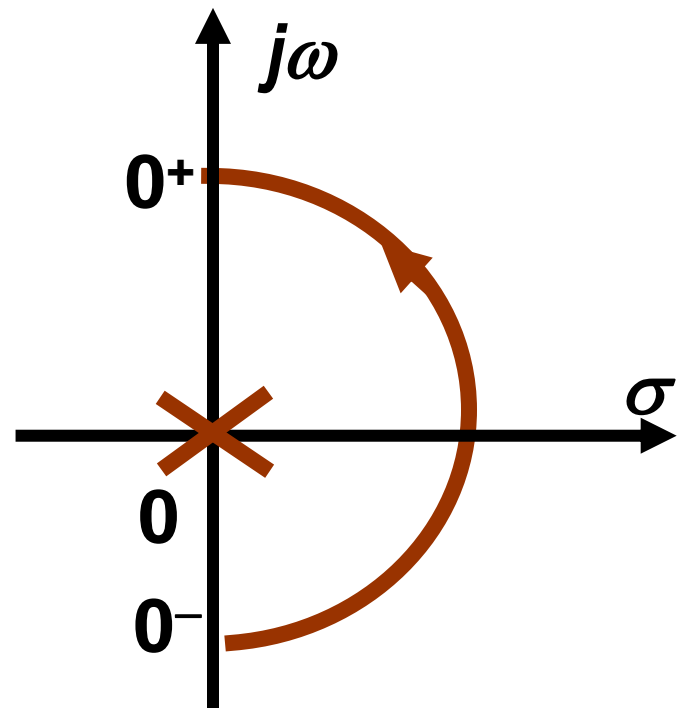
5.4.4 Nyquist稳定判据：情形II/Nyquist Stability Criterion: Case II

设某系统开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} \quad (5-29)$$

式中 v 表示开环传递函数中位于原点的极点个数。如果直接按Case I的Nyquist围线绘制该系统的Nyquist轨迹，则这样的Nyquist轨迹将包含有无穷远处的部分，从而事实上无法绘制和使用Nyquist稳定判据。为什么？

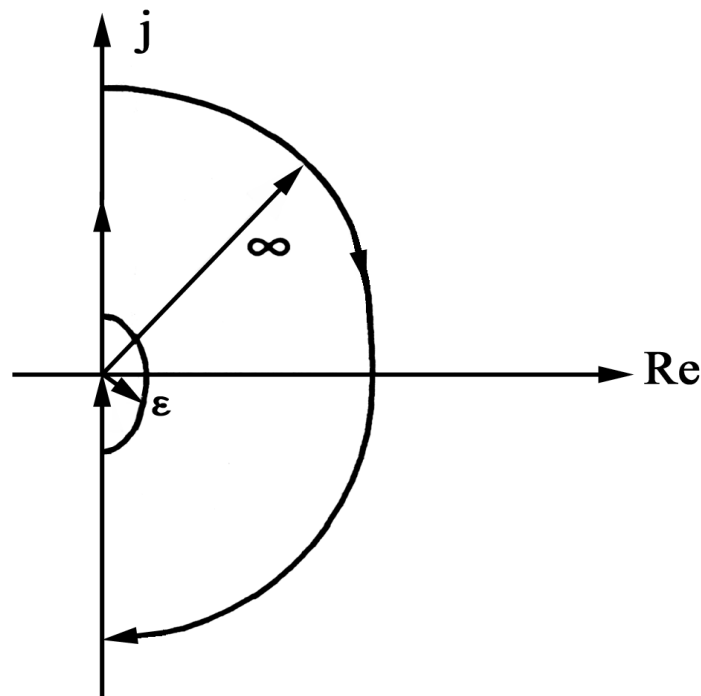
由于开环极点因子 $1/s$ ，既不在的 s 左半平面，也不在的 s 右半平面，开环系统临界稳定。在这种情况下，不能直接应用奈氏判据。



如果要应用奈氏判据，可把零根视为稳定根。因此，在数学上作如下处理：在平面上的 $s=0$ 邻域作一半径无穷小的半圆，绕过原点。

将Nyquist围线修正如右下图所示。它由四部分组成：

1. 以原点为圆心, 以无限大为半径的右大半圆;
2. 由 $-j\infty$ 到 $j0-\varepsilon$ 的负虚轴部分;
3. 由 $j0+\varepsilon$ 沿正虚轴到 $+j\infty$ 部分;
4. 以原点为圆心, 以 $(\varepsilon \rightarrow 0)$ 为半径的从 $j0-$ 到 $j0+$ 的右小半圆。

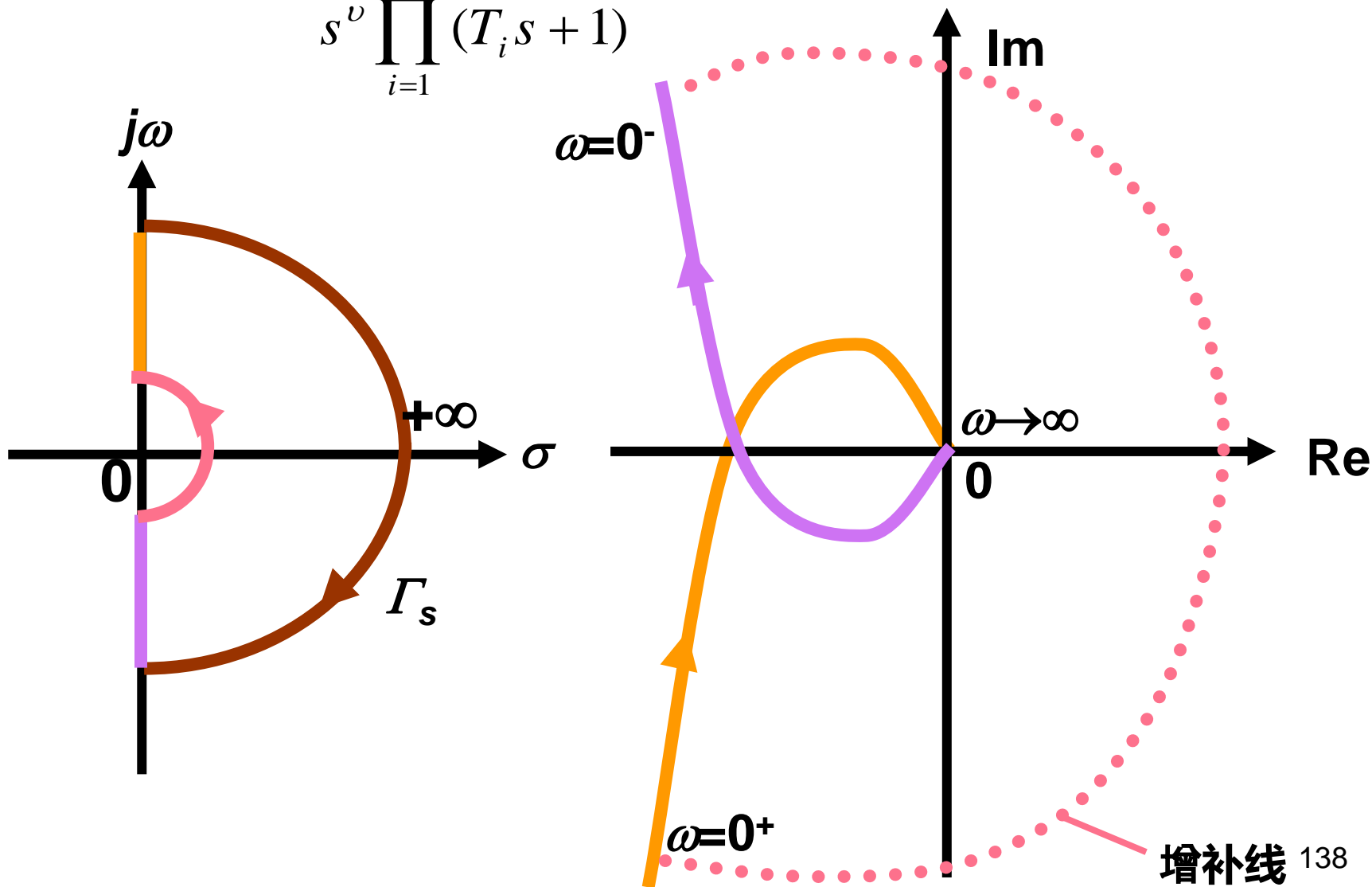


绕过原点处开环极点的Nyquist围线

相应地，在 GH 平面上开环极坐标图在 $\omega=0$ 时，小半圆映射到 GH 平面上是一个半径为无穷大，从 $\omega=0^-$ 到 $\omega=0^+$ 顺时针旋转 $\nu \cdot 180^\circ$ 的大圆弧。如此处理之后，就可以根据奈氏判据来判断系统的稳定性了。

