作业 2

1. 求下列函数的拉氏变换

（1） $f(t)=\sin\left(5t+\frac{\pi}{3}\right)\cdot 1(t)$ （2） $f(t)=\begin{cases}\sin t, 0\le t\le\pi \\ 0, t<0, t>\pi\end{cases}$

解答：(1) $F(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}s+5}{s^2+25}$ (2) $F(s)=\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

2. 求下列象函数的拉氏反变换

（1） $F(s)=\frac{s}{s^2-2s+5}$ (2) $F(s)=\frac{s^2-s+2}{s\left(s^2-s-6\right)}$ （3） $F(s)=\frac{s+1}{s\left(s^2+s+1\right)}$

解答：

（1） $f(t)=e^{t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\cdot 1(t)$

(2) 利用部分分式法

$$F(s)=\frac{s^2-s+2}{s(s-3)(s+2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s-3}+\frac{A_3}{s+2}$$

$$A_1=sF(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{s^2-s+2}{(s-3)(s+2)}\right|_{s=0}=-\frac{1}{3}$$

$$A_2=(s-3)F(s)\big|_{s=3}=\left.\frac{s^2-s+2}{s(s+2)}\right|_{s=3}=\frac{8}{15}$$

$$A_3=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\left.\frac{s^2-s+2}{s(s-3)}\right|_{s=-2}=\frac{4}{5}$$

即 $F(s)=\frac{s^2-s+2}{s(s-3)(s+2)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s}+\frac{8}{15}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{s+2}$

通过查表可得， $f(t)=L^{-1}\left[F(s)\right]=\left(-\frac{1}{3}+\frac{8}{15}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}\right)\cdot 1(t)$

（3）

$$F(s)=\frac{s+1}{s\left(s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{A_0}{s}+\frac{A_1 s+A_2}{s^2+s+1}$$

$$A_0=sF(s)\Big|_{s=0}=1$$

$$\left(s^2+s+1\right)F(s)\Big|_{s=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}=A_1 s+A_2$$

令上方程式两边的实部或虚部分别相等，就可求出 A_1 和 A_2 的值

即

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}A_1+A_2=\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}A_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow A_1=-1,A_2=0$$

即

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+s+1}=\frac{1}{s}-\frac{s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

通过查表可得

$$f(t)=1-e^{-\frac{t}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{t}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+120^\circ\right),t\geq 0$$

3. 设弹簧与滑动阻尼器构成的机械系统如图 1 所示，其中 x_i 是输入位移 x_o 是输出位移，试写出以 x_i 为输入位移，x_o 为输出的系统微分方程模型和传递函数模型。弹簧与阻尼器基本力学关系为 $F_k=-k\Delta x_k, F_b=-b\Delta\dot{x}_b$。

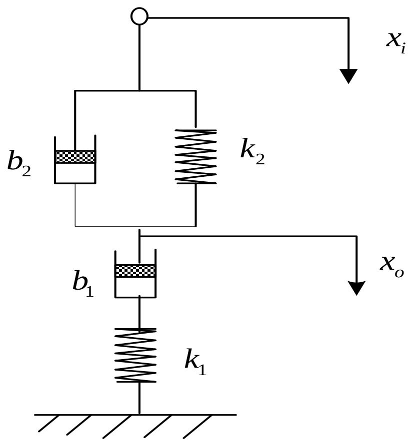

图 1 机械系统

解答：在弹簧K_1和阻尼器b_1之间引入辅助点，设其位移为x，方向向下。忽略重力，根据力平衡方程，可得

$$k_2\left(x_i-x_o\right)+b_2\left(\dot{x}_i-\dot{x}_o\right)=b_1\left(\dot{x}_o-\dot{x}\right),\quad k_1x=b_1\left(\dot{x}_o-\dot{x}\right)$$

则可得微分方程模型

$$x_o+\left(\frac{b_1}{k_1}+\frac{b_2}{k_2}+\frac{b_1}{k_2}\right)\dot{x}_o+\frac{b_1b_2}{k_1k_2}\ddot{x}_o=x_i+\left(\frac{b_1}{k_1}+\frac{b_2}{k_2}\right)\dot{x}_i+\frac{b_1b_2}{k_1k_2}\ddot{x}_i$$

