

# 第六章 线性系统的校正方法

## 6-1、控制系统校正问题的提出

对控制系统的基本要求：

- **稳定**——要有稳定余量
- **快速**——符合瞬态性能指标
- **准确**——瞬态和稳态性能指标

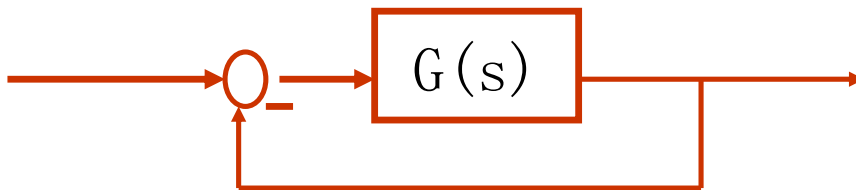
研究下述例子，可知校正的基本原理。

## 一、校正的作用举例：

设单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+0.0125s)}$$

要求控制该过程在单位斜坡输入时，系统的稳态误差不超过1%。



$$G(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+0.0125s)}$$

- 解：由稳态误差要求：

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{1}{K} \leq 0.01$$

可得： $K > 100$

可得 $K$  必须大于100时稳态误差才能 $<0.01$

$$G(s) = \frac{K}{s(1+s)(1+0.0125s)}$$

另一方面，利用Routh判据，其闭环特征方程为：

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 0.0125s^3 + 1.0125s^2 + s + K = 0$$

<i>Routh</i> 表	$s^3$	0.0125	1
	$s^2$	1.0125	$K$
	$s^1$	$\frac{1.1025 - 0.0125 K}{1.0125}$	
	$s^0$	$K$	

可知系统稳定的条件是  $0 < K < 81$ 。

稳态误差要求 $k \geq 10$

矛盾

稳定性要求 $k < 81$

改变参数不行



改变系统结构

- 校正系统的思路是什么？

思路

- 校正系统要注意些什么？

校正原则

- 在系统的什么部位实施这种校正？

校正方式：

- 用什么来校正系统？

典型环节：

- 如何确定参数？

具体方法

## 一、校正的思路

从频率特性的角度

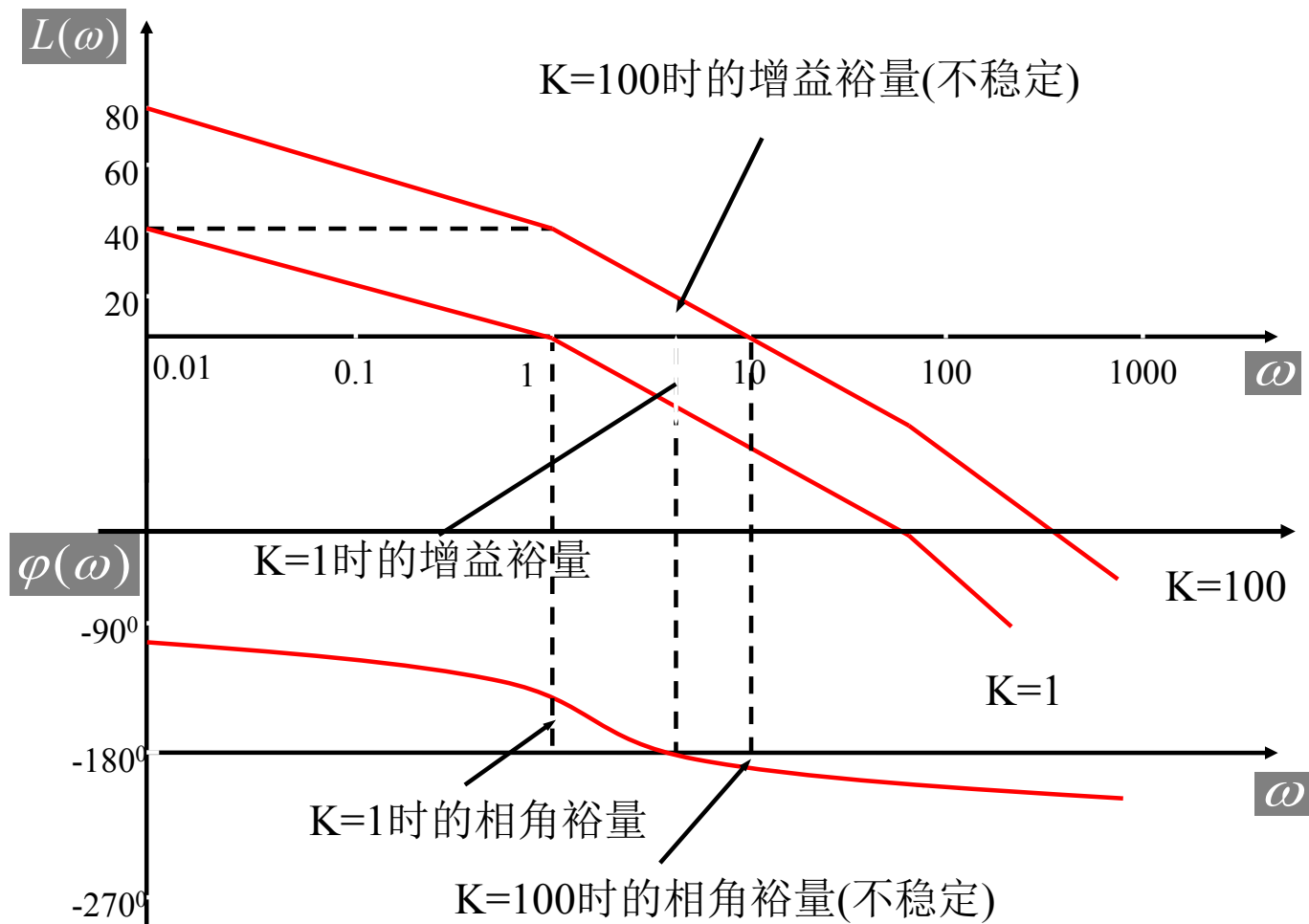
——改变不同频率时系统特性

从根轨迹的角度

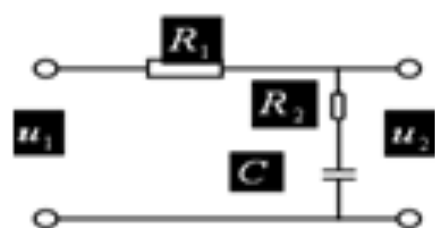
——配置新的零极点——改变根轨迹的走向

## 校正的思路----频率特性

满足稳定性 $k=1$ ,满足稳态误差要求 $k=100$ 时Bode图



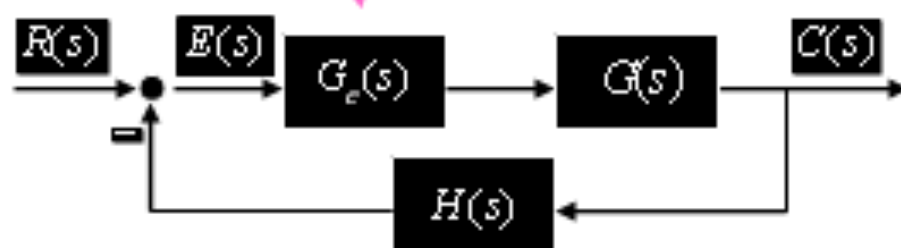
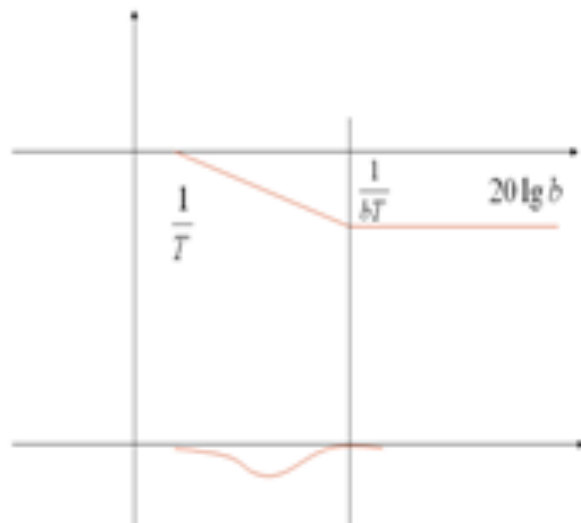




$$G_c = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$

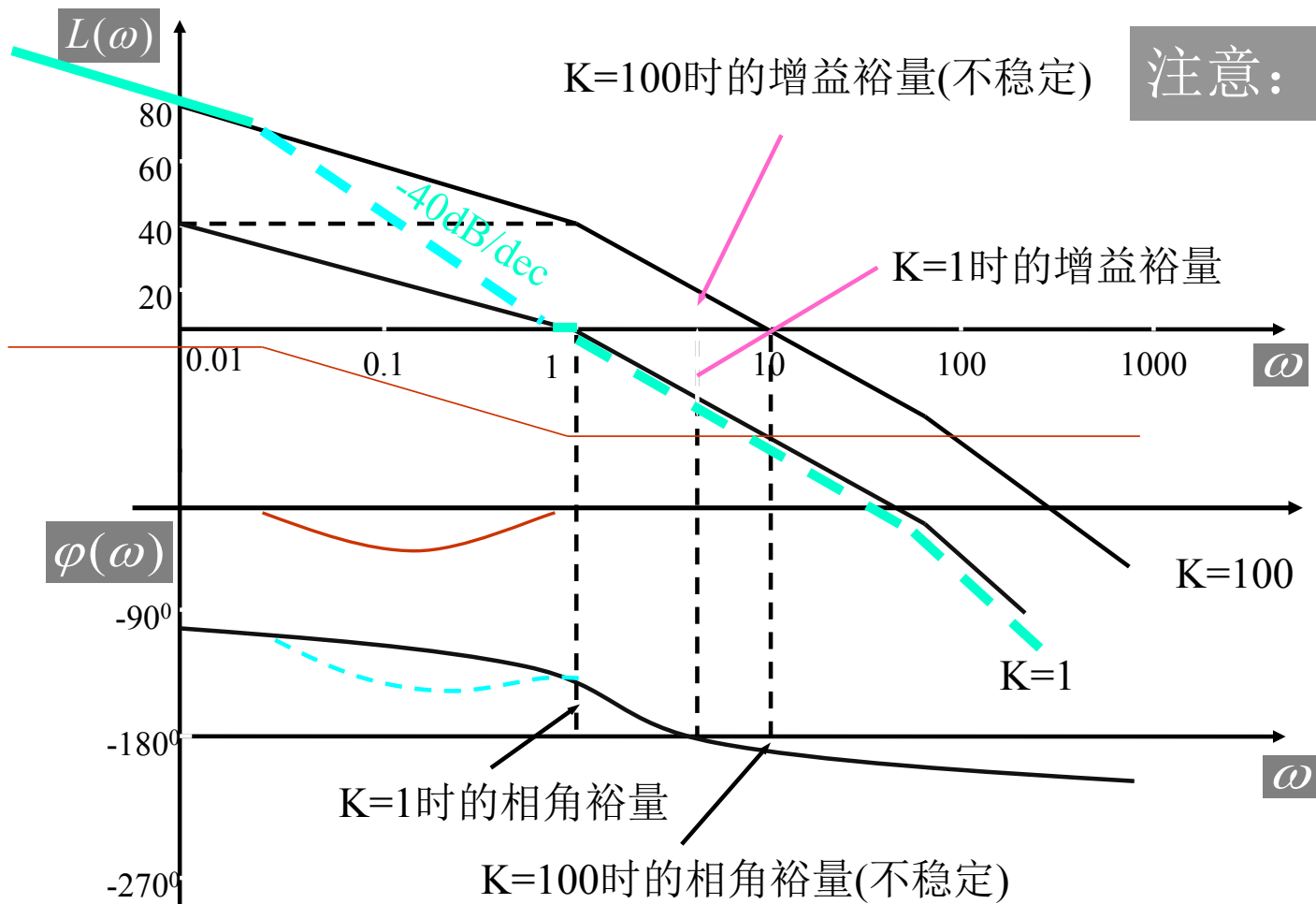
$$b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