开环I型以上的系统，其闭环系统不可能在原点出现极点。

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (\tau_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)}$$



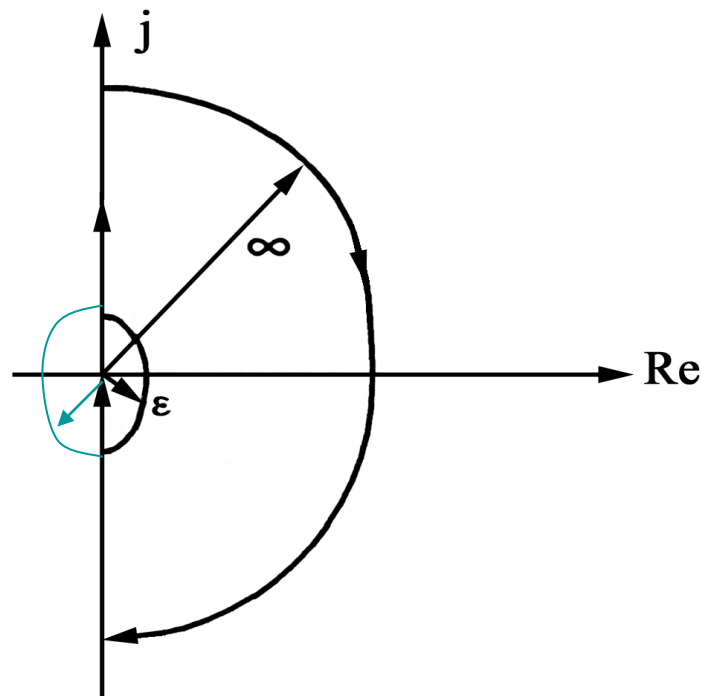
这样的Nyquist围线将位于原点的开环极点不视为不稳定极点。从而Nyquist稳定判据为：

当系统开环传递函数有 ν 个极点位于 s 平面坐标原点时，对应上图围线的开环频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ （ ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 和对应小半圆）逆时针包围 $(-1, j0)$ 的次数 N 等于系统开环右极点个数 P ，则闭环系统稳定，否则不稳定。

注意，1. 此时 $P \geq 0$ ； 2. 使用时 ε 应足够小。否则条件充分性不足。

另外，也可将Nyquist围线修正如右下图所示。它由四部分组成：

1. 以原点为圆心，以无限大为半径的右大半圆；
2. 由 $-j\infty$ 到 $j0^-$ 的负虚轴部分；
3. 由 $j0^+ + \varepsilon$ 沿正虚轴到 $+j\infty$ 部分；
4. 以原点为圆心，以 ε 为半径的从 $j0^-$ 到 $j0^+$ 的左小半圆。



绕过原点处开环极点的Nyquist围线

对应这样的Nyquist围线，位于原点的开环极点应视为不稳定极点。从而Nyquist稳定判据为：

当开环传递函数有 ν 个极点位于 s 平面坐标原点时，如果对应上图所示围线的开环频率特性曲线 $G(j\omega)H(j\omega)$ （ ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$ 和小半圆）逆时针包围 $(-1, j0)$ 的次数 N 等于系统开环不稳定极点个数 P ，则闭环系统稳定，否则不稳定。

注意，1. 此时 $P \geq \nu$ ；2. 使用时 ε 应足够小。否则条件充分性过剩。

例5-17 已知系统的开环传函为

$$G_k(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

用奈氏判据判断稳定性。

解：（1）从开环传递函数，知 $p = 0$

（2）作开环极坐标图

起点： $G_k(j0) = \infty \angle -90^\circ$

终点： $G_k(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$

与坐标轴交点：

$$G_k(j\omega) = \frac{k}{(1 + (\omega T_1)^2)(1 + (\omega T_2)^2)} \left[-(T_1 + T_2) - j \frac{1 - \omega^2 T_1 T_2}{\omega} \right]$$

$$\text{令虚部}=0, \text{得, } \omega_x^2 = \frac{1}{T_1 T_2} \quad \text{Re}(\omega_x) = -\frac{k T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$

系统的开环极坐标图如图示：

所作的增补线如虚线所示。

当 $-\frac{kT_1T_2}{T_1+T_2} < -1$

$$N = -2$$

$$z = p - N = 2$$

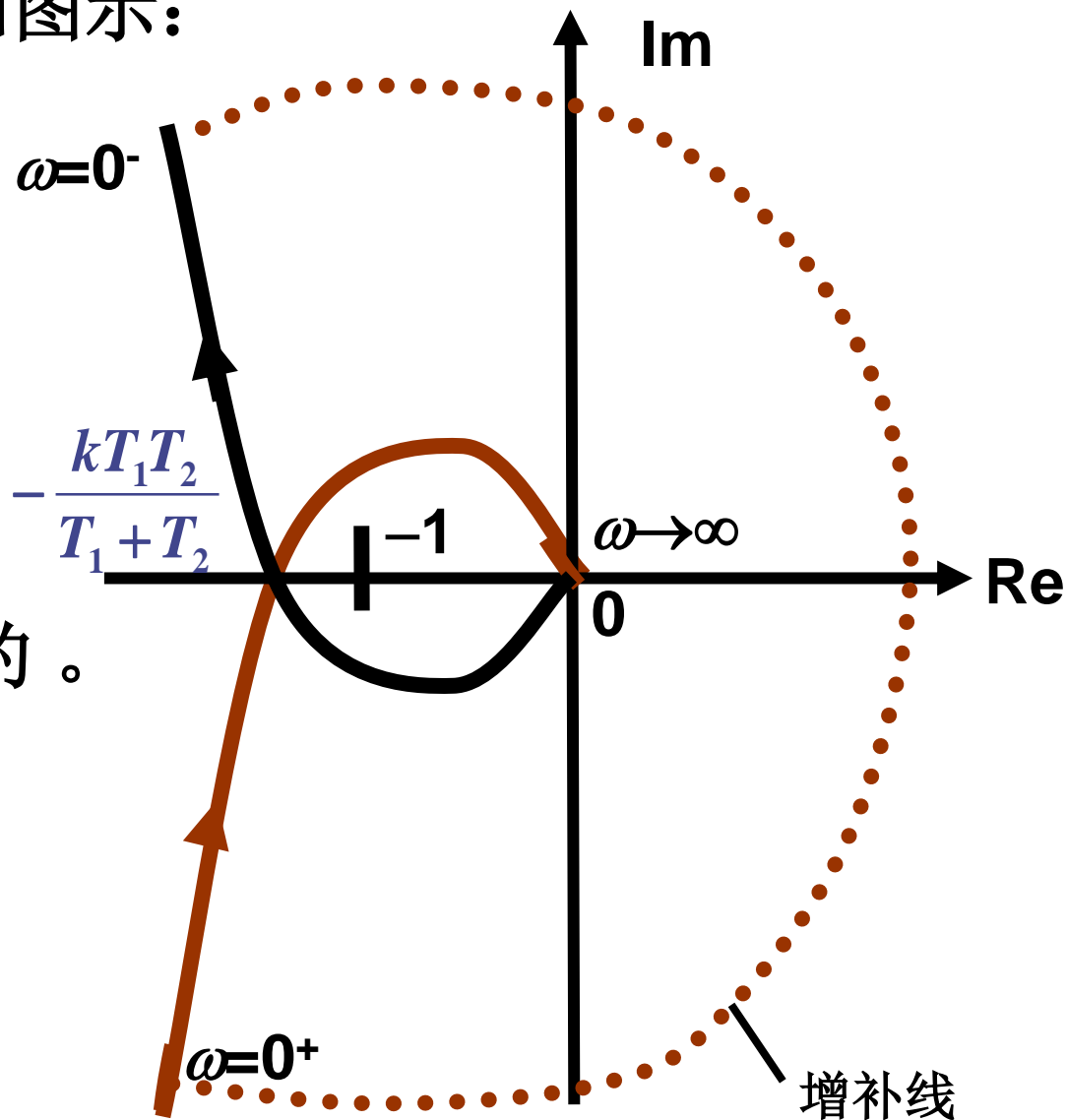
∴ 闭环系统是不稳定的。

当 $-\frac{kT_1T_2}{T_1+T_2} > -1$

$$N = 0$$

$$z = p - N = 0$$

∴ 闭环系统是稳定的。



当 $\frac{KT_1T_2}{T_1 + T_2} < 1$ 时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线不包围 $(-1, j0)$ 点, 闭环系统稳定。