对上述两式进行拉氏变换，考虑初始条件为零，可得

$$k_2\left(X_i\left(s\right)-X_o\left(s\right)\right)+b_2\left(sX_i\left(s\right)-sX_o\left(s\right)\right)=b_1\left(sX_o\left(s\right)-sX\left(s\right)\right)$$
$$k_1X\left(s\right)=b_1\left(sX_o\left(s\right)-sX\left(s\right)\right)$$

消去中间变量$X\left(s\right)=\dfrac{b_1s}{k_1+b_1s}X_o\left(s\right)$，有

$$\left(k_2+b_2s\right)X_i\left(s\right)=\left(k_2+b_2s+\frac{k_1b_1s}{k_1+b_1s}\right)X_o\left(s\right)$$

则机械系统的传递函数为

$$G\left(s\right)=\frac{X_o\left(s\right)}{X_i\left(s\right)}=\frac{\left(k_2+b_2s\right)}{\left(k_2+b_2s+\dfrac{k_1b_1s}{b_1+b_1s}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{b_1b_2}{k_1k_2}s^2+\left(\dfrac{b_1}{k_1}+\dfrac{b_2}{k_2}\right)s+1}{\dfrac{b_1b_2}{k_1k_2}s^2+\left(\dfrac{b_1}{k_1}+\dfrac{b_2}{k_2}+\dfrac{b_1}{k_2}\right)s+1}$$

4. 写出下图电网络的传递函数模型

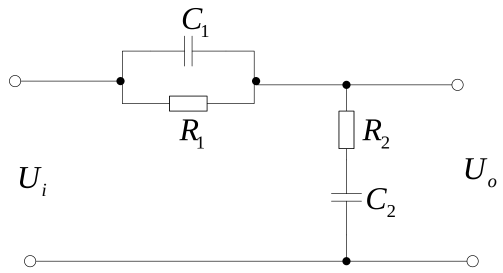

图 2

解答：根据复数阻抗的方法可以得到电网络的传递函数为

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{U_i(s)}=\frac{R_2+\frac{1}{C_2s}}{\frac{R_1\cdot\frac{1}{C_1s}}{R_1+\frac{1}{C_1s}}+R_2+\frac{1}{C_2s}}$$

$$=\frac{R_1R_2C_1C_2s^2+\left(R_1C_1+R_2C_2\right)s+1}{R_1R_2C_1C_2s^2+\left(R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2\right)s+1}$$

5. 在图 3 中，已知子系统环节 $G(s)$ 和 $H(s)$ 对应的微分方程分别如下

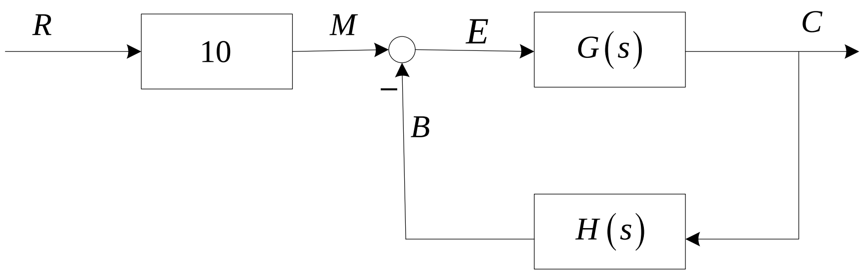

图 3 系统结构图

$$6\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t}+10c(t)=20e(t),\ 20\frac{\mathrm{d}b(t)}{\mathrm{d}t}+5b(t)=10c(t)$$

