智能控制理论
（Intelligent Control Theories）

第3章　模糊控制的理论基础

主讲教师：段朝霞（能电院自动化系）

办公室：勤学楼1212
邮　箱：duanzx1989@163.com

第3章 模糊控制的理论基础

3.1 概述

- 模糊数学(模糊集）是模糊控制的数学基础，它是由美国加利福尼亚大学Zadeh教授最先提出的。他将模糊性和集合论统一起来，在不放弃集合的数学严格性的同时，使其吸取人脑思维中对于模糊现象认识和推理的优点。

- “模糊”，是指客观事物彼此间的差异在中间过渡时，界限不明显，呈现出的“亦此亦彼”性。“模糊”是相对于“精确”而言的。

  “精确”：“老师”、“学生”、“工人”

  “模糊”：“高个子”、“热天气”、“年轻人”

- 模糊数学并不是让数学变成模模糊糊的东西，而是用数学工具对模糊现象进行描述和分析。模糊数学是对经典数学的扩展，它在经典集合理论的基础上引入了“隶属函数”的概念，来描述事物对模糊概念的从属程度。

3.2 普通集合

1） 集合的概念

* ***集合***

具有特定属性的对象的全体，称为集合。例如： “XX大学的学生”可以作为一个集合。集合通常用大写字母A，B，……，Z来表示。

* ***元素***

组成集合的各个对象，称为元素，也称为个体。通常用小写字母 a，b，……，z来表示。

* ***论域***

所研究的全部对象的总和，叫做论域，也叫全集合。

* ***空集***

不包含任何元素的集合，称为空集，记做Φ。

* ***子集***

集合中的一部分元素组成的集合，称为集合的子集。

* *属于*

若元素 a 是集合 A 的元素，则称元素 a 属于集合 A ，记为a∈A；反之，称a不属于集合A，记做 $a \notin A$。

* *包含*

若集合A是集合B的子集，则称集合A包含于集合B，记为$A \subseteq B$；或者集合B包含集合A，记为 $B \supseteq A$ 。

* *相等*

对于两个集合A和B，如果$A \subseteq B$ 和$B \subseteq A$ 同时成立，则称A和B相等，记做A=B。此时A和B有相同的元素，互为子集。

* *有限集*

如果一个集合包含的元素为有限个，就叫做有限集；否则，叫做无限集。

3.2 普通集合

2）集合的表示法

* 列举法

将集合中的所有元素都列在大括号中表示出来，该方法只能用于有限集的表示。

例如10-20之间的偶数组成集合 A，则 A 可表示为

$$A=\{10，12，14，16，18，20\}$$

* 表征法

表征法将集合中所有元素的共同特征列在大括号中表征出来。上例中的集合A也可用表征法表示为

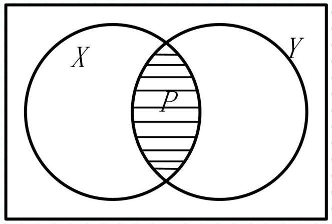
$$A=\{a \mid a\text{为偶数}，10 \leqslant a \leqslant 20\}$$

3.2 普通集合

3）集合的运算

＊ 集合交

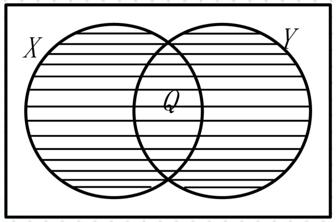
设 X，Y 为两个集合，由既属于设 X 又属于 Y 的元素组成的集合 P 称为 X, Y 的交集，记作



$$P=X\cap Y$$

＊ 集合并

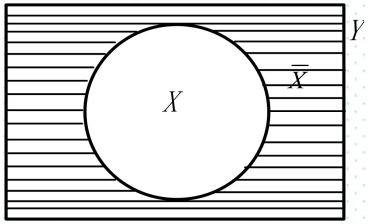
设 X，Y 为两个集合，由属于X或者属于Y的元素组成的集合Q称为X，Y的并集，记作



$$Q=X\cup Y$$

＊ 集合补

在论域 Y 上有集合 X，则 X 的补集为



$$\overline{X}=\{x\mid x\notin X\}$$

3.2 普通集合

* 集合的直积

设 X，Y 为两集合，定义 X，Y 的直积为

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

具体算法是：在 X，Y 中各取一个元素组成序偶（x，y），所有序偶组成的集合，就是 X，Y 的直积。

4） 集合的特征函数

设 x 为论域 X 中的元素， A 为论域 X 中定义的一个集合，则 x 和 A 的关系可以用集合 A 的特征函数来表示。它的值域是 {0，1}，它表示元素 x 是否属于集合 A。如果 x 属于集合 A，那么的值为 1；如果 x 不属于集合 A，那么的值为 0。即

$$C_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

3.2 普通集合

例如：集合 A 由 4 个离散值 x_1, x_2, x_3, x_4 组成。

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

例如： 集合 A 由0到1之间的连续实数值组成。

$$A = \{x, x \in R, 0 \le x \le 1\}$$

以上两个集合是完全不模糊的。对任意元素 x，只有两种可能：属于 A，不属于 A 。这种特性可以用特征函数 $C_A(x)$ 来描述：

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

3.3 模糊集合

(1)模糊集合的定义：

给定论域 E 中的一个模糊集 A，是指任意元素 $x \in E$，都不同程度地属于这个集合，元素属于这个集合的程度可以用隶属函数 $\mu_A(x) \in [0,1]$ 来表示。

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ (0,1) & x\text{属于 }A\text{的程度} \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

表示元素 x 属于模糊集合 A 的程度，取值范围为[0, 1]，称 $\mu_A(x)$ 为 x 属于模糊集合 A 的隶属度。

3.3 模糊集合

例3.1　设论域 U={张三，李四，王五}，评语为“学习好”。设三个人学习成绩总评分是张三得95分，李四得90分，王五得85分，三人都学习好，但又有差异。

若采用普通集合的观点，选取特征函数

$$C_A(u)=\begin{cases}1 & \text{学习好} \in A \\ 0 & \text{学习差} \notin A\end{cases}$$

此时，特征函数分别为 C_A(张三)=1，C_A(李四)=1，C_A(王五)=1，这样就反映不出三者的差异。

采用模糊集合来描述，采用隶属函数 $\mu_A(x)=x/100$

三人“学习好”的隶属度为

μ_A(张三)=0.95，μ_A(李四)=0.9，μ_A(王五)=0.85，

3.3 模糊集合

例 3.2 论域为 15 到 35 岁之间的人，模糊集 A 表示“年轻人”，则模糊集的隶属函数可定义为

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1, & 15 \le x \le 25 \\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2}, & 25 \le x \le 35 \end{cases}$$

则年龄为30岁的人属于“年轻人”的程度为：

$$\mu_A(30)=0.5$$

3.3 模糊集合

(2) 模糊集合的表示法：

1） Zadeh表示法

当论域上的元素为有限个时，定义在该论域上的模糊集可表示为：

$$A=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\cdots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \qquad A=\int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

注意：式中的“+”和“/”，仅仅是分隔符号，并不代表“加”和“除”。

例 3.3 假设论域为5个人的身高，分别为172cm、165cm、175cm、180cm、178cm，他们的身高对于“高个子”的模糊概念的隶属度分别为0.8、0.78、0.85、0.90、0.88。则模糊集“高个子”可以表示为

$$\text{高个子}=\frac{0.8}{172}+\frac{0.78}{165}+\frac{0.85}{175}+\frac{0.9}{180}+\frac{0.88}{178}$$

3.3 模糊集合

2）序偶表示法

当论域上的元素为有限个时，定义在该论域上的模糊集还可用序偶的形式表示为：

$$A=\{(x_1,\ \mu_A(x_1)),(x_2,\ \mu_A(x_2)),\cdots,(x_n,\ \mu_A(x_n))\}$$

或简化为（矢量表示法）：

$$A=\{\mu_A(x_1),\ \mu_A(x_2),\cdots,\ \mu_A(x_n)\}$$

对于上例的模糊集“高个子”可以用序偶法表示为

$$\text{高个子}=\{(172,0.8),(165,0.78),(175,0.85),(180,0.9),(178,0.88)\}$$

或 $\text{高个子}=\{0.8,0.78,0.85,0.9,0.88\}$

3.3 模糊集合

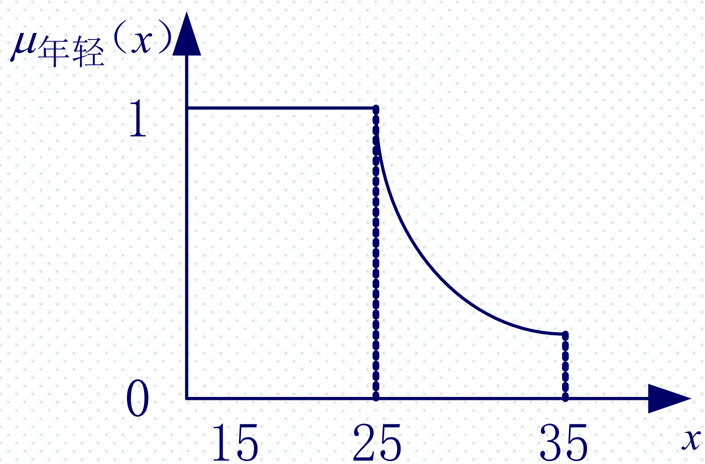
3）隶属函数描述法

论域U上的模糊子集可以完全由其隶属函数表示。

假设年龄的论域为 U=[15，35]，则模糊集“年轻”可用隶属函数表征为：

$$\mu_{\text{年轻}}(x)=\begin{cases}1 & 15\le x\le 25\\ \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-25}{5}\right)^2} & 25<x\le 35\end{cases}$$

该隶属函数的形状如图



3.3 模糊集合

(3) 模糊集合的运算

定义：模糊集 A 的一般表示形式：

$$A=\int_{u\in U}\mu_A(u)/u$$

在给定的论域U上可以有多个模糊集，及U上模糊集的全体为$F(U)$，即

$$F(U)=\{A\mid\mu_A:U\to[0,1]\}$$

称为 U 中的模糊幂集，对于任意 $u\in U$ 若$u_A=0$，则称 A 为空集，若$u_A=1$，则 $A=U$ 为空集。

3.3 模糊集合

（3） 模糊集合的运算

模糊集合与普通集合一样也有交、并、补的运算。

假设A和B为论域U上的两个模糊集，它们的隶属函数分别为 $\mu_A(x), \mu_B(x)$

- **模糊集交** $C = A \cap B$ $\mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$
- **模糊集并** $D = A \cup B$ $\mu_D(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$
- **模糊集补** $\overline{A}$ $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

取最小值运算

取最大值运算

- **相等**

若 $\forall x \in U$，总有 $\mu_A(x) = \mu_B(x)$成立，则称 A 和B相等，记作 $A = B$

- **包含**

若 $\forall x \in U$，总有 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ 成立，则称A 包含 B，记作 $A \supseteq B$

例 3.4 设论域 $U=\{a, b, c, d, e\}$ 上有两个模糊集分别为：

$$A=\frac{0.5}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.4}{c}+\frac{0.2}{d}+\frac{0.1}{e}$$

$$B=\frac{0.2}{a}+\frac{0.8}{b}+\frac{0.1}{c}+\frac{0.7}{d}+\frac{0.4}{e}$$

求 $A\bigcap B,\ A\bigcup B,\ \overline{A}$

$$A\bigcap B=\frac{0.5\wedge 0.2}{a}+\frac{0.3\wedge 0.8}{b}+\frac{0.4\wedge 0.1}{c}+\frac{0.2\wedge 0.7}{d}+\frac{0.1\wedge 0.4}{e}$$

$$=\frac{0.2}{a}+\frac{0.3}{b}+\frac{0.1}{c}+\frac{0.2}{d}+\frac{0.1}{e}$$

$$A\bigcup B=\frac{0.5\vee 0.2}{a}+\frac{0.3\vee 0.8}{b}+\frac{0.4\vee 0.1}{c}+\frac{0.2\vee 0.7}{d}+\frac{0.1\vee 0.4}{e}$$

$$=\frac{0.5}{a}+\frac{0.8}{b}+\frac{0.4}{c}+\frac{0.7}{d}+\frac{0.4}{e}$$

$$\overline{A}=\frac{1-0.5}{a}+\frac{1-0.3}{b}+\frac{1-0.4}{c}+\frac{1-0.2}{d}+\frac{1-0.1}{e}$$

$$=\frac{0.5}{a}+\frac{0.7}{b}+\frac{0.6}{c}+\frac{0.8}{d}+\frac{0.9}{e}$$

3.4 模糊算子

模糊集合的逻辑运算实质上就是隶属函数的运算过程。采用隶属函数的取大（MAX）-取小（MIN）进行模糊集合的并、交逻辑运算是目前最常用的方法。但还有其它公式，这些公式统称为“模糊算子”。

3.4 模糊算子

设有模糊集合A、B和C，常用的模糊算子如下：

（1）交运算算子

设 C=A∩B，有三种模糊算子：

① 模糊交算子

$$\mu_c(x) = Min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

② 代数积算子

$$\mu_c(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

③ 有界积算子

$$\mu_c(x) = Max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}$$

3.4 模糊算子

（2）并运算算子

设C=A∪B，有三种模糊算子：

① 模糊并算子

$$\mu_c(x) = Max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

② 代数和算子

$$\mu_c(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

③ 有界和算子

$$\mu_c(x) = Min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\}$$

3.4 模糊算子

（3）平衡算子

当隶属函数取大、取小运算时，不可避免地要丢失部分信息，采用一种平衡算子，即“γ 算子”可起到补偿作用。

设 A 和 B 经过平衡运算得到 C，则

$$\mu_c(x)=\left[\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\right]^{1-\gamma}\cdot\left[1-(1-\mu_A(x))\cdot(1-\mu_B(x))\right]^{\gamma}$$

其中 γ 取值为[0, 1]。

3.4 模糊算子

当 γ =0 时，相当于 A∩B 时的代数积算子：

$$\mu_c(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

当 γ=1 时，相当于A∪B时的代数和算子：

$$\mu_c(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$$

$$\mu_c(x) = \left[\mu_A(x) \cdot \mu_B(x)\right]^{1-\gamma} \cdot \left[1-(1-\mu_A(x)) \cdot (1-\mu_B(x))\right]^{\gamma}$$

3. 4 模糊算子

（4）模糊运算的性质：

- 交换律 $A\cap B=B\cap A,\ A\cup B=B\cup A$
- 结合律 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,\ A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
- 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$

  $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- 传递律 $A\subseteq B, B\subseteq C\ \Rightarrow\ B\subseteq C$
- 幂等律 $A\cap A=A,\ A\cup A=A$
- 摩根律（对偶律） $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B},\ \overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
- 复原律 $\overline{\overline{A}}=A$
- 两极律 $A\cup E=E, A\cap E=A$