$$T = (R_1 + R_2)c$$



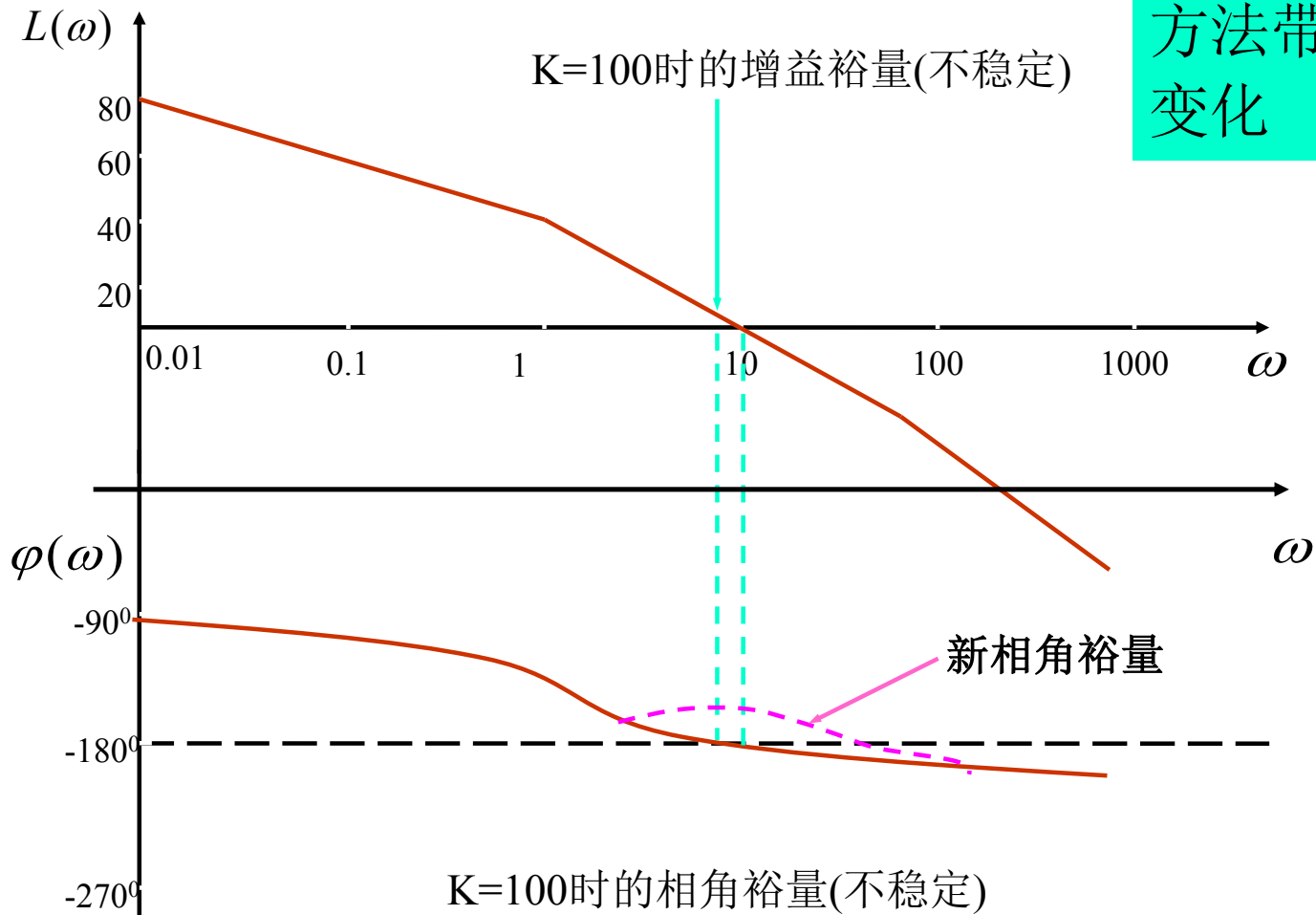
## 校正的思路

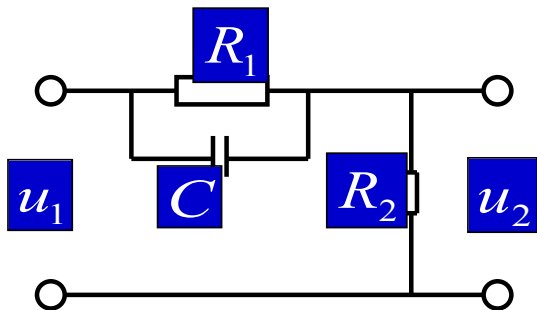
满足稳定性 $k=1$ ,满足稳态误差要求 $k=100$ 时Bode图



# Bode图

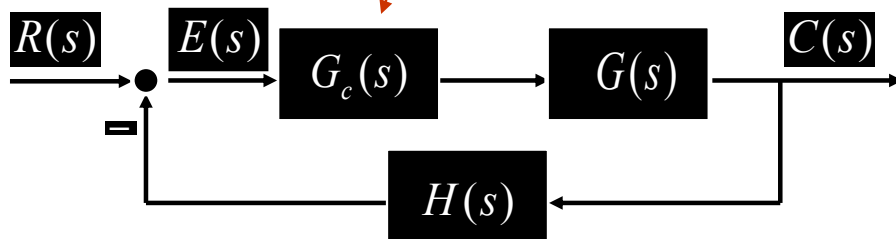
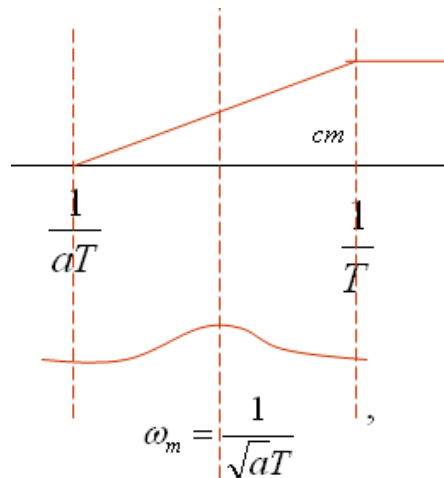
注意：两种方法带宽的变化





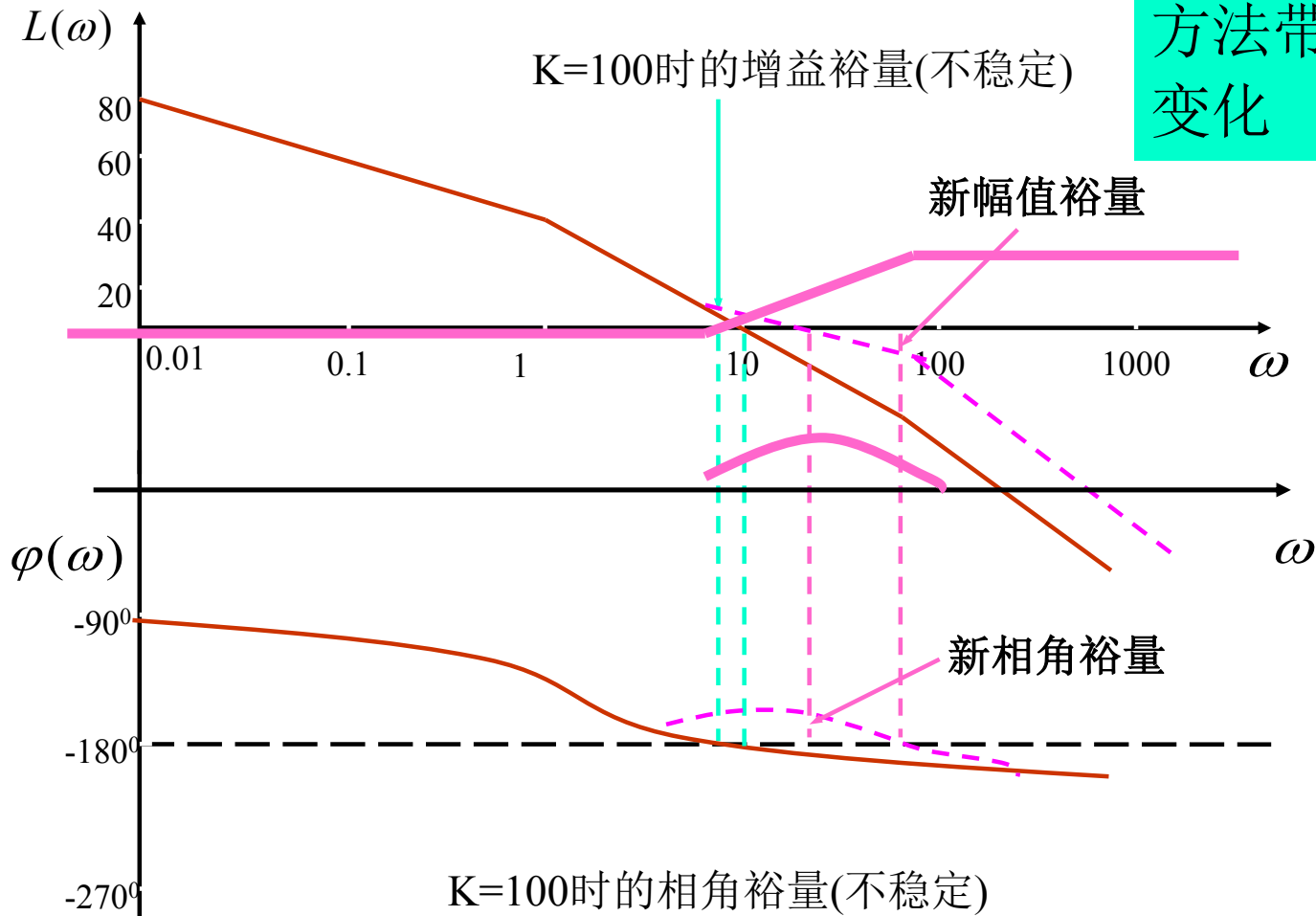
$$G_c(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C = T \qquad \frac{R_1 + R_2}{R_2} = a$$