在初始状态为零的条件下，试求

（1）测量输出 $c(t)$ 和参考输入 $r(t)$ 之间的传递函数 $C(s)/R(s)$；

（2）误差信号 $e(t)$ 与参考输入 $r(t)$ 间的传递函数 $E(s)/R(s)$。

解答：(1)对题设所给的微分方程两边同时进行拉氏变换，由于初始条件为零，所以有

$$\begin{cases}6sC(s)+10C(s)=20E(s)\\20sB(s)+5B(s)=10C(s)\end{cases}$$

由上式可得，

$$G(s)=\frac{C(s)}{E(s)}=\frac{10}{3s+5},H(s)=\frac{B(s)}{C(s)}=\frac{2}{4s+1}$$

由图 2 可得,

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{10G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

将$G(s)$和$H(s)$代入得

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{100(4s+1)}{12s^2+23s+25}$$

又$E(s)=M(s)-B(s)=10R(s)-H(s)C(s)=\left[10-H(s)\Phi(s)\right]R(s)$

则有

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=10-H(s)\Phi(s)$$

$$=10-\frac{2}{4s+1}\cdot\frac{100(4s+1)}{12s^2+23s+25}=\frac{10\left(12s^2+23s+5\right)}{12s^2+23s+25}$$

所以传递函数$C(s)/R(s)$和$E(s)/R(s)$分别为

$$\Phi(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{100(4s+1)}{12s^2+23s+25}，\quad \Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{10\left(12s^2+23s+5\right)}{12s^2+23s+25}$$

6. 化简下列方框图（图 4）并确定其传递函数。

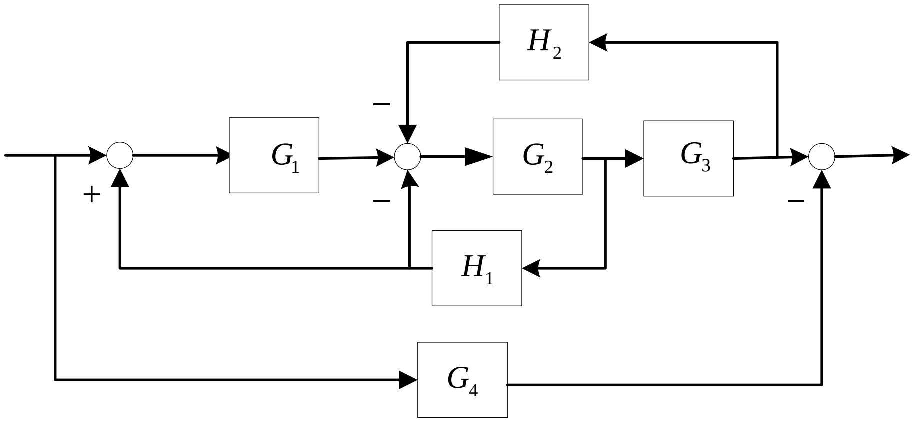

图 4

解答: $\dfrac{G_1G_2G_3}{1+G_2G_3H_2+G_2H_1(1-G_1)}-G_4$

7. 试用梅森增益公式求解系统信号流图的节点 a 到节点 b 的传递函数。

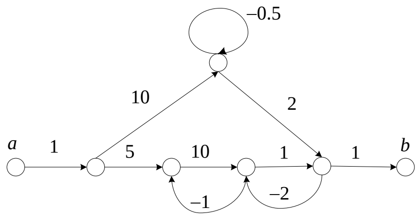

图 5 信号流图的图示

（2）观察信号流图，存在两条前向通道，三个单独回路，二对互不接触回路，即

$$L_1 = -0.5, L_2 = -1\times 10, L_3 = -1\times 2$$

L_1与L_2不接触，$L_1L_2 = 5$；L_1与L_3不接触，$L_1L_3 = 1$

$$\Delta = 1-\left(L_1 + L_2 + L_3\right) + L_1L_2 + L_1L_3 = 1+0.5+10+2+5+1 = 19.5$$

$p_1 = 5\times 10 = 50$，L_1与p_1不接触，$\Delta_1 = 1+0.5 = 1.5$

$p_2 = 2\times 10 = 20$，L_2与p_2不接触，$\Delta_2 = 1+10 = 11$

由梅森增益公式可得系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum p_i\Delta_i}{\Delta} = \frac{50\times 1.5+20\times 11}{19.5} = 15.128$$