

## ЗАНЯТИЕ 1: ТЕОРИЯ ГРАФОВ

### Вопросы:

1. Инцидентность вершин и ребер.
2. Смежность вершин и ребер.
3. Изолированная вершина.
4. Висячая вершина.
5. Мультиграф.
6. Псевдограф.
7. Пример матрицы смежности для графа  $G$ ,  $|V(G)| \geq 4$ : а) ориентированного, б) неориентированного.
8. Пример матрицы инцидентности для графа  $G$ ,  $|E(G)| \geq 5$ : а) ориентированного, б) неориентированного.
9. Симметричная дуга.
10. Направленный граф.
11. Лемма о рукопожатиях.
12. Подграф и надграф.
13. Объединение и пересечение графов.
14. Подразбиение ребра.
15. Отождествление вершин.
16. Стягивание ребра.
17. Регулярный граф, степень регулярности.
18. Хроматическое число.
19. Клика, кликовое число.
20. Изоморфизм графов.
21. Путь и замкнутый путь.
22. Цепь и цикл.
23. Простая цепь и простой цикл.
24. Связность (достижимость) вершин, компонента связности.
25. Сильная связность вершин, компонента сильной связности.

### Задание 1

Граф задан матрицей смежности

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$б) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

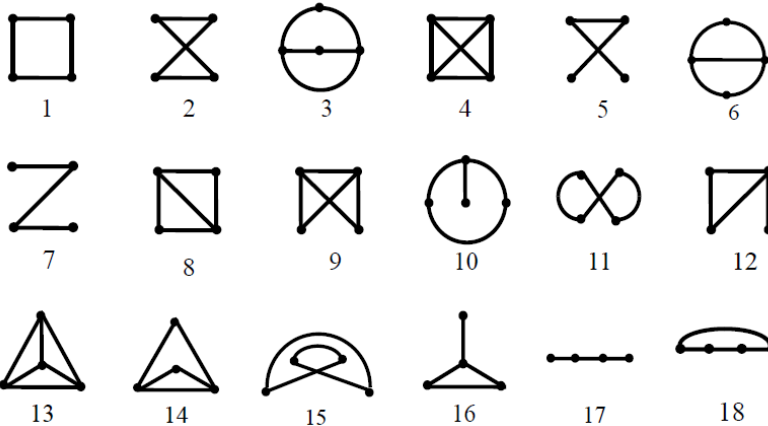
Нарисовать граф. Написать матрицу инцидентности.

Есть ли в нем висячие вершины и висячие ребра? Является ли он связным?

Ответить на те же вопросы для дополнительного графа.

### Задание 2

Разбить на классы эквивалентности по отношению изоморфности графов.



Предложите инварианты (или системы инвариантов) разделяющие данные классы.

### Задание 3

Найти граф  $G$  с минимальным числом вершин  $n > 1$  такой, что  $G$  и  $\bar{G}$  оба связны.

### Задание 4

Граф  $G$  называется самодополнительным, если  $G \cong \bar{G}$ . Найти все самодополнительные графы с числом вершин не превосходящим 6.

### Задание 5

В графе  $n$  вершин и  $m$  ребер. Сколько у него:

- а) частичных графов;
- б) подграфов;
- с) собственных подграфов.

### Задание 6

Граф задан матрицей инцидентности:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применить к графу операции:

- а) удаления ребра  $[1,4]$ ;
- б) удаления вершины 3;
- с) отождествления вершин 3 и 4;
- д) отождествления вершин 2 и 4;
- е) стягивания ребра  $[3,5]$ ;
- ф) подразбиения ребра  $[1,4]$  вершиной  $v$ .

Оценить изменения в матрице инцидентности, указать изменения в количестве вершин и ребер после применения операций.

### Задание 7

Докажите, что в каждом простом графе ( $n > 1$ ) найдутся  $u \neq v$ :  $\deg(u) = \deg(v)$ .

### Задание 8

При каких  $n$  существуют простые графы с  $n$  вершинами, каждая из которых имеет

- а) степень 3?
- б) степень 4?

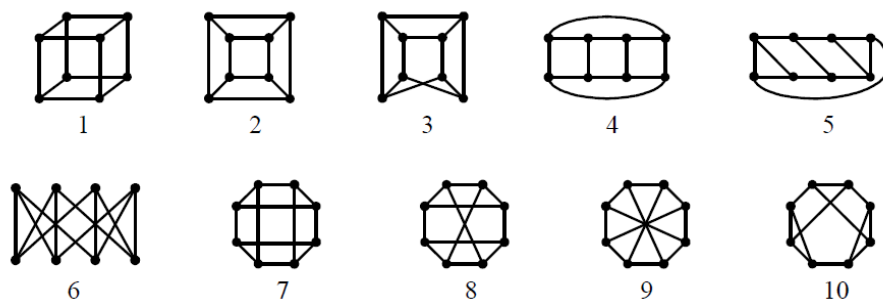
### Задание 9

Полагаем, что граф простой.

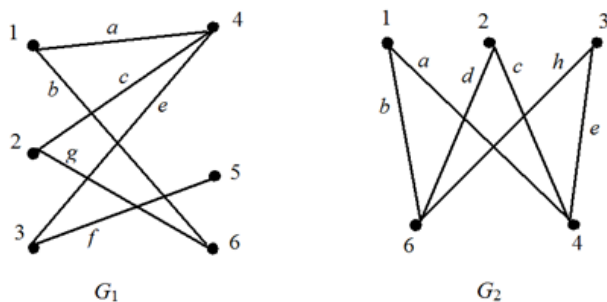
- а) Какое наименьшее число ребер может быть в связном графе с  $n$  вершинами?
- б) Какое наибольшее число ребер может быть в несвязном графе с  $n$  вершинами?
- в) Какое наименьшее число ребер может быть в графе с  $n$  вершинами и  $k$  компонентами связности?
- г) Какое наибольшее число ребер может быть в графе с  $n$  вершинами и  $k$  компонентами связности?
- д) Сколько компонент связности может быть в графе с 10 вершинами и 17 ребрами?
- е) Пусть  $\delta(G)$  — наименьшая из степеней вершин графа  $G$ , содержащего  $n$  вершин ( $n \geq 2$ ). Доказать, что если  $\delta(G) \geq (n-1)/2$ , то граф связен. Показать, что при  $\delta(G)$  равной целой части от  $(n-1)/2$  связность не гарантирована.

### Задание 10

Какие из графов являются двудольными?



### Задание 11



Найти граф  $G = G_1 \cup G_2$ ,  $P = G_1 \cap G_2$ . Написать матрицу смежности графа  $G$ .

### Задание 12

$P_n$  — граф — простая цепь с  $n$  вершинами.  $C_n$  — простой цикл с  $n$  вершинами.  
При каких  $n$ ,  $\overline{P_n}$  будет двудольным? При каких  $n$ ,  $\overline{C_n}$  будет двудольным?