作业三

1. 已知系统的特征方程如下，试判断系统的稳定性，并求出不稳定系统在 s 右半平面的根数及虚根值。

   a) $3s^4+10s^3+5s^2+s+2=0$

   b) $s^5+3s^4+12s^3+24s^2+32s+48=0$

   解：解：a) 列劳斯表如下

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 3 & 5 & 2 \\
s^3 & 10 & 1 & \\
s^2 & \dfrac{47}{10} & 2 & \\
s^1 & -\dfrac{153}{47} & & \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

   由于表中第一列元素的符号有两次改变，所以该系统在 s 右半平面有两个闭环极点。系统不稳定。

   b) 列劳斯表如下

$$
\begin{array}{c|ccl}
s^5 & 1 & 12 & 32 \\
s^4 & 3 & 24 & 48 \\
s^3 & 4 & 16 & \\
s^2 & 12 & 48 & \text{辅助方程：} \mathrm{F}(s)=12s^2+48=0 \\
s^1 & 0(24) & 0 & \mathrm{dF}(s)/\mathrm{d}s=24s=0 \\
s^0 & 48 & &
\end{array}
$$

   由上表可知，劳斯表中第一列元素全部大于零，所以系统在 s 右半平面无根。由于辅助方程的根为 $s_{1,2}=\pm 2j$，为系统的一对虚根。

2. 两个系统的传递函数分别是 $G_1(s)=\dfrac{1}{2s+1}$ 和 $G_2(s)=\dfrac{1}{s+1}$，当输入信号为 $x_i(t)=1(t)$ 时，给出其输出信号到达各自稳态值的 63.2%的先后顺序。

解：系统 2 先到

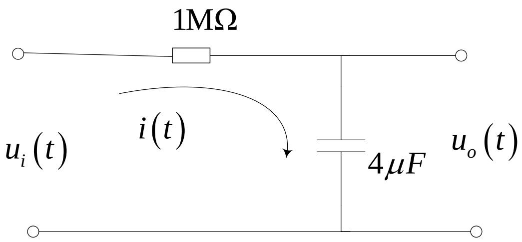
3. 设单位反馈系统的开环传递函数 $G(s)=\dfrac{4}{s(s+5)}$，该系统的阶跃响应类型为

________. (欠阻尼/过阻尼/零阻尼/负阻尼)。
解：过阻尼

闭环传函：$\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{\frac{4}{s(s+5)}}{1+\frac{4}{s(s+5)}}=\frac{4}{s^2+5s+4}=\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$

可得，$w_n=2,\zeta=1.25$（过阻尼）

4. 如图所示的阻容网络，$u_i(t)=\left[1(t)-1(t-30)\right]\mathrm{v}$，试求不同时刻系统的输出。



（1）$t=4\text{s}$ 时，$u_o(t)=$ ________ v（小数点后保留三位有效数字）

(2) $t=30\text{s}$ 时，$u_o(t)=$ ________ v（小数点后保留一位有效数字）

解：根据基尔霍夫定理，列写电压平衡方程：

$$RI(s)+U_o(s)=U_i(s)$$

电容元件 $u(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt\Rightarrow U_o(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$，得到系统传递函数

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{1}{RCs+1}=\frac{1}{4s+1}$$

对系统输入信号进行拉氏变换，可得

$$U_i(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-30s}$$

$$U_o(s)=\frac{1}{4s+1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-30s}\right)=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{4}}\right)\left(1-e^{-30s}\right)$$

对上式进行拉氏反变换

$$u_o(t)=\left(1-e^{-\frac{1}{4}t}\right)\cdot 1(t)-\left(1-e^{-\frac{1}{4}(t-30)}\right)\cdot 1(t-30)$$

可得$u_o(4)=1-e^{-1}=0.632\text{v}, u_o(30)=1-e^{-7.5}=1.0\text{v}$。

5. 单位阶跃情况下测得某伺服机构的响应为$x_o(t)=1+0.2e^{-60t}-1.2e^{-10t}$，系统的闭环传递函数为$\frac{k}{s^2+as+b}$，系统的无阻尼自振角频率和阻尼比分别为$w_n$和$\zeta$，试求：