当 $\frac{KT_1T_2}{T_1 + T_2} = 1$ 时, $G(j\omega)H(j\omega)$ 的曲线正好穿越 $(-1, j0)$ 点, 系统处于临界状态。

总之, 该系统临界稳定时的开环放大增益是

$$K_C = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

□

请问, 如果利用有左绕行小半圆的Nyquist围线, 稳定分析方法应有何种变化? 结论会不会不同?

基于Nyquist轨迹穿越特性的稳定判据

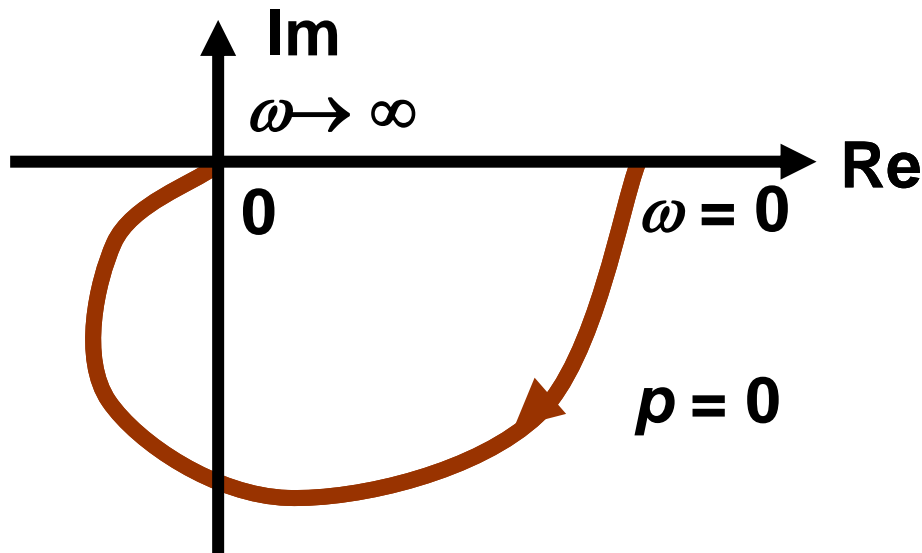
应用Nyquist稳定判据判别闭环系统的稳定性，实际上要看开环频率特性对负实轴上 $(-1, -\infty)$ 区段的穿越情况。穿越伴随着相角增加的称之为正穿越，记作 N_+ ，穿越伴随着相角减小的，称为负穿越，记作 N_- ，如下页图所示。

由此，Nyquist判据可描述为：

当 ω 由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，系统开环频率特性在负实轴上 $(-1, -\infty)$ 区段的正穿越次数 N_+ 与负穿越次数 N_- 之差的两倍等于开环系统右极点个数 P 时，则闭环系统稳定。

