大家好，我是刘晨阳，我汇报的是2号论文。我会尽力把我所了解到的知识和逻辑讲清楚，当然我个人能力有限，很多地方仍理解不到位，甚至可能错误，欢迎大家在我分享结束后进行指正。

下面，我将从背景介绍、关键理论、论文推导，模型验证四个方面汇报这篇论文。

本论文的题目是A convex optimization approach to synthesizing state feedback data-driven controllers for switched linear systems，我将他翻译为“切换线性系统数据驱动状态反馈控制器的凸优化综合方法”他最大的两个研究背景一个是切换线性系统一个是数据驱动控制。

我们先看切换线性系统。

首先引入混合动态系统概念。混合动态系统是既包含离散事件动态系统，又包含连续变量动态系统，且两者相互作用的系统。

切换系统就是一种典型的混合动态系统，他着重考虑离散切换事件对连续动态的影响。我们可以把一个切换系统分为子系统和切换信号两个部分。根据切换信号可将切换系统分为状态依赖切换和时间依赖切换两类。比如同一个小球，在上升和下降过程中的阻力方向是不一样的，应用不同的动态方程。这就是一个状态依赖切换系统。

最后如果每一个连续动态方程都是线性的，那该系统就是切换线性系统。

这里给出了线性切换系统每个子系统的数学描述。

目前的切换系统稳定性研究主要分为任意切换信号下稳定性研究和受限切换信号下稳定性研究两大方向，任意切换信号下的稳定性分析又有公共李雅普诺夫函数法和多李雅普诺夫函数法。因为切换系统的特殊性，即使每个子系统的李雅普诺夫函数存在，也不能保证整个系统能量的衰减。为此，对于多李雅普诺夫函数法，我们还需要保证切换后的李雅普诺夫函数值小于切换前的。

尽管对于切换系统的稳定性问题已经有了很多研究，但都局限于基于模型的方法。但实际情况下，很多复杂动态无法机理建模，且模型辨识也存在很大保守性。此论文的一个创新在于不显式使用系统模型，而直接采用数据驱动的方法，对切换非线性系统设计状态反馈控制器，使闭环系统稳定。

我们再关注数据驱动控制。

数据驱动控制就是仅利用受控系统的在线和离线数据设计控制器。由于现在系统越发复杂，难以建模并且可用数据和硬件水平大有提高，数据驱动控制收获了很大关注。但此前的数据驱动控制研究常依赖于数据无穷的假设，且只有一个将数据驱动控制应用于切换系统的研究。但该研究只适用于SISO系统，且没有给出闭环稳定证明。此论文的一个创新在于所设计数据驱动控制框架可以在数据有限且存在有限噪声的情况下应用于多输入多输出的切换线性系统。

总结下来，此论文的研究目标是建立一个易于计算的数据驱动状态反馈控制器设计框架。

它不需要模型辨识步骤，能直接根据模型结构和有限的、含有限噪声的工作点实验数据设计状态反馈控制器，并且该控制器可保证线性切换子系统任意切换下的稳定性。作者实现这个目标的思路是，通过稳定性判据及扩展Farkas’ lemma将切换线性系统镇定问题转化为多项式优化问题，再转化多项式优化问题为凸优化问题，最后用凸优化方法解决该问题，并进行简化。

为了方便流畅进行论文推导，我们先看下所需的关键理论。我先大致介绍这些理论的大致含义和在该论文中的作用，并在下一节的论文推导部分直接使用这些结论，来隐去细节，让我们的逻辑更加连贯。

首先是Kronecker积，用带叉号的圆圈表示。这是一种矩阵运算，相当于左矩阵的每个标量元素乘右矩阵，再将这些矩阵组合起来。如果A矩阵是mxn的，B矩阵是PXQ的，那他们做这个运算的结果就是MPXNQ的。这个运算有一个性质，也就是AXB的向量化就等于B的转置与A做kronecker积，再乘上X的向量化。这个性质将在论文推导过程中辅助改写两个凸集的表示形式，摆脱无穷范数的形式限制。