（1）$k=$______$,a=$______$,b=$_______.（答案取整数）

（2）$w_n=$______(小数点后保留一位有效数字)

$\zeta=$______(小数点后保留两位有效数字)

解：对输出响应函数进行拉氏变换

$$X_o(s)=\frac{1}{s}+\frac{0.2}{s+60}-\frac{1.2}{s+10}$$

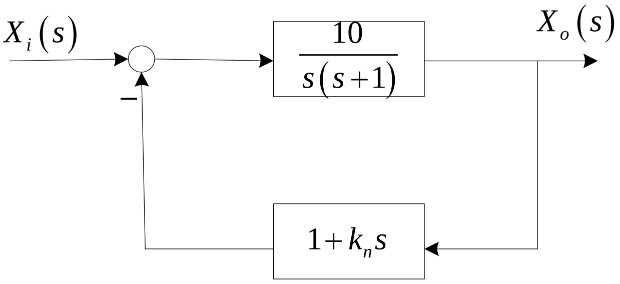
$$G(s)=\frac{X_o(s)}{X_i(s)}=1+\frac{0.2s}{s+60}-\frac{1.2s}{s+10}$$

$$=\frac{600}{s^2+70s+600}=\frac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}=\frac{k}{s^2+as+b}$$

可得

$$k=600,\ a=70,\ b=600.$$
$$w_n=24.5,\ \zeta=1.43$$

6. 设一单位反馈系统的开环传递函数为 $G(s)=\frac{10}{s(s+1)}$，该系统的阻尼比$\zeta=0.157$，无阻尼比自振角频率为3.16rad/s，现将系统改变为如下图所示，为使阻尼比 0.5，试求k_n的值。（小数点后保留两位有效数字）

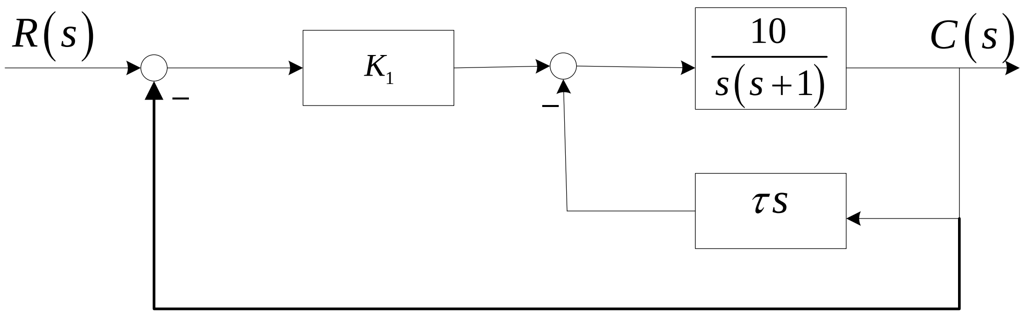


解：原闭环传函：$G_F(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{10}{s^2+s+10}, w_n=\sqrt{10}=3.16$

现闭环传函：$G_F^{'}(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)(1+k_n s)}=\dfrac{10}{s^2+(1+10k_n)s+10}$