  $A\cup\Phi=A, A\cap\Phi=\Phi$

3. 4 模糊算子

例 3.4 试证普通集合中的互补律在模糊集合中不成立，即

$$\mu_A(u) \vee \mu_{\bar{A}}(u) \neq 1$$

$$\mu_A(u) \wedge \mu_{\bar{A}}(u) \neq 0$$

证：设 $\mu_A(u) = 0.4$

则 $$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - 0.4 = 0.6$$

$$\mu_A(u) \vee \mu_{\bar{A}}(u) = 0.4 \vee 0.6 = 0.6 \neq 1$$

$$\mu_A(u) \wedge \mu_{\bar{A}}(u) = 0.4 \wedge 0.6 = 0.4 \neq 0$$

3.5 λ水平截集

- **水平截集的定义**

在论域 U 中，给定一个模糊集合 A，由对于 A 的隶属度大于某一水平值 λ（阈值）的元素组成的集合，叫做该模糊集合的 λ 水平截集。用公式可以描述如下：

$$A_\lambda = \left\{ x \middle| \mu_A(x) \geq \lambda \right\}$$

其中 $x \in U, \lambda \in [0,1]$。显然，$A_\lambda$ 是一个普通集合。

例3-4 已知 $A = \frac{0.1}{x_1} + \frac{0.3}{x_2} + \frac{0.5}{x_3} + \frac{0.7}{x_4} + \frac{0.9}{x_5}$ **，求** $A_{0.1}$，$A_{0.2}$，$A_{0.7}$

$$A_{0.1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$A_{0.2} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$A_{0.7} = \{x_4, x_5\}$$

3.5 λ水平截集

- 水平截集的性质

1） $A\cup B$ 的 λ 水平截集是 A_λ 和 B_λ 的并集：

$$(A\cup B)_\lambda = A_\lambda \cup B_\lambda$$

2） $A\cap B$ 的 λ 水平截集是 A_λ 和 B_λ 的交集：

$$(A\cap B)_\lambda = A_\lambda \cap B_\lambda$$

3）如果 $\lambda \in [0,1], \alpha \in [0,1]$，且 $\lambda \le \alpha$，则

$$A_\lambda \supseteq A_\alpha$$

3.6 隶属函数

1. 几种典型的隶属函数

在Matlab中已经开发出了11种隶属函数，即双S形隶属函数（dsigmf）、联合高斯型隶属函数（gauss2mf）、高斯型隶属函数（gaussmf）、广义钟形隶属函数（gbellmf）、II型隶属函数(pimf)、双S形乘积隶属函数（psigmf）、S状隶属函数（smf）、S形隶属函数（sigmf）、梯形隶属函数（trapmf）、三角形隶属函数（trimf）、Z形隶属函数（zmf）。

3.6 隶属函数

在模糊控制中，应用较多的隶属函数有以下6种：

（1）高斯型隶属函数（ **gaussmf** ）

高斯型隶属函数由两个参数$\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 确定，即

$$f(x,\sigma,c)=e^{-\frac{(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$

其中，$\boldsymbol{\sigma}$ 通常为正， $\boldsymbol{c}$ 用于确定曲线的中心。**Matlab** 表示为

$$\text{gaussmf}(\boldsymbol{x},[\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{c}])$$

3.6　隶属函数

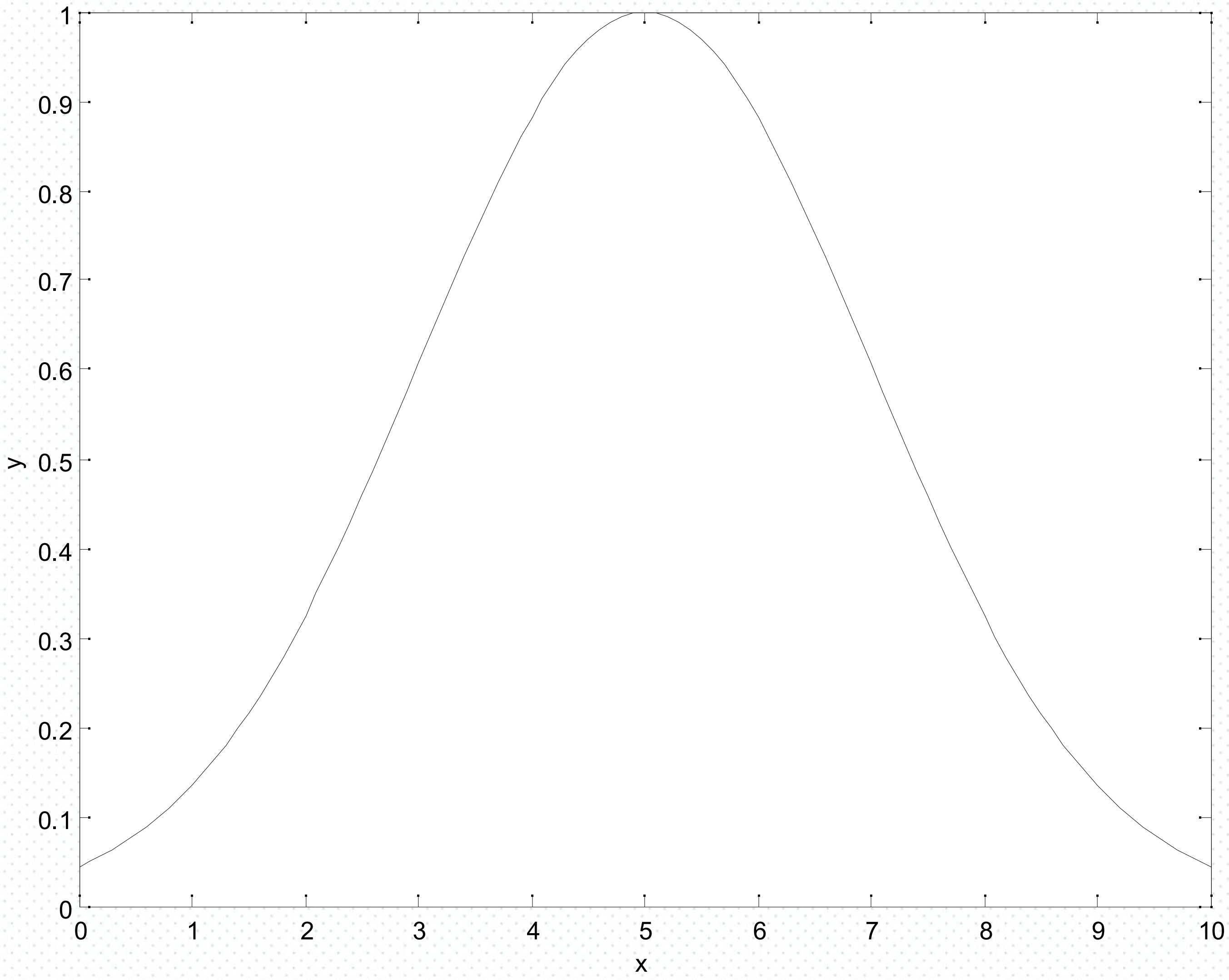


图 3-1 高斯型隶属函数 gaussmf(x,[2 5])

3.6 隶属函数

(2) 广义钟型隶属函数

广义钟型隶属函数由三个参数 a，b，c 确定：

$$f(x,a,b,c)=\frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

其中，参数 a 和 b 通常为正，参数 c 用于确定曲线的中心。

Matlab表示为

gbellmf(x,[a,b,c])

3.6 隶属函数

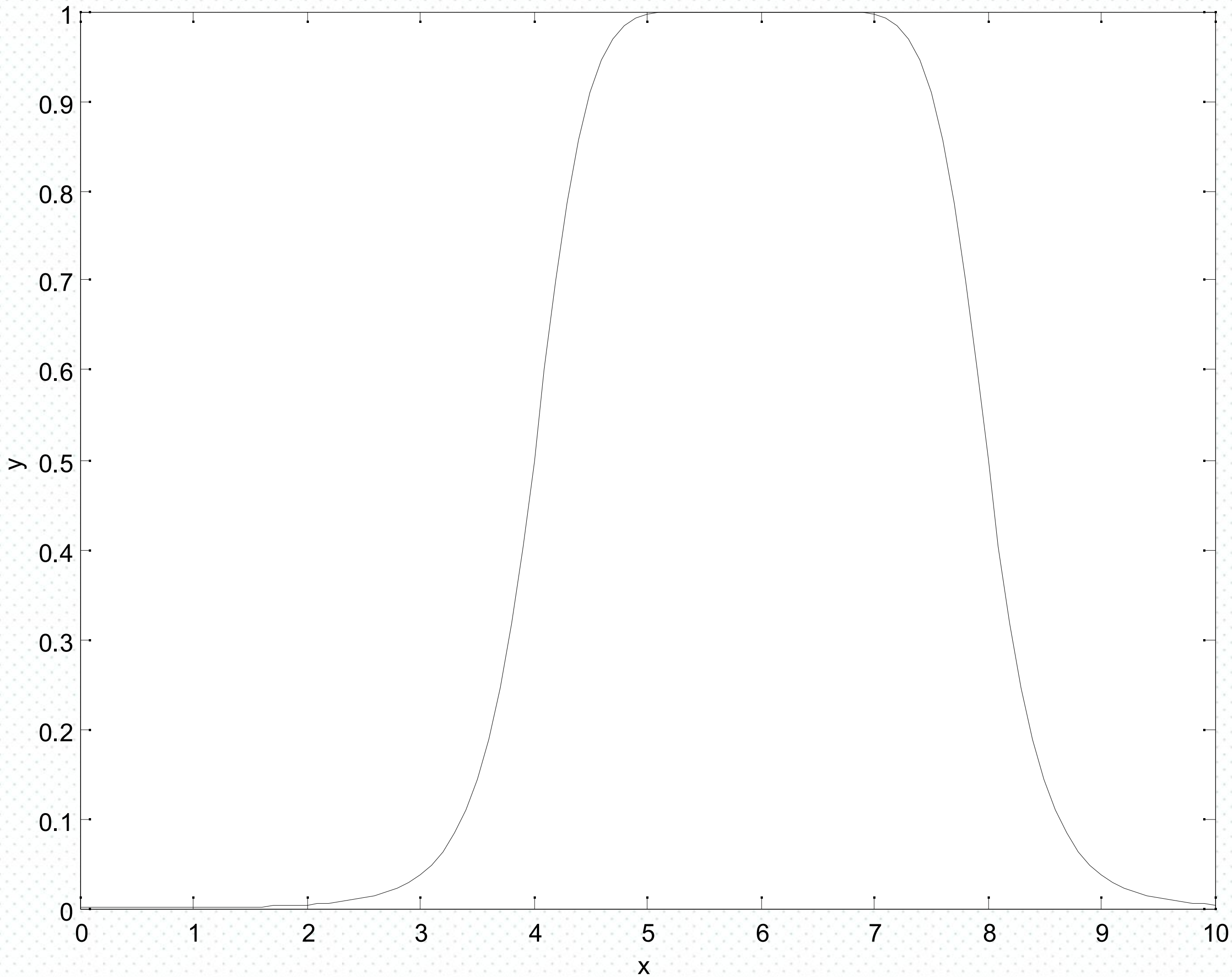


图 3-2 广义钟形隶属函数 gbellmf(x,[2 4 6])

3.6 隶属函数

(3) S 形隶属函数

S 形函数 由参数 a 和 c 决定：

$$f(x,a,c)=\frac{1}{1+e^{-a(x-c)}}$$

其中参数 a 的正负符号决定了S形隶属函数的开口朝左($a<0$)或朝右($a>0$)，用来表示“负大”或“正大”的概念。Matlab表示为

sigmf(x,[a,c])

3.6　隶属函数

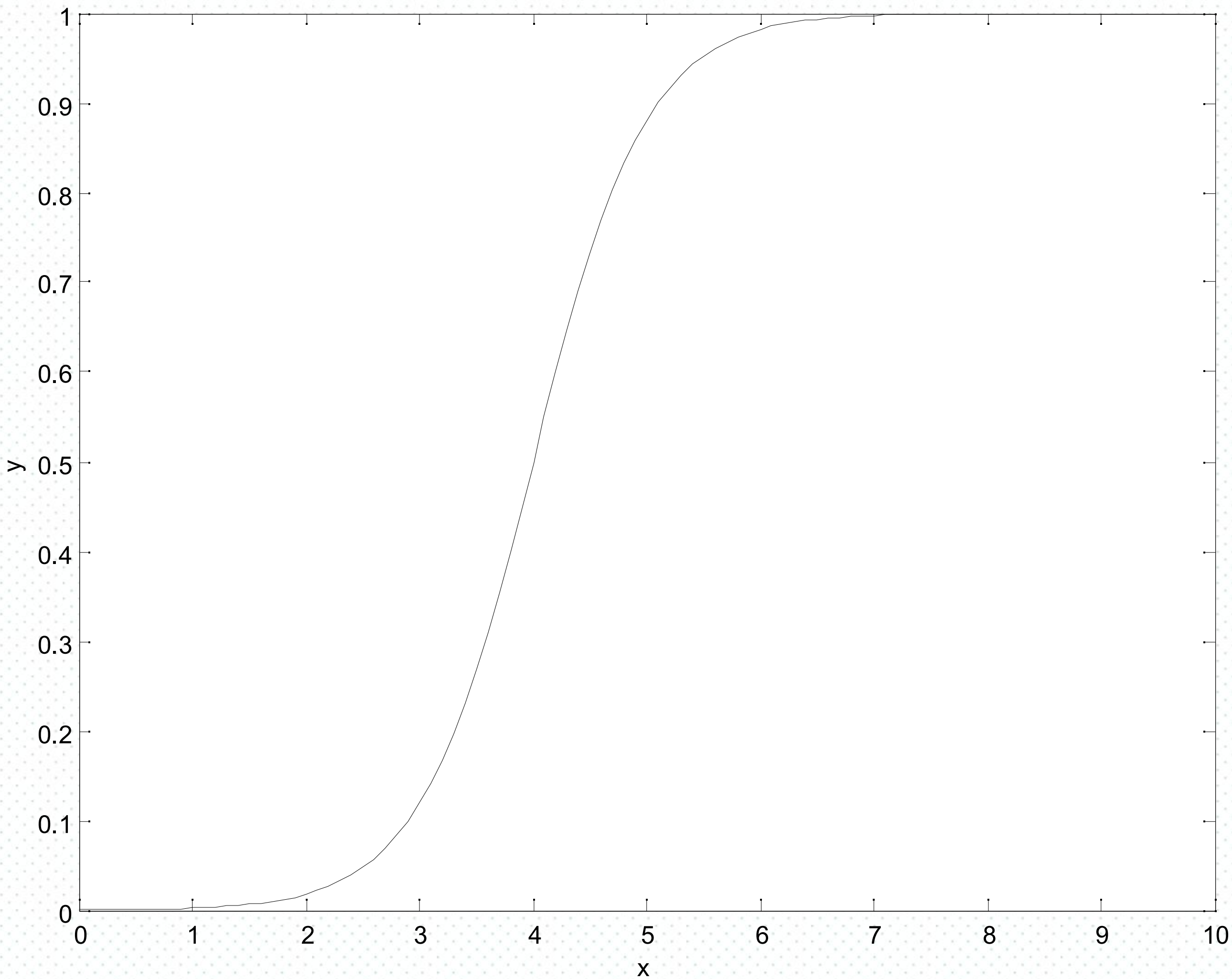


图 3-3　S 形隶属函数 sigmf(x,[2 4])

3.6 隶属函数

（4）梯形隶属函数

梯形曲线可由四个参数 a，b，c，d 确定：

$$
f(x,a,b,c,d)=\begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \le c \\ \dfrac{d-x}{d-c} & c \le x \le d \\ 0 & x \ge d \end{cases}
$$

其中参数 a 和 d 确定梯形的“脚”，而参数 b 和 c 确定梯形的“肩膀”。Matlab表示为：

trapmf(x,[a, b, c, d])