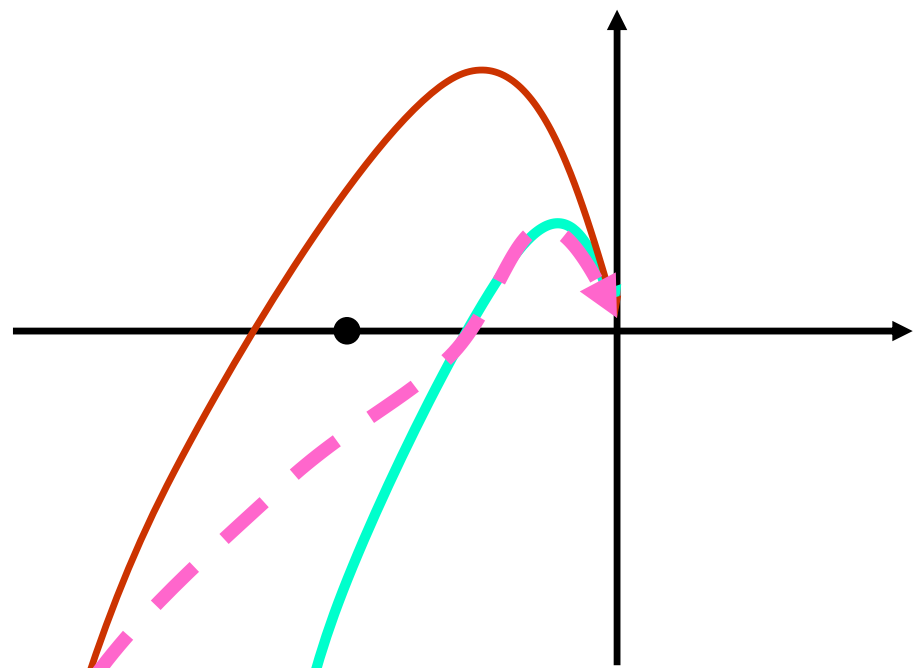


# Bode图

注意：两种方法带宽的变化

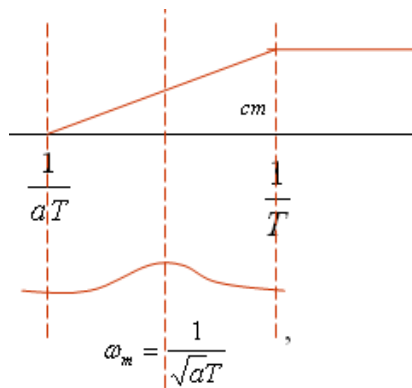


**上述做法在幅相曲线效果=====》基于频率特性校正**

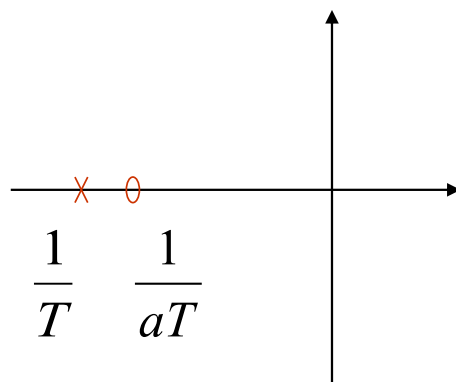


通过增加适当环节，修改系统频率特性，改善系统  
稳定性及性能

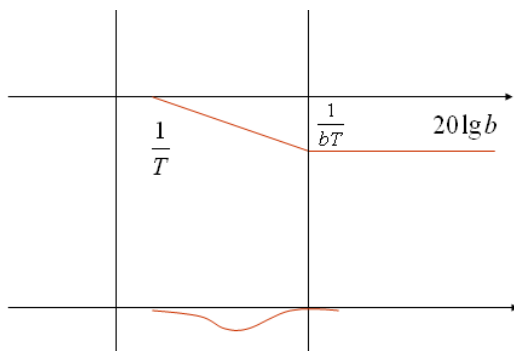
$$aG_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$



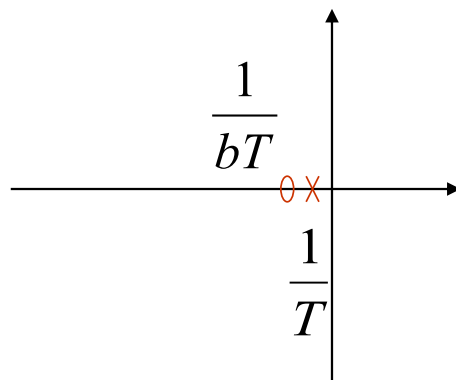
超前校正



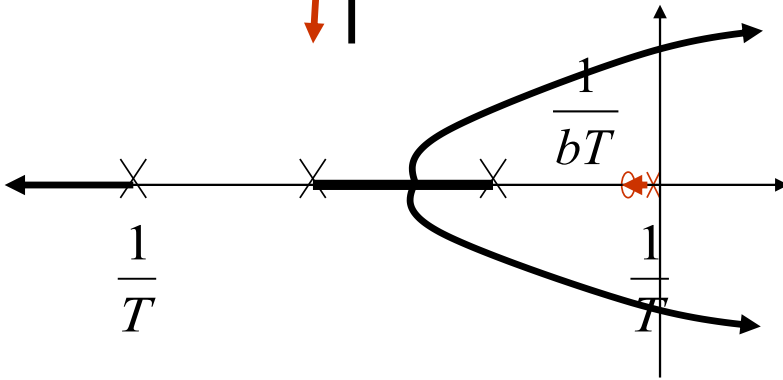
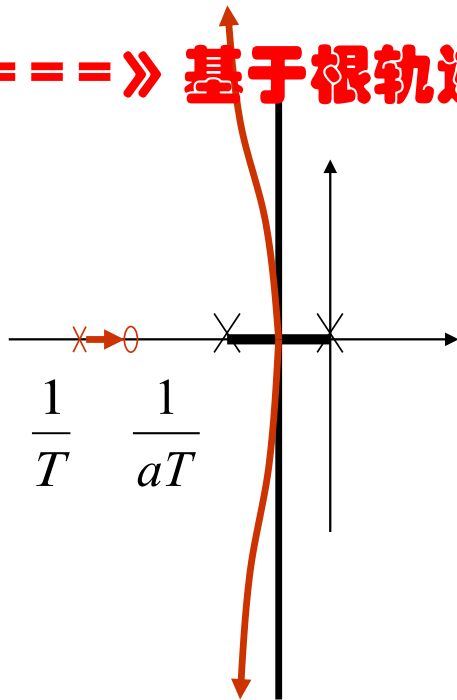
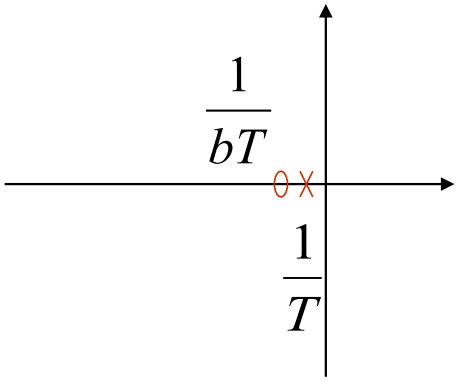
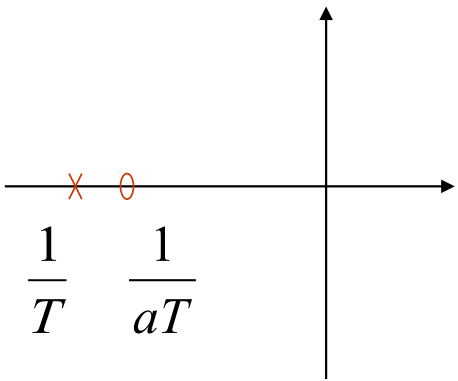
$$G_c = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$