$k_n=\dfrac{2\zeta w_n-1}{10}=0.216\approx 0.22$

7. 已知某控制系统的结构图如下：



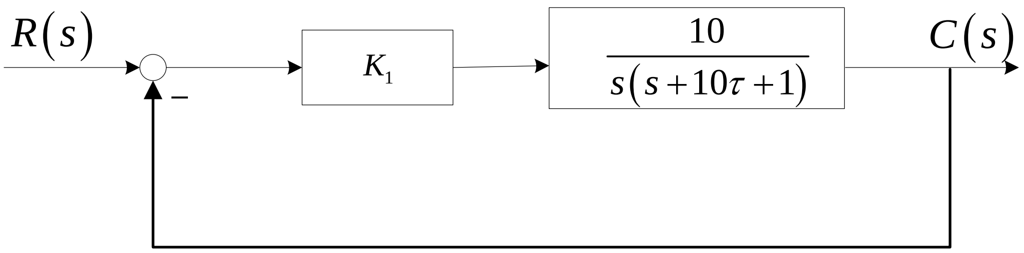
试进行如下计算：

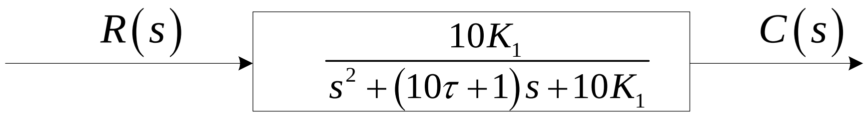
（1） 确定系统的闭环传递函数；

（2） 当 $\tau=0, K_1=1$ 时，求系统的超调量 M_p 和调节时间 t_s （取 $\Delta=\pm5\%$ ）；

（3） 若要求此系统单位阶跃响应的超调量 $M_p=16.3\%$，峰值时间 $t_p=1s$，求参数 K_1 和 τ 的值

解：（1）由题目所示结构图，可化简得：





即系统的闭环传递函数：

$$G(s)=\frac{10K_1}{s^2+(1+10\tau)s+10K_1}$$

（2）当 $\tau=0, K_1=1$ 时，系统的传递函数为：

$$G(s)=\frac{10}{s^2+s+10}=\frac{w_n^2}{s+2\zeta w_n s+w_n^2}$$

此时，系统为标准的二阶系统，有

$$\begin{cases} w_n^2=10 \\ 2\zeta w_n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_n=\sqrt{10}\approx 3.16 \quad rad/s \\ \zeta=\dfrac{1}{2w_n}\approx 0.16 \end{cases}$$

所以超调量$M_p=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\approx 60.10\%$ ，调节时间$t_s=\dfrac{3}{\zeta w_n}\approx 5.93s$ 。

（3）若要求$M_p=16.3\%$，$t_p=1s$，则必有

$$\begin{cases} M_p=e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}=16.3\% \\ t_p=\dfrac{\pi}{w_n\sqrt{1-\zeta^2}}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \zeta=\dfrac{\sqrt{(\ln 0.163)^2}}{\sqrt{\pi^2+(\ln 0.163)^2}}=0.5 \\ w_n=\dfrac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}=3.63 \quad rad/s \end{cases}$$

对照二阶系统的标准形式，可知

$$\begin{cases} w_n=\sqrt{10K_1} \\ 2\zeta w_n=10\tau+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_1=\dfrac{w_n^2}{10}=1.32 \\ \tau=\dfrac{1}{10}(2\zeta w_n-1)=0.26 \end{cases}$$

8． 一单位反馈系统，其开环传递函数为$G(s)=\dfrac{3s+10}{s(5s-1)}$，求系统的动态误差系数；并求当输入量为$r(t)=1+t+\dfrac{1}{2}t^2$时，稳态误差的时间函数$e_s(t)$。

解：（1）系统的误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G(s)}=\frac{-s+5s^2}{10+2s+5s^2}=-\frac{1}{10}s+\frac{13}{25}s^2-\frac{27}{500}s^3+\cdots$$

故知动态误差系数为$k_0=\infty$，$k_1=-10$，$k_2=\dfrac{25}{13}$

（2）稳态误差的时间函数为

$$e(t)=\frac{1}{k_0}r(t)+\frac{1}{k_1}r'(t)+\frac{1}{k_2}r''(t)+\cdots=0-\frac{1}{10}r'(t)+\frac{13}{25}r''(t)+\cdots$$

当输入量为$r(t)=1+t+\dfrac{1}{2}t^2$时，$r'(t)=1+t$，$r''(t)=1$，$r'''(t)=0$，

解得，$e(t)=-\dfrac{1}{10}(1+t)+\dfrac{13}{25}=-\dfrac{1}{10}t+\dfrac{21}{50}$