3.6 隶属函数

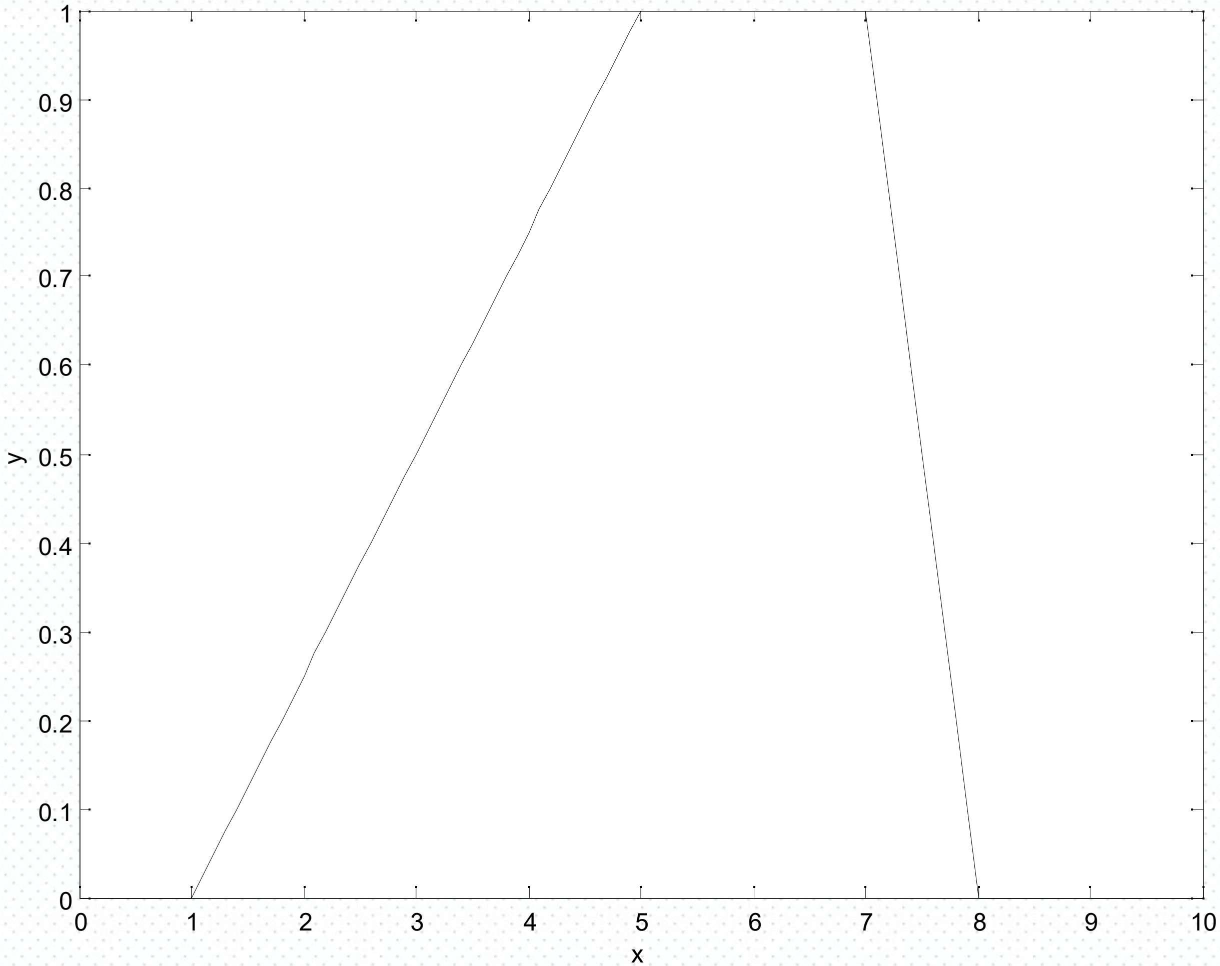


图 3-4　梯形隶属函数 trapmf(x,[1 5 7 8])

3.6　隶属函数

(5) 三角形隶属函数

三角形曲线的形状由三个参数 ***a*，*b*，*c*** 确定：

$$f(x,a,b,c)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ \dfrac{c-x}{c-b} & b\le x\le c\\ 0 & x\ge c\end{cases}$$

其中参数 ***a*** 和 ***c*** 确定三角形的“脚”，而参数 ***b*** 确定三角形的“峰”。**Matlab** 表示为

trimf(x, [a, b, c])

3.6 隶属函数

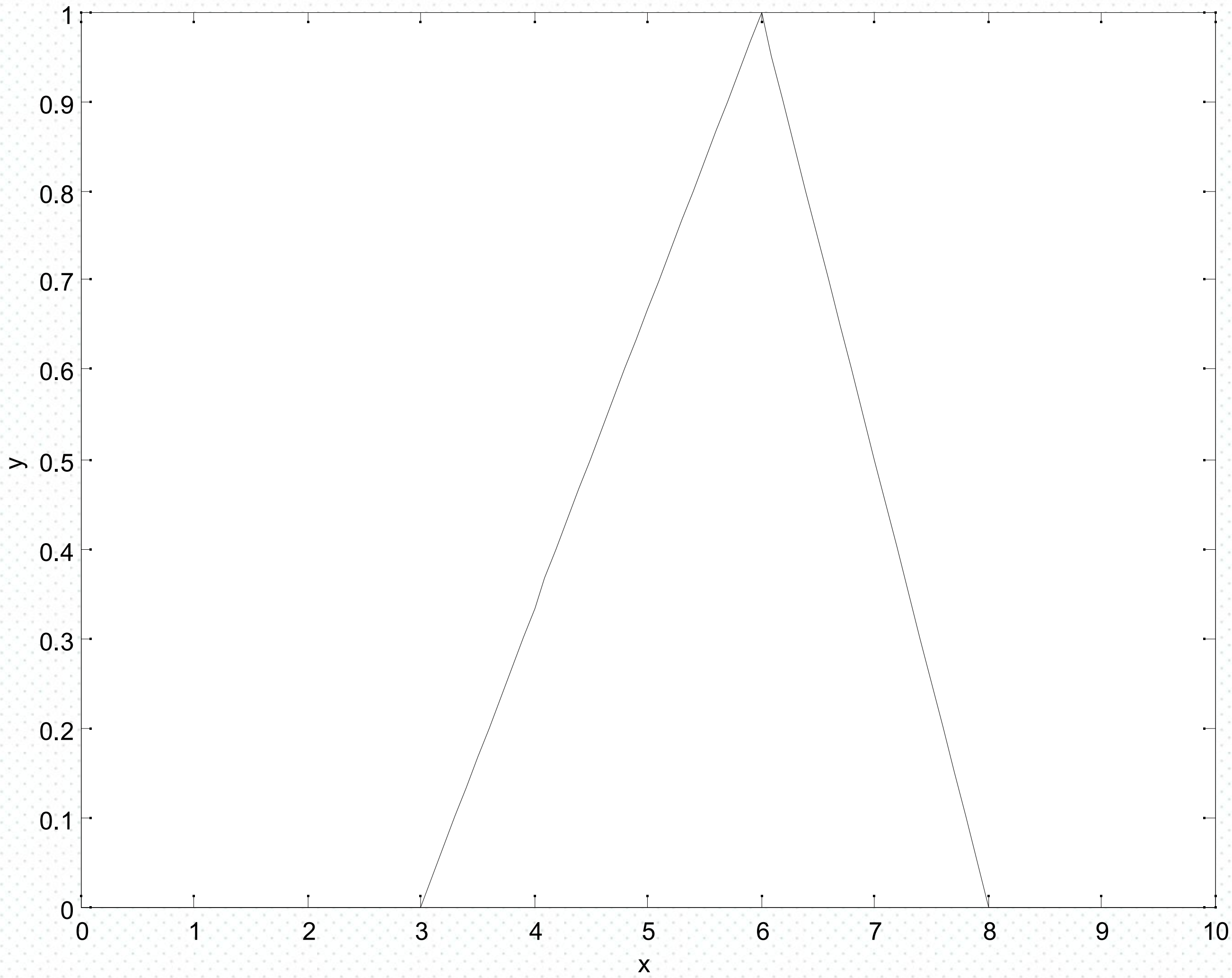


图 3-5 三角形隶属函数 trimf(x,[3 6 8])

3.6 隶属函数

（6）Z形隶属函数

这是基于样条函数(spline function)的曲线，因其呈现Z形状而得名。参数 a 和 b 确定了曲线的形状。

Matlab表示为

$$\text{zmf}(x,[a,b])$$

3.6　隶属函数

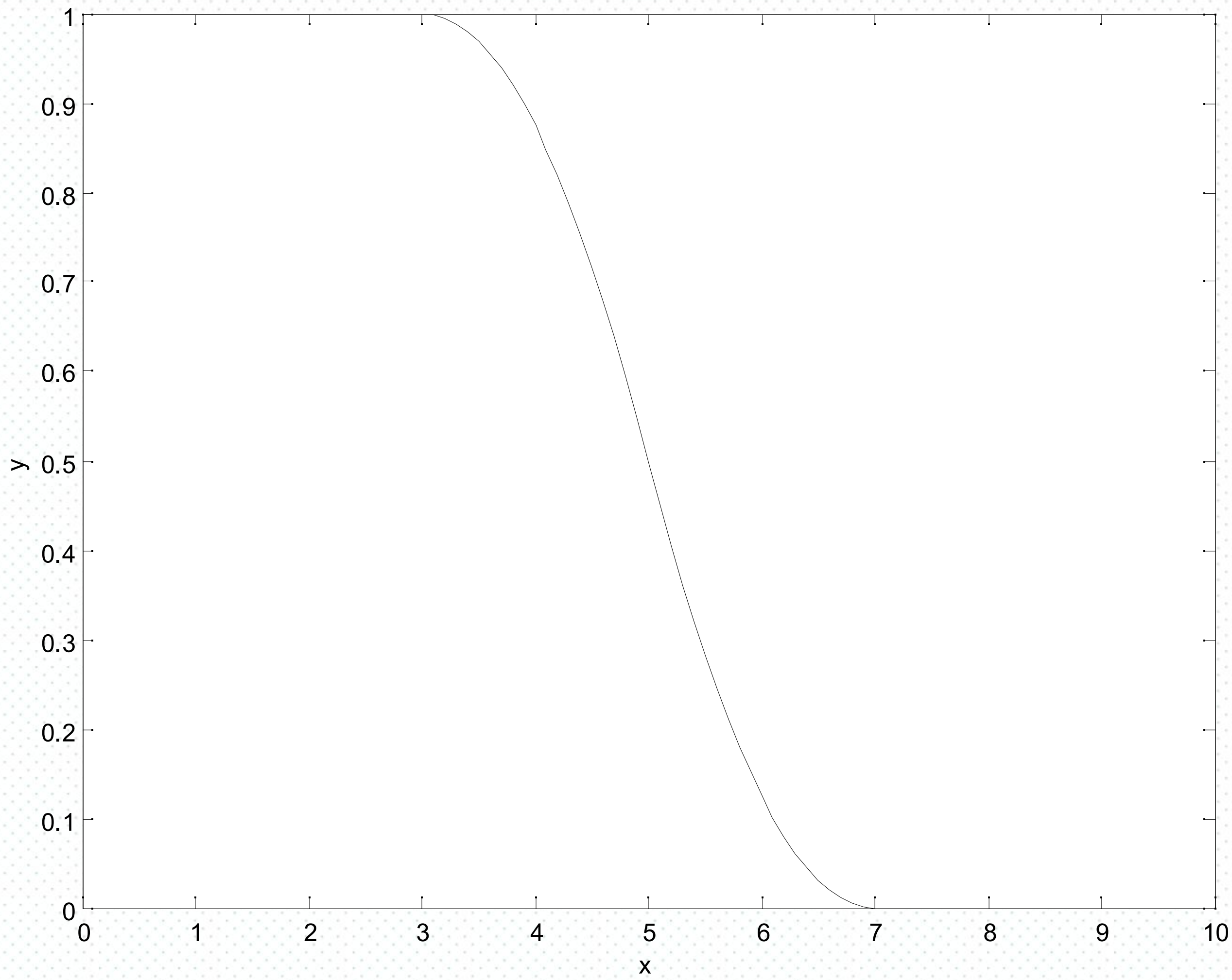


图 3-6　Z 形隶属函数 zmf(x,[3 7])

3.6 隶属函数

高斯型隶属函数、广义钟形隶属函数、梯形隶属函数和三角隶属函数可用于描述具有中间模糊状态的模糊概念，如“中等个子”“中年人”。

S 形隶属函数、Z 形隶属函数可用于描述一个完整的模糊状态如， 水箱液位的高低、人的胖瘦等

有关隶属函数的MATLAB设计，见著作：

楼顺天，胡昌华，张伟，基于MATLAB的系统分析与设计-模糊系统，西安：西安电子科技大学出版社，2001

3.6 隶属函数

2. 模糊系统的设计

例 3.5 ：设计一个三角形隶属函数，按[-3，3]范围七个等级，建立一个模糊系统，用来表示{负大，负中，负小，零，正小，正中，正大}。

3.6 隶属函数

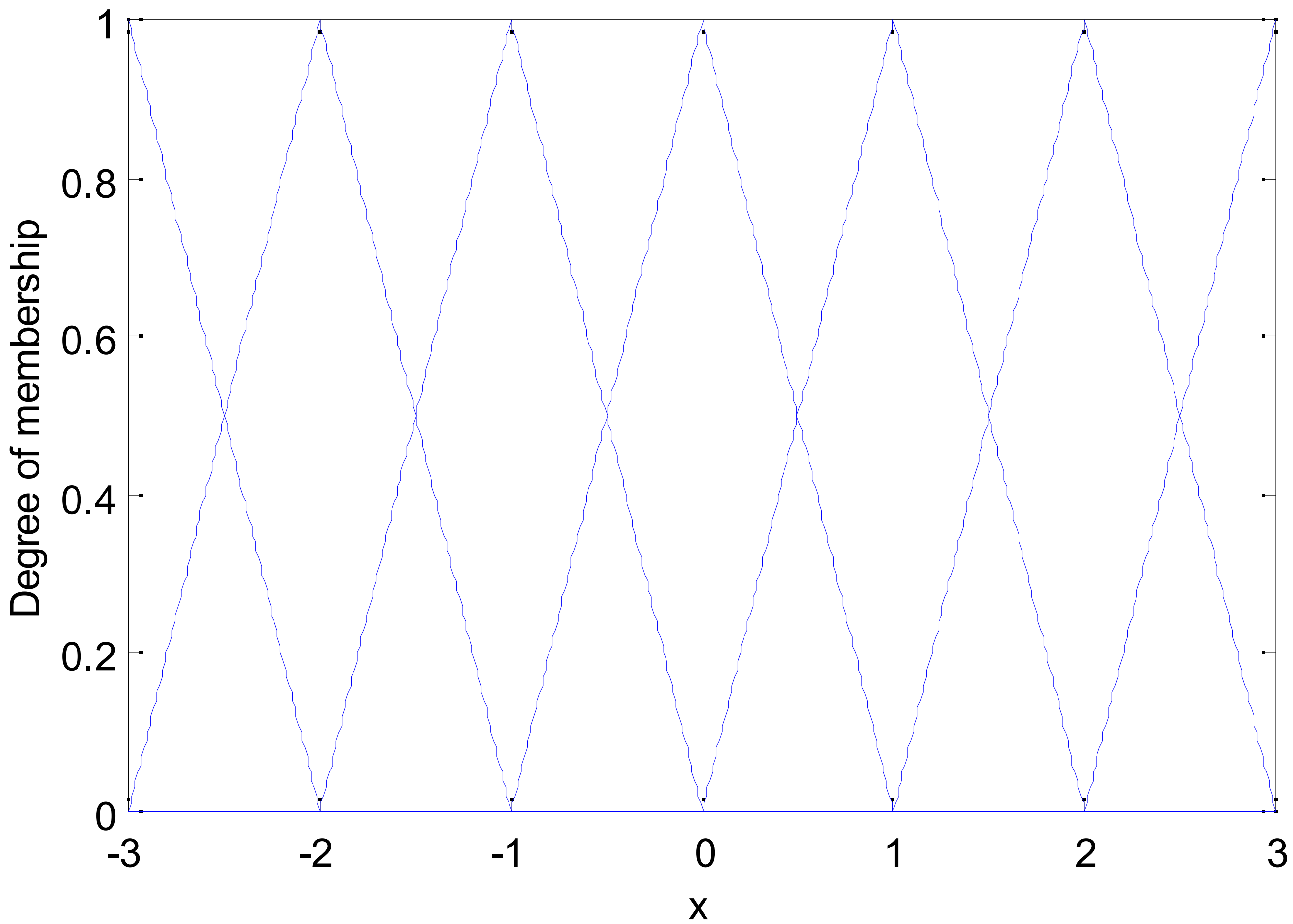


图 3-7 三角形隶属函数曲线

3.6 隶属函数

3. 隶属函数的确定方法

- 隶属度函数的建立
  - 是一个关键问题
  - 是一个难题
  - 具有“模糊性”、经验性和主观性
  - 无统一的设计方法
  - 具有客观的原则，一般具备以下六大原则