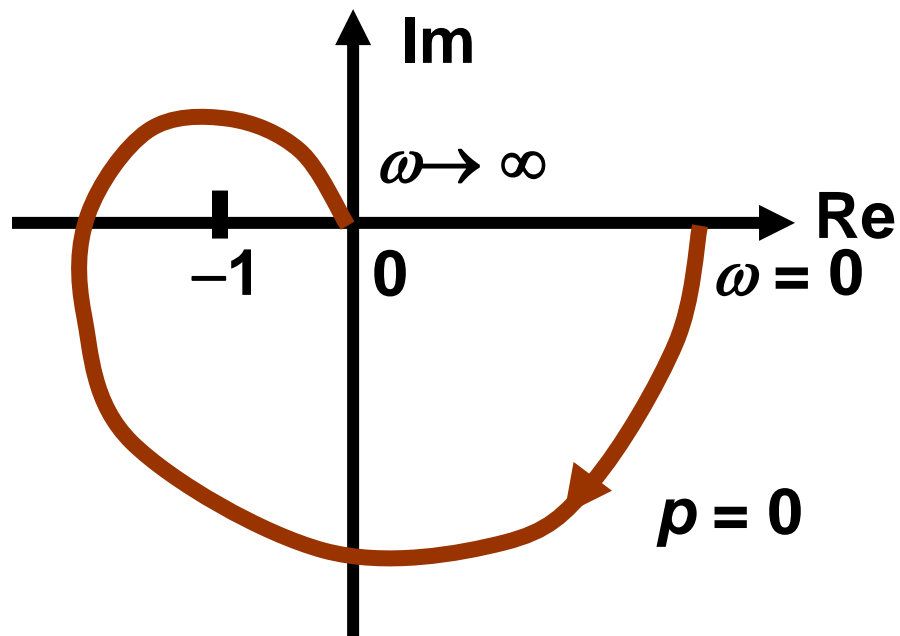
$$2 (N_+ - N_-) = P \quad (5-30)$$

重新做例5-14 判断系统稳定性。

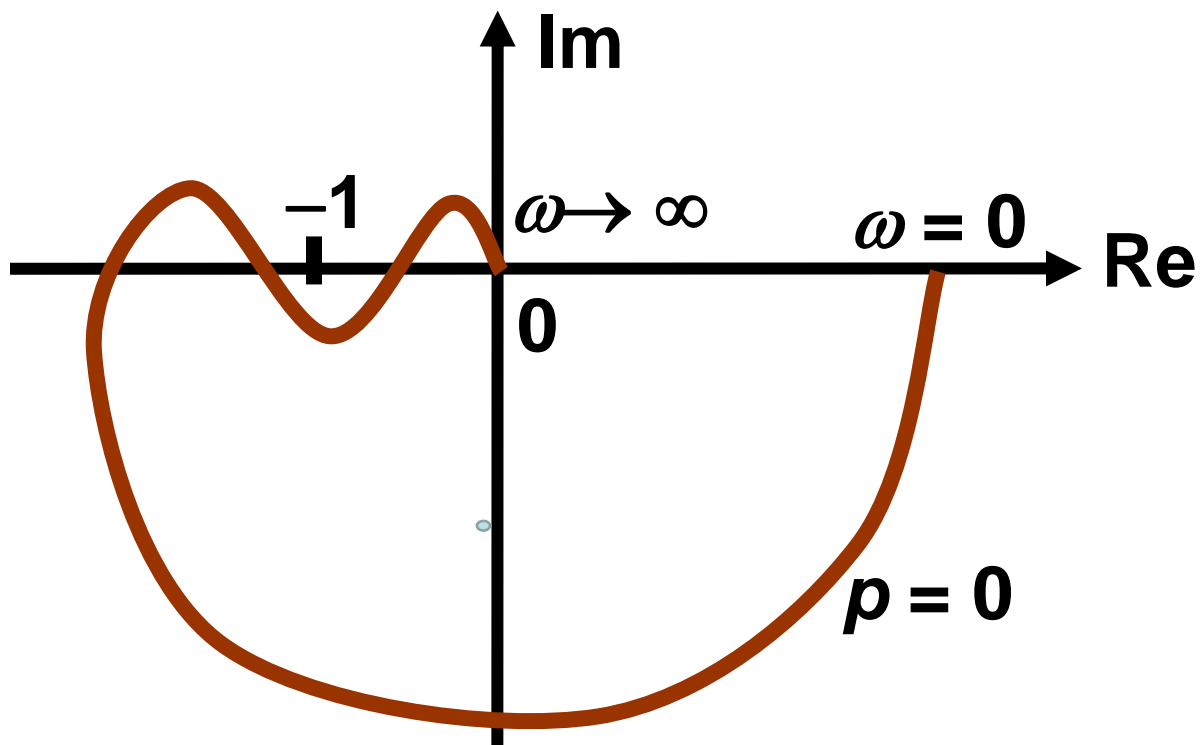


解：由图知

(1) $p = 0$ 且 $N_+ = N_- = 0$
闭环系统是稳定的。



(2) $p = 0$, $N_+ = 0$, $N_- = 1$
 $p \neq 2(N_+ - N_-) = -2$
闭环系统不稳定的。



$$(3) \quad p = 0, \quad N_+ = N_- = 1$$

$$p = 2(N_+ - N_-) = 0$$

闭环系统是稳定的。

例5-18 已知系统的开环传函为

$$G_k(s) = \frac{k(0.1s + 1)}{s(s - 1)}$$

用奈氏判据判断稳定性。

解：（1）从开环传递函数知

$$p = 1$$

（2）作开环极坐标图

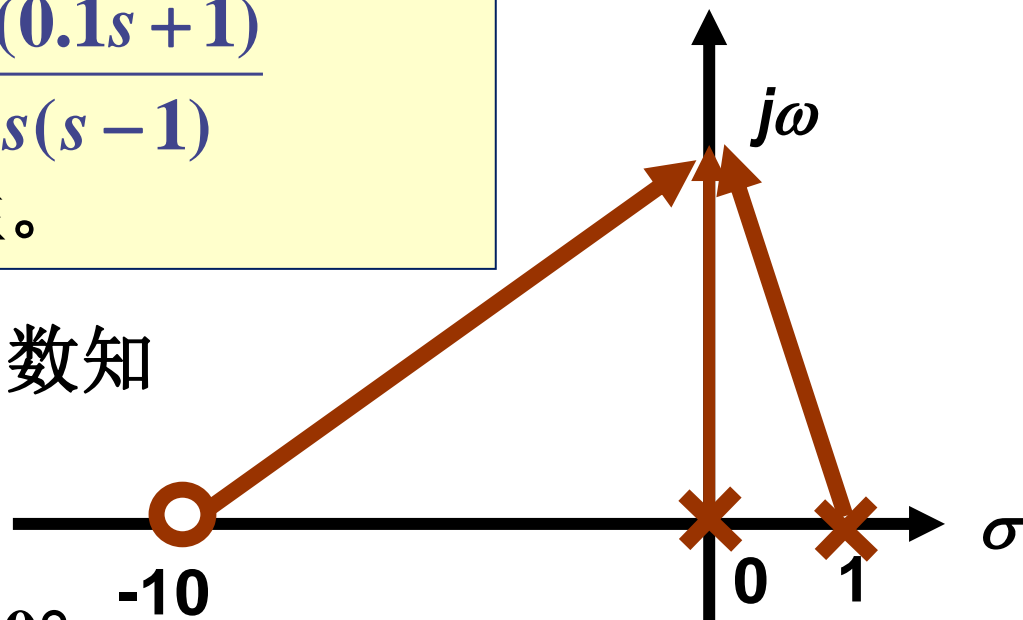
起点： $G_k(j0) = \infty \angle -270^\circ$