然后是切换线性系统的稳定性条件。此论文引用了另一篇论文的结论。这个论文指出，如果一个线性离散切换系统满足xk+1=aixk的形式，那么该系统渐近稳定的充要条件就是存在满秩矩阵V和相应大小的矩阵Hi，使得以下式子对于所有i成立。实际上，这篇论文的控制器设计就从假设闭环系统渐近稳定开始一步步反推出来的。

接着是扩展Farkas引理。这个引理给出了一个多面体包含另一个多面体的充要条件。也就是把两个多面体写成这个形式，一个线性的不等式。然后找到一个矩阵Y，使其能满足这个式子，并且不含非负元素。后面我们可以看到这篇论文的核心思想就是使闭环稳定集包含实验数据一致性集，这个引理就提供了一个多面体包含了另一个多面体的充要条件。需要注意的是，这里的多面体不是指几何上有很多面的物体，而是图论中的一个概念。在本文的语境下，多面体就是有限个超平面和半空间的集合，性质上是一个凸集。

最后我们看数学优化问题。数学优化问题可以分为有约束和无约束问题。无约束问题很简单，我们可以直接求导取极值。一个有约束的数学规划问题相对复杂，我们高数上学过拉格朗日法。一般有约束的数学优化可写成这种形式。包含一个需要最小化的目标函数以及m个不等式约束，p个等式约束。X存在的范围就是x的定义域，而定义域上x满足约束条件的范围叫做可行域。我们要找的最优值就是可行域下目标函数最小值。如果我们目标函数是要最大值的话，我们直接给他加个负号就也变成了这个标准形式。

其中凸优化是一种特殊的数学优化。他的基本形式不变，就是要求目标函数和所有不等式约束要是凸函数，等式约束要是仿射函数。要说什么是凸函数就必须介绍凸集，凸集定义就是一个集合，任取两点，这两点的加权平均仍是该集合的元素，那么这个集合就是凸集。凸函数就是，首先定义域要是凸集，并且函数的均值要大于等于均值的函数。

凸优化的特殊主要在于它具有局部最优等于全局最优的好性质，这点可以通过定义证明。而且凸优化已经有了较为成熟的求解方法。可以说，如果我们能把一个优化问题化为凸优化问题就可以认为它已经可以解决了。此论文最终就将镇定问题转换为了凸优化问题。

最后我们开始论文推导过程。

我们首先重述这篇论文要解决的问题。考虑一个线性切换系统形如式(14)，我们希望找到一个状态反馈矩阵Fi，形成一个闭环系统形如式(15),并且对于任意切换序列、任意符合实验观测数据的（A,B）矩阵对，原点都是这个闭环系统的全局渐近稳定平衡点。

此论文的核心思想就是让满足李雅普诺夫稳定的凸集包含住符合实验数据的凸集。

因此在最开始我们需要将这两个凸集表示出来，此处的集指的是AB矩阵对儿的集合。

首先我们看与实验数据符合的一致性集。我们根据系统模型以及存在噪声的假设，可以写出这样的集合P1。因为我们的实际系统是XK+1=AXK+BU+WK，wK是过程噪声，由于我们给噪声的限制是无穷范数小于1。所以我们集合的定义中也含有无穷范数的形式，这非常不利于进一步简化。此论文应用Kronecker积，将原来的凸集定义改写成了新的形式。新形势下，集合的元素是矩阵A的向量化，矩阵A的向量化的向量对儿。条件也从无穷范数条件，变成了线性不等式条件。我们可以看到它已经满足了扩展Farkas引理所需要的凸集定义形式。

然后我们看满足李雅普诺夫渐近稳定的凸集。我们把U=FX带入原系统，可以得到闭环系统的表达式。然后根据前面提到的充要条件，我们可以写出闭环反馈系统稳定条件，然后将他改写整理成一个式子。同样，我们应用Kronecker积，将原来的凸集定义改写成满足了扩展Farkas引理所需要的凸集定义形式。我们此时的问题就变成了找到满秩的V和F使得稳定条件得到满足，这就是作者提出的问题2。