3.6 隶属函数

3. 隶属函数的确定方法

建立隶属度函数的原则

(1) 表示隶属度函数的模糊集合必须是凸模糊集合。

(2) 变量所取隶属函数通常是对称和平衡的。

(3) 隶属函数要符合人们的语义顺序，避免不恰当的重叠。

(4) 论域中的每个点应该至少属于一个隶属函数的区域。

(5) 同一输入没有两个隶属函数会同时有最大隶属度。

(6) 当两个隶属度函数重叠时重叠部分对两个隶属度函数的最大隶属度不应该有交叉。

3.6　隶属函数

原则1：表示隶属度函数的模糊集合必须是凸模糊集合（呈单峰形）

$$“速度适中”=\frac{0}{30}+\frac{0.5}{40}+\frac{1}{50}+\frac{0.5}{60}+\frac{0}{70}$$

某一模糊集合的隶属函数应首先从最适合这一模糊概念的点下手，即确定该模糊概念的最大隶属度函数点，然后向两边延伸。

3.6　隶属函数

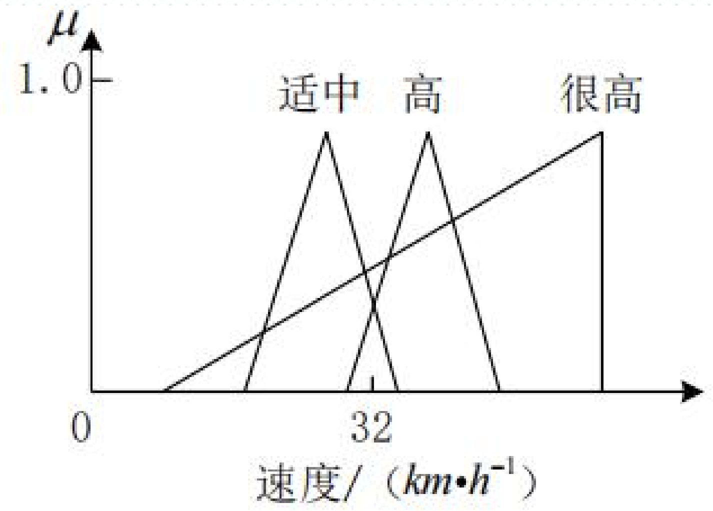
原则2：变量所取隶属度函数通常是对称和平衡的

在模糊控制系统中，每一个输入变量（以后又可称语言变量）可以有多个语言值。模糊变量的语言值选择既不能过多又不能过少，一般取3～9个为宜，并且通常取奇数个。在“零”、“适中”或“合适”集合的两边语言值的隶属度函数通常是取对称和平衡的。

3.6 隶属函数

原则3：隶属度函数要遵从语意顺序和避免不恰当的重叠

在相同论域上使用的具有语义顺序关系的若干标称的模糊集合，例如“速度很低”、“速度低”、“速度适中”、“速度高”、“速度很高”等子集的中心值位置必须按这一次序排列。



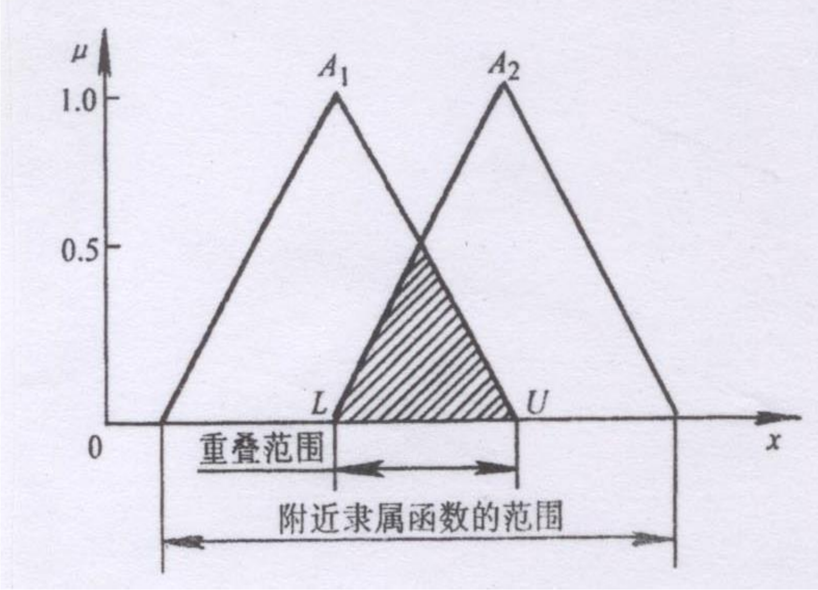
3.6　隶属函数

原则4：要考虑重叠指数

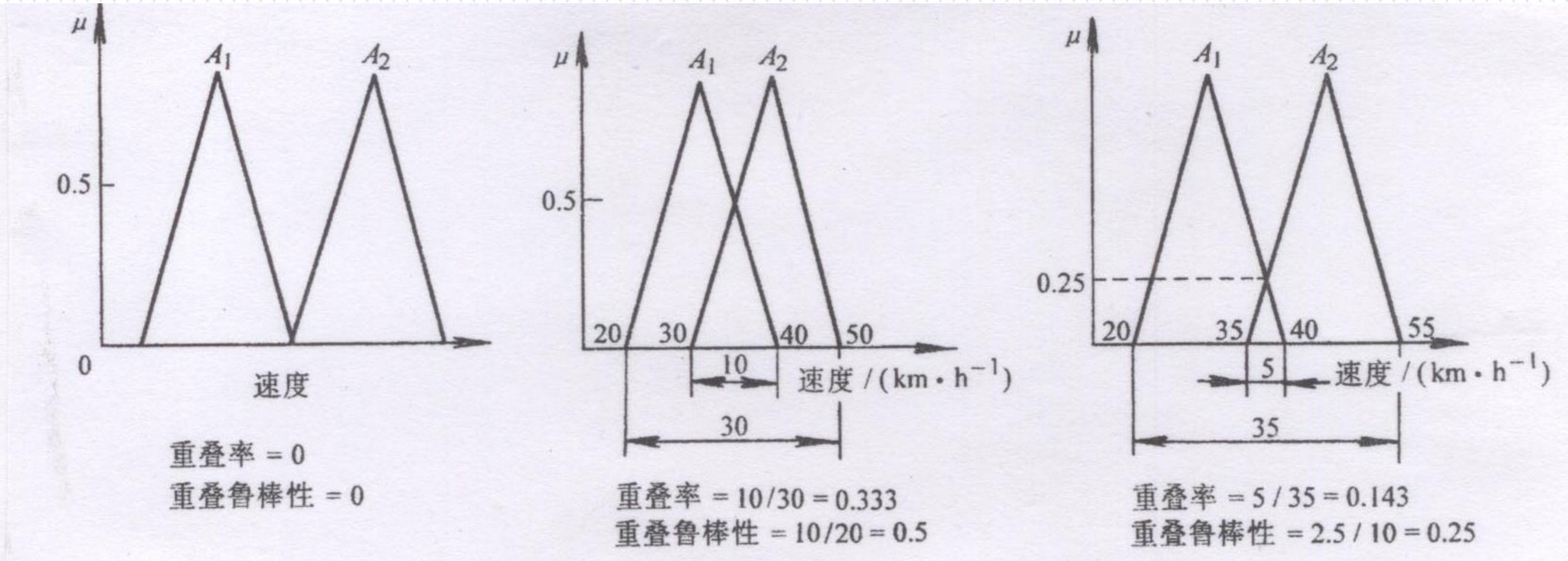
重叠指数也是衡量隶属度函与模糊控制器性能的一个重要指标。

$$\text{重叠率} = \frac{\text{重叠范围}}{\text{附近模糊隶属函数的范围}} \qquad 0.2\sim0.6$$

$$\text{重叠鲁棒性} = \frac{\int_L^U \mu_{A1} + \mu_{A2} \mathrm{d}x}{2(U-L)} \qquad 0.3\sim0.7$$



3.6 隶属函数



$$\frac{\int_{30}^{40} \frac{1}{10}(x-30)\mathrm{d}x + \int_{30}^{40} -\frac{1}{10}(x-40)\mathrm{d}x}{2(40-30)} = \frac{10}{20}$$

3.6 隶属函数

原则5：同一输入没有两个隶属函数会同时有最大隶属度。

原则6：当两个隶属度函数重叠时重叠部分对两个隶属度函数的最大隶属度不应该有交叉。

3.6 隶属函数

例 3.6 ：设计评价一个学生成绩的隶属函数，在[0，100]之内按 A、B、C、D、E 分为五个等级，即{不及格，及格，中，良，优}。分别采用五个高斯型隶属函数来表示，建立一个模糊系统。

3.6 隶属函数

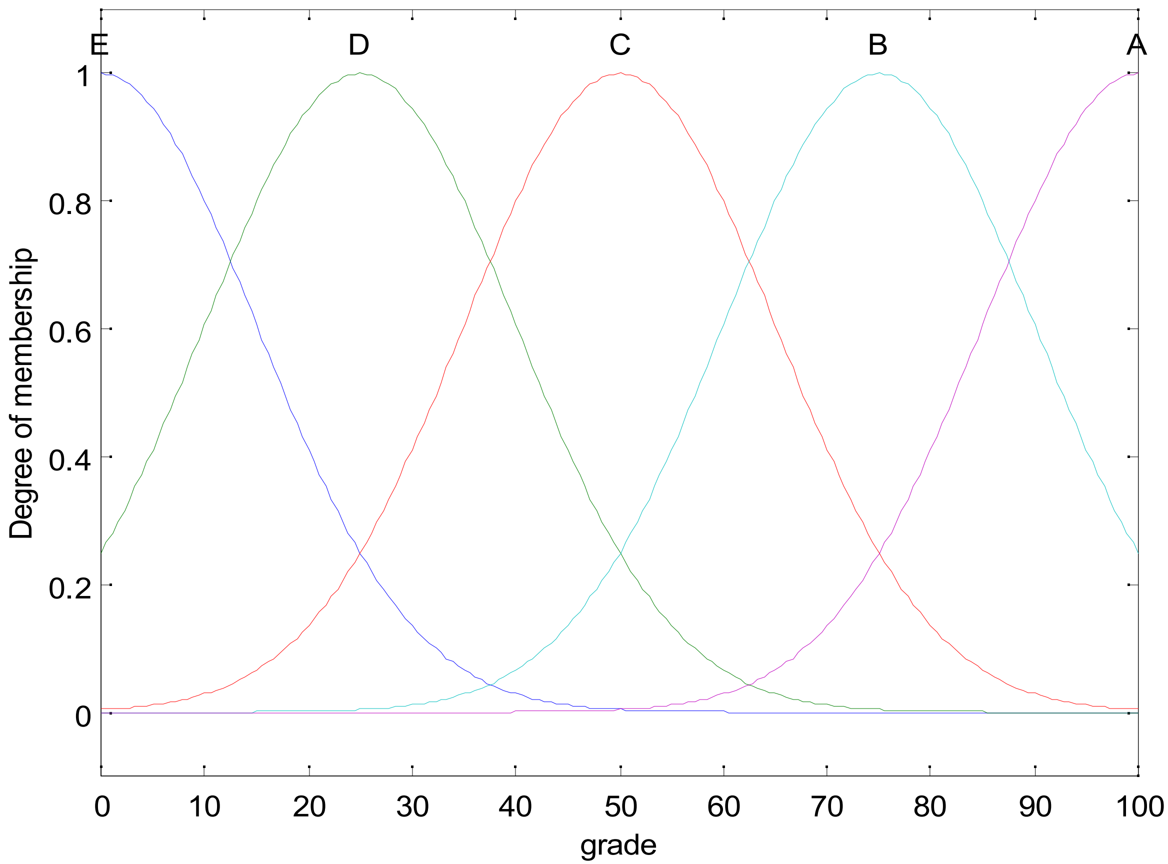


图 3-8 高斯型隶属函数曲线

3.6 隶属函数

3. 隶属函数的确定方法

隶属函数是模糊控制的应用基础。目前还没有成熟的方法来确定隶属函数，主要还停留在经验和实验的基础上。通常的方法是初步确定粗略的隶属函数，然后通过“学习”和实践来不断地调整和完善。遵照这一原则的隶属函数选择方法有以下几种。

- 模糊统计法
- 主观经验法
- 二元对比排序法
- 基本概念扩充法
- 神经网络法

3.6 隶属函数

（1）模糊统计法

根据所提出的模糊概念进行调查统计，提出与之对应的模糊集 A，通过统计实验，确定不同元素隶属于A 的程度。

统计“年轻人”：

$$A_1^*: 17 \sim 30岁$$

$$A_2^*: 20 \sim 30岁$$

采用实验法，假设 u_0 是某个固定年龄，而A_1*、A_2*可变，作N次实验

$$u_0对模糊集 A 的隶属度 = \frac{u_0 \in A 的次数}{试验总次数 N}$$

3.6 隶属函数

（2）主观经验法

当论域为离散论域时，可根据主观认识，结合个人经验，经过分析和推理，直接给出隶属度。这种确定隶属函数的方法已经被广泛应用。

例如,某一故障诊断系统，存在多种故障现象，如“跳闸”、“振荡”等，而产生每一现象的原因可能有“系统温度过高”，“负载过大”，“压力过大”等多种原因。专家经验法是根据专家的经验对每一现象产生每一结果的可能性程度来决定它们相应的隶属函数，从而可以构成一个模糊专家诊断系统。

3.6 隶属函数

（3）二元对比排序法

它通过对多个事物之间的两两对比来确定某种特征下的顺序，由此来决定这些事物对该特征的隶属度函数的大体形状。

相对比较法是设论域U中元素$v_1,v_2,\ldots,v_n$要对这些元素按某种特征进行排序，首先要在二元对比中建立比较等级，而后再用一定的方法进行总体排序，以获得诸元素对于该特性的隶属函数。