终点： $G_k(j\infty) = 0 \angle -90^\circ$

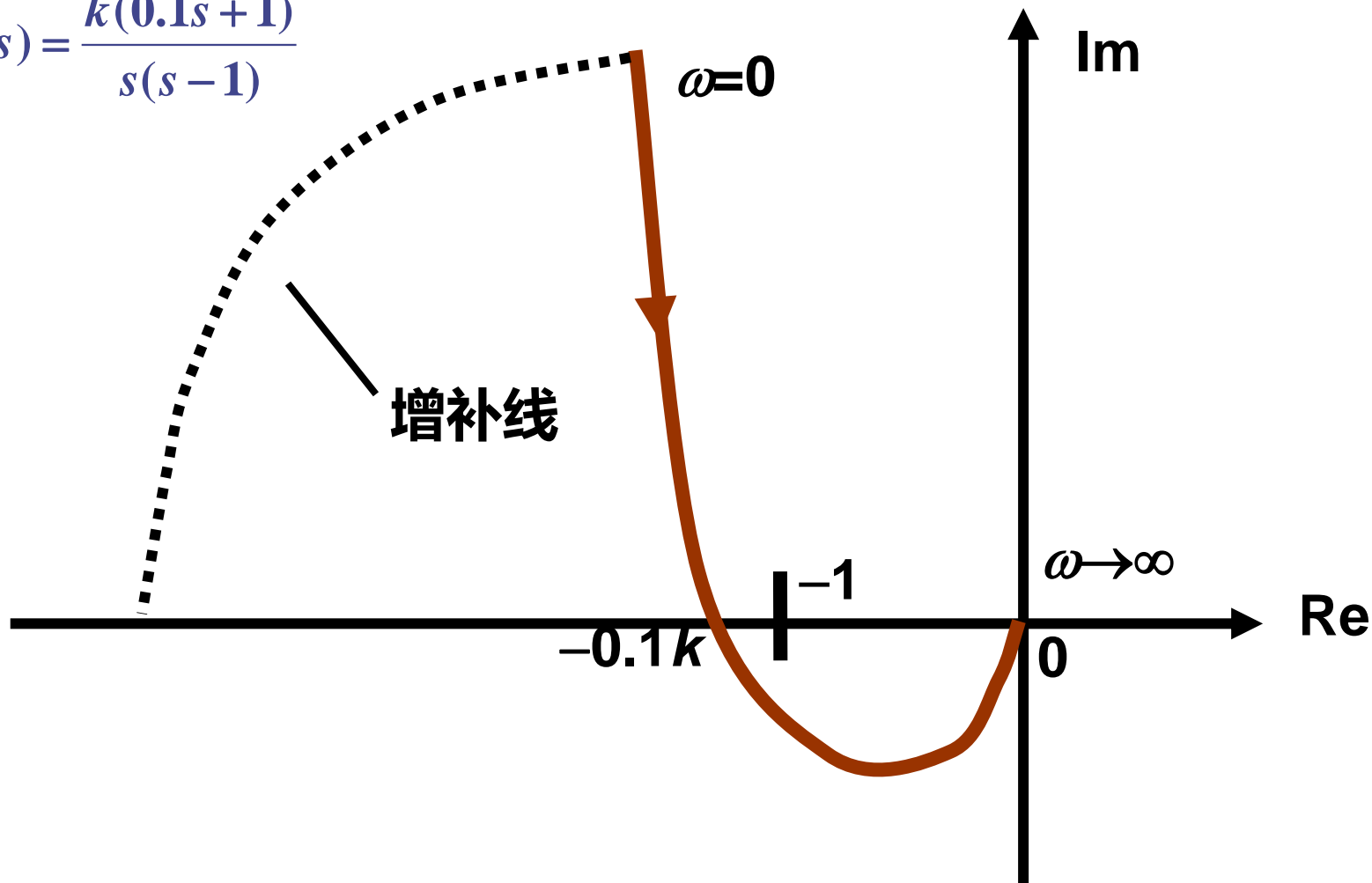
与坐标轴交点： $\omega_x = 10^{1/2}$

$$\text{Re}(\omega_x) = -0.1k$$

开环极坐标图如图



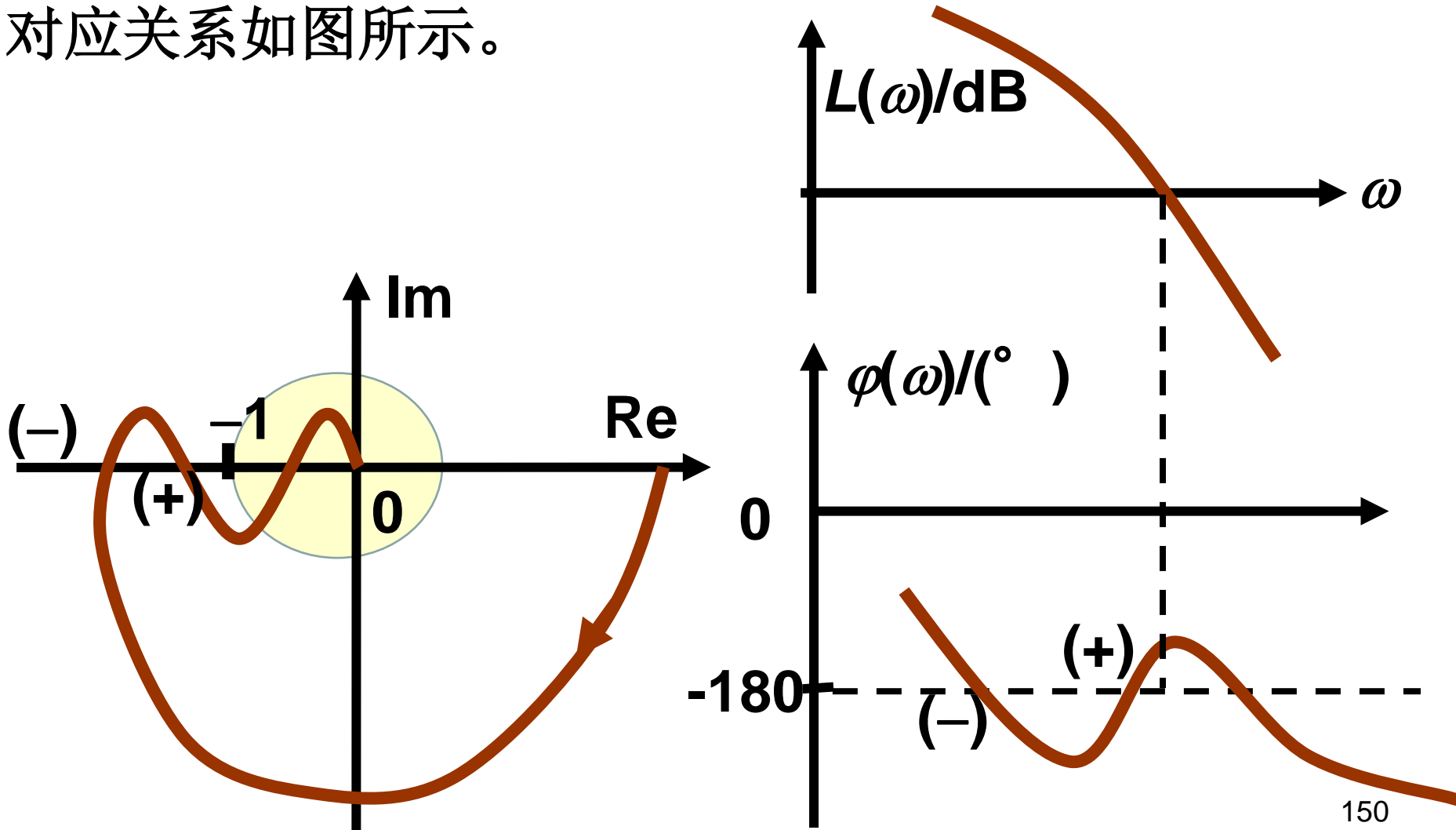
$$G_k(s) = \frac{k(0.1s + 1)}{s(s - 1)}$$



(3) 稳定性判别： 因为是1型系统，需作增补线如图
 当 $-0.1k < -1$, $k > 10$ 时, $p = 1$, $N_+ = 1, N_- = 1/2$
 $p = 2(N_+ - N_-) = 1$ 闭环系统是稳定的。

5.4.5 Nyquist对数稳定判据

Nyquist轨迹与Bode图的对应关系如图所示。



Nyquist曲线和Bode图之间的对应关系

- ① Nyquist曲线幅值 $|G(j\omega)H(j\omega)|=1$ 的单位圆, 与Bode图中的零分贝线相对应。
- ② Nyquist曲线的单位圆以外, 即 $|G(j\omega)H(j\omega)|>1$ 的部分与Bode图中的零分贝线以上相对应, 单位圆内, 即 $|G(j\omega)H(j\omega)|<1$ 的部分与零分贝线以下相对应。
- ③ Nyquist曲线的负实轴与Bode 图中的相频特性图中的 $-\pi$ 线相对应。
- ④ 在Nyquist曲线 $(-\infty, -1)$ 区段的正、负穿越, 在Bode图中映射为在幅频特性曲线 $L(\omega)>0\text{dB}$ 的频段内, 沿 ω 增大的方向, 相频特性曲线对 $-\pi$ 线的正负穿越。

采用对数频率特性曲线（Bode图）时，Nyquist稳定判据可表述为：

当 ω 由 $0 \rightarrow +\infty$ 变化时，在开环对数幅频特性曲线 $L(\omega) \geq 0$ 的频段内，相频特性曲线对 -180° 线的正穿越与负穿越次数之差的2倍为 P （ P 为 s 平面右半平面开环极点数），则闭环系统稳定。

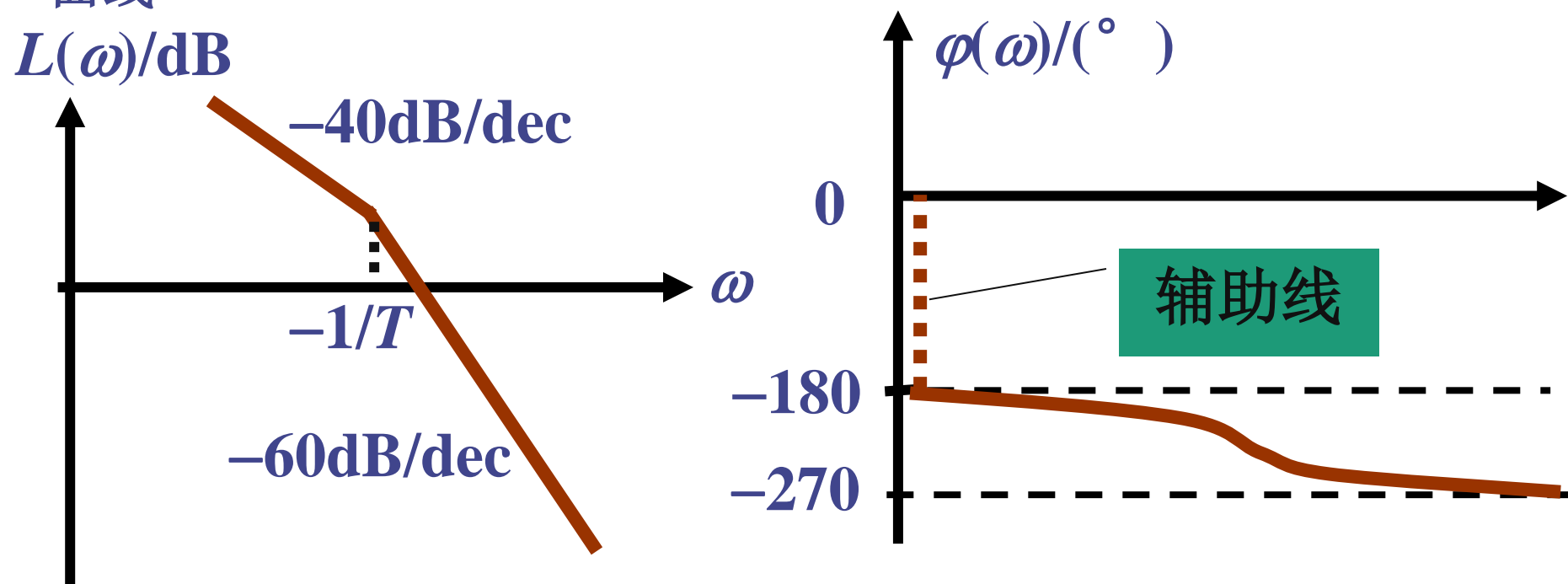
$$G(s)H(s) = \frac{10K}{s^2(s+1)}$$

例5-19 一反馈控制系统其开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s^2(Ts + 1)}$$