两个集合都已经准备好，我们就可以把问题也就将我们的问题2转化成问题3了。也就是找到一个满秩矩阵V和矩阵Fi使得对于任意切换序列、任意符合实验观测数据的（A,B）矩阵对，不等式(19)都成立。或者说构建一个满足不等式(19)的集合(20)，使得该稳定集合包含一致性集合恒成立。其中 那慕达 是引入的一个中间变量，表示收敛的速度。

这个时候我们就可以应用扩展Farkas引理找到两个凸集的包含条件了。我们按照公式代入就可以得到状态反馈控制下系统稳定的充要条件。在这组公式下，我们的任务就是找到满秩矩阵V，使能满足这个引理的条件。值得注意的是，作者引入另一个符号矩阵，这个矩阵的每个元素要么为1要么为-1，这个矩阵后面还会用到。作者还进行了换元，引入了两个符号Z和斜F，可以简化方程组的形式。我们发现待求量V在几个约束中都不超过二次，因此是一个二次约束二次规划问题。到这里该问题已经接近于解决了。

但上面的方法中符号矩阵阶次太高，符号矩阵的阶次太高，考虑到每个元素都得考虑正负的情况，计算量会非常大，可在此处优化以降低复杂度。本文作者根据前人研究，引入新的中间变量miu实现巧妙转换，消除符号矩阵对时间复杂度的不利影响。作者对比了改进前后的时间复杂度，发现已经从2的4p次方乘上p的四次方变成了p的8次方，p就是系统矩阵的维数。

根据前面的结论，二次约束二次规划问题可以被转换为半正定规划问题，通过半正定松弛实现。对于解决半正定规划问题，本论文还加入了自适应的思想，以得到更好的结果。我们可以看到算法1最终的结果包含了V和斜FI，又因为斜FI等于FI乘上V的左逆，且V满秩，所以可以反解出Fi，也就完成了控制器设计。

在此基础上，该作者又应用这个系统的稀疏性进一步优化了算法。凸优化问题计算一般采用内点法，由于内点法的复杂度随着变量的数的三次方增大，而算法1中的M矩阵维数太高，实际复杂度仍然很大。作者将原问题映射为图优化问题，把待优化项作为顶点，把约束关系作为边，把含边的顶点集合称作团，其中不被其他团包含的团就叫极大团。以下两个团中，因为CI包含顶点多余Co，所以是极大团。根据这个极大团，又对约束函数和目标函数进行了优化，我们看到算法2中很多M都变成了Mi。最终，算法2的复杂度只随变量数线性增大。

最后本论文作者，验证了他的框架。他先随机生成了100个切换系统，通过设计系统矩阵的特征值使系统都有轻微的不稳定性，我们考虑4种不同强度的过程噪声加入到系统中，并对每个实验采集了120个样本，之后，我们引入用算法1、2设计控制器，得到了表1，表2两组数据。根据表1，我们知道算法1下，噪声越小，成果概率越大，根据表2，我们知道算法1下，采集样本越多，成功概率越大，还验证了，相同条件下，算法2比算法1更快，从55秒缩短到了49s。

我认为这篇论文很好地解决了线性切换系统中，如何设计数据驱动控制器的问题。但也有一定改进空间。首先他采用了离线的实验数据设计状态反馈矩阵，实际情况下，可能存在实验不充分的问题，导致在线数据可能与离线数据不符，是否可以结合下在线数据。其次，该框架下控制器并非每次设计都能成功，是否可以在松弛部分再做些处理。最后，控制器的成功率和噪声大小成反比，是否可以对噪声做更多处理，比如引入数据驱动的噪声观测器。

我的论文汇报到此结束，欢迎老师同学们批判指正。