3.6　隶属函数

- 设论域U中一对元素（v_1, v_2）其具有某特征的等级分别为$g_{v2}(v_1)$、$g_{v1}(v_2)$，即在v_1,和v_2的二元对比中，如果v_1具有某特征的程度用$g_{v2}(v_1)$来表示，则v_2某特征的程度用$g_{v1}(v_2)$来表示。并且该二元对比级的数对（$g_{v2}(v_1)$、$g_{v1}(v_2)$）必须满足：$0 \le g_{v2}(v_1) \le 1$、$0 \le g_{v1}(v_2) \le 1$，令：

$$g(v_1 / v_2) = \frac{g_{v2}(v_1)}{\max(g_{v2}(v_1), g_{v1}(v_2))}$$

3.6 隶属函数

- 定义$g(v_i/v_j)=1$,当$i=j$时。则可构造出矩阵G,并称G为相及矩阵。

$$G=\begin{bmatrix} 1 & g(v_1/v_2) & \cdots & g(v_1/v_n) \\ g(v_2/v_1) & 1 & \cdots & g(v_2/v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(v_n/v_1) & g(v_n/v_2) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

若对矩阵G的每一行取最小值，如对第i行取$g_i=\min[g(v_i/v_1), g(v_i/v_2), \ldots, g(v_i/v_n)]$，并按其值的大小排序，即可得到元素$(v_1, v_2, \ldots, v_n)$对某特征的隶属度函数。

3.6 隶属函数

例：设论域U={v_1,v_2,$v3$,v_0},其中表示长子，表示次子，表示三子，表示父亲。如果仅考虑长子和次子与父亲相像程度，长子与父亲的相像程度为0.8，次子为0.5；如果仅考虑次子和三子与父亲相像程度，次子为0.4，三子为0.7；如果仅考虑长子和三子与父亲相像程度，长子为0.5，三子为0.3.

$$g_{v_2}(v_1)=0.8,\quad g_{v_1}(v_2)=0.5\Rightarrow g(v_1/v_2)=1,\quad g(v_2/v_1)=5/8$$

$$g_{v_3}(v_2)=0.4,\quad g_{v_2}(v_3)=0.7\Rightarrow g(v_2/v_3)=4/7,g(v_3/v_2)=1$$

$$g_{v_3}(v_1)=0.5,\quad g_{v_1}(v_3)=0.3\Rightarrow g(v_1/v_3)=1,g(v_3/v_2)=3/5$$

$$g(v_1/v_2)=\frac{g_{v2}(v_1)}{\max(g_{v2}(v_1),g_{v1}(v_2))}$$

3.6 隶属函数

可算得相及矩阵为：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\
G = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5/8 & 1 & 4/7 \\ 3/5 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

在相及矩阵中取每一行的最小值，按所得值的大小排列得：

$$1(v_1) > 3/5(v_3) > 4/7(v_2)$$

相对比较法

结论是长子最像父亲（1），三子次之（0.6），三子最不像（0.57）。由此，可以确定出隶属度函数的大致形状。

3.6 隶属函数

可算得相及矩阵为：

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\
G = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5/8 & 1 & 4/7 \\ 3/5 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

在相及矩阵中取每一行的均值，按所得值的大小排列得：

$$1(v_1) > 0.87(v_3) > 0.73(v_2)$$

平均比较法

结论是长子最像父亲（**1**），三子次之（**0.87**），三子最不像（**0.73**）。

（4）基本概念扩充法

$$\mu_{大}(u) \Longrightarrow$$

$$\mu_{极大}(u) = \mu_{大}^{4}(u)$$

$$\mu_{很大}(u) = \mu_{大}^{2}(u)$$

$$\mu_{相当大}(u) = \mu_{大}^{1.5}(u)$$

$$\mu_{比较大}(u) = \mu_{大}^{0.75}(u)$$

$$\mu_{有点大}(u) = \mu_{大}^{0.5}(u)$$

$$\mu_{稍许有点大}(u) = \mu_{大}^{0.25}(u)$$

$$\mu_{不大}(u) = 1 - \mu_{大}(u)$$

例（基本概念扩充法）：设$U=\{1, 2, ..., 10\}$，且已知

$$大=\frac{0.2}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$小=\frac{1}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{0.6}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.2}{5}$$

则由概念扩充法可得

$$不大=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}$$

$$不小=\frac{0}{1}+\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.8}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$不大也不小=不大\cap不小$$

$$=\frac{0.2}{2}+\frac{0.4}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.6}{5}+\frac{0.4}{6}+\frac{0.2}{7}$$

$$大=\frac{0.2}{4}+\frac{0.4}{5}+\frac{0.6}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$\mu_{很大}(u)=\mu_{大}^{2}(u)$$

$$\mu_{有点大}(u)=\mu_{大}^{0.5}(u)$$

$$很大=\frac{0.04}{4}+\frac{0.16}{5}+\frac{0.36}{6}+\frac{0.64}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$有点大=\frac{0.45}{4}+\frac{0.63}{5}+\frac{0.77}{6}+\frac{0.89}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

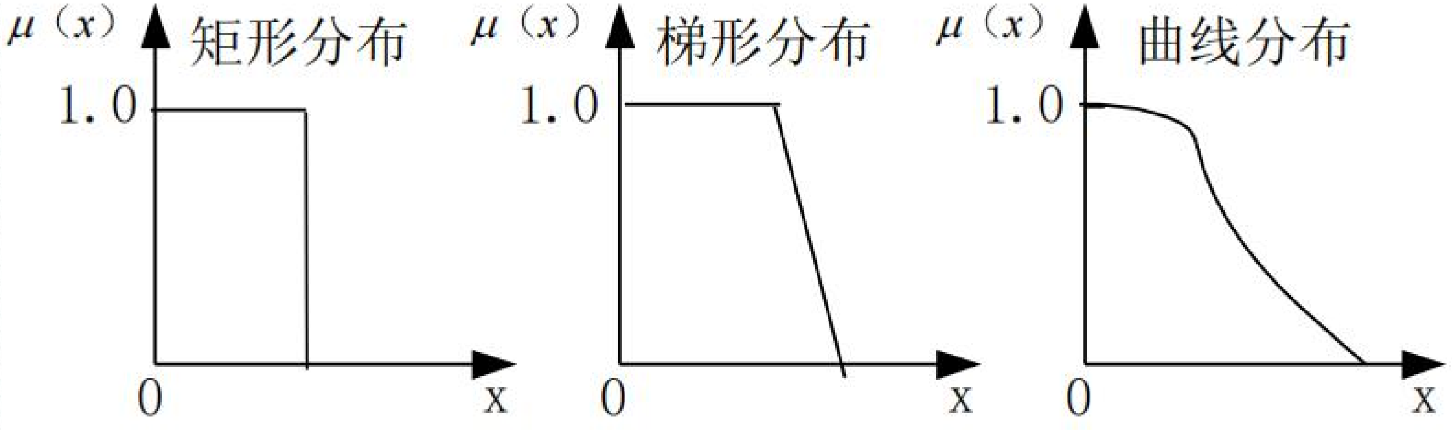
3.6 隶属函数

（5）神经网络法

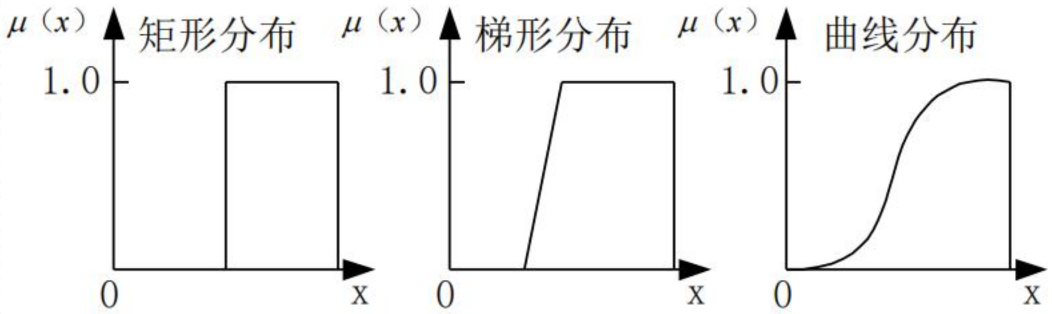
利用神经网络的学习功能，由神经网络自动生成隶属函数，并通过网络的学习自动调整隶属函数的值。

隶属度函数的确定还没有一个统一的方法，但隶属度的图形基本上可归结为三大类：

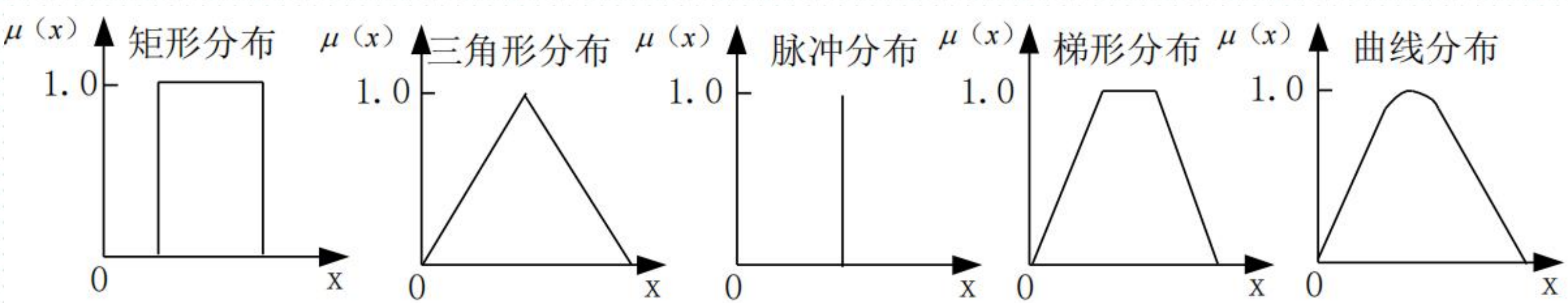
（1）左大右小的偏小型下降函数（又称Z函数）



（2）左小右大的偏大型上升函数（又称S函数）



（3）对称型凸函数（又称Π函数）



3.7 模糊关系

(1) 普通关系

"关系"是集合论中的一个重要概念，它反映了不同集合的元素之间的关联。普通关系是用数学方法描述不同普通集合中的元素之间有无关联。

例 3.7　举行一次东西亚足球对抗赛，分两个小组

A={中国，日本，韩国}，B={伊朗，沙特，阿联酋}。

抽签决定的对阵形势为：

中国-伊朗，日本-阿联酋，韩国-沙特。

用R表示两组的对阵关系，则R可用序偶的形式表示为：

R={（中国，伊朗），（日本，阿联酋），（韩国，沙特）}

3.7 模糊关系

可见关系 R 是 A，B 的直积 $A \times B$ 的子集。也可将 R 表示为矩阵形式，假设R中的元素 $r(i,j)$ 表示A组第 i 个球队与B组第 j 个球队的对应关系，如有对阵关系，则 $r(i,j)$ 为 1，否则为 0，则 R 可表示为：

$$R = \begin{array}{c} \\ 中国 \\ 日本 \\ 韩国 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 伊朗 & 沙特 & 阿联酋 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

该矩阵称为A和B的关系矩阵。

由普通关系的定义可以看出：在定义了某种关系之后，两个集合的元素对于这种关系要么有关联，$r(i,j)=1$；要么没有关联，$r(i,j)=0$。这种关系是很明确的。

3.7 模糊关系

（2）模糊关系

人和人之间关系的“亲密”与否？
儿子和父亲之间长相的“相像”与否？
家庭是否“和睦”？

这些关系就无法简单的用“是”或“否”来描述，而只能描述为“在多大程度上是”或“在多大程度上否”。这些关系就是模糊关系。我们可以将普通关系的概念进行扩展，从而得出模糊关系的定义。

3.7 模糊关系

① 模糊关系的定义

假设 x 是论域U中的元素， y 是论域V中的元素，则U到 V 的 一 个 模 糊 关 系 是 指 定 义 在 $U \times V$ 上的一个模糊子集 R，其隶属度 $\mu_R(x,y) \epsilon [0,1]$，代表 x 和 y 对于该 模糊关系的关联程度。

例 3.8 我们用模糊关系来描述子女与父母长相的“相像”的关系，假设儿子与父亲的相像程度为0.8，与母亲的相像程度为0.3；女儿与与父亲的相像程度为0.3，与母亲的相像程度为0.6。则可描述为：

$$\underset{\sim}{R} = \frac{0.8}{(子，父)} + \frac{0.3}{(子，母)} + \frac{0.3}{(女，父)} + \frac{0.6}{(女，母)}$$

3.7 模糊关系

模糊关系常常用矩阵的形式来描述。假设 $x \in U, y \in V$ ，则U到V的模糊关系可以用矩阵描述为

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, y_1) & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, y_2) & \cdots & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1, y_n) \\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2, y_1) & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2, y_2) & \cdots & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_m, y_1) & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_m, y_2) & \cdots & \mu_{\underset{\sim}{R}}(x_m, y_n) \end{bmatrix}$$

则上例中的模糊关系又可以用矩阵描述为：

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c} \\ 父 \\ 母 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 子 & 女 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

3.7 模糊关系

② 模糊关系的运算

假设R和S是论域上U×V的两个模糊关系，分别描述为：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mn} \end{bmatrix}$$

那么，模糊关系的运算规则可描述如下 ：

- 模糊关系的相等： $\underset{\sim}{R}=\underset{\sim}{S} \Leftrightarrow r_{ij}=s_{ij}$
- 模糊关系的包含： $\underset{\sim}{R}\supseteq\underset{\sim}{S} \Leftrightarrow r_{ij}\geq s_{ij}$
- 模糊关系的并：

$$\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix} r_{11}\vee s_{11} & \cdots & r_{1n}\vee s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1}\vee s_{m1} & \cdots & r_{mn}\vee s_{mn} \end{bmatrix}$$

3.7 模糊关系

- 模糊关系的交：

$$\underset{\sim}{R} \cap \underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} r_{11} \wedge s_{11} & \cdots & r_{1n} \wedge s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ r_{m1} \wedge s_{m1} & \cdots & r_{mn} \wedge s_{mn} \end{bmatrix}$$

- 模糊关系的补：

$$\overline{\underset{\sim}{R}} = \begin{bmatrix} 1-r_{11} & \cdots & 1-r_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 1-r_{m1} & \cdots & 1-r_{mn} \end{bmatrix}$$

3.7 模糊关系

例 3.9 已知

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.3\\0.2 & 0.4\end{bmatrix},\ \underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.2\\0.5 & 0.1\end{bmatrix}$$

求： $\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S},\ \underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S},\ \overline{\underset{\sim}{R}}$

解：根据模糊关系的运算规则得：

$$\underset{\sim}{R}\cap\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.1\wedge0.4 & 0.3\wedge0.2\\0.2\wedge0.5 & 0.4\wedge0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.2\\0.2 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R}\cup\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.1\vee0.4 & 0.3\vee0.2\\0.2\vee0.5 & 0.4\vee0.1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\0.5 & 0.4\end{bmatrix}$$

$$\overline{\underset{\sim}{R}}=\begin{bmatrix}1-0.1 & 1-0.3\\1-0.2 & 1-0.4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.7\\0.8 & 0.6\end{bmatrix}$$