用对数稳定判据判断系统稳定性。

解：由开环传递函数知 $P = 0$ ，作系统的开环对数频率特性曲线



$G(s)H(s)$ 有两个积分环节 $\nu=2$ ，故补画了 0° 到 -180° 的辅助线。

显见 $N_+ = 0$ ， $N_- = 1$

$$N = 2(N_+ - N_-) = -2$$

$$Z = P - N = 2$$

故系统不稳定。

例5-20 一反馈控制系统其开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{k(T_2s + 1)}{s(T_1s - 1)} \quad (T_1 > T_2)$$

用对数稳定判据判断系统稳定性。

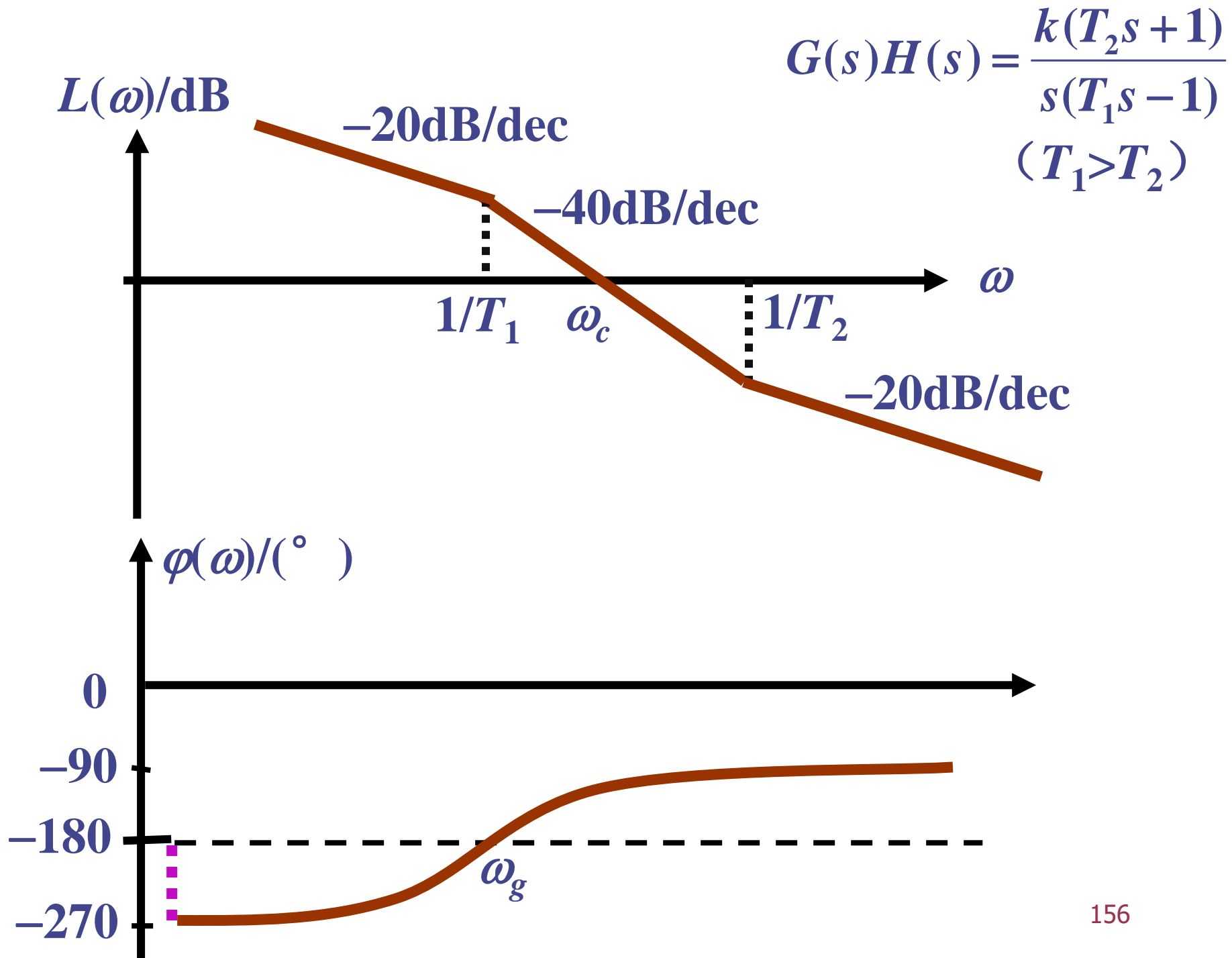
解：① 由开环传递函数知 $P = 1$ 。

② 作系统的开环对数频率特性曲线。

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= -90^\circ + \arctan \omega T_2 - (180^\circ - \arctan \omega T_1) \\ &= -270^\circ + \arctan \frac{\omega(T_1 + T_2)}{1 - \omega^2 T_1 T_2}\end{aligned}$$

当 $\varphi(\omega) = -180^\circ$ 时， $\omega_g = (1/T_1 T_2)^{1/2}$ ， $A(\omega_g) = kT_2$

③ 稳定性判别。 $G(s)H(s)$ 有一个积分环节 $N = 1$ ，故补画了 -180° 到 -270° 的辅助线。



(i) 当 $\omega_g < \omega_c$ 时, 即 $A(\omega_g) > 1$, $N_+ = 1$, $N_- = 1/2$

$$N = 2(N_+ - N_-) = 1$$

$$Z = P - N = 0$$

故系统稳定。

(ii) 当 $\omega_g > \omega_c$ 时, 即 $A(\omega_g) < 1$, $N_+ = 0$, $N_- = 1/2$

$$N = 2(N_+ - N_-) = -1$$

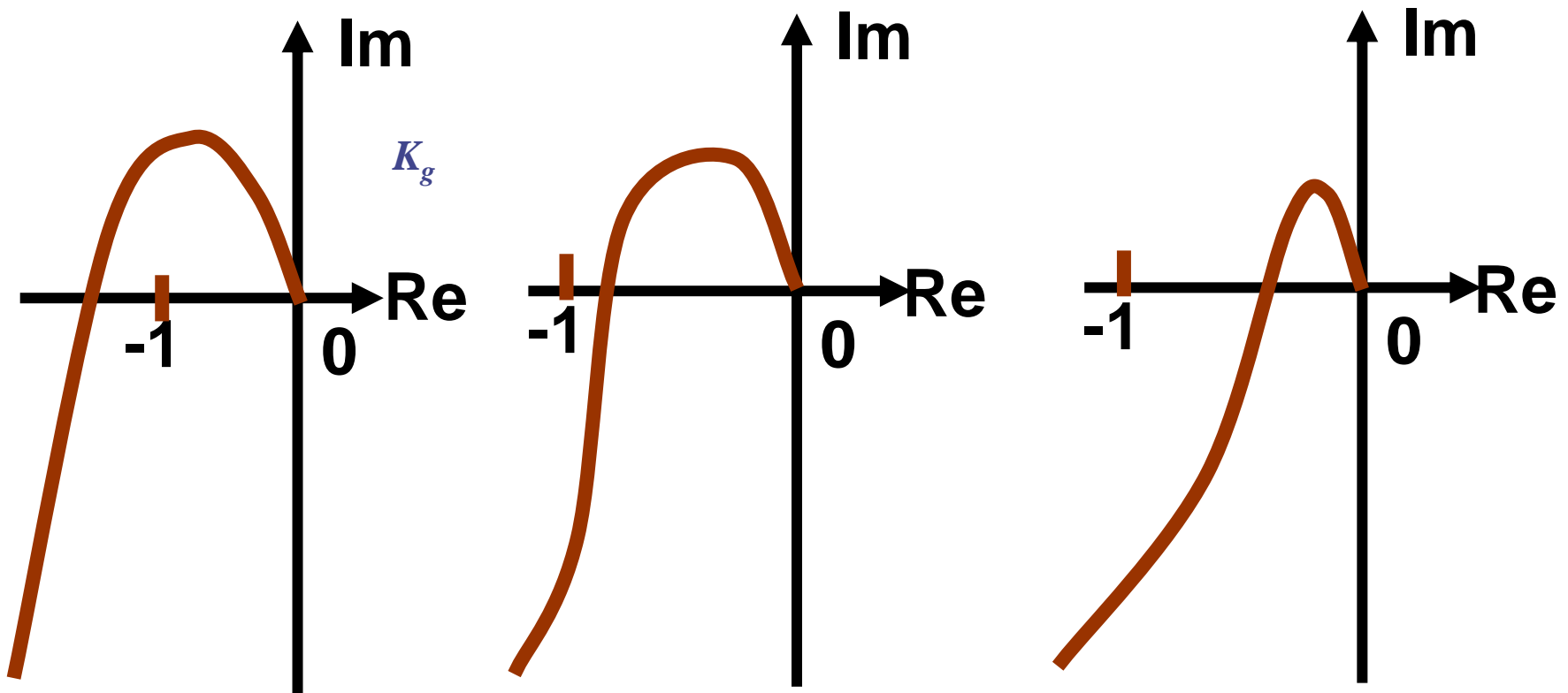
$$Z = P - N = 1$$

故系统不稳定。

§ 5.5 控制系统的相对稳定性

5.5.1 控制系统的相对稳定性(鲁棒稳定性)