滞后校正



上述做法在根轨迹曲线效果=====》基于根轨迹校正



通过给系统增加适当的零极点，改善系统稳定性及性能



## 二、校正的原则

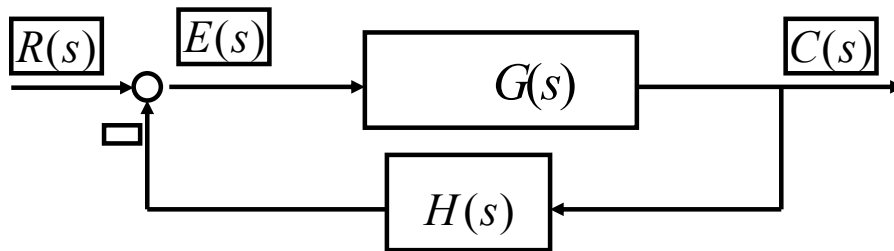
稳定

快速

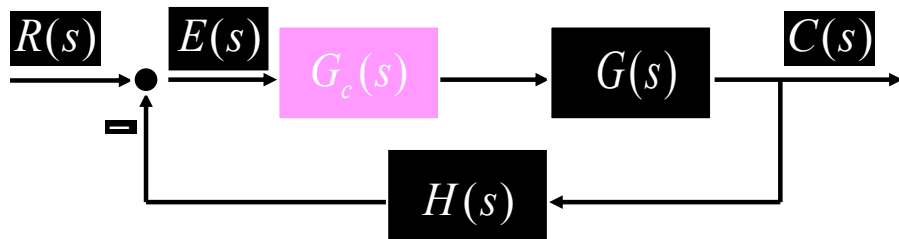
准确

### 三、校正的方式

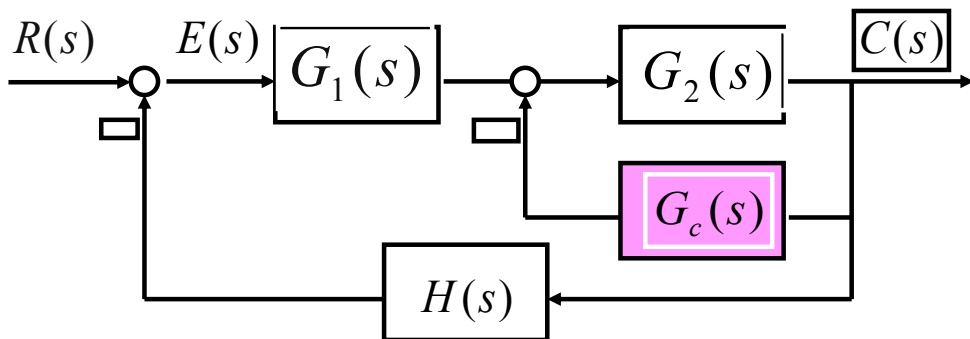
$G_c(s)$



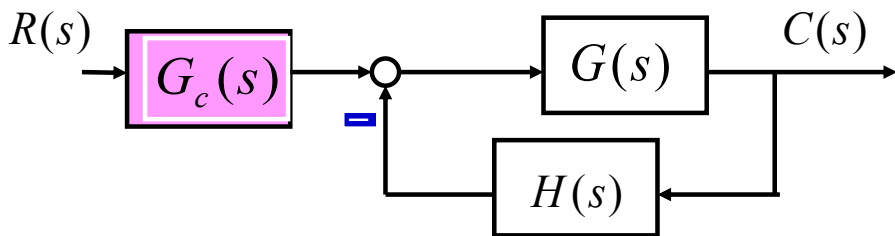
# 1、串联校正



# 2、反馈校正

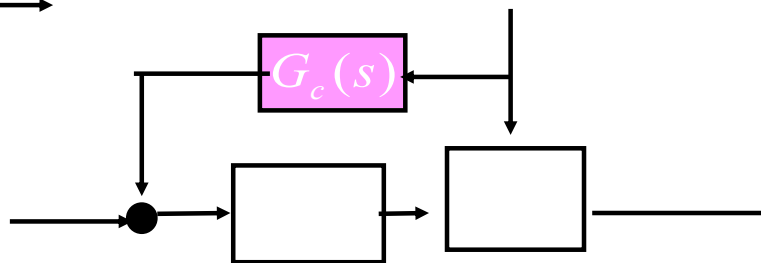


# 3、前馈校正

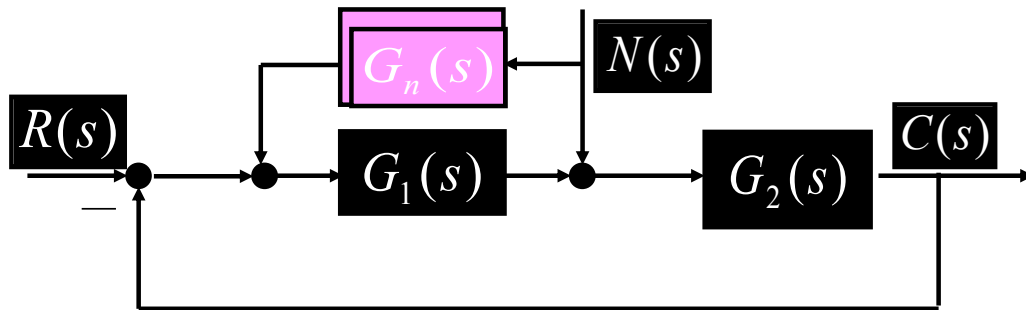


按输入补偿

按扰动补偿



#### 4、复合校正

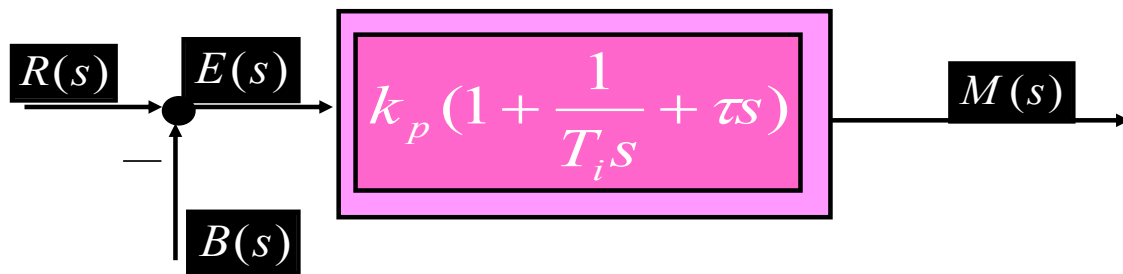


按扰动补偿反馈复合校正。

## 四、典型校正环节

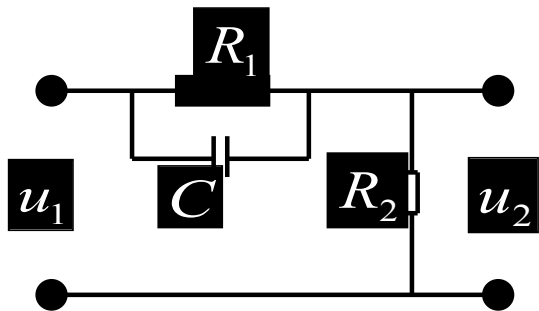
### （一）、PID控制校正规律

比例—积分—微分（*PID —Proportion Integral and Differential*）控制规律

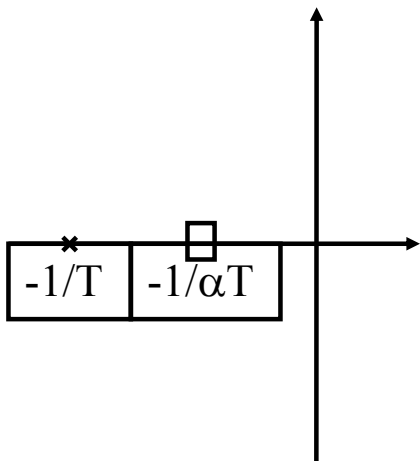


$$G_c(s) = \frac{K_p}{T_i} \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}$$

## (二) 超前网络



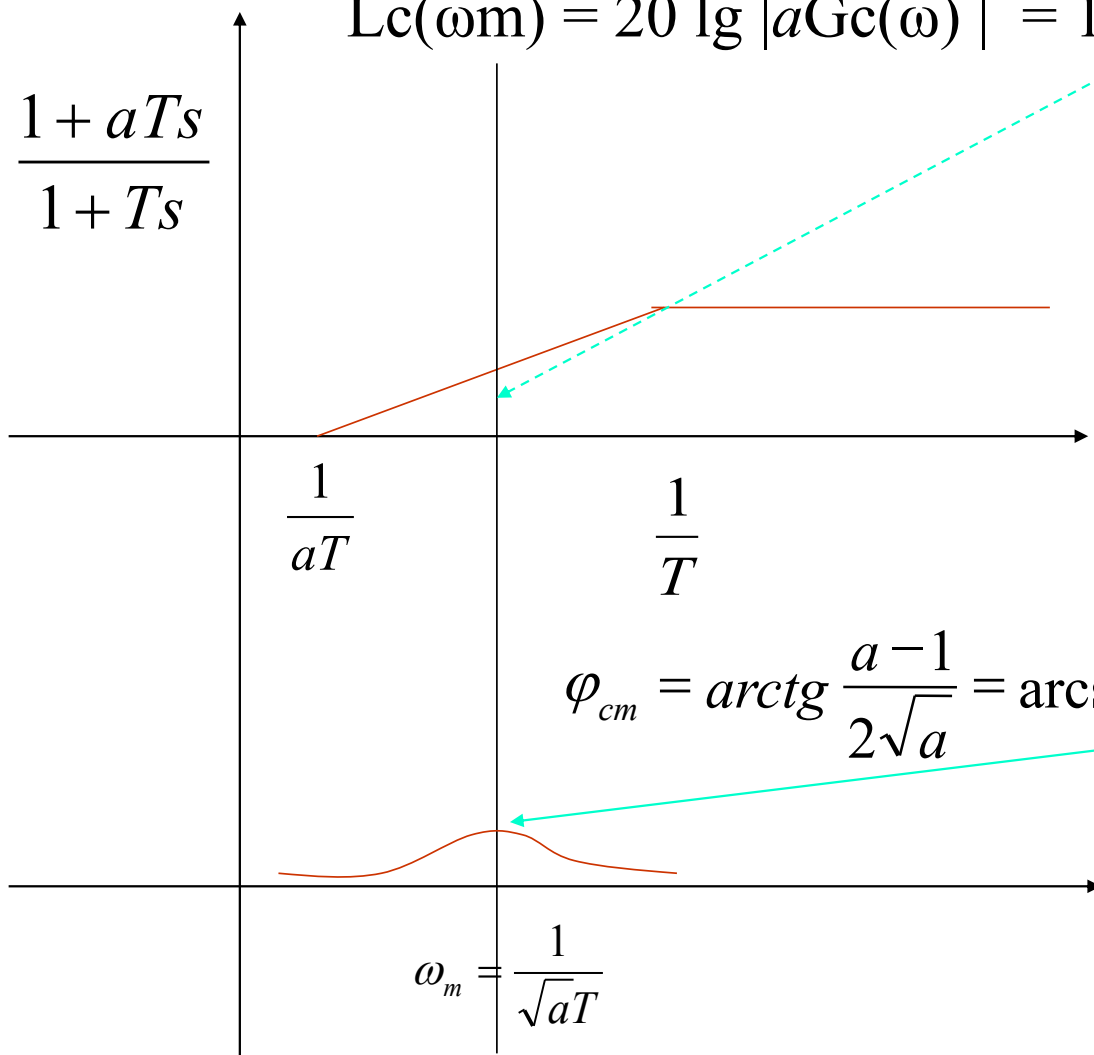
$$G_c(s) = \frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{1}{a} \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$



显然  $a > 1$ , 称  $a$  为分度系数。

$$Lc(\omega m) = 20 \lg |aG_c(\omega)| = 10 \lg a$$

$$aG_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$



$$\varphi_{cm} = \arctg \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$$

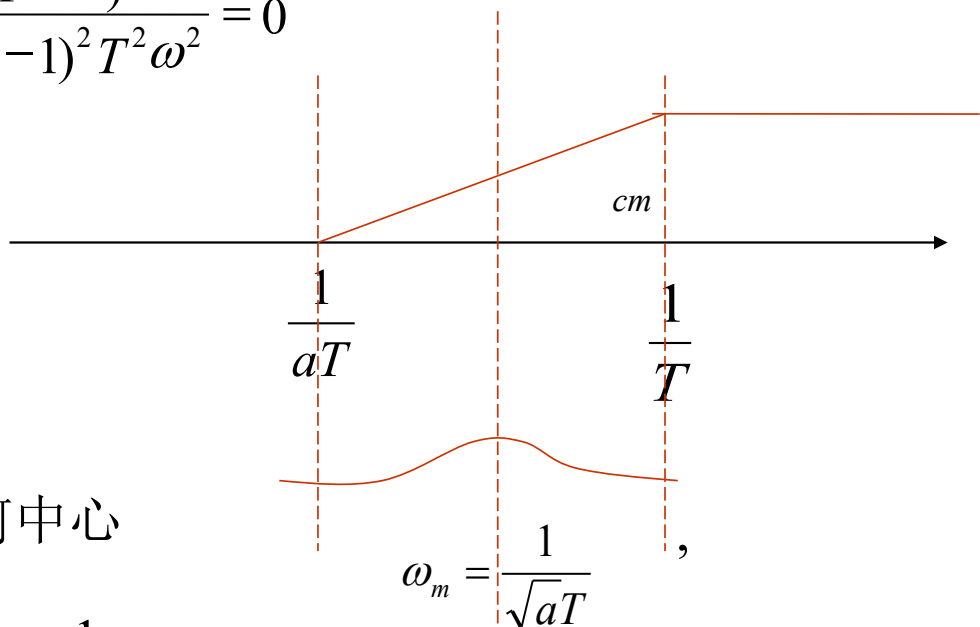
$$\angle G_c(j\omega) = \arctg aT\omega - \arctg T\omega$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_c(\omega)}{d\omega} &= \frac{\frac{(1+aT^2\omega^2)(a-1)T - (a-1)T\omega}{(1+aT^2\omega^2)^2}}{1 + \left(\frac{(a-1)T\omega}{1+aT^2\omega^2}\right)^2} \\ &= \frac{(a-1)T(1-aT^2\omega^2)}{(1+aT^2\omega^2)^2 + (a-1)^2 T^2 \omega^2} = 0\end{aligned}$$

$$\text{得 } \omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}},$$

$\omega_m$  即是  $\frac{1}{aT}$  和  $\frac{1}{T}$  的几何中心

$$\lg \omega_m = \frac{1}{2} \left( \lg \frac{1}{aT} + \lg \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{2} (\lg \omega_1 + \lg \omega_2)$$

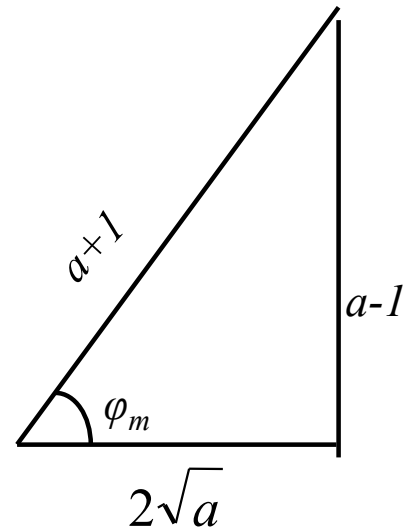




将  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T}$  代入(1)式, 可得:  $\varphi_{cm} = \arctg \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$

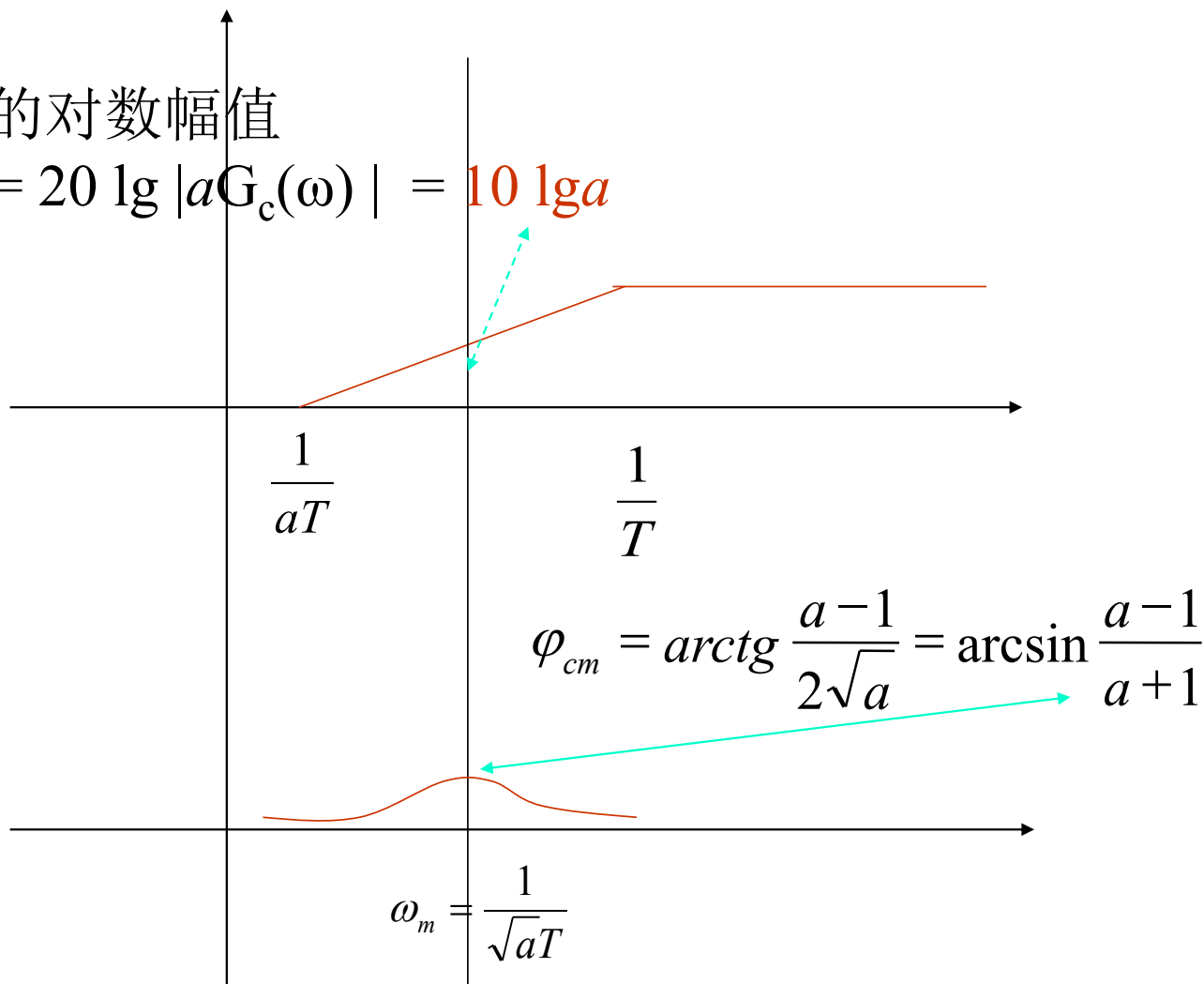
$a \uparrow, \varphi_m \uparrow$  (非线性关系) 一般  $a$  不超过 20,