3.7 模糊关系

③ 模糊关系的合成

所谓合成，即由两个或两个以上的关系构成一个新的关系。模糊关系也存在合成运算，是通过模糊矩阵的合成进行的。

设R是论域U×V上的模糊关系，S是论域V×W上的模糊关系，R和S分别描述为：

$$R=\begin{bmatrix} \mu_R(x_1,y_1) & \mu_R(x_1,y_2) & \cdots & \mu_R(x_1,y_n) \\ \mu_R(x_2,y_1) & \mu_R(x_2,y_2) & \cdots & \mu_R(x_2,y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_R(x_m,y_1) & \mu_R(x_m,y_2) & \cdots & \mu_R(x_m,y_n) \end{bmatrix}$$

$$S=\begin{bmatrix} \mu_S(y_1,z_1) & \mu_s(y_1,z_2) & \cdots & \mu_R(y_1,z_l) \\ \mu_R(y_2,z_1) & \mu_R(y_2,z_2) & \cdots & \mu_R(y_2,z_l) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_R(y_n,z_1) & \mu_R(y_m,z_2) & \cdots & \mu_R(y_n,z_l) \end{bmatrix}$$

3.7 模糊关系

则R和S可以合成为论域U×W上的一个新的模糊关系C，记做

$$C = R \circ S$$

合成运算法则为：

$$\mu_{R\circ S}\left(x_i, z_j\right) = \bigvee_k \left\{\mu_R\left(x_i, y_k\right) \wedge \mu_s\left(y_k, z_j\right)\right\}$$

3. 7 模糊关系

例 3.10 设 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

则A和B的合成为： $\mu_{R\circ S}(x_i, z_j)=\bigvee_k\{\mu_R(x_i, y_k)\wedge\mu_s(y_k, z_j)\}$

$$C=A\circ B=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathrm{c}_{11}=(\mathrm{a}_{11}\wedge\mathrm{b}_{11})\vee(\mathrm{a}_{12}\wedge\mathrm{b}_{21})$$
$$\mathrm{c}_{12}=(\mathrm{a}_{11}\wedge\mathrm{b}_{12})\vee(\mathrm{a}_{12}\wedge\mathrm{b}_{22})$$
$$\mathrm{c}_{21}=(\mathrm{a}_{21}\wedge\mathrm{b}_{11})\vee(\mathrm{a}_{22}\wedge\mathrm{b}_{21})$$
$$\mathrm{c}_{22}=(\mathrm{a}_{21}\wedge\mathrm{b}_{12})\vee(\mathrm{a}_{22}\wedge\mathrm{b}_{22})$$

3.7 模糊关系

当 $A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.9\end{bmatrix}$ 时，计算 $A\circ B, B\circ A$

$$A\circ B=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix},\ B\circ A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.6\end{bmatrix}$$

$$A\circ B\neq B\circ A$$

$$c_{11}=(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21})$$
$$c_{12}=(a_{11}\wedge b_{12})\vee(a_{12}\wedge b_{22})$$
$$c_{21}=(a_{21}\wedge b_{11})\vee(a_{22}\wedge b_{21})$$
$$c_{22}=(a_{21}\wedge b_{12})\vee(a_{22}\wedge b_{22})$$

3.7 模糊关系

例 3.11 假设模糊关系R描述了子女与父亲、叔叔长相的“相象”关系，模糊关系S描述了父亲、叔叔与祖父、祖母长相的“相象”关系，R和S分别描述为：

$$\underset{\sim}{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{父} & \text{叔} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{子} \\ \text{女} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \underset{\sim}{S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{祖父} & \text{祖母} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{父} \\ \text{叔} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array}$$

求子女与祖父、祖母长相的“相像”关系 C.

3.7 模糊关系

解：由合成运算法则得：

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_1,z_1)=[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,y_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_1,z_1)]\vee[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,y_2)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_2,z_1)]$$

$$=[0.8\wedge0.2]\vee[0.2\wedge0.9]=0.2\vee0.2=0.2$$

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_1,z_2)=[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,y_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_1,z_2)]\vee[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_1,y_2)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_2,z_2)]$$

$$=[0.8\wedge0.7]\vee[0.2\wedge0.1]=0.7\vee0.1=0.7$$

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_2,z_1)=[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2,y_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_1,z_1)]\vee[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2,y_2)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_2,z_1)]$$

$$=[0.3\wedge0.2]\vee[0.5\wedge0.9]=0.2\vee0.5=0.5$$

$$\mu_{\underset{\sim}{C}}(x_2,z_2)=[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2,y_1)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_1,z_2)]\vee[\mu_{\underset{\sim}{R}}(x_2,y_2)\wedge\mu_{\underset{\sim}{S}}(y_2,z_2)]$$

$$=[0.3\wedge0.7]\vee[0.5\wedge0.1]=0.3\vee0.1=0.3$$

所以，

$$\underset{\sim}{C}=\begin{array}{c} \\ \text{子} \\ \text{女} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{祖父} & \text{祖母}\end{array} \\ \begin{bmatrix}0.2 & 0.7\\ 0.5 & 0.3\end{bmatrix}\end{array}$$

3.7 模糊关系

（3） 模糊关系方程

模糊关系方程概念

将模糊关系R看成一个模糊变换器。当A为输入时，B为输出，如图3-9所示。

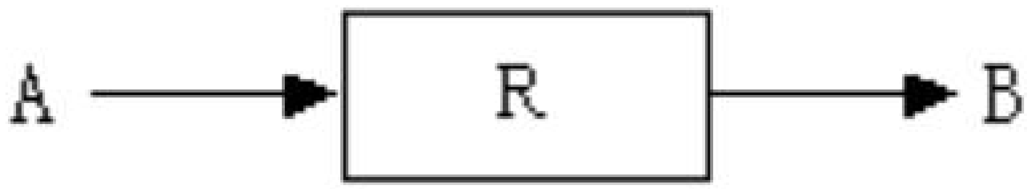


图 3-9 模糊变换器

3.7 模糊关系

可分为两种情况讨论：

1）已知输入A和模糊关系R，求输出B，这是综合评判，即模糊变换问题。

2）已知输入A和输出B，求模糊关系R，或已知模糊关系 R 和输出 B，求输入 A，这是模糊综合评判的逆问题，需要求解模糊关系方程。

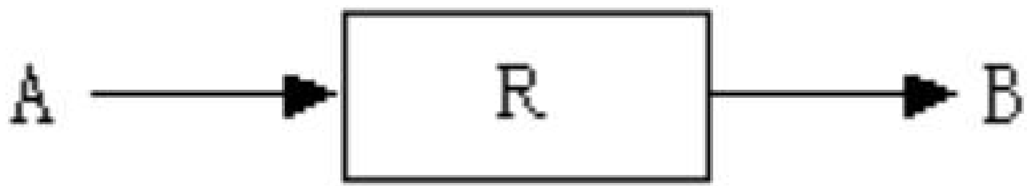


图 3-9　模糊变换器

3.7 模糊关系

（3）模糊变换

设有二有限集 $X=\{x_1, x_2,\ldots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$， R 是$X \times Y$上的模糊关系：

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

设 A 和 B 分别为 X 和 Y 上的模糊集：

$$A=\{\mu_A(x_1),\mu_A(x_2),\cdots,\mu_A(x_m)\}$$

$$B=\{\mu_B(y_1),\mu_B(y_2),\cdots,\mu_A(y_n)\}$$

3.7 模糊关系

模糊集合 A 和 B 满足

$$B = A \circ R$$

则称B是A的象，A是B的原象，R是X 到Y上的一个模糊变换。

$B = A \circ R$ 的隶属函数运算规则为：

$$\mu_B\left(y_j\right) = \overset{m}{\underset{i=1}{\vee}}\left[\mu_A\left(x_i\right) \wedge \mu_R\left(x_i, y_j\right)\right], j = 1, 2 \cdots, n$$

3.7 模糊关系

例 3.12：已知论域 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2\}$，A是论域X上的模糊集：

$$\underset{\sim}{A} = \{0.1, 0.3, 0.5\}$$

R是X到Y上的一个模糊变换，

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

试通过模糊变换R求A的象B

解：

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{R} = (0.1, 0.3, 0.5) \circ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$= \left[(0.1 \wedge 0.5) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.4) \quad (0.1 \wedge 0.2) \vee (0.3 \wedge 0.1) \vee (0.5 \wedge 0.6)\right]$$

$$= (0.4, 0.5)$$

3.7 模糊关系

例 **3.13** 艺术学院招生，对考生所需考察的素质有：{歌舞，表演，外在}。对各种素质的评语分为四个等级 {好，较好，一般，差}。

某学生表演完毕后，评委对其评价为：

	好	较好	一般	差
歌舞	**30%**	**30%**	**20%**	**20%**
表演	**10%**	**20%**	**50%**	**20%**
外在	**40%**	**40%**	**10%**	**10%**

如果考察学生培养为电影演员的潜质，则对表演的要求较高，其它较低。定义加权模糊集为：

$$A=\{0.25\ \ 0.5\ \ 0.25\}$$

试根据模糊变换来得到评委对该学生培养为电影演员的最终结论。

3.7 模糊关系

解：根据模糊变换可以得到评委对该学生培养为电影演员的决策集：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.25 & 0.5 & 0.25\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.2\\0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2\\0.4 & 0.4 & 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.25 & 0.25 & 0.5 & 0.2\end{bmatrix}$$

综合评判：选取隶属度最大的元素作为最终的评语，评委的评语为“一般”

3.7 模糊关系

例 **3.14** 厨艺比赛，对菜品的评价有：**{**色，香，味**}**。对各种素质的评语分为四个等级 **{**好，较好，一般，差**}**。

某学生表演完毕后，评委对其评价为：

	好	较好	一般	差
色	0.6	0.2	0.2	0
香	0.8	0.1	0.1	0
味	0.3	0.3	0.3	0.1

假设三个评判因素在评判中所占的比重（即它们的“权”）分别是：“色”为**0.3**；“香”为**0.3**；“味”为**0.4**。这三个“权”值组成 ***U*={**色，香，味**}**上一组模糊向量为：

$$A = \{0.3 \ \ 0.3 \ \ 0.4\}$$

由此可得到评委对这道菜的综合评判为：

3.7 模糊关系

解：根据模糊变换可以得到评委对该菜品的评价为：

$$\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3 & 0.4\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.2 & 0\\0.8 & 0.1 & 0.1 & 0\\0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1\end{bmatrix}$$

3.7 模糊关系

2）模糊关系方程的解

近似试探法是目前实际应用中较为常用的方法之一。

例 3.14 解方程

$$\begin{pmatrix}0.6 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{pmatrix} = 0.4$$

解：　由方程得：

$$(0.6\wedge x_1)\vee(0.2\wedge x_2)\vee(0.4\wedge x_3)=0.4$$

显然三个括弧内的值都不可能超过0.4。由于

$$(0.2\wedge x_2)<0.4$$

是显然的，因此 x_2 可以取[0,1]的任意值，即 x_2=[0,1]。

现在只考虑：

$$(0.6\wedge x_1)\vee(0.4\wedge x_3)=0.4$$

这两个括弧内的值可以是：其中一个等于0.4，另一个不超过0.4。分两种情况讨论：

(1) 设 $0.6 \wedge x_1 = 0.4$，$0.4 \wedge x_3 \leq 0.4$，则 $x_1 = 0.4, x_3 = [0,1]$

方程的解为 $x_1 = 0.4,\ x_2 = [0,1],\ x_3 = [0,1]$

(2) 设 $0.6 \wedge x_1 \leqslant 0.4$，$0.4 \wedge x_3 = 0.4$，则

即方程的解为：$x_1 = [0, 0.4],\ x_2 = [0.4, 1],\ x_3 = [0.4, 1]$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

“天气很冷，快要下雪了”

气温----→下雪概率

(1) 语言变量

语言变量是自然语言中的词或句，它的取值不是通常的数，而是用模糊语言表示的模糊集合。

例如“年龄”就可以是一个模糊语言变量，其取值为“年幼”，“年轻”，“年老”等模糊集合。

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

定义一个语言变量需要定义以下4个方面的内容：

- 定义变量名称
- 定义变量的论域
- 定义变量的语言值（每个语言值是定义在变量论域上的一个模糊集合）
- 定义每个模糊集合的隶属函数。

例 3.15：试根据定义语言变量的4要素来定义语言变量“速度”。

首先，定义变量名称为“速度”，记做 x；

其次，定义变量“速度”的论域为[0，200]km/h；

再次，在论域[0，200]上定义变量的语言值为 {慢，中，快}；

最后，在论域上分别定义各语言值的隶属函数为

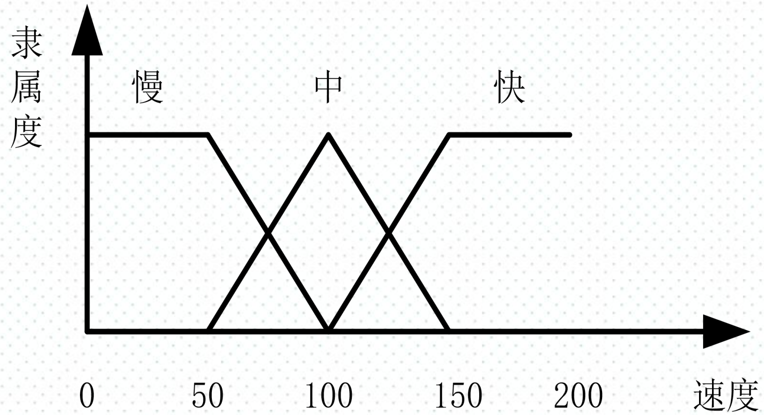
$$\mu_{慢}(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 50\\ 2-\dfrac{x}{50} & 50<x\le 100\\ 0 & 100<x\le 200\end{cases}$$

$$\mu_{中}(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 50\\ \dfrac{x}{50}-1 & 50<x\le 100\\ 3-\dfrac{x}{50} & 100<x\le 150\\ 0 & 150<x\le 200\end{cases}$$

$$\mu_{快}(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 100\\ \dfrac{x}{50}-2 & 100<x\le 150\\ 1 & 150<x\le 200\end{cases}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

定义的隶属函数形状如图



(2) 模糊蕴含关系

人类在生产实践和生活中的操作经验和控制规则往往可以用自然语言来描述。譬如，在汽车驾驶速度的控制过程中，控制规则可以描述为“如果速度快了，那么减小油门；如果速度慢了，那么加大油门。”下面就来介绍如何利用模糊数学从语言规则中提取其蕴涵的模糊关系。

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

1）简单条件语句的蕴涵关系

“如果……那么……”或“如果……那么……，否则……”

- 假设u，v 是已定义在论域U和V的两个语言变量，人类的语言控制规则为“如果u 是A，则v 是B ”，其蕴涵的模糊关系R为：

$$R=\left(A\times B\right)\cup\left(\overline{A}\times V\right)$$

式中，A×B称作A和B的笛卡儿乘积，其隶属度运算法则为：

$$\mu_{A\times B}\left(u,v\right)=\mu_A\left(u\right)\wedge\mu_B\left(v\right)$$

所以，R的运算法则为：

$$\begin{aligned}\mu_R\left(u,v\right)&=\left[\mu_A\left(u\right)\wedge\mu_B\left(v\right)\right]\vee\left\{\left[1-\mu_A\left(u\right)\right]\wedge 1\right\}\\&=\left[\mu_A\left(u\right)\wedge\mu_B\left(v\right)\right]\vee\left[1-\mu_A\left(u\right)\right]\end{aligned}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