根据Nyquist判据，系统开环幅相曲线临界点附近的形状，对闭环稳定性影响很大。



从Nyquist判据可知，若系统开环传递函数没有右半平面的极点且闭环系统是稳定的，则

- ❖ 开环系统的Nyquist曲线离 $(-1, j0)$ 点越远，则闭环系统的稳定程度越高。
- ❖ 开环系统的Nyquist曲线离 $(-1, j0)$ 点越近，则其闭环系统的稳定程度越低。
- ❖ 通过乃氏曲线对点 $(-1, j0)$ 的靠近程度来度量其稳定程度时，可定量表示为相角裕量和增益裕量。
- ❖ 增益裕量和相角裕量作为频域指标，仅用任意其一都不足以说明系统的相对稳定性。

(1) 幅值裕度 K_g ：令相位为 -180° 时对应的频率为 ω_g （相位穿越频率），频率为 ω_g 时对应的幅值 $A(\omega_g)$ 的倒数，定义为幅值裕度 K_g ，即

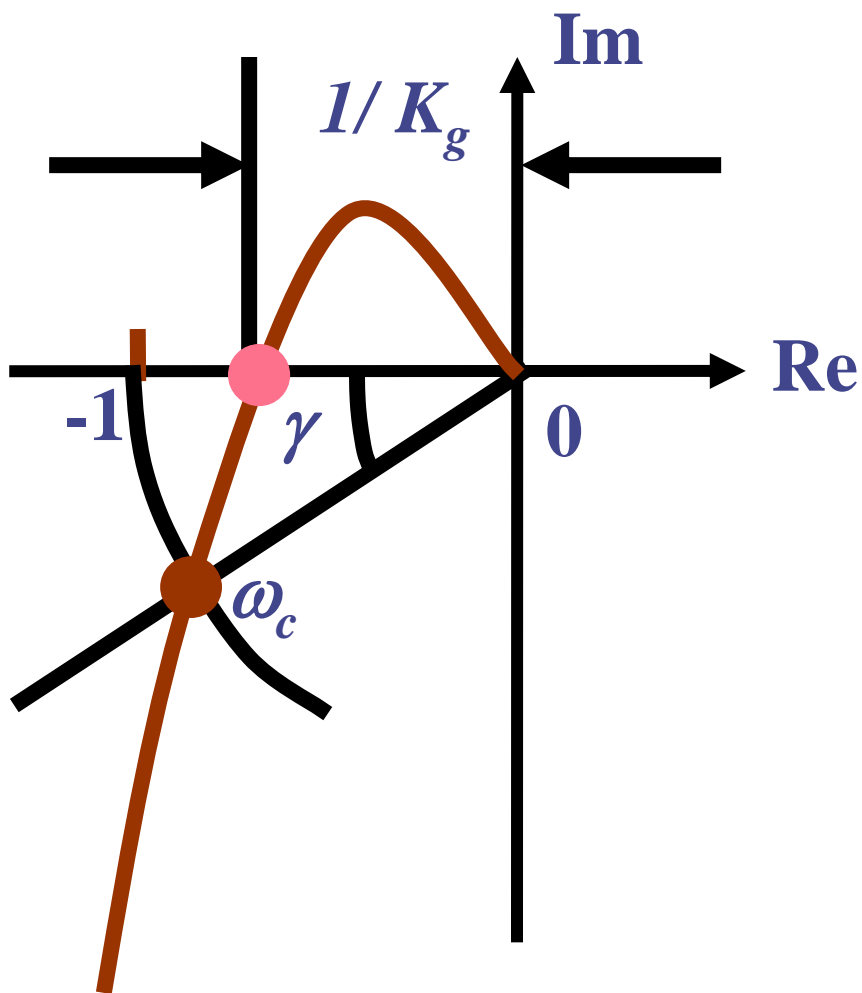
$$K_g = \frac{1}{G(j\omega_g)H(j\omega_g)}$$

或

$$20\lg K_g = -20\lg \{G(j\omega_g)H(j\omega_g)\} \text{ dB}$$

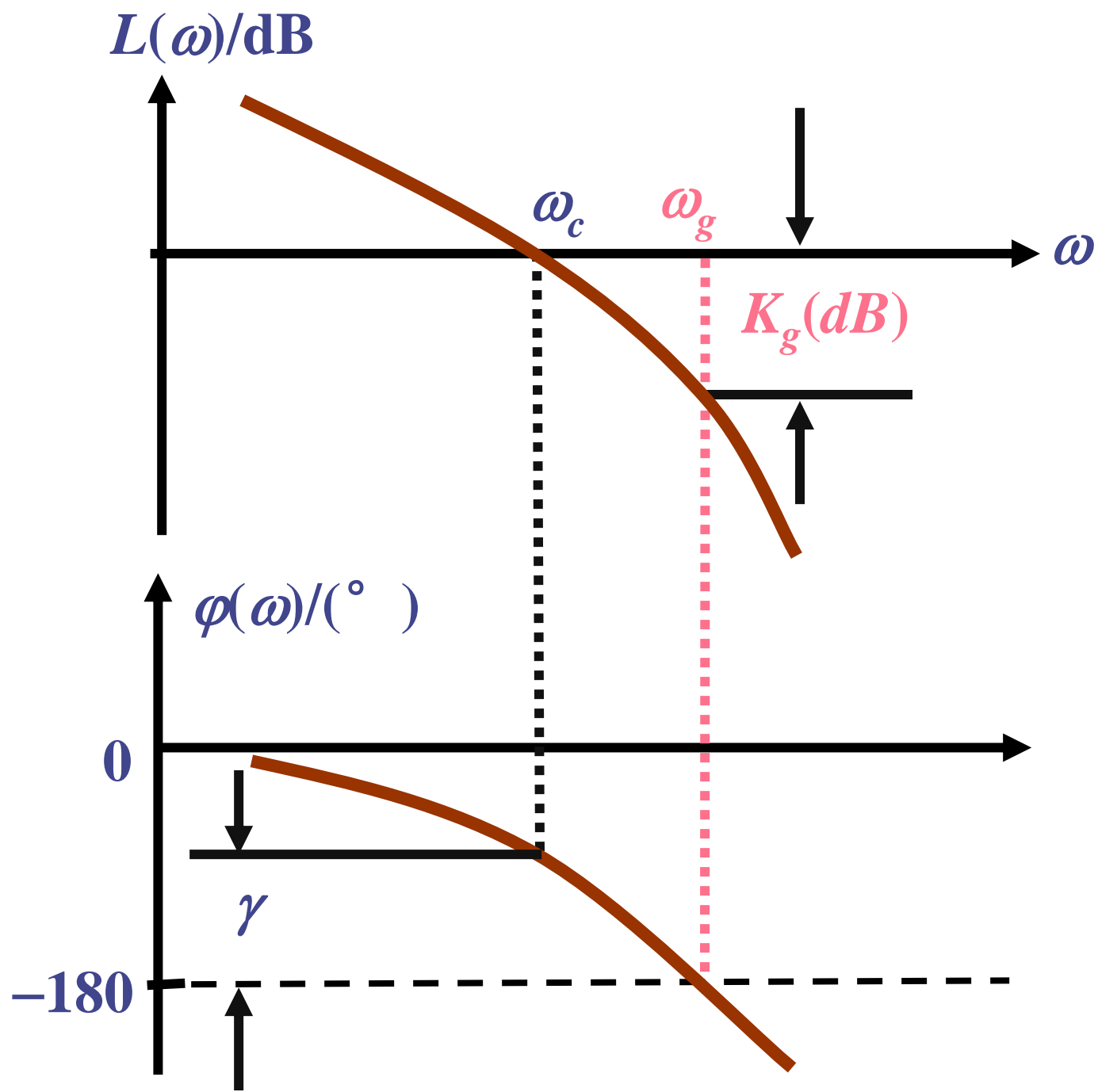
(2) 相角裕度 γ ：令幅频特性过零分贝时的频率为 ω_c （增益（幅值）穿越频率），则定义相角裕度 γ 为