$$\varphi_m = 65^\circ,$$



在 $\omega_m$ 处的对数幅值

$$L_c(\omega_m) = 20 \lg |a G_c(\omega)| = 10 \lg a$$



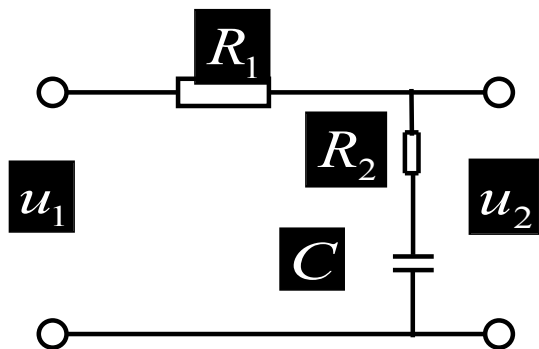
$$\varphi_{cm} = \arctg \frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \arcsin \frac{a-1}{a+1}$$

$$\angle G_c(j\omega) = \arctg aT\omega - \arctg T\omega$$

# 超前装置的特点和作用:

- (1)通过相角超前特性提高系统的 $\gamma$ 和 $\omega_c$ , 改善动态性能.
- (2)无源时使开环增益下降 $a$ 倍, 需其他部分提高放大倍数以使增益不变.
- (3)抗高频干扰不强, 适用于系统满足稳态精度要求, 噪声电平不高, 但 $\sigma\%$ ,  $t_s$ 不满足要求时的系统校正.

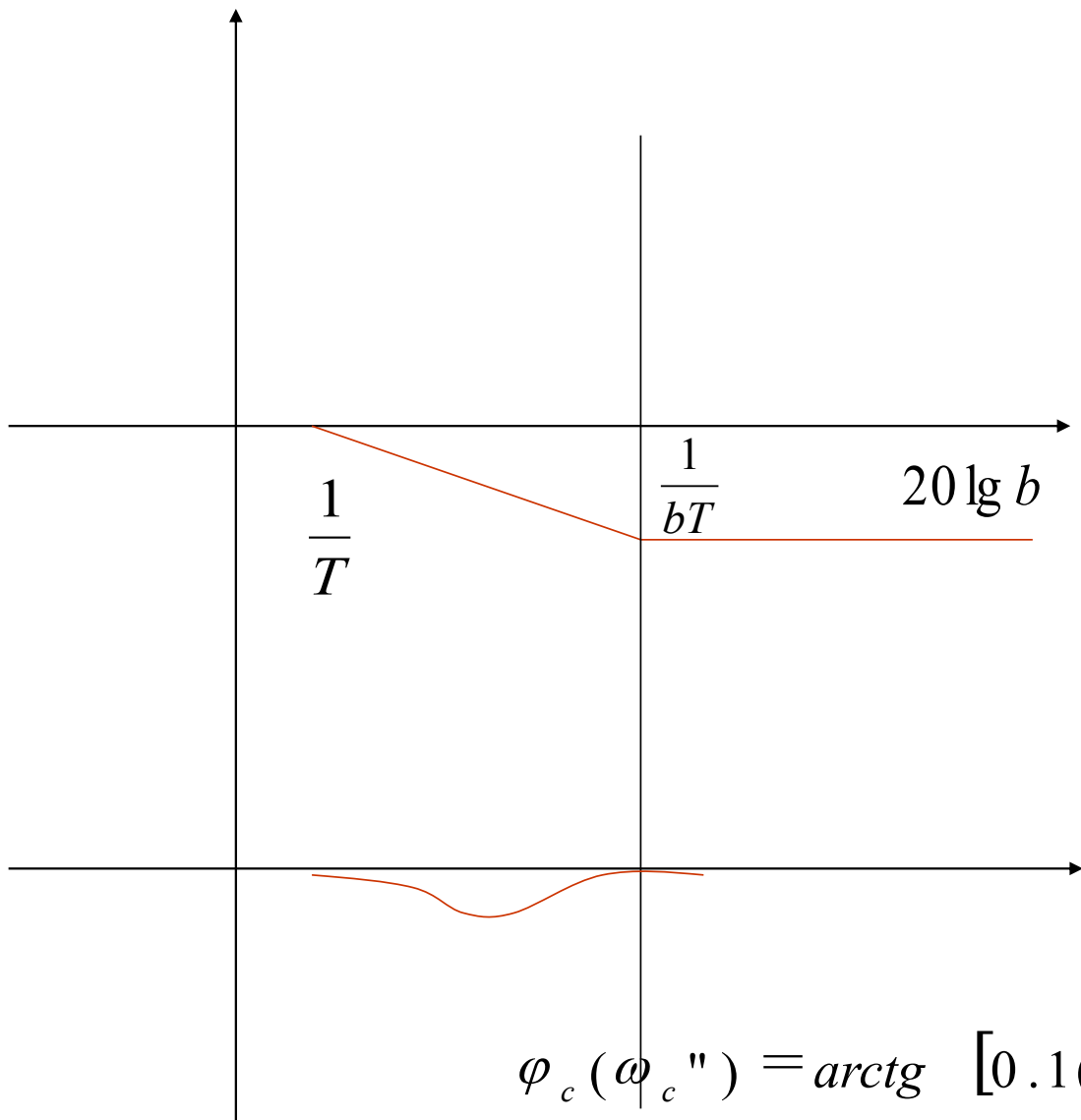
### (三) 迟后网络



$$\therefore G_c = \frac{1 + bTs}{1 + Ts}$$

其中  $b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$  称为分度系数，表示滞后深度

$T = (R_1 + R_2)c$  称时间常数



因此，一般都将  $\frac{1}{bT}$  远小于  $\omega_c''$ ，取  $\frac{1}{bT} = \frac{\omega_c''}{10}$

$$\begin{aligned} \text{由 } \varphi_c(\omega_c'') &= \arctg bT \omega_c'' - \arctg T \omega_c'' \\ &= \arctg \frac{(b-1)T \omega_c''}{1 + bT^2 (\omega_c'')^2} \end{aligned}$$

将  $\omega_c'' = \frac{10}{bT}$  代入，可得：

$$\varphi_c(\omega_c'') = \arctg \frac{10 \frac{(b-1)}{b}}{1 + \frac{100}{b}} = \arctg [0.1(b-1)]$$

迟后网络当取  $1/bT = \omega_c''$  对开环频率特性的幅值有利影响和相角不利影响。 $bT$  愈大，即  $1/bT$  愈离  $\omega_c''$  远，对  $\omega_c''$  处的相角影响愈小。

## 滞后装置的特点

主要利用其高频衰减作用

降低带宽

增加抗干扰能力

相位裕量稍小

动态性能稍低

## 五、串联校正

### 一.频率响应法校正设计

要求:满足系统静、动态性能.即稳态误差,截止频率和相角裕度.

分析法	— 试探,校验	} 均要反复几次
综合法	— 期望,实现	



## 二.串联超前校正

要点：利用超前环节的相位超前特性,使交接频率  $1/aT$  和  $1/T$  位于穿越频率的两旁，用  $\varphi_m$  来补偿系统的相位裕量。

步骤：

- (1)根据稳态误差要求，确定开环增益  $K$ 。
- (2)计算未校正系统的相角裕度。
- (3)计算超前网络的参数 $a$ 和 $T$ 。

方法1：根据 $\omega_c$ ”的要求计算，

方法2：
$$\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = \theta + \triangle \theta \quad \text{确定 } a$$

显然，要产生最大的相角补偿  $\varphi_m$ ，应使  $\omega_m = \omega_c$ ”  
设原来校正系统为  $L'(\omega)$  则有：

$$-L'(\omega_c) = L_c(\omega_m) = 10 \lg a$$

$$\text{然后，由 } \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} \text{ 得 } T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$$

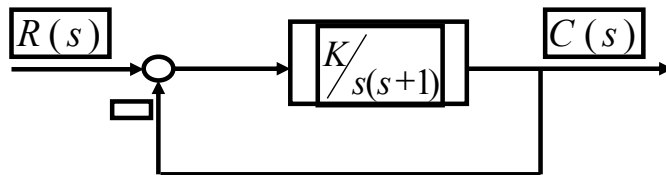
(4) **校验** 校正后相角裕量  $\gamma$ ”。

$$\gamma = \varphi_m + \gamma(\omega_c)$$

**注：若不满足要求，重选  $\omega_m = \omega_c$ ”，使  $\omega_c$ ”  
增大，重复 (3) (4)。**

例6-3.如下系统,要求 $e_{ss} \leq 0.1$ (在单位斜坡输入下),  
开环截止频率 $\omega_c'' \geq 4.4 \text{ rad/s}$ , 相角裕度  
 $\gamma'' \geq 45^\circ$ , 幅值裕度 $h'' \geq 10 \text{ dB}$ , 试设计超前网络.