- 假设 u，v 是已定义的两个语言变量，人类的语言控制规则为"如果u 是A，则v是B；否则，v 是C"则该规则蕴涵的模糊关系R为：

$$R = (A \times B) \cup (\overline{A} \times C)$$

$$\mu_R(u,v) = [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] \vee \{[1 - \mu_A(u)] \wedge \mu_C(v)\}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

例 3.15： 定义两语言变量“误差u ”和“控制量v ”；两者的论域：$U=V=\{1,2,3,4,5\}$； 定义在论域上的语言值为：{小，大，很大，不很大} ={A，B，G，C}；定义各语言值的隶属函数为：

$$\mu_A=(1.0 \quad 0.8 \quad 0.3 \quad 0.1 \quad 0.0)$$

$$\mu_B=(0.0 \quad 0.1 \quad 0.3 \quad 0.8 \quad 1.0)$$

$$\mu_G=(0.0 \quad 0.01 \quad 0.09 \quad 0.64 \quad 1.0)$$

$$\mu_C=(1.0 \quad 0.99 \quad 0.91 \quad 0.36 \quad 0.0)$$

分别求出控制规则“如果u 是小，那么 v 是大” 蕴涵的模糊关系R_1和规则“如果u 是小，那么 v 是大；否则， v 是不很大”蕴涵的模糊关系R_2。

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

解：（1）求解R_1

$$R_1 = (A \times B) \cup (\overline{A} \times V)$$

$$\mu_{R_1}(u,v) = [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] \vee [1 - \mu_A(u)]$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

解：（2）求解R_2

$$R_2 = (A \times B) \cup (\overline{A} \times G)$$

$$\mu_{R_2}(u,v) = [\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)] \vee \{[1 - \mu_A(u)] \wedge \mu_G(v)\}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.36 & 0.3 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.36 & 0.1 \\ 1.0 & 0.99 & 0.91 & 0.36 & 0.0 \end{bmatrix}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

2）多重条件语句的蕴涵关系

由多个简单条件语句并列构成的语句叫做多重条件语句，其句型为：

如果u 是A_1，则v 是B_1 ；
否则，如果u 是A_2，则v 是B_2 ；
……
否则，如果u是A_n，则v是B_n。

该语句蕴涵的模糊关系为：

$$R=(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\cup\cdots\cup(A_n\times B_n)=\bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times B_i)$$

其隶属函数为：

$$\mu_R(u,v)=\bigvee_{i=1}^{n}\left(\mu_{A_i}(u)\wedge\mu_{B_i}(v)\right)$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

3）多维条件语句的蕴涵关系

具有多输入量的简单条件语句，我们称之为多维条件语句。其句型为：

如果 u_1 是 A_1，且 u_2 是 A_2，…，且 u_m 是 A_m，则 v 是B

该语句蕴涵的模糊关系为：

$$R = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times B$$

其隶属函数为：

$$\mu_R(u_1, u_2, \cdots, u_m, v) = \mu_{A_1}(u_1) \wedge \mu_{A_2}(u_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_m}(u_m) \wedge \mu_B(v)$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

例 3.16 已知语言规则为"如果 e 是 A，并且 ec 是 B，那么 u 是 C。"其中

$$A=\frac{1}{e_1}+\frac{0.5}{e_2},B=\frac{0.1}{ec_1}+\frac{0.6}{ec_2}+\frac{1}{ec_3},C=\frac{0.3}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}+\frac{1}{u_3}$$

试求该语句所蕴涵的模糊关系 R。

解： $R=A\times B\times C$

第一步，先求 $R_1=A\times B$： $\mu_{A\times B}(u,v)=\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)$

$$R_1=\begin{bmatrix}1\wedge 0.1 & 1\wedge 0.6 & 1\wedge 1\\ 0.5\wedge 0.1 & 0.5\wedge 0.6 & 0.5\wedge 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.6 & 1\\ 0.1 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

第二步，将二元关系矩阵 $\boldsymbol{R}_1$ 排列成列向量形式，先将$\boldsymbol{R}_1$ 中的第一行元素写成列向量形式，再将$\boldsymbol{R}_1$ 中的第二行元素也写成列向量放在前者的下面，如果是多行的再依次写下去。

列向量转换

$$R_1=\begin{bmatrix}0.1 & 0.6 & 1\\ 0.1 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\Rightarrow R_1^{T_1}=\begin{bmatrix}0.1\\0.6\\1\\0.1\\0.5\\0.5\end{bmatrix}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

第三步，R可计算如下： $\mu_{A\times B}(u,v)=\mu_A(u)\wedge\mu_B(v)$

$$R=R_1^{T_1}\times C=\begin{bmatrix}0.1\\0.6\\1\\0.1\\0.5\\0.5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.3 & 0.7 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1\wedge0.3 & 0.1\wedge0.7 & 0.1\wedge1\\0.6\wedge0.3 & 0.6\wedge0.7 & 0.6\wedge1\\1\wedge0.3 & 1\wedge0.7 & 1\wedge1\\0.1\wedge0.3 & 0.1\wedge0.7 & 0.1\wedge1\\0.5\wedge0.3 & 0.5\wedge0.7 & 0.5\wedge1\\0.5\wedge0.3 & 0.5\wedge0.7 & 0.5\wedge1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1 & 0.1\\0.3 & 0.6 & 0.6\\0.3 & 0.7 & 1\\0.1 & 0.1 & 0.1\\0.3 & 0.5 & 0.5\\0.3 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

3.8 语言规则中蕴涵的模糊关系

4）多重多维条件语句的蕴涵关系

具有多输入量的多重条件语句，我们称之为多重多维条件语句。其句型为：

如果u_1是A_{11}，且u_2是A_{12}，…，且u_m是A_{1m}，则v是B_1；
否则，如果u_1是A_{21}，且u_2是A_{22}，…，且u_m是A_{2m}，则v是B_2；
……
否则，如果u_1是A_{n1}，且u_2是A_{n2}，…，且u_m是A_{nm}，则v是B_n；

则该语句蕴涵的模糊关系为：

$$R=\bigcup_{i=1}^{n} A_{i1}\times A_{i2}\times\cdots\times A_{im}\times B_i$$

其隶属函数为：

$$\mu_R\left(u_1,u_2,\cdots,u_m,v\right)=\bigvee_{i=1}^{n}\mu_{A_{i1}}\left(u_1\right)\wedge\mu_{A_{i2}}\left(u_2\right)\wedge\cdots\wedge\mu_{A_{im}}\left(u_m\right)\wedge\mu_{B_i}\left(v\right)$$

3.9 模糊推理

模糊语句

将含有模糊概念的语法规则所构成的语句称为模糊语句。根据其语义和构成的语法规则不同，可分为以下几种类型：

（1）**模糊陈述句**：语句本身具有模糊性，又称为模糊命题。如：“今天天气很热”。

（2）**模糊判断句**：是模糊逻辑中最基本的语句。语句形式：“x是a”，记作（a），且a所表示的概念是模糊的。如“张三是好学生”。

（3）**模糊推理句**：语句形式：若x是a，则x是b。则为模糊推理语句。如“今天是晴天，则今天暖和”。

3.9 模糊推理

常规推理： 已知 x，y 之间的函数关系 $y=f(x)$，则对于某个 x^*，根据 $f(\cdot)$ 可以推理得到相应的y^*。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f(\,)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & y \\ x^* \arrow[r, "\text{推理}"] & y^*=f(x^*) \end{tikzcd}$$

模糊推理： 知道了语言控制规则中蕴涵的模糊关系后，就可以根据模糊关系和输入情况，来确定输出情况，这就叫做“模糊推理”。

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "R"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & y \\ x^*=A \arrow[r, "\text{推理}"] & y^*=B \end{tikzcd}$$

3.9 模糊推理

（1） 单输入模糊推理

对于单输入的情况，假设两个语言变量 x，y 之间的模糊关系为 R ，当 x 的模糊取值为 A^* 时，与之相对应的 y 的取值 B^* ，可通过模糊推理得出，如下式所示：

$$\underset{\sim}{B}^* = \underset{\sim}{A}^* \circ \underset{\sim}{R}$$

上式的计算方法有两种：

1）Zadeh法

$$B^*(y) = A^*(x) \circ R(x,y) = \underset{x\in X}{\vee}\{\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_R(x,y)\}$$

$$= \underset{x\in X}{\vee}\{\mu_{A^*}(x) \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y) \vee (1-\mu_A(x))]\}$$

3.9 模糊推理

例3.17 在例 3.15 中，已经求出控制规则“如果u是小，那么v是大”蕴涵的模糊关系为R_1，现在，已知输入量u的模糊取值为“略小”，记做A_1，令

$$A_1 = (1, 0.89, 0.55, 0.32, 0)$$

求控制量v根据规则相应的取值B_1。

解：

$$\underset{\sim}{R_1} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.1 & 0.3 & 0.8 & 1.0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B_1} = \underset{\sim}{A_1} \circ \underset{\sim}{R_1}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B_1}}(v_1) = \bigvee_{i=1}^{5}[\mu_{\underset{\sim}{A_1}}(u_i) \wedge \mu_{\underset{\sim}{R_1}}(u_i, v_1)] = 0.55$$

同理，可解得：

$$\mu_{\underset{\sim}{B_1}}(v_2) = 0.55 \quad \mu_{\underset{\sim}{B_1}}(v_3) = 0.55$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B_1}}(v_4) = 0.8 \quad \mu_{\underset{\sim}{B_1}}(v_5) = 1.0$$

所以

$$\underset{\sim}{B_1} = (0.55 \quad 0.55 \quad 0.55 \quad 0.8 \quad 1.0)$$

2.7 模糊推理

2）Mamdani推理方法

与 Zadeh 法不同的是，Mamdani 推理方法用 A 和 B 的笛卡儿积来表示A→B的模糊蕴涵关系。

$$R = A \to B = A \times B$$

则对于单输入推理的情况，$\underset{\sim}{B}^* = \underset{\sim}{A}^* \circ \underset{\sim}{R}$ 的计算方法为：

$$B^*(y) = A^*(x) \circ R(x,y) = \bigvee_{x \in X} \{\mu_{A^*}(x) \wedge [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)]\}$$

$$= \bigvee_{x \in X} \{\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_A(x)\} \wedge \mu_B(y)$$

$$= \alpha \wedge \mu_B(y)$$

$\alpha = \bigvee_{x \in X} \{\mu_{A^*}(x) \wedge \mu_A(x)\}$ 叫做**A*和A**的适配度，它是**A*和A**的交集的高度。

根据**Mamdani**推理方法，结论可以看作用α对**B**进行切割，所以这种方法又可以形象地称为削顶法。

3.9 模糊推理

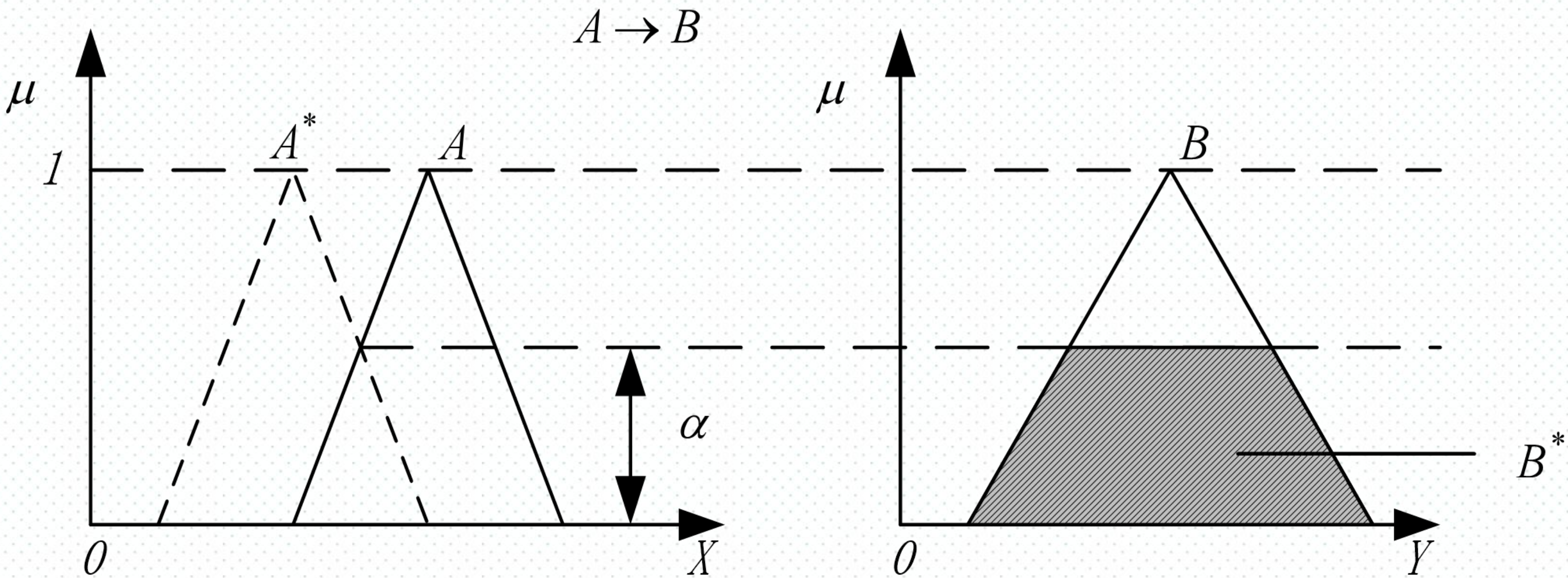


图 3-10 单输入Mamdani推理的图形化描述（削顶法）

3.9 模糊推理

（2） 多输入模糊推理

对于语言规则含有多个输入的情况，假设输入语言变量 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 与输出语言变量 y 之间的模糊关系为 R，当输入变量的模糊取值分别为 $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_m^*$ 时，与之相对应的 y 的取值B^*，可通过下式得到：

$$B^* = A_1^* \times A_2^* \times \cdots \times A_n^* \circ R \qquad R = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times B$$

$$\mu_{B^*}(y) = \bigvee_{x_1, x_2, \cdots, x_m} \left\{ \mu_{A_1^*}(x_1) \wedge \mu_{A_2^*}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_m^*}(x_m) \wedge \mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) \right\}$$

$$\mu_R(x_1, x_2, \cdots, x_m, y) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_m}(x_m) \wedge \mu_B(y)$$

3.9 模糊推理

例3. 18，已知

$$A^* = \frac{0.8}{e_1} + \frac{0.4}{e_2}, B^* = \frac{0.2}{ec_1} + \frac{0.6}{ec_2} + \frac{0.7}{ec_3}$$

试根据 例3.16 中的语言规则求“***e*** 是**A*** 并且 ***ec*** 是**B*** ”时输出 ***u*** 的模糊值***C**** 。

解：

$$R = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \left(A^* \times B^*\right) \circ R$$

3.9 模糊推理

令

$$R_2 = A^* \times B^* = \begin{bmatrix} 0.8 \wedge 0.2 & 0.8 \wedge 0.6 & 0.8 \wedge 0.7 \\ 0.4 \wedge 0.2 & 0.4 \wedge 0.6 & 0.4 \wedge 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{R}_2$ 进行行向量转换，则

$$R_2^{T_2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.7 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \left(A^* \times B^* \right)^{T_2} \circ R = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$C^* = \frac{0.3}{u_1} + \frac{0.7}{u_2} + \frac{0.6}{u_3}$$