$$\gamma = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$



K_g 具有如下含义：如果系统是稳定的，那么系统的开环增益增大到原来的 K_g 倍时，则系统就处于临界稳定了。

γ 具有如下含义：如果系统是稳定的，那么系统的开环相频特性变化 γ 角度时，则系统就处于临界稳定了。



❖ 对于最小相位系统

◆ 当 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| < 1$ 或 $20\lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| < 0$ 时，闭环系统稳定。

◆ 当 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| > 1$ 或 $20\lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| > 0$ 时，闭环系统不稳定。

◆ 当 $|G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = 1$ 或 $20\lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| = 0$ 时，闭环系统处于临界稳定状态。

◆ 对于开环不稳定的系统，为使闭环系统稳定，则 $G(j\omega)H(j\omega)$ 曲线应包围 $(-1, j0)$ 点，此时

$$K_g = -20\lg |G(j\omega_g)H(j\omega_g)| < 0$$

◆ 当 $\gamma > 0$ 时，闭环系统稳定，反之 $\gamma < 0$ ，闭环系统不稳定。

5.5.4 基于幅相频率特性曲线系统稳定性分析

- ❖ 对数幅频特性和相频特性两曲线合成幅相频率特性曲线图时，
 - 当 $G(j\omega)H(j\omega)$ 的开环增益变化时，曲线仅是上下简单平移；
 - 当 $G(j\omega)H(j\omega)$ 所有频率增加一恒定相角，曲线为水平平移；

这对分析系统稳定性和系统参数之间的相互影响或关系是很有利的。

§ 5.7 用频率特性分析系统品质

5.7.1 闭环频域性能指标与时域性能指标的关系

❖ 对于二阶系统，其频域性能指标和时域性能指标之间有着严格的数学关系。

◆ 二阶系统的闭环传递函数为

$$\phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

◆系统闭环频率特性为

$$\phi(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\zeta\omega_n\omega + \omega_n^2}$$

◆系统闭环幅频特性为

$$M(\omega) = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}}$$

◆系统闭环相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$$

❖ 谐振峰值 M_r 和时域超调量 M_p 之间的关系

◆ 二阶系统的超调量 M_p

$$M_p = e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%$$

◆ 谐振峰值 M_r

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

- ◆ 由此可看出，谐振峰值 M_r 仅与阻尼比 ζ 有关，超调量 M_p 也仅取决于阻尼比 ζ

- ◆ ζ 越小, M_r 增加得越快, 这时超调量 M_p 也很大, 超过40%, 一般这样的系统不符和瞬态响应指标的要求;
- ◆ 当 $0.4 < \zeta < 0.707$ 时, M_r 与 M_p 的变化趋势基本一致, 此时谐振峰值 $M_r = 1.2 \sim 1.5$, 超调量 $M_p = 20\% \sim 30\%$, 系统响应结果较满意;
- ◆ 当 $\zeta > 0.707$ 时, 无谐振峰值, M_r 与 M_p 的对应关系不再存在, 通常设计时 ζ 取在0.4至0.7之间。

❖ 谐振频率 ω_r 与峰值时间 t_p 的关系

◆ t_p 与 ω_r 之积为

$$t_p \omega_r = \frac{\pi \sqrt{1 - 2\zeta^2}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

◆ 由此可看出，当 ζ 为常数时，谐振频率 ω_r 与峰值时间 t_p 成反比， ω_r 值愈大， t_p 愈小，表示系统时间响应愈快。

❖ 闭环截止频率 ω_b 与过渡过程时间 t_s 的关系

◆ ω_b 与 t_s 之积为

$$\omega_b t_s = \frac{3 \sim 4}{\zeta} \sqrt{1 - 2\zeta^2} + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}$$

◆ 由此，当阻尼比 ζ 给定后，闭环截止频率 ω_b 与过渡过程时间 t_s 成反比关系。换言之， ω_b 愈大（频带宽度0 - ω_b 愈宽），系统的响应速度愈快。

5.7.2 开环频率特性与闭环时间响应的关系

/Relations among Open- and Closed-Loop Frequency Features & Time Responses

- ❖ 开环频率特性与时域响应的关系可分为三个频段分析，即“三频段”的概念：
 - ◆ 低频段：指 $L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)|$ 的在第一个转折频率前的频段，该段特性基本由积分环节和开环增益决定；
$$L_d(\omega) = 20 \lg K - 20\nu \lg \omega$$
 - ◆ 低频段斜率愈小，位置愈高，对应系统积分环节数目愈多、开环放大倍数K愈大，则在闭环系统稳定的条件下，其稳态误差就愈小，动态响应的跟踪精度就愈高

- ◆ 中频段: 指开环对数幅频特性在开环截止频率 ω_c 附近 (0分贝附近) 的区段, 该段集中反映闭环动态响应的平稳性和快速性;
- ◆ 时域响应的动态特性主要取决于中频段形状; 开环截止频率 ω_c 、中频段的斜率、中频段宽度;
- ◆ 为使系统稳定, 有足够稳定裕量, 一般希望开环对数幅频特性斜率为-20dB/dec的线段, 且中频段有足够宽度; 或开环对数幅频特性斜率为 -40dB/dec的线段上, 且中频段较窄。

- ◆ 高频段指开环对数幅频特性在中频段以后的频段，高频段形状主要影响时域响应的暂态特性；
- ◆ 系统开环对数幅频特性的高频段，直接反映了系统对高频干扰信号的抑制能力。高频部分的幅值愈低，系统的抗干扰能力愈强。
- ❖ **总结：** 为了使系统满足**稳态**和**动态**要求，对开环对数幅频特性形状有如下要求：
 1. 低频段要有一定高度和斜率；
 2. 中频段的斜率最好为 -20dB/dec ，且具有足够宽度；
 3. 高频段采用迅速衰减的特性，以抑制**高频干扰**。

小结

1. 频域分析法是图解分析法，频率特性是系统的一种数学模型。
2. 系统频率特性的三种图形为极坐标图、对数频率特性图（Bode图）和对数幅相图。系统对数频率特性（Bode图）可根据典型环节的频率特性的特点绘制。
3. 若系统传递函数的极点和零点均位于 s 平面的左半平面，该系统称为最小相位系统。反之，若传递函数具有位于右半平面零点，极点或有纯滞后，则系统称为非最小相位系统。

对于最小相位系统，幅频和相频特性之间存在唯一的对应关系，即根据对数幅频特性，可以唯一地确定相频特性和传递函数。而对非最小相位系统则不然。

4. 利用Nyquist稳定判据，可用开环频率特性判别闭环系统的稳定性。利用相角裕量和幅值裕量可反映系统相对稳定性。
5. 利用等 M 圆和等 N 圆，可由开环频率特性来求闭环频率特性，并可求得闭环频率特性的谐振频率 ω_r 、谐振峰值 M_r 、闭环截止频率 ω_b 等。
6. 由闭环频率特性可定性或定量分析系统时域响应。

7. 利用开环频率特性三频段概念，可分析系统时域响应的动态/稳态性能，并可分析系统参数对系统性能的影响。
8. 许多系统的频率特性可用实验方法确定。最小相位系统的传递函数可由对数幅频特性的渐近线来确定。
9. 频域法分析采用了典型化、对数化、图表化等处理方法，已发展成为一种实用工程方法，在工程实践中获得了广泛应用。