解: 由 
$$e_{ss} = \frac{1}{K} \leq 0.1$$



可得 $K = 10$ .固有系统开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

画出对数Bode图. $L(\omega)$

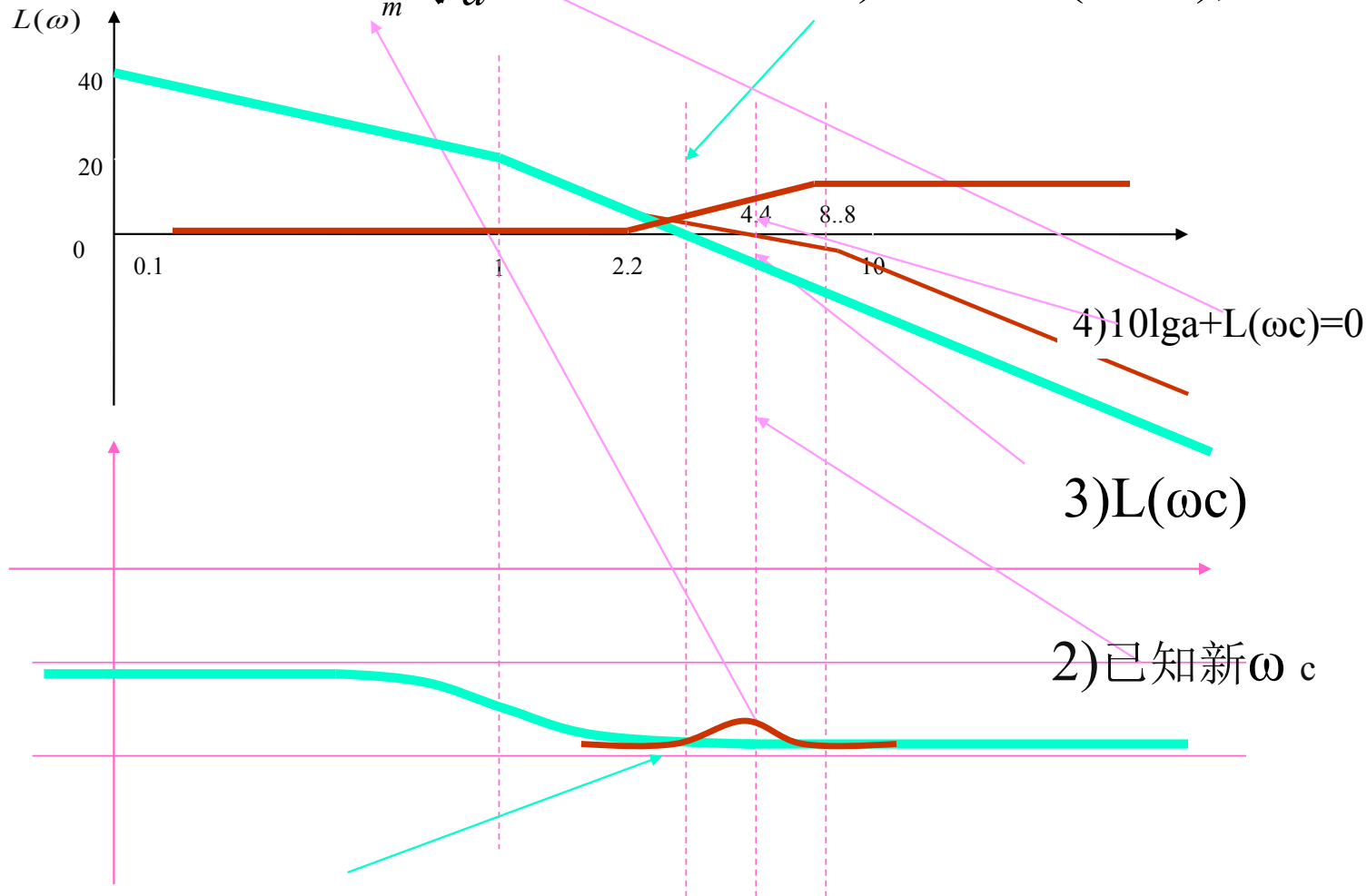
由图中可得未校正系统的 $\omega_c' = 3.1 \text{ (rad/s)}$ , 其相角裕量为:

$$\gamma = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \omega_c' = 17.9^\circ$$

幅值裕量: $\infty$ .

$$6) \quad T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$$

$$1) \omega_c' = 3.1 (\text{rad/s}),$$



试选  $\omega_c'' = 4.4$ , 由图上可量得  $L'(\omega_c'') = -6$ .

于是由  $10 \lg a = 6$  得  $a = 4(3.981)$

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} = \frac{1}{4.4' \cdot 2} = 0.114$$

超前网络为  $4 G_c(s) = \frac{1 + 0.456 s}{1 + 0.114 s}$

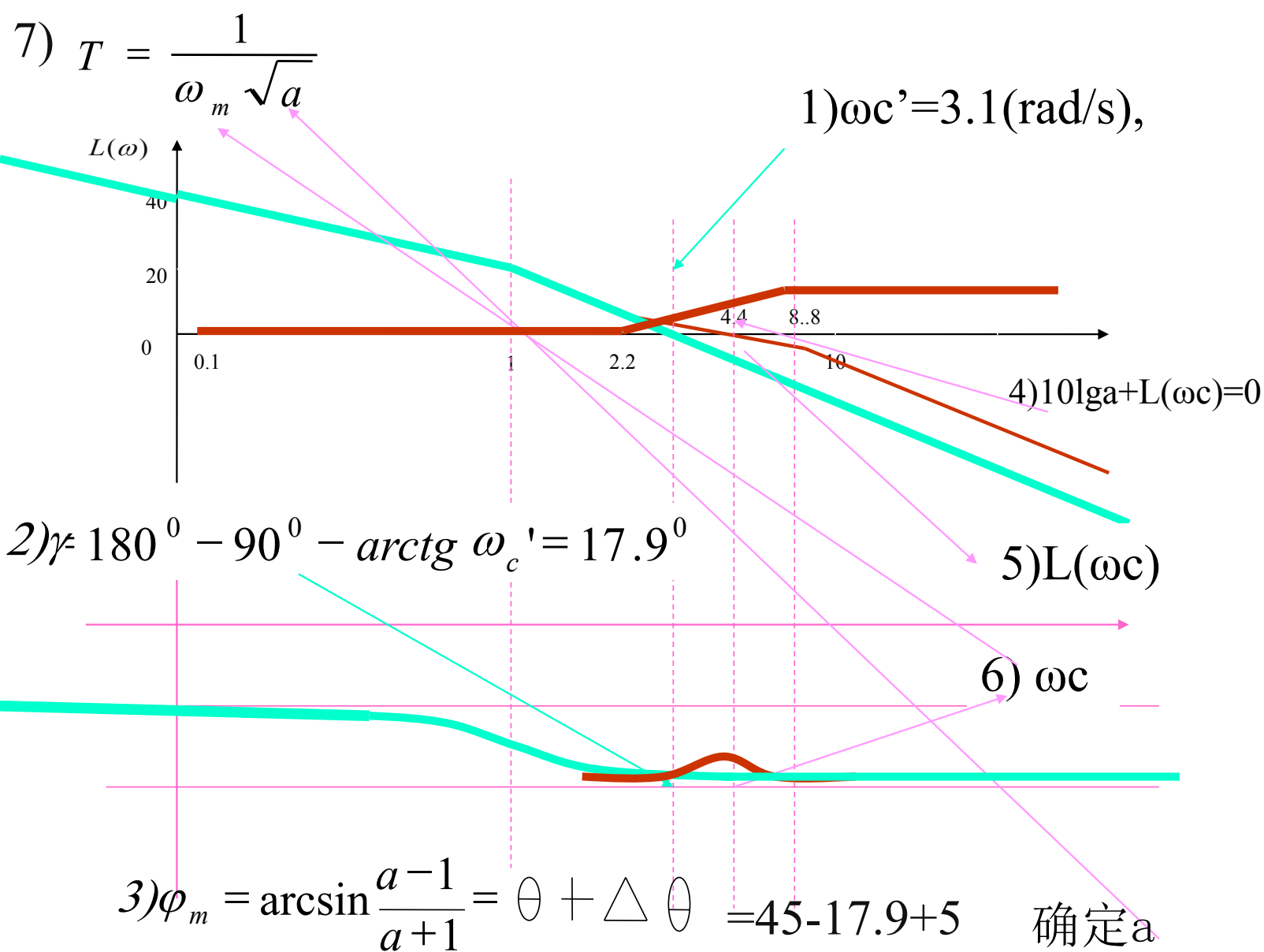
校正后开环传递函数为 $G_c(s)G(s) = \frac{10(1+0.456s)}{s(1+0.114s)(1+s)}$

此时,未校正系统在  $\omega_c''$  的相角裕量为:

$$\gamma(\omega_c'') = 180^\circ - 90^\circ - \arctg \omega_c'' = 12.8^\circ$$

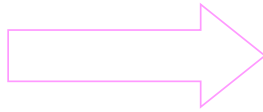
$$\varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = 36.9^\circ$$

**校验:**  $\therefore \gamma'' = \varphi_m + \gamma(\omega_c'') = 49.7^\circ > 45^\circ$   
满足要求。

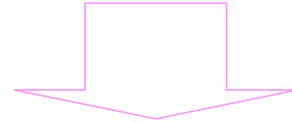


$$3) \varphi_m = \arcsin \frac{a-1}{a+1} = \theta + \triangle \theta = 45 - 17.9 + 5$$

$$4) 10 \lg a = L(\omega_c)$$



$$6) \omega_c$$



**a**

$$aG_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}}$$

校正后开环传递函数为  $G_c(s)G(s)$

**校验：**



串联超前校正的局限性：

- 1、由于串联超前网络会使  $\omega_c''$  比原  $\omega_c$  增大，当需补偿相角超前量过大时，会使  $a$  取的很大， $\omega_c''$  过高，对于有些系统克服高频噪声不利。
- 2、对于固有系统频率特性在截止频率相角迅速减小系统，不宜用超前校正。

### 三、串联迟后校正

要点：迟后校正是利用迟后网络的较高频率衰减特性，使已校正的系统截止频率下降，从而使系统获得足够的相角裕度。应使迟后校正发生在较低频段，使系统幅频特性早过0dB。

步骤：

- (1)根据稳态误差要求，确定K；
- (2)画出固有系统对数频率特性，确定其  $\omega_c'$ ， $\gamma$  和h。
- (3)根据相角裕度  $\gamma''$  要求，选择已校正系统的截止频率  $\omega_c''$ 。

考虑到迟后网络在  $\omega_c''$  会产生一定的相角迟后  $\varphi_c(\omega_c'')$

$$\text{即 } \gamma'' = \gamma(\omega_c'') + \varphi_c(\omega_c'')$$

$$\varphi_c(\omega_c'') \text{ 可先取 } -6^\circ$$

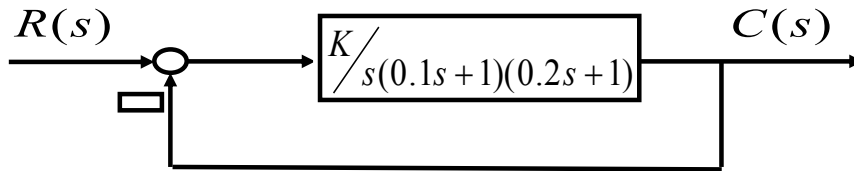
(4) 确定迟后参数  $b$  和  $T$ , ( $T$  要考虑实现可能)