3.9 模糊推理

对于二输入模糊推理，还可以根据Mamdani方法用图形法进行描述：

二维模糊规则：R： IF x is A and y is B THEN z is C ，可以看作两个单维模糊规则的交集：

R1： IF x is A THEN z is C，
and R2：IF y is B THEN z is C。

则当二维输入变量的模糊取值分别为A*和B*时，根据R推理得到的模糊输出C*等于根据R1推理得到的模糊输出 C_1*和根据R2推理得到的模糊输出 C_2*的交集。

$$C_1^* = A^* \circ (A \times C), C_2^* = B^* \circ (B \times C),$$

$$C^* = C_1^* \cap C_2^* = \left[A^* \circ (A \times C)\right] \cap \left[B^* \circ (B \times C)\right],$$

2.7 模糊推理

其运算法则为：

$$\mu_{C^*}(z)=\left\{\bigvee_{x\in X}\mu_{A^*}(x)\wedge\left(\mu_A(x)\wedge\mu_C(z)\right)\right\}\wedge\left\{\bigvee_{y\in Y}\mu_{B^*}(y)\wedge\left(\mu_B(y)\wedge\mu_C(z)\right)\right\}$$

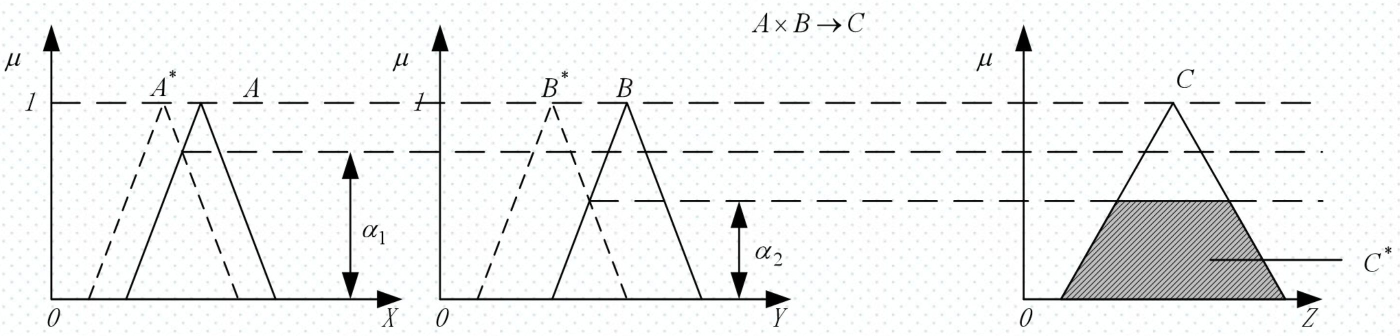
$$=\left\{\bigvee_{x\in X}\left(\mu_{A^*}(x)\wedge\mu_A(x)\right)\wedge\mu_C(z)\right\}\wedge\left\{\bigvee_{y\in Y}\left(\mu_{B^*}(y)\wedge\mu_B(y)\right)\wedge\mu_C(z)\right\}$$

$$=\{\alpha_1\wedge\mu_C(z)\}\wedge\{\alpha_2\wedge\mu_C(z)\}$$

$$=\{\alpha_1\wedge\alpha_2\}\wedge\mu_C(z)$$

模糊规则的激励强度，表示规则的前件部分被满足的程度

上式的图形化意义在于用 α_1 和 α_2 的最小值对C进行削顶。



3.9 模糊推理

（3）多输入多规则模糊推理

以二输入为例，对于多规则的情况，规则库可以描述为：

***R*：**

R_1： IF x is A_1 and y is B_1 THEN z is C_1;

R_2： IF x is A_2 and y is B_2 THEN z is C_2;

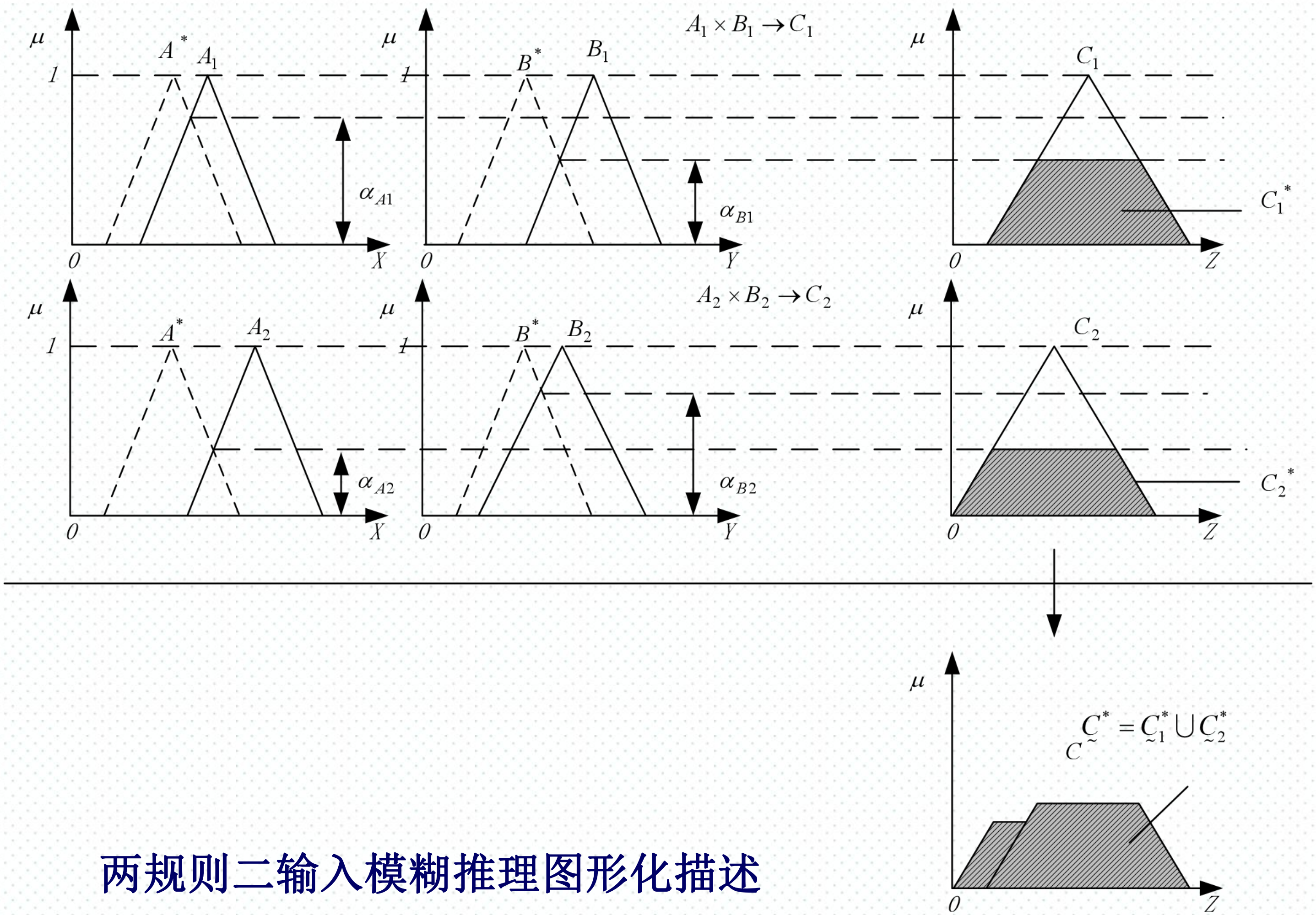
……

R_n： IF x is A_n and y is B_n THEN z is C_n;

则当二维输入变量的模糊取值分别为 A^* 和 B^* 时，根据 R 推理得到的模糊输出 C^* 等于所有根据 R_i 推理得到的模糊输出 C_i 的并集。

$$C^* = \bigcup_i C_i^* \qquad \mu_{C^*}(z) = \vee_i \mu_{C_i^*}(z)$$

3.9 模糊推理



两规则二输入模糊推理图形化描述

小结

模糊集理论是模糊控制的数学基础，是描述模糊性概念的有效的数学工具。模糊集合理论是普通集合理论的拓展，它通过引入隶属函数的概念达到了对模糊概念描述的目的。

本章详细地介绍了模糊集合、模糊关系的概念及其与普通集合、普通关系之间的关系，并给出了如何从人类自然语言规则中提取其蕴涵的模糊关系的方法，介绍了如何根据模糊关系进行模糊推理。

作　业 3-1

1　已知语言变量 x，y，z。

X的论域为 {1,2,3}，定义有两个语言值：“大”＝{0, 0.5, 1}；“小”={1, 0.5, 0}。

Y的论域为{10,20,30,40,50}，语言值为：

“高”={0, 0, 0, 0.5, 1};“中”={0, 0.5, 1, 0.5, 0};“低”={1, 0.5, 0, 0, 0}。

Z 的论域为{0.1,0.2,0.3}，语言值为：“长”={0, 0.5, 1}；“短”={1, 0.5, 0}

则

1）试求规则：

如果 x 是“大”并且 y 是“高”那么 z是“长”；

否则，如果 x 是“小”并且 y 是“中”那么 z是“短”。

所蕴涵的x，y，z之间的模糊关系R。

2）假设在某时刻，x是“略小”={0.7, 0.25, 0}，y 是“略高”={0, 0, 0.3, 0.7, 1}

试根据R通过Zadeh法模糊推理求出此时输出 z 的语言取值。

作　业 3-2

2. 设A和B分别是论域X和Y上的模糊集合，其中

$$\boldsymbol{X}(\text{水的温度}) = \{\mathbf{0},\ \mathbf{20},\ \mathbf{40},\ \mathbf{60}, \mathbf{80}, \mathbf{100}\}$$

$$\boldsymbol{Y}(\text{蒸汽的压力}) = \{\mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{7}\}$$

$$\boldsymbol{A} = \text{温度高} = \{\mathbf{0},\ \mathbf{0.1},\ \mathbf{0.3},\ \mathbf{0.6}, \mathbf{0.85}, \mathbf{1}\}$$

$$\boldsymbol{B} = \text{压力大} = \{\mathbf{0},\ \mathbf{0.1},\ \mathbf{0.3},\ \mathbf{0.5}, \mathbf{0.7}, \mathbf{0.85}, \mathbf{1}\}$$

在模糊规则“若A则B”下，利用 Mamdani 推理法求

$$\mathrm{A}^{*} = \text{温度较高} = \{\mathbf{0.1},\ \mathbf{0.15},\ \mathbf{0.4},\ \mathbf{0.75}, \mathbf{1}, \mathbf{0.85}\}$$

输入下的输出Y的语言取值。

扎德（Zadeh，L.A.；1921~ 2017）

美国自动控制专家，美国工程科学院院士。因发展模糊集理论的先驱性工作而获电气与电子工程师学会(IEEE)的教育勋章。

- 1921年2月生于苏联巴库。
- 1949年获哥伦比亚大学电机工程博士。
- 生前曾任加利福尼亚大学伯克利分校电机工程与计算机科学系教授。

扎德在控制理论方面有重要贡献

- 1949年他在关于时变网络频率分析的博士论文中引入的时变变换函数的概念，后来成为线性时变系统分析的工具。
- 1950～1952年他和J.拉加齐尼合作，推广了维纳预测理论，在设计有限存储滤波器和预测器中得到广泛应用。他们发展的采样控制系统的Z变换逼近,成为分析这类系统的标准方法。
- 1953年他给出一种设计非线性滤波器的新的逼近方法。
- 1963年他和C.A.德舍尔合著的《线性系统的状态空间理论》是该领域的经典著作。书中介绍的状态空间逼近已成为最优控制中的标准工具，广泛用于工业机器人和社会经济系统。
- 1965年，扎德在《信息与控制》杂志第8期上发表《模糊集》的论文,引起了各国数学家和自动控制专家们的注意。他通过引进模糊集（边界不明显的类）提供了一种分析复杂系统的新方法。他提出用语言变量代替数值变量来描述系统的行为，使人们找到了一种处理不确定性的方法，并给出一种较好的人类推理模式。20年来他所开创的模糊集领域得到了迅速发展。
- 2017年9月6日不幸逝世，享年96岁。

扎德教授永远活在我们心中

汪培庄 辽宁工程技术大学，智能工程与数学研究院，阜新，123000

模糊数学之父，著名学者，美国加州大学伯克利分校扎德教授与世长辞了。他的逝世使全世界科学和技术工作者都为之震惊和叹息，在全人类正待以人工智能为笔来谱写网络时代新篇章的庄严时刻，一位在上世纪中叶就吹响号角并终身引领智能革命的伟大旗手离开了这个世界，这不能不使人哀痛，但同时也更使我们受到激励。

1965年，身为控制论专家的扎德教授提出了模糊集合论。数学是人工智能的基础，扎德的目的是要从数学基础上来为人工智能的发展开辟道路。经典集合论只能表达精确概念，刻板的程序使计算机在识别和控制上无法模拟人脑在识别和控制中由于使用模糊词句而带有的灵活机动性。要想改变这种状况，必须用数学描写模糊概念，从外延上把精确集合扩展成模糊集合。

他一旦提出模糊集合论，就从数学上消除了计算机不能处理模糊概念的禁锢。他登高一呼，经过两年的短暂沉默，就万山响应，理论和应用文章呈指数地逐年递增，传遍了计算机应用的各个领域。

模糊数学的意义在于：1. 概念是思维的单元。模糊集合论使计算机通达人的生活概念，就可以进一步通达人的思维，这就为人工智能的发展找到了一个合适的突破口；2. 。模糊数学为人类架起了一座连接定性与定量的桥梁，人文和社会科学工作者都从模糊数学获益，这就使人工智能冲破了定性知识的禁区，扫除了应用的死角，得以全方位地发展； 3. 语言是思维的工具，扎德利用模糊数学来搞词计算，把人工智能的研究引入核心战场。

扎德的伟大梦想是要让语言词句直接进入计算机程序，他年过九旬仍日以继夜地守候在网上和大众讨论交流直到他最后的昏迷。总之，模糊集合论的诞生是世界人工智能发展史中的一个重要里程碑，扎德是国际人工智能的一位长驻的特殊精神领袖。

扎德平易近人，慈爱可亲，是人们的良师益友，尤其对中国，他更是情有独钟。他热情地鼓励我们每一点进步和成就，热情接待所有中国学者的到访，远道来华参加在中国举行的国际会议，凡是与他接触过的人，无不为之感动。在他的关心扶助下，我国模糊集与系统研究队伍壮大；模糊逻辑、模糊代数、模糊拓扑、模糊微分方程、模糊泛函、粗糙集、软集和范畴等数学理论发展严谨；在因素空间和概率计量逻辑等方面有理论创新；模糊数学在中国应用的面最广；在人工智能和信息革命的前沿领域也有重要战绩。其中，四级倒摆控制和模糊推理机、机器人、因素神经网络、机器证明、直觉模糊决策和模糊结构元等项研究都出现过具有国际领先水平的成果。

扎德和我们永别了，我们要通晓他深刻的学术愿景，学习他坚韧的学术精神，发扬他宏博的学术思想，在伟人的肩膀上向上攀登，完成他的遗愿，取得智能革命更加伟大的胜利。我个人和他有很深的情谊，受过他的指点和教益。我用因素空间来研究模糊集的论域，建立了模糊落影理论，受到他的称赞。我将与大家一道，用因素空间和Topos来处理词计算并深化模糊集理论，为人工智能建立相匹配的智能数学理论，引领大数据的时代潮流。