$$20 \lg b + L'(\omega_c'') = 0$$

$$\frac{1}{bT} = 0.1\omega_c''$$

(5) 验算已校正系统的幅值裕度和相角裕度。

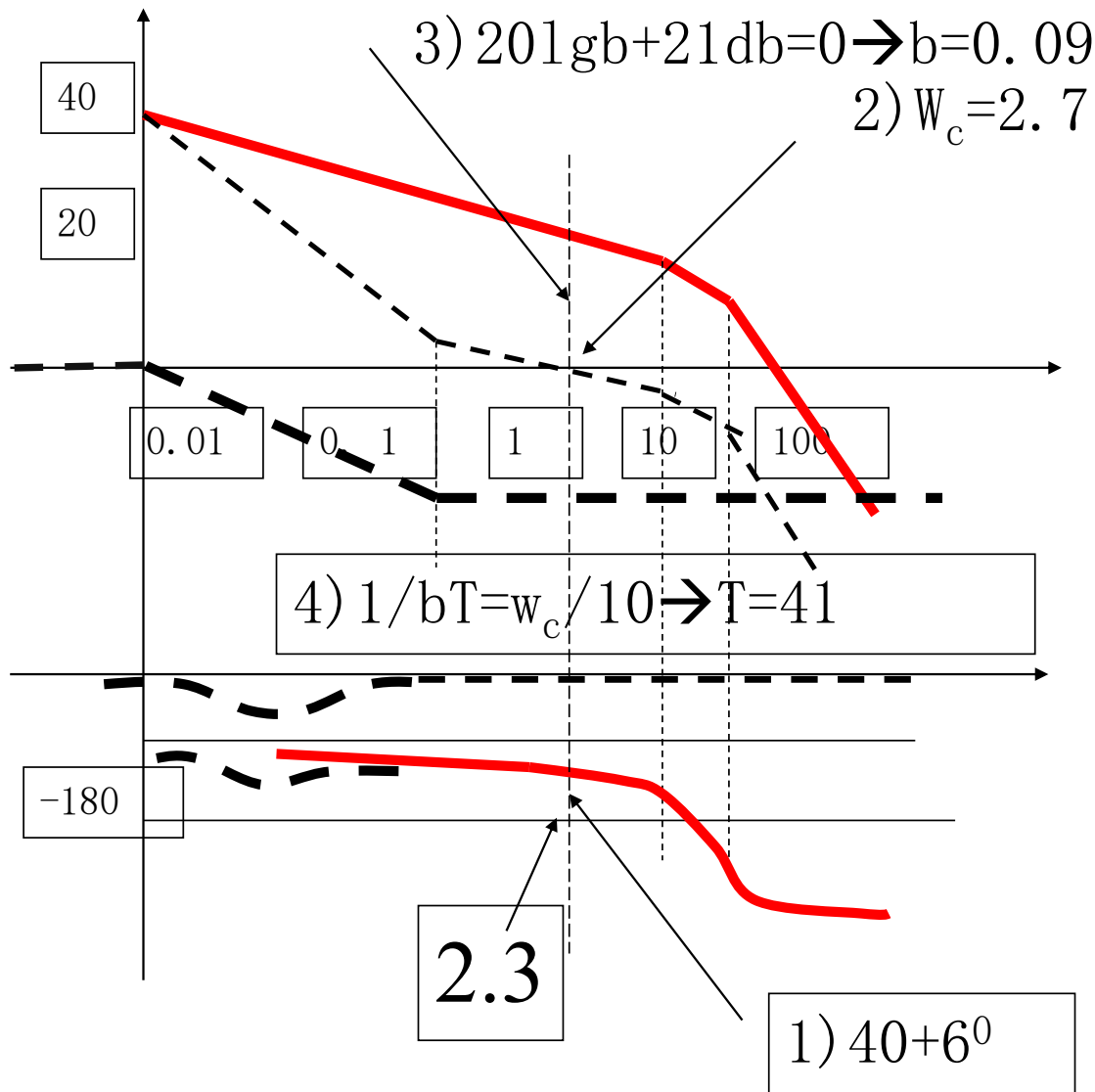
例6-4、如图，要求静态速度误差系数不小于30，幅值裕度不小于10dB，相角裕度不小于 $40^\circ$ ，截止频率不小于2.3rad/s



解：1)首先确定 $K$ 值.

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K \geq 30, \text{取 } K = 30$$

$$\text{故固有传递函数为: } G(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$



说明未校正系统不稳定，此系统即为截止频率处相角迅速减小的情况，不宜采用超前校正。

$$\gamma''(\omega_c'') = 90^0 - \arctg(0.1\omega_c'') - \arctg(0.2\omega_c'')$$

取  $\gamma = 40 + 6^0$  (未校正时), 得  $\omega_c'' = 2.7 \text{ rad} / \text{s}$

查  $L'(\omega_c'')$ , 得当  $\omega_c'' = 2.7 \text{ rad} / \text{s}$  时,  $L'(\omega_c'') = 21 \text{ dB}$

由  $20 \lg b + L'(\omega_c'') = 0 \Rightarrow 20 \lg b = -21$ , 得  $b = 0.09$

再由  $\frac{1}{bT} = 0.1\omega_c''$  得  $T = \frac{10}{\omega_c'' b} = 41 \text{ (s)}$

$$\therefore G_c(s) = \frac{1 + bTs}{1 + Ts} = \frac{1 + 3.7s}{1 + 41s}$$

此时：

$$\gamma = 90^{\circ} + \arctg(3.7\omega_c'') - \arctg(41\omega_c'') - \arctg(0.1\omega_c'') \\ - \arctg(0.2\omega_c'') = 41.3^{\circ}$$

为较为精确的确定幅值裕度,此时应试算出  $\omega_g''$  , 即校正后的  $\varphi(\omega)$  过  $180^{\circ}$  时的  $\omega$  值, 试算得  $\omega_c'' = 6.8$  rad/s。求得幅相裕度为14dB, 符合要求。

- (1)迟后校正利用的是迟后网络的较高频率衰减特性, 应注意  $1/bT$  离  $\omega_c''$  足够远(10倍), 以减少其相角迟后的影响。
- (2)在现实中, 若  $T$  过大, 往往实现较为困难。

串联迟后与串联超前的异同：

相同点：提高系统稳态特性，同时增大相角裕度。

不同点：

(1)超前——利用相角超前特性。

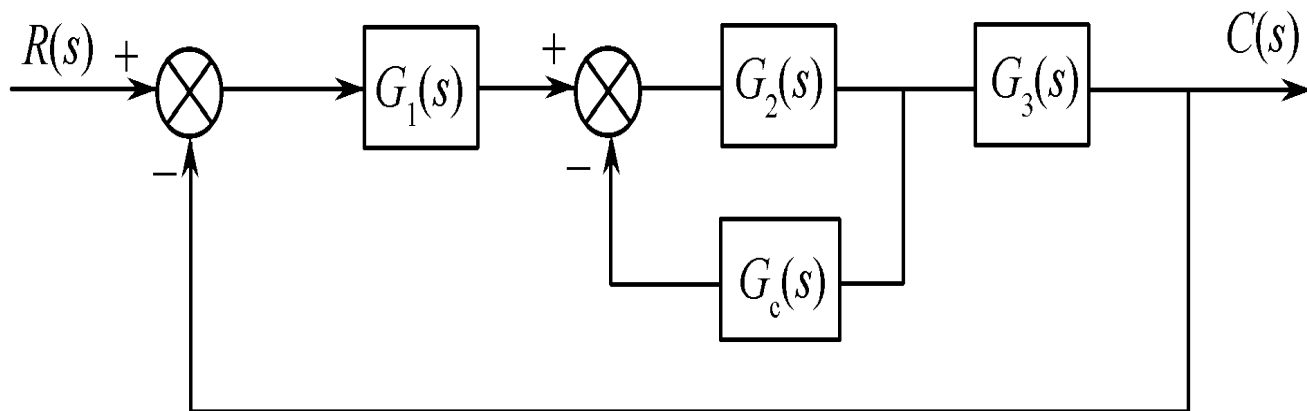
迟后——利用幅值高频衰减特性。

(2)无源网络中，超前需附加增益，迟后不需要附加增益。

(3)超前带宽大于迟后校正带宽。

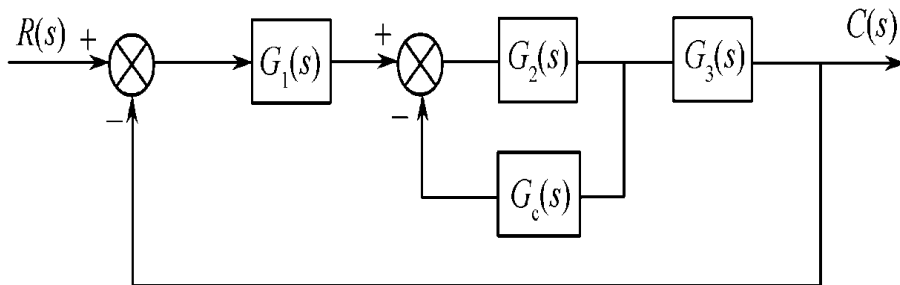


## 六、反馈校正



反馈校正系统方框图

### 6.6.3 反馈校正的设计



$$\begin{aligned} G(s) &= G_1(s)G_2(s)G_3(s) \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)}{1 + G_2(s)G_c(s)} \end{aligned}$$

$$|G_2(j\omega)G_c(j\omega)| \gg 1$$

$$G(j\omega) \approx \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)}{1 + G_2(j\omega)G_c(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)G_3(j\omega)}{G_c(j\omega)}$$

$G_2(j\omega)$ 部分的特性几乎被反馈校正环节的特性取代

## § 6.4 采用根轨迹法进行串联校正

### 6.4.1 串联超前校正

假设一个系统在所要求的增益下是不稳定的，或虽稳定，但系统的瞬态响应特性较差（超调量过大、调节时间过长）时，就应对根轨迹进行校正，以便使闭环系统的极点位于根平面上希望的位置上。

**例6-2** 设单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{12}{s(s+2)}$$

要求系统超调量 $M_p \leq 20\%$ ，过渡过程时间 $t_s \leq 1s$ ，  
试确定校正装置 $G_c(s)$ 。

**解：** 1) 确定主导极点：  $M_p \rightarrow$  阻尼比 $\zeta=0.46$ ,

$\zeta, t_s \rightarrow$ 无阻尼自然频率  $\omega_n = 7$ 。

主导极点

$$p_{1,2} = -3.5 \pm j6.06$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n}$$

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

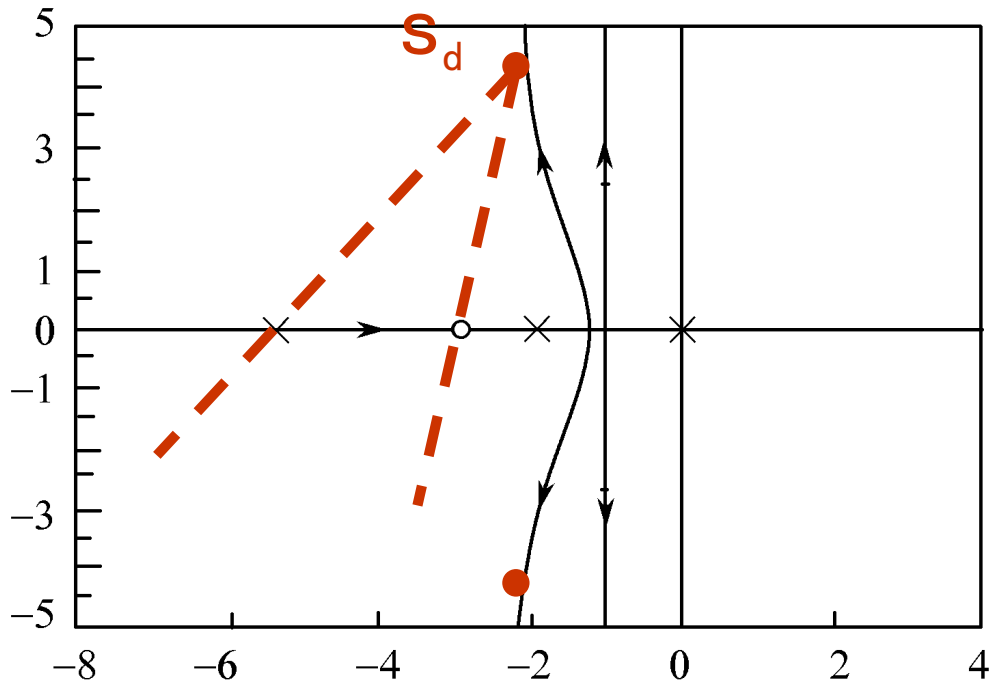
$$G(s)H(s) = G_c(s) \frac{12}{s(s+2)} = \frac{s - (-z)}{s - (-p)} \frac{12}{s(s+2)}$$

$$\{\angle(s_d + z) - \angle(s_d + p)\} + \{-(\angle(s_d - 0) + \angle(s_d + 2))\} = \pm(2k+1)\pi$$

$$\varphi_c = 44^\circ$$



$$-224^\circ$$



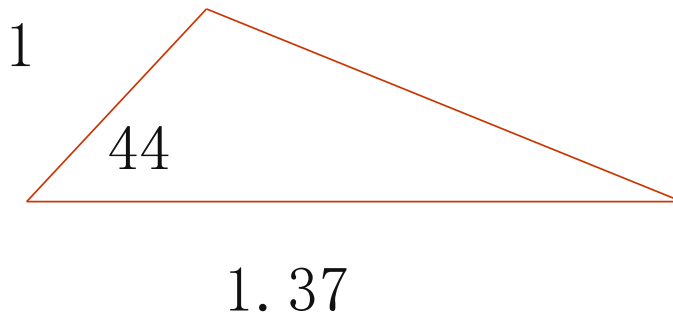
### 3) 确定极点

$$\left| K_c \frac{s - z}{s - p} \right| \left| \frac{12}{s(s+2)} \right| = 1$$

$$\mu = \left| \frac{s - z}{s - p} \right| = \left| \frac{s(s+2)}{12K_c} \right|_{s=\text{主导极点}}$$

$$= 1.37_{K_c=5}$$

$$= 2.2_{K_c=8}$$



为补偿超前校正装置的幅值衰减，再串入一个放大倍数为 $K_c$ 的补偿放大器。校正后系统的开环传递函数为

$$G_c(s)G_0(s)K_c = \frac{(s+3.4)60}{(s+8.9)s(s+2)}$$

4) 校验系统的性能指标，如果系统不能满足要求指标，适当调整零、极点位置

通过此例可归纳出用根轨迹法设计超前校正装置的步骤为：

（1）根据要求的性能指标，确定希望主导极点的位置；

（2）绘制原系统根轨迹，如果根轨迹不能通过希望的闭环主导极点，则表明仅调整增益不能满足给定要求，需加校正装置。如果原系统根轨迹位于期望极点的右侧，则应串入超前校正装置；



3) 计算超前校正装置应提供的超前相角

$$\varphi_c = \pm(2k+1)\pi - \angle G_0(s_d)$$

(4) 按式求校正装置零、极点位置;

(5) 由幅值条件, 确定校正后系统增益;

(6) 校验系统的性能指标, 如果系统不能满足要求指标, 适当调整零、极点位置。如果需要大的静态误差系数, 则应采用其他方案。

## 6.4.2 串联滞后校正

当系统具有满意的动态特性，但其稳态性能不令人满意是时，校正的目的主要是为了增大开环增益，且不应使瞬态特性有明显的变化，故常采用滞后校正。

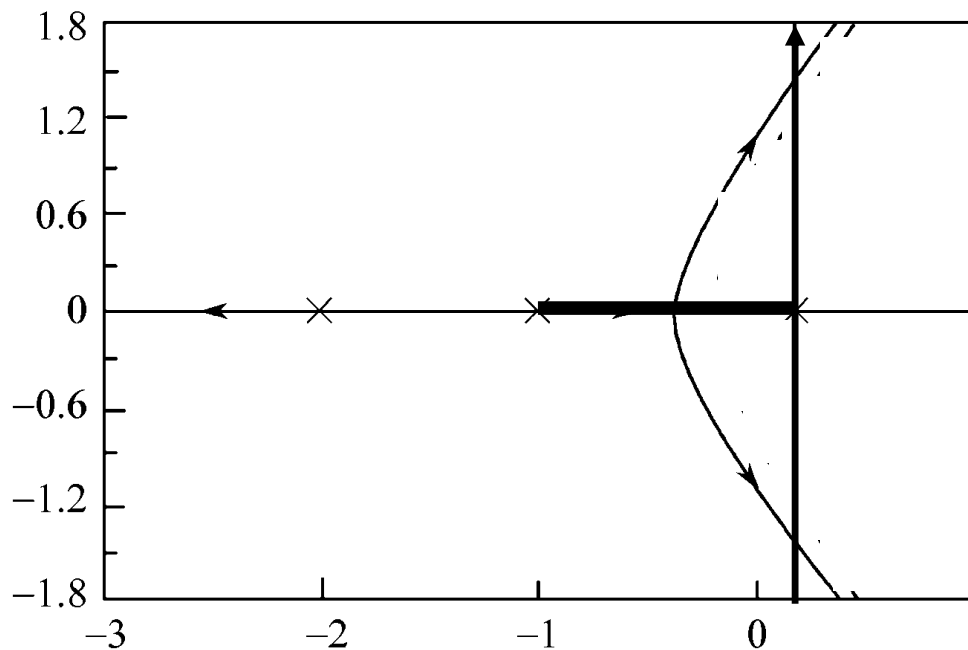
**例6-3** 已知单位反馈系统的开环传递函数

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

要求系统满足阻尼比 $\zeta=0.5$ ，无阻尼自然振荡频率

$\omega_n = 0.67 \text{ rad/s}$ ，静态速度误差系数  $K_v \geq 5 \text{ s}^{-1}$ ，  
试确定校正装置。

解 (1) 作出原系统根轨迹如图6-23所示。

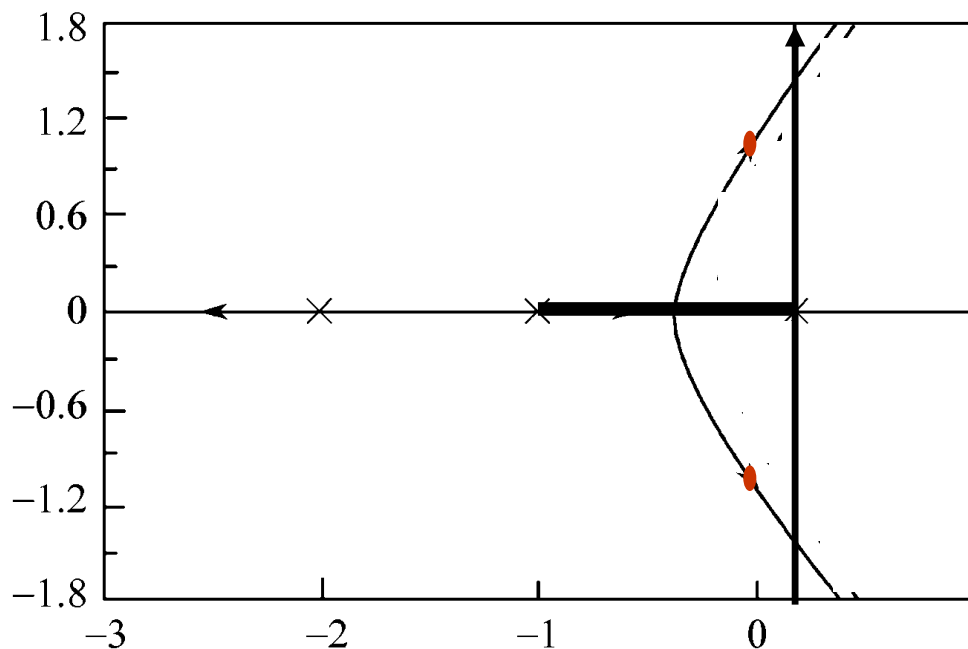


解 (1) 作出原系统根轨迹如图6-23所示。

(2) 求得希望的闭环极点

$$s_d = -0.33 \pm j0.58$$

其在根轨迹上，其系统动态特性满足要求。



解 (1) 作出原系统根轨迹如图6-23所示。

(2) 求得希望的闭环极点

$$s_d = -0.33 \pm j0.58$$

其在根轨迹上，其系统动态特性满足要求。

(3) 由幅值条件，确定原系统在希望极点上的增益

$$K = \left| s(s+1)(s+2) \right|_{s=s_d} = 1.06$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \Big|_{s=s_d} = 0.53$$

(4) 为满足静态速度误差系数  $K_v'=5$  的要求，采用滞后校正，计算

$$\beta = \frac{K_v'}{K_v} = \frac{5}{0.53} = 9.4$$

取

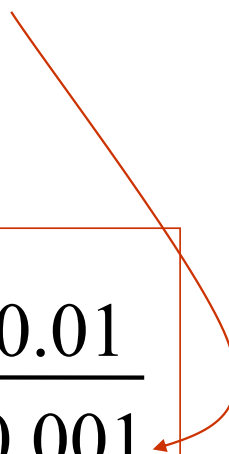
$$\beta = 10$$

不能太小

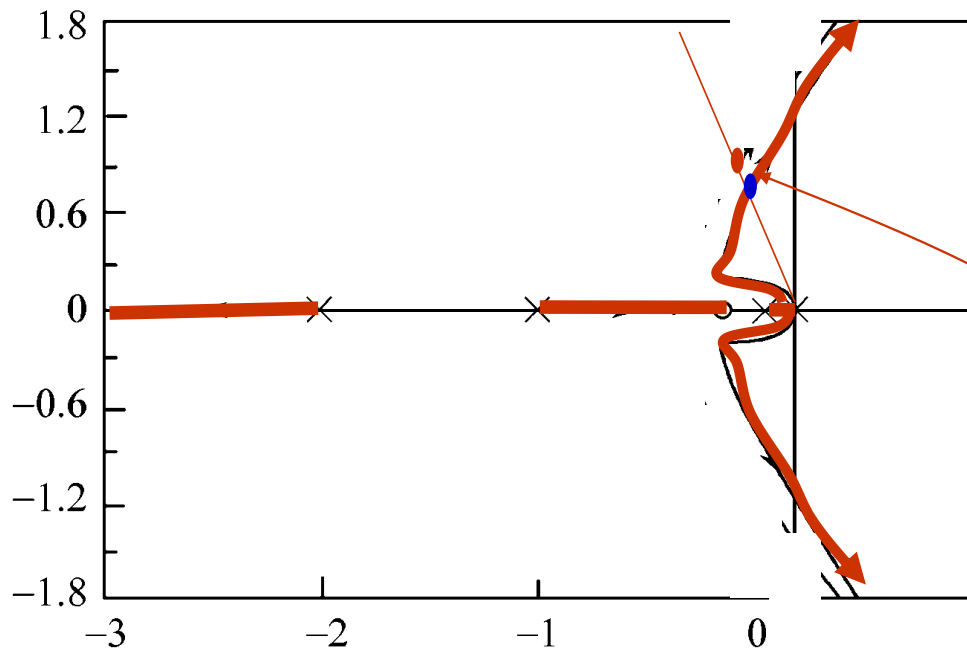
则滞后校正装置

$$G(s) = \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

或

$$G(s) = \frac{s + 0.01}{s + 0.001}$$


原则：当s很小时10倍，当s较大时影响较小



$$G(s) = \frac{10s + 1}{100s + 1} = 0.1 \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

(6) 校正后系统开环传递函数

$$G_c(s)G_0(s) = 0.1 \frac{K_c K (s + 0.1)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 0.01)}$$

$$K_v' = 5$$

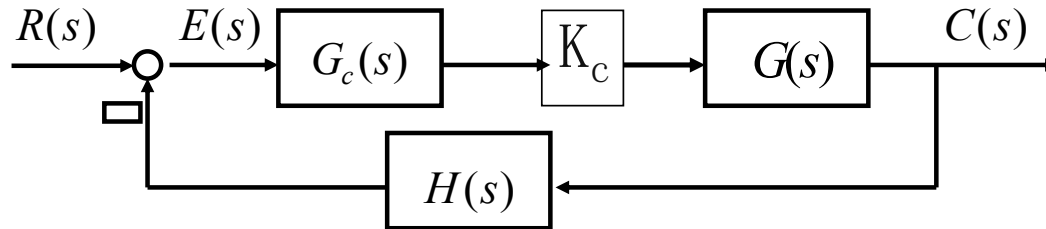
$$Kc \approx 10$$

$$K : 1.06 \cdots > 0.98$$

$$\text{新 } s_d = -0.25 \pm j0.51$$



## 7) 校验



$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 0.1 \frac{10 * 0.98(s + 0.1)}{s(s + 1)(s + 2)(s + 0.01)} = 4.9$$

滞后校正的设计步骤为：

- (1) 做出原系统的根轨迹；
- (2) 根据要求的瞬态响应指标，确定希望的闭环主导极点；
- (3) 由幅值条件，确定原系统在希望极点上的增益

- (4) 确定满足性能指标，而应增大的误差系数值；
- (5) 由应增大的误差系数值确定校正装置
- (6) 确定滞后校正装置的零、极点。原则是使零、极点靠近坐标原点，且二者相距倍；
- (7) 绘出校正后系统的根轨迹，并求出希望的主导极点，校验系统性能

(8) 由希望的闭环极点，根据幅值条件，适当调整放大器的增益；

(9) 校验校正后系统各项性能指标，如不满足要求，可适当调整校正装置零